Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

# KATEGORIENTHEORIE
## ÜBUNGSBLATT NR. 7
## DIE OPERATOREN $\mathcal{I}, \mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{P}$
## (ZUR VORBEREITUNG AUF DIE VORLESUNG AM 26.1.)

Wir fixieren eine Signatur $\sigma : I \longrightarrow \mathbb{N}_0$.

**Aufgabe 1.** Sei $(\mathbb{A}_j)_{j\in J}$ eine Familie algebraischer Strukturen mit Signatur $\sigma$, $\mathbb{A}_j = (A_j, (v_i^j)_{i\in I})$. Überlegen Sie sich:

a) Die Menge $\bigtimes_{j\in J} A_j$ ist mit den offensichtlichen komponentenweisen Verknüpfungen eine algebraische Struktur mit Signatur $\sigma$.

b) Wir bezeichnen die "$i$-te" Verknüpfung auf $\bigtimes_{j\in J} A_j$ mit $v_i$.

   Nun definieren die Projektionen $p_k : \bigtimes_{j\in J} A_j \longrightarrow A_k$ Morphismen $p_k : (\bigtimes_{j\in J} A_j, (v_i)_{i\in I}) \longrightarrow \mathbb{A}_k$.

c) Die algebraische Struktur $(\bigtimes_{j\in J} A_j, (v_i)_{i\in I})$ ist mit der Familie von Morpismen $(p_j)_{j\in J}$ ein Produkt von $(\mathbb{A}_j)_{j\in J}$ in $C_\sigma$.

**Definition.** Wir setzen
$$\prod_{j\in J} \mathbb{A}_j := (\bigtimes_{j\in J} A_j, (v_i)_{i\in I})$$
und nennen sowohl das Tupel $(\prod_{j\in J} \mathbb{A}_j, (p_j)_{j\in J})$ als auch das Objekt $\prod_{j\in j} \mathbb{A}_j$ alleine *das* Produkt der Familie $(\mathbb{A}_j)_{j\in J}$. (Im Folgenden ist mit *dem* Produkt das Objekt alleine gemeint.)

**Definition 1.** Wir definieren für eine Klasse algebraischer Strukturen $\mathcal{K}$ mit Signatur $\sigma$ (also $\mathcal{K} \subseteq \mathrm{ob}(C_\sigma)$) die folgenden Klassen algebraischer Strukturen mit Signatur $\sigma$:

- $\mathcal{I}(\mathcal{K})$ := Klasse der algebraischen Strukturen, die isomorph zu einer aus $\mathcal{K}$ sind,
- $\mathcal{H}(\mathcal{K})$ := Klasse der Bilder algebraischer Strukturen aus $\mathcal{K}$ unter beliebigen Morphismen,
- $\mathcal{S}(\mathcal{K})$ := Klasse der Unterstrukturen algebraischer Strukturen aus $\mathcal{K}$,
- $\mathcal{P}(\mathcal{K})$ := Klasse der Produkte von Systemen algebraischer Strukturen aus $\mathcal{K}$.

**Definition 2.** Nach Definition 1 haben wir für $\mathcal{I}, \mathcal{S}, \mathcal{H}, \mathcal{P}$ eine Zuordnung, die jeder Unterklasse von $C_\sigma$ eine Unterklasse von $C_\sigma$ zuordnet. (Siehe jedoch Aufgabe 4!) Statt von Zuordnungen sprechen wir nun von *Operatoren*.
Sei $O$ eine Komposition der Operatoren $\mathcal{I}, \mathcal{H}, \mathcal{S}, \mathcal{P}$ und sei $\mathcal{K}$ eine Klasse algebraischer Strukturen mit Signatur $\sigma$. Dann nennen wir $O(\mathcal{K})$ den *$O$-Abschluss* von $\mathcal{K}$. Wenn $O(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$ gilt, sagen wir, dass $\mathcal{K}$ *$O$-abgeschlossen* ist.

**Aufgabe 2.** Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse algebraischer Strukturen mit Signatur $\sigma$. Überlegen Sie sich:

a) $\mathcal{I}^2(\mathcal{K}) = \mathcal{I}(K)$

b) $\mathcal{I}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{H}(\mathcal{K})$

c) $\mathcal{S}\mathcal{I}(\mathcal{K}) = \mathcal{I}\mathcal{S}(\mathcal{K})$

d) $\mathcal{P}\mathcal{I}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{I}\mathcal{P}(\mathcal{K})$

e) $\mathcal{S}^2(\mathcal{K}) = \mathcal{S}(\mathcal{K})$

f) $\mathcal{P}\mathcal{S}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{K})$

g) $\mathcal{H}^2(\mathcal{K}) = \mathcal{H}(\mathcal{K})$

h) $\mathcal{S}\mathcal{H}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{H}\mathcal{S}(\mathcal{K})$

i) $\mathcal{P}\mathcal{H}(\mathcal{K}) \subseteq \mathcal{H}\mathcal{P}(\mathcal{K})$

**Aufgabe 3.** Sei weiterhin $\mathcal{K}$ eine Klasse algebraischer Strukturen mit Signatur $\sigma$. Überlegen Sie sich:

a) i) $\mathcal{I}\mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{K})$ ist unter $\mathcal{I}, \mathcal{S}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen.
   ii) Es ist genau dann $\mathcal{I}\mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ unter $\mathcal{I}, \mathcal{S}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen ist.

b) i) $\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{K})$ ist unter $\mathcal{H}, \mathcal{S}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen.
   ii) Es ist genau dann $\mathcal{H}\mathcal{S}\mathcal{P}(\mathcal{K}) = \mathcal{K}$, wenn $\mathcal{K}$ unter $\mathcal{H}, \mathcal{S}$ und $\mathcal{P}$ abgeschlossen ist.

**Aufgabe 4. (Wenn Sie wollen ...)**
In Definition 2 haben wir von "Zuordnungen" oder "Operatoren" gesprochen. (Darauf kommt es nicht an.) Das heißt, die Idee ist, dass wir für jedes $O$ wie in der Definition eine Zuordnung $\mathcal{K} \mapsto O(\mathcal{K})$ haben.
Überlegen Sie sich, ob und gegebenfalls wie das gerechtfertigt werden kann, wenn man innerhalb der NBG-Mengenlehre argumentiert.
Beachten Sie hierbei, dass wir in der Aussage implizit die Signatur fixiert haben. Wir wollen aber für alle Signaturen so einen Operator haben. Auch diese Variabilität muss gerechtfertigt werden.