

KATEGORIEN THEORIE
ÜBUNGSBLATT NR. 4

Aufgabe 1. Seien \mathcal{C} und \mathcal{D} Kategorien und sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein kovarianter Funktor. Betrachten Sie die folgenden beiden Aussagen:

- i) \mathcal{F} ist voll, treu und essentiell surjektiv.
 - ii) Es gibt einen kovarianten Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \text{id}_{\mathcal{C}}$ und $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \text{id}_{\mathcal{D}}$.
- a) Beweisen Sie, dass Aussage ii) Aussage i) impliziert.
- b) Beweisen Sie nun, dass auch Aussage i) Aussage ii) impliziert – vorausgesetzt, dass für die Klasse der Objekte von \mathcal{D} und für die Klasse der Morphismen von \mathcal{D} ein geeignetes Auswahlaxiom gilt.

Aufgabe 2. Geben Sie Isomorphismen zwischen jeweils den folgenden beiden Funktoren an:

- i) $\text{Abb}(\{*\}, _)$ und $\text{id}_{\mathcal{E}ns}$.
- ii) $\text{Mor}_{\mathcal{T}op}(\{*\}, _)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : \mathcal{T}op \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$.
- iii) $\text{Mor}_{\mathcal{M}on}(\mathbb{N}_0, _)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : \mathcal{M}on \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$.
- iv) Für einen Ring R : $\text{Mor}_{R\text{-}\mathcal{M}od}(R, _)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : R\text{-}\mathcal{M}od \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$.

Geben Sie weitere Isomorphismen von Funktoren “dieser Art” an.

Aufgabe 3. Es sei eine Kategorie \mathcal{C} gegeben, in der es zu je zwei Objekten ein Produkt gibt.

Wenn wir im Folgenden für Objekte X und Y von \mathcal{C} “ $X \times Y$ ” schreiben, dann meinen wir ein fest gewähltes Objekt, welches zusammen mit fest gewählten Morphismen $X \times Y \rightarrow X$, $X \times Y \rightarrow Y$ ein Produkt ist. Beachten Sie, dass die Morphismen immer “mitgedacht” werden, auch wenn man sie nicht hinschreibt.

Produkte sind ja “im Wesentlichen” eindeutig; trotzdem muss man sie “wählen”. Wir brauchen für das Folgende kein Auswahlaxiom, da wir nur endlich viele Objekte betrachten.

Zeigen Sie:

- a) Für Objekte X, Y von \mathcal{C} ist $X \times Y \approx Y \times X$.
- b) In \mathcal{C} existieren beliebige endliche Produkte (d.h. Produkte endlich vieler Objekte).
- c) Für Objekte X, Y, Z von \mathcal{C} ist $(X \times Y) \times Z \approx X \times (Y \times Z)$.