

KATEGORIEN-THEORIE  
 ÜBUNGSBLATT NR. 6  
 (ZUR VERTIEFUNG UND  
 ZUR VORBEREITUNG AUF DIE VORLESUNG AM 5.1.)

**Lesen in Wikipedia** Nachdem wir Grundbegriffe und Grundresultate zur Kategorientheorie behandelt haben, sollten Sie sich in Wikipedia orientieren. Beachten Sie zunächst: Was wir *Kategorie* genannt haben, entspricht einer *lokal kleinen Kategorie* in Wikipedia. Ferner werden in Wikipedia kovariante Funktoren in der Regel einfach *Funktoren* genannt.

Für den aktuellen Stoff ist besonders der englischsprachige Artikel “representable functor” relevant, den Sie als Startpunkt nehmen können. Sie werden darin allerdings den Begriff “universal morphism” finden, den wir nicht behandelt haben. Ferner verweist “universal morphism” auf “universal property”, und wird dieser Ausdruck in einer Weise benutzt, die von der Benutzung in der Vorlesung abweicht.

Im Folgenden soll es darum gehen, den Zusammenhang zwischen den Konzepten in Wikipedia und denen der Vorlesung zu klären. Die grundlegende Definition ist:

**Definition** Es seien  $\mathcal{C}$  und  $\mathcal{D}$  Kategorien,  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$  ein kovarianter Funktor und  $X$  ein Objekt von  $\mathcal{D}$ .

Ein *universeller Morphismus von  $X$  nach  $\mathcal{F}$*  ist ein Paar  $(A, u)$ , wobei  $A$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und  $u : X \rightarrow \mathcal{F}(A)$  ist, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

Für alle Paare  $(B, f)$ , wobei  $B$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und  $f : X \rightarrow \mathcal{F}(B)$  ist, gibt es genau einen Morphismus  $h : A \rightarrow B$  mit  $\mathcal{F}(h) \circ u = f$ .

Symbolisch:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xrightarrow{u} & \mathcal{F}(A) & & A \\
 & \searrow f & \downarrow \mathcal{F}(h) & & \downarrow h \\
 & & \mathcal{F}(B) & & B
 \end{array}$$

Dual hierzu definiert man mit denselben Daten wie zuvor (also weiterhin für einen kovarianten (!) Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ):

Ein *universeller Morphismus von  $\mathcal{F}$  nach  $X$*  ist ein Paar  $(A, u)$ , wobei  $A$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und  $u : \mathcal{F}(A) \rightarrow X$  ist, so, welches die folgende Eigenschaft erfüllt:

Für alle Paare  $(B, f)$ , wobei  $B$  ein Objekt von  $\mathcal{C}$  und  $f : \mathcal{F}(B) \rightarrow X$  ist, gibt es genau einen Morphismus  $h : B \rightarrow A$  mit  $u \circ \mathcal{F}(h) = f$ .

Symbolisch:

$$\begin{array}{ccc}
 X & \xleftarrow{u} & \mathcal{F}(A) & & A \\
 & \swarrow f & \uparrow \mathcal{F}(h) & & \uparrow h \\
 & & \mathcal{F}(B) & & B
 \end{array}$$

In Wikipedia werden (nur) Eigenschaften wie in den Definitionen “universelle Eigenschaften” genannt. Dies führt zur ersten Aufgabe:

**Aufgabe 1.**

- a) Zeigen Sie, dass der Begriff der universellen Eigenschaft im obigen Sinne ein Spezialfall (Unterbegriff) des Begriffs der universellen Eigenschaft aus der Vorlesung ist.
- b) Zeigen Sie insbesondere, dass jeder universelle Morphismus auch ein universelles Element für einem geeigneten Funktor ist.

**Aufgabe 2.** In Wikipedia im Artikel “representable functor” steht im Abschnitt “universal elements”:

A universal element may be viewed as a universal morphism from the one-point set  $\{\bullet\}$  to the functor  $F$  or as an initial object in the category of elements of  $F$ .

- a) Die zweite Aussage (nach “or”) ist Ihnen doch klar, oder? Wenn nicht, dann schauen Sie nochmal nach ...
- b) Was hat es mit der ersten Aussage (vor “or”) auf sich? Ist sie überhaupt 100% richtig? Wenn nicht, wie ist sie zu verstehen? (Sie ist natürlich nicht 100% richtig, sonst würde ich die Frage nicht stellen, aber sie ist richtig, wenn man an der richtigen Stelle die offensichtliche “Identifizierung” vornimmt.)

**Aufgabe 3.** Im Artikel “universal property” werden für einen kovarianten Funktor  $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$  und ein Objekt  $X$  von  $\mathcal{D}$  die *Komma-Kategorien*  $X \downarrow \mathcal{F}$  und  $\mathcal{F} \downarrow X$  eingeführt. Überlegen Sie sich:

- a) Jede so definierte Komma-Kategorie ist auch eine Kategorie der Elemente zu einem geeigneten Funktor. (Der Begriff der Komma-Kategorie selbst ist allgemeiner, aber den allgemeinen Begriff brauchen wir nicht.)
- b) Jede Kategorie  $S \downarrow \mathcal{C}$  und  $\mathcal{C} \downarrow S$  aus §1 der Vorlesung ist eine Komma-Kategorie zu einem geeigneten Funktor wie soeben betrachtet.

Und abschließend:

**Aufgabe 4.** Jedes Produkt, jedes Koproduct und jedes freie Element auf einer Basismenge ist in offensichtlicher und “schöner” Weise ein universeller Morphismus. Führen Sie dies aus. Benutzen Sie dabei nicht die “triviale” Lösung, die sich mit Aufgabe 2 b) ergibt, d.h. benutzen Sie nicht den zweiten Teil des zitierten Satzes in Aufgabe 2 (was “geschummelt” wäre und – wie ich in Aufgabe 2b) geschrieben habe – auch nicht 100 % richtig).

Ich wünsche Ihnen  
FROHE WEIHNACHTEN UND EIN GUTES NEUES JAHR