Klausur zur Linearen Algebra
30.3.2009

Vorname ....

Name ....

Matrikel-Nr. ....

Aufgabe	1	2	3	4	5	Σ
erreichbare Punkte	10	10	10	10	10	40
erreichte Punkte						

Bitte füllen Sie dieses Deckblatt aus und geben Sie es zusammen mit Ihren Bearbeitungen der Klausuraufgaben ab!

Bitte schreiben Sie auf jedes Blatt Ihren Namen!
Es sind keine Hilfsmittel erlaubt.

Das Aufgabenblatt können Sie mitnehmen.

Die Aufgabe mit der geringsten Punktzahl fließt nicht in das Endergebnis ein. Somit beträgt die Maximalpunktzahl also 40 Punkte. Wenn Sie 15 Punkte erhalten, haben Sie die Klausur bestanden.

Viel Erfolg!

Lösungen zu Aufgabe 1

a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	h)	i)	j)

Aufgabe 1 Welche der folgenden Aussagen ist immer wahr (**w**) oder manchmal falsch (**f**)? Für jede richtige Antwort gibt es einen Punkt, für jede falsche Antwort wird ein Punkt abgezogen – aber man bekommt mindestens Null Punkt auf die Aufgabe als ganzes. *Sie dürfen sich enthalten.*

a) Seien X, Y zwei Mengen, wobei X endlich und Y unendlich ist. Dann gibt es eine injektive Abbildung von X nach Y.

b) "Teilbarkeit" auf $\mathbb{N}$ ist eine Äquivalenzrelation.

c) Sei $\leq$ eine vollständige Ordnungsrelation auf einer Menge X, und sei $x \in X$ ein maximales Element bez. $\leq$. Dann ist x auch ein größtes Element.

d) Seien G und H zwei endliche Gruppen mit $\#G < \#H$. Dann gibt es einen injektiven Homomorphismus von G nach H.

e) Sei K ein Körper und sei $f(X) \in K[X]$ nicht-konstant. Dann ist f genau dann irreduzibel, wenn es keine Nullstelle in K hat.

f) Sei K ein Körper. Dann ist $K^{2\times 2}$, der Ring der 2×2-Matrizen über K, nicht-kommutativ.

g) Sei K ein Körper und seien $A \in K^{m\times n}$ und $\underline{b} \in K^n$. Dann ist der Lösungsraum des LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ ein linearer Unterraum von K^n.

h) Sei K ein Körper und sei $A \in K^{m\times n}$ so dass die Spalten von A linear unabhängig sind. Dann hat das homogene LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0}$ nur die "triviale" Lösung $\underline{0}$.

i) Sei K ein Körper und sei $A \in K^{m\times n}$ $\mathrm{Rang}(A) < m$. Dann hat das homogene LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{0}$ eine "nicht-triviale" Lösung, d.h. eine Lösung $\neq \underline{0}$.

j) Sei K ein Körper und seien $A \in K^{m\times n}, \underline{b} \in K^n$ mit $\mathrm{Rang}(A) = \mathrm{Rang}(A|\underline{b})$. Dann ist das LGS $A \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix} = \underline{b}$ lösbar.

Aufgabe 2 Sei K ein Körper, und sei U die Menge der 2×2 "oberen Dreicksmatrizen". D.h.

$$U := \{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & c \end{pmatrix} \mid a, b, c \in K \} .$$

Zeigen Sie:

a) U ist ein Untermonoid von $(K^{2 \times 2}, \cdot)$

b) U ist ein Untervektorraum von des K-Vektorraums $K^{2 \times 2}$.

Aufgabe 3 Sei G eine additiv geschriebene abelsche Gruppe, und sei U eine Untergruppe von G. Wie in der Vorlesung definieren wir eine Relation auf G durch

$$x \sim y :\Longleftrightarrow x - y \in U .$$

Zeigen Sie *ohne Zuhilfenahme von Resultaten aus der Vorlesung*:

a) Die soeben definierte Relation ist eine Äquivalenzrelation

b) Sei wie in der Vorlesung $G_{/\sim_U}$ die Menge der Äquivalenzklassen, und sei zu $x \in G$ $[x]_U$ die Äquivalenzklasse zu x. Dann wird mittels $[x]_U + [y]_U := [x+y]_U$ eine Verknüpfung auf $G_{/\sim_U}$ definiert.

Aufgabe 4

a) Bestimmen Sie das (multiplikative) Inverse von $[43]_{59} \in \mathbb{Z}/59\mathbb{Z}$!

b) Bestimmen Sie jeweils den ggT der folgenden beiden Polynome f, g in $\mathbb{Q}[X]$ sowie in $\mathbb{F}_7[X]$!

$$f := X^3 + 4X + 2 \qquad g := X^2 + 2X + 4$$

Aufgabe 5 Wir betrachten für $a, b \in \mathbb{Q}$ das folgende inhomogene LGS über $\mathbb{Q}$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 3 & -2 & a \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ b \end{pmatrix}$$

Lösen Sie dieses LGS in Abhängigkeit von a und b!