Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

KATEGORIENTHEORIE
ÜBUNGSBLATT NR. 1

Auf diesem Übungsblatt betrachten wir einige von kategorientheoretischen Standpunkt aus interessante Konstruktion in der Topologie.

Es sei X ein topologischer Raum.

Aufgabe 1. Unter einem *Weg* in X verstehen wir eine stetige Abbildung von einem abgeschlossenen Intervall nach X. Für einen Weg $w : [a, b] \longrightarrow X$ nennen wir $w(a)$ den *Anfangspunkt* und $w(b)$ den *Endpunkt* von w. Für $x_1, x_2 \in X$ nennen wir einen Weg in X mit Anfangspunkt x_1 und Endpunkt x_2 einen Weg *von* x_1 *nach* x_2.

a) Überlegen Sie sich, dass man wie folgt eine kleine Kategorie definieren kann:

- Objekte: Dies seien die Punkte von X.
- Morphismen: Für Punkte x_1, x_2 von X seien die Morphismen von x_1 nach x_2 die Wege w in X von x_1 anch x_2 definiert auf Intervallen $[0, a]$, $a \geq 0$.
- Komposition: Für Punkte x_1, x_2, x_3 von X, einen Weg $v : [0, a] \longrightarrow X$ von x_1 nach x_2 und einen Weg $w : [0, b] \longrightarrow X$ von x_2 nach x_3 sei die Komposition $w * v$ der Weg definiert auf dem Intervall $[0; a + b]$ mit:

$$w * v(t) = \begin{cases} v(t) & \text{für } 0 \leq t \leq a \\ w(t-a) & \text{für } a \leq t \leq a+b \end{cases}$$

b) Formulieren Sie dieses Beispiel mit der von mir vorgeschlagenen Alternativen Termologie für kleine Kategorien im Sinne eines „verallgemeinerten Monoids“.

c) Geben Sie große Beispielsklassen topologischer Räume an, für die so definierte Kategorie kein Gruppoid ist.

Wir definieren nun das sogenannte *Fundamentalgruppoid* $\Pi(X)$ des topologischen Raumes X, das in der algebraischen Topologie eine zentrale Rolle einnimmt. Hierfür betrachten wir *normierte Wege* in X, das sind Wege in X definiert auf dem *Einheitsintervall* $I := [0; 1]$.

Aufgabe 2. Seien $x_1, x_2 \in X$. Seien w und v normierte Wege in X von x_1 nach x_2. Eine *Homotopie von w nach v relativ zu Anfangs- und Endpunkten der Wege* ist eine stetige Abbildung

$$H : I \times I \longrightarrow X$$

mit

$$H(0, \_) = v \quad , \quad H(1, \_) = w$$

$$H(i, 0) = x_0 \quad , \quad H(i, 1) = x_1 \quad \text{für alle } i \in I \;.$$

a) Zeigen Sie, dass die Relation „es gibt eine Homotopie von ... nach ... relativ zu Anfangs- und Endpunkten“ eine Äquivalenzrelation auf der Menge der normierten Wege in X ist.

Hiermit legen wir fest: Wenn es eine Homotopie von v nach w gibt, dann sagen wir: v und w sind *(relativ) homotope Wege*; Bez.: $v \simeq w$. Die Äquivalenzklassen nennen wir *(relative) Homotopieklassen normierter Wege* in X.
Wir wollen nun wie folgt eine kleine Kategorie $\Pi(X)$ definieren:

- Die Objekte seien die Punkte von X.
- Für $x_1, x_2 \in X$ seien die Morphismen von x_1 nach x_2 die Homotopieklassen normierter Wege in X.
- Die Komposition soll analog zur zuvor definierten Kategorie definiert sein, allerdings für Homotopieklassen.

b) Zeigen Sie, dass man somit in der Tat eine kleine Kategorie erhält.

c) Zeigen Sie, dass die kleine Kategorie $\Pi(X)$ ein Gruppoid ist.

d) Sei $x_0 \in X$. Die *Fundamentalgruppe* von X zum *Basispunkt* x_0, $\pi_1(X, x_0)$, ist die Menge der Homotopieklassen normierter Wege von x_0 nach x_0 mit der angegebenen Komposition. Wie kann man diese mit kategorientheoretischen Begriffen aus dem Fundamentalgruppoid $\Pi(X)$ erhalten?

Aufgabe 3. In der ersten Aufgabe haben wir Wege auf Intervallen der Form $[0; a]$ für $a \geq 0$ benutzt, in der zweiten Aufage normierte Wege, d.h. Wege auf dem Intervall $I = [0; 1]$.

a) Gehen wir von Wegen auf Intervallen der Form $[0; a]$ für $a \geq 0$ aus. Kann man dann "im Wesentlichen" auch das Beispiel in Aufgabe 2 erhalten?

b) Gehen wir nun von normierten Wegen aus. Überlegen Sie sich: Wenn wir die Konstruktion in Aufgabe 1 einfach auf normierte Wege übertragen, erhalten wir für große Beispielklassen keine Kategorie. Was geht schief? (Es ist mehreres.)

c) Gehen wir weiterhin von normierten Wegen aus. Gibt es eine Möglichkeit für eine Modifikation der ersten Konstruktion, ohne gleich bei der zweiten „zu landen"? Kann man eine Äquivalenzrelation verwenden, die schwächer als die verwendete mittels Homotopie ist? (Hier ist Kreativität gefragt.)

Für eine prägeordnete Menge ist ein kleines Element dasselbe wie ein initiales Element in der entsprechenden kleinen Kategorie. Deshalb ist dies für uns interessant. Hier sind relevante Beispiele in der mengentheoretischen Topologie:

Aufgabe 4.

a) Es sei S eine Menge von Teilmengen von X. Zeigen Sie auf zwei Arten, dass es eine kleinste, d.h. gröbste, Topologie auf X gibt, die S umfasst: erstens mittels einer „allgemeinen, abstrakten Konstruktion", zweitens mittels einer „expliziten Konstruktion".

b) Es sei Y eine Menge, $f : X \longrightarrow Y$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es auf Y eine größte, d.h. feinste, Topologie gibt, bezüglich welcher f stetig ist.

c) Es sei U eine Menge, $f : U \longrightarrow X$ eine Abbildung. Zeigen Sie, dass es auf U eine kleinste, d.h. gröbste, Topologie gibt, bezüglich welcher f stetig ist.