Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

KATEGORIENTHEORIE
ÜBUNGSBLATT NR. 2

Wir haben für jeden topologischen Raum X sein Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ definiert. Im Folgenden werden wir sehen, dass diese Zuordnung – wie man sagt – funktoriell ist. Das heißt, es gibt einen "offensichtlichen" Funktor von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der Gruppoide, welcher für Objekte, d.h. topologische Räume, durch $X \longmapsto \Pi(X)$ gegeben ist.

Wir wiederholen einige Sachverhalte von Übungsblatt 1 und legen Terminologie und Notationen fest:

Für die Definition des Fundamentalgruppoids eines toplogischen Raumes X benötigt man die Komposition normierter Wege, d.h. Wege auf dem Einheitsintervall $I = [0; 1]$:

Für normierte Wege v, w in X, wobei der Endpunkt von v gleich dem Anfangspunkt von w ist, ist die Komposition $w * v$ der normierte Weg, der durch

$$w * v(t) := \begin{cases} v(2t) & \text{für } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ w(2t-1) & \text{für } \frac{1}{2} < t \leq 1 \end{cases}$$

gegeben ist.

Wir verwenden im Folgenden die auf Übungsblatt 1 definierte Homotopie für normierte Wege relativ zu Anfangs- und Endpunkten. Die entsprechenden Äquivalenzklassen bezeichnen wir einfach als *Homotopieklassen*, anstatt als *relative Homotopieklassen*.

Die soeben definierte Komposition normierter Wege (mit passenden Anfangs- und Endpunkten) induziert, wie wir in Aufgabe 2 von Übungsblatt 1 gesehen haben, eine Komposition von Homotopieklassen normierter Wege (mit passenden Anfangs- und Endpunkten).

Wir legen als Notation fest: Homotopieklassen von Wegen bezeichen wir mit kleinen griechischen Buchstaben, z.B. $\alpha = [a]$.

Aufgabe 1. Es seien X und Y topologische Räume, $f : X \longrightarrow Y$ stetig.

a) Wir definieren eine Abbildung f_* von der Menge der normierten Wege in X zur Menge der normierten Wege auf Y mittels $f_*(w) := f \circ w$. Dies ist ein Spezialfall eines Beispiels aus der Vorlesung. Erläutern Sie dies.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung f_* eine Abbildung von der Menge der Homotopieklassen normierter Wege in X zur Menge der Homotopieklassen normierter Wege in Y induziert.

   Notation. Die so definierte Abbildung wird auch mit f_* bezeichnet. Wir haben somit für eine Homotopieklasse α normierter Wege in X die Homotopieklasse $f_*(\alpha)$ normierter Wege in Y.

c) Zeigen Sie, dass die Anwendung von f_* auf normierte Wege kompatibel mit der oben definierten Komposition ist. Zeigen Sie die analoge Aussage für Homotopieklassen normierter Wege.

Wir fahren nun der Einfachheit halber mit Fundamentalgruppen fort und definieren zunächst den *Fundamentalgruppenfunktor*, bevor wir den *Fundamentalgruppoidfunktor* definieren.
Grundlegend ist der Begriff des *punktierten Raumes*.

Definition. Ein *punktierter Raum* ist ein Tupel (X, x_0), wobei X ein topologischer Raum und $x_0 \in X$ ist. Für punktierte Räume (X, x_0) und (Y, y_0) ist ein *Morphismus punktierter Räume* von (X, x_0) nach (Y, y_0) eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ mit $f(x_0) = y_9$.

Aufgabe 2.

a) Zeigen Sie, dass die punktierten Räume mit den Morphismen punktierter Räume und der üblichen Komposition für Abbildungen eine Kategorie bilden.

b) Es sei $f : (X, x_0) \longrightarrow (Y, y_0)$ ein Morphismus punktierter Räume. Zeigen Sie, dass $f_* : \pi_1(X, x_0) \longrightarrow \pi_1(Y, y_0)$ ein Gruppenhomomorphismus ist.

c) Zeigen Sie, dass die Zuordnungen $(X, x_0) \longmapsto \pi_1(X, x_0)$, $f \longmapsto f_*$ einen Funktor von der Kategorie der punktierten Räume zur Kategorie der Gruppen definieren; dies ist der Fundamentalgruppenfunktor.

Aufgabe 3.

a) Es seien X und Y topologische Räume und $f : X \longrightarrow Y$ eine stetige Abbildung.

   Zeigen Sie: Die Abbildungen $f : X \longrightarrow Y$ und f_* aus Aufgabe 1b) definieren einen Morphismus von Gruppoiden von $\Pi(X)$ nach $\Pi(Y)$.

   Beachten Sie hier Folgendes: Ein Morphismus von Gruppoiden ist (per Definition) ein Funktor, und ein Funktor besteht aus zwei Zuordnungen. Dies sind hier zwei Abbildungen.

   Notation. Der soeben definierte Morphismus von $\Pi(X)$ nach $\Pi(Y)$ wird mit $\Pi(f)$ bezeichnet. Da wir hervorheben wollen, dass es sich um einen Morphismus von Gruppoiden handelt, schreiben wir $\Pi(f) : \Pi(X) \longrightarrow \Pi(Y)$ und nicht $\Pi(f) : \Pi(X) \rightsquigarrow \Pi(Y)$ entsprechend der allgemeinen Notation für Funktoren.

b) Zeigen Sie, dass man auf diese Weise einen Funktor Π von der Kategorie der topologischen Räume zur Kategorie der Gruppoide erhält; dies ist der Fundamentalgruppoidfunktor.