Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

KATEGORIENTHEORIE
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Wir beschäftigen uns nun, wie angekündigt, mit Tensorprodukten.

Es sei im Folgenden R ein kommutativer Ring.

Zunächst nochmal die Definition eines Tensorprodukts zweier R-Moduln:

Definition Es seien M und N R-Moduln. Ein *Tensorprodukt* von M und N ist ein Tupel (P, β), wobei P ein R-Modul und $\beta : M \times N \longrightarrow P$ eine bilineare Abbildung ist, für welches die folgende *universelle Eigenschaft* gilt:

> Für alle Tupel (Q, γ), wobei Q ein R-Modul und $\gamma : M \times N \longrightarrow Q$ bilinear ist, gibt es genau eine lineare Abbildung $\varphi : P \longrightarrow Q$, mit welcher das Diagramm
>
> $$\begin{tikzcd} M \times N \arrow[d, "\beta"'] \arrow[dr, "\gamma"] & \\ P \arrow[r, "\varphi"] & Q \end{tikzcd}$$
>
> kommutiert.

Hinweis. Ein Tensorprodukt von M und N ist wirklich ein Tupel (P, β) wie angegeben, nicht nur ein R-Modul. Man kann aber den Fokus auf den Modul legen, indem man sagt: "P ist zusammen mit β ein Tensorprodukt von M und N."

Ich denke, das Folgende ist eine Wiederholung:

Definition. Es sei M eine Menge. Wir definieren:

$$R^{(M)} := \{\, (a_m)_{m \in M} \mid \text{Für fast alle } m \in M \text{ ist } a_m = 0 \,\}$$

("Für fast alle" heißt, wie aus der Analysis gewohnt: Für alle bis auf endlich viele.)

Dies ist ein Untermodul von R^M.

Wir setzen für $m \in M$: $e_m := (\delta_{m,n})_{n \in M}$. Hiermit ist $R^{(M)}$ ein freier R-Modul auf der Menge $\{e_m \mid m \in M\}$. (Wenn hier eine Unklarheit vorhanden ist, sollten Sie sich damit beschäftigen.)

Aufgabe

a) Es seien M und N R-Moduln. Formulieren Sie die folgende Aussage mathematisch exakt: Tensorprodukte zu M und N sind "im Wesentlichen" eindeutig. Zeigen Sie sie sodann.

b) Es seien m, n natürliche Zahlen. Zeigen Sie, dass der R-Modul $R^{m \times n}$ zusammen mit der bilinearen Abbildung $R^m \times R^n \longrightarrow R^{m \times n}$, die durch $(e_i, e_j) \longmapsto e_{i,j}$ gegeben ist, ein Tensorprodukt von R^m und R^n ist.

c) Es seien M und N Mengen. Zeigen Sie, dass der R-Modul $R^{(M \times N)}$ zusammen mit der bilinearen Abbildung $R^{(M)} \times R^{(N)} \longrightarrow R^{(M \times N)}$, die durch $(e_m, e_n) \longmapsto e_{m,n}$ gegeben ist, ein Tensorprodukt von $R^{(M)}$ und $R^{(M)}$ ist.

   Achtung. In a) sind M und N Moduln, hier sind es Mengen und die betrachteten Moduln sind $R^{(M)}$ und $R^{(N)}$.

d) Zeigen Sie, dass es zu je zwei Vektorräumen über demselben Körper stets ein Tensorprodukt gibt.

e) Es seien M und N R-Moduln. Wir setzen:

$$M \otimes N := R^{(M \times N)} / \langle \left\{ \begin{array}{c} e_{m_1+m_2,n} - e_{m_1,n} - e_{m_2,n}, \\ r \cdot e_{m,n} - e_{r \cdot m,n}, \\ e_{m,n_1+n_2} - e_{m,n_1} - e_{m,n_2}, \\ r \cdot e_{m,n} - e_{m,r \cdot n} \mid \\ r \in R,\ m, m_1, m_2 \in M,\ n, n_1, n_2 \in N \end{array} \right\} \rangle$$

   Ferner verwenden wir die folgende Notation: Die Restklasse eines Elementes $a \in R^{(M \times N)}$ in dem soeben definierten Modul $M \otimes N$ wird mit $\overline{a}$ bezeichnet, die Restklasse von $e_{m,n}$ mit $(m,n) \in M \times N$ wird mit $\overline{e}_{m,n}$ bezeichnet.

   Zeigen Sie, dass der so definierte Modul $M \otimes N$ zusammen mit der Abbildung $M \times N \longrightarrow M \otimes N,\ (m,n) \longmapsto \overline{e}_{m,n}$ ein Tensorprodukt von M und N ist.

   Definition. Wir nennen dieses Tensorprodukt von M und N *das* Tensorprodukt von M und N und verwenden die Produktschreibweise mit Symbol $\otimes$ für die Abbildung $M \times N \longrightarrow M \otimes N$, d.h. wir setzen für $m \in M, n \in N$: $m \otimes n := \overline{e}_{m,n}$.

f) Es seien wieder M und N R-Moduln und es sei (P, β) ein Tensorprodukt von M und N. Zeigen Sie, dass P vom Bild von β erzeugt wird.

g) Es seien M_1, M_2, N_1, N_2 R-Moduln und $\varphi : M_1 \longrightarrow M_2,\ \psi : N_1 \longrightarrow N_2$ lineare Abbildungen. Zeigen Sie, dass es eine eindeutige lineare Abbildung $\chi : M_1 \otimes N_1 \longrightarrow M_2 \otimes N_2$ mit $\chi(m \otimes n) = \varphi(m) \otimes \psi(n)$ für alle $m \in M$, $n \in N$ gibt.

   Hinweis. Benutzen Sie eine universelle Eigenschaft.

   Notation. Wir bezeichnen die so definierte Abbildung χ mit $\varphi \otimes \psi$.

h) Es sei M ein R-Modul und S eine kommutative R-Algebra. Zeigen Sie, dass $S \otimes_R M$ "in offensichtlicher Weise" zu einem S-Modul gemacht werden kann. (Das ist gar nicht so leicht ...)

i) Es sei weiterhin S eine kommutative R-Algebra. Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $M \longmapsto S \otimes_R M$ und $\varphi \longmapsto \mathrm{id}_S \otimes \varphi$ einen kovarianten Funktor von der Kategorie der R-Moduln zur Kategorie der S-Moduln definieren.