

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE ÜBUNGSBLATT NR. 5

Am Freitag den 19.11. fallen Vorlesung und Übung aus!

Aufgabe 1. Beschäftigen Sie sich mit Aufgabe 1 von Übungsblatt 4.

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie. Es seien für eine Indexmenge I Familien von Objekten $(X_i)_{i \in I}$ und $(Y_i)_{i \in I}$ aus $\mathcal{C}$ gegeben. Wir nehmen an, dass es zu den beiden Familien von Objekten jeweils Produkte gibt. Wir fixieren solche Produkte $(\prod_{i \in I} X_i, (p_{X,i})_{i \in I})$ und $(\prod_{i \in I} Y_i, (p_{Y,i})_{i \in I})$.

Sei nun weiterhin eine Familie von Morphismen $(f_i : X_i \rightarrow Y_i)_{i \in I}$ in $\mathcal{C}$ gegeben. Zeigen Sie, dass diese Familie einen Morphismus von $\prod_{i \in I} X_i$ nach $\prod_{i \in I} Y_i$ induziert. (Dieser Morphismus wird mit $\times_{i \in I} f_i$ bezeichnet, für $i = \{1, \dots, n\}$ mit $f_1 \times \dots \times f_n$.)

Aufgabe 3. Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie.

- a) Zeigen Sie, dass in der Funktorkategorie $\mathcal{E}ns^{\mathcal{C}}$ beliebige Produkte existieren.
- b) Es sei nun $\mathcal{D}$ eine weitere Kategorie. Zeigen Sie: Wenn in $\mathcal{D}$ endliche Produkte existieren, dann auch in $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$, wenn in $\mathcal{D}$ beliebige Produkte existieren, dann auch in $\mathcal{D}^{\mathcal{C}}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie das *Yoneda-Lemma* für kovariante Funktoren, also diese Aussagen:

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie, $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ ein kovarianter Funktor, $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Dann gilt:

- i) Für $a \in \mathcal{F}(A)$ wird wie folgt eine natürliche Transformation $\Phi_a : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \mathcal{F}$ definiert:

$$(\Phi_a)_T : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, T) \rightarrow \mathcal{F}(T), \quad f \mapsto \mathcal{F}(f)(a)$$

- ii) Es ist hierbei $a = (\Phi_a)_A(\text{id}_A)$.

- iii) Für eine natürliche Transformation $\Phi : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -) \rightarrow \mathcal{F}$ ist mit $a := \Phi_A(\text{id}_A)$ $\Phi = \Phi_a$.

Zusammenfassend:

Die natürlichen Transformationen von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ nach $\mathcal{F}$ stehen in Bijektion zu den Elementen von $\mathcal{F}(A)$. In diesem Sinne sagt man auch, dass sie auch eine Menge bilden. (Wie das axiomatisch gerechtfertigt werden kann, ist eine andere Frage.) Diese "Menge" werde mit $\text{NatTrans}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -), \mathcal{F})$ bezeichnet. Wir haben dann zueinander inverse Bijektionen

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{F}(A) & \xrightleftharpoons{\quad} & \text{NatTrans}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -), \mathcal{F}) \\ a & \longmapsto & \Phi_a \\ \Phi_A(\text{id}_A) & \longleftarrow & \Phi \end{array}$$