Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

KATEGORIENTHEORIE
ÜBUNGSBLATT NR. 5 (NEUE VERSION)

Aufgabe 1. Es sei R ein kommutativer Ring und seien A und B R-Algebren.
Zeigen Sie:

a) Es gibt auf $A \otimes_R B$ eine eindeutige Multiplikation, die auf Elementartensoren (also Tensoren der Form $a \otimes b$ mit $a \in A, b \in B$) durch $(a \otimes b) \cdot (c \otimes d) = ac \otimes bd$ gegeben ist, und mit welcher $A \otimes_R B$ eine R-Algebra ist.

b) Wenn A und B kommutativ sind, ist die soeben definierte R-Algebra $A \otimes_R B$ ein Koprodukt von A und B in der Kategorie der kommutativen R-Algebren.

Hinweis. In a) sollten Sie die multilineare Abbildung

$$A \times B \times A \times B \longrightarrow A \otimes_R B \ , \ (a, b, c, d) \mapsto ac \otimes bd$$

betrachten.

Wir fixieren für das Folgende eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt S von $\mathcal{C}$.
Wir wiederholen eine Definition aus §1 der Vorlesung:

Definition Wir definieren wie folgt eine Kategorie:

- Objekte: Tupel (X, f), wobei $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ und $f : S \longrightarrow X$ ist.
- Morphismen: Ein Morphismus von (A, f) nach (B, g) ist ein Morphismus $h : A \longrightarrow B$ mit $h \circ f = g$.
- Kompositionen: von $\mathcal{C}$ induziert.

Wir nennen die Objekte der Kategorie *Objekte unter* S, die Morphisen *Morphismen unter* S. Die Kategorie nennen wir entsprechend die *Kategorie der Objekte unter* S; Bezeichnung: $S \downarrow \mathcal{C}$.
Analog definieren wir die *Kategorie der Objekte über* S, $\mathcal{C} \downarrow S$
In beiden Fällen nennen wir die Objekte S-*Objekte* und die Morphismen S-*Morphismen.*
Man schreibt für (X, f) auch X. Der Morphismus f heißt dann *Strukturmorphismus* von X. Wir benutzen im Folgenden die Schreibweise "$X = (X, f)$" aber nicht.

Beispiel Sei $\mathcal{C}om\mathcal{R}ing$ die Kategorie der kommutativen Ringe und R ein kommutativer Ring. Dann ist $R \downarrow \mathcal{C}om\mathcal{R}ing = R - \mathcal{C}om\mathcal{A}lg$, die Kategorie der kommutativen R-Algebren.
Beachten Sie, dass man eine R-Algebtra (A, φ), wobei A ein Ring und $\varphi : R \longrightarrow A$ ein Ringhomomorphismus ist, auch mit A bezeichnet; dies entspricht genau der Schreibweise "$X = (X, f)$".

Aufgabe 2. (Zur Einstimmung) In jeweils einer der beiden Kategorien $S \downarrow \mathcal{C}$ und $\mathcal{C} \downarrow S$ gibt es "kanonische" initiale oder terminale Elemente. Wie war das nochmal?

Definition Seien $q_X : X \longrightarrow S$ und $q_Y : Y \longrightarrow S$ Morphismen. Ein *Faserprodukt* von $(X, q_X), (Y, q_Y)$ *über* S ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $p_X : P \longrightarrow X$, $p_Y : P \longrightarrow Y$ so, dass $q_X \circ p_X = q_Y \circ p_Y$ gilt und für alle Objekte Z und alle Morphismen $f_X : Z \longrightarrow X$, $f_Y : Z \longrightarrow Y$ mit $q_X \circ f_X = q_Y \circ f_Y$ genau ein Morphismus $h : Z \longrightarrow P$ mit $p_X \circ h = f_X$, $p_Y \circ h = f_Y$ existiert.

$$
\begin{tikzcd}
& Z \arrow[d, dotted, "h"] \arrow[ddl, "f_X"'] \arrow[ddr, "f_Y"] & \\
& P \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X \arrow[dr, "q_X"'] & & Y \arrow[dl, "q_Y"] \\
& S &
\end{tikzcd}
$$

Wenn wir ein Faserprodukt $(P; p_X, p_Y)$ von (X, q_X) und (Y, q_Y) über S gewählt haben, setzen wir auch $X \times_{S; q_X, q_Y} Y := P$. Wenn die Morphismen "klar" sind, schreiben wir hierfür auch $X \times_S Y$.

Analog definieren wir Kofaserprodukte.

Bemerkung. In der Vorlesung hatten wir bei der Definition des Produktes die Morphismen $Z \longrightarrow X, Z \longrightarrow Y$ mit f, g bezeichnet. Da hier p_X, p_Y, q_X, q_Y gegeben sind, erschien mir f_X, f_Y besser.

Aufgabe 3. Argumentieren Sie: Ein Faserprodukt von (X, q_X) und (Y, q_Y) wie oben ist "fast dasselbe" wie ein Produkt von $(X, q_X), (Y, q_Y)$ in der Kategorie der Objekte über S, d.h. in $\mathcal{C} \downarrow S$. (Genauer: Wenn man das eine der beiden hat, erhält man in offensichtlicher Weise das andere. Es gibt einen "ganz kleinen" Unterschied zwischen diesen beiden.)

Eine analoge Aussage gilt dann (offensichtlich) auch für Kofaserprodukte und Koprodukte in der Kategorie der Objekte unter S, also in $S \downarrow \mathcal{C}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass in den folgenden Kategorien Faserprodukte wie oben existieren, d.h. zu jedem Objekt S und je zwei Daten (X, q_X), (Y, q_Y) wie oben existiert ein Faserprodukt: $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{G}rp$, $R - \mathcal{M}od$ für einen Ring R.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass in den folgenden Kategorien Kofaserprodukte wie oben definiert existieren, d.h. zu jedem Objekt S und je zwei Daten (X, q_X), (Y, q_Y) wie oben existiert ein Kofaserprodukt: $\mathcal{C}om\mathcal{R}ing$, $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{T}op$, $R - \mathcal{M}od$ für einen Ring R.

Hinweis zu Aufgabe 5. $\mathcal{C}om\mathcal{R}ing$ steht am Anfang, weil die Aussage hiermit mit Aufgabe 1 offensichtlich ist. Wenn Ihnen dies nicht so scheint, dann gehen Sie das ganze Blatt bis hierhin nochmal durch ...

Hinweis zu Aufgaben 4 und 5. Für alle angegebenen Kategorien gilt: Faserprodukte sind Unterstrukturen von Produkten, Kofaserprodukte sind Quotienten von Koprodukten. Bei Koprodukten müssen Sie "das Kleinste rausteilen, das man vernünftigerweise verwenden kann".