Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 4

Aufgabe 1. Geben Sie Isomorphismen zwischen jeweils den folgenden beiden Funktoren an:

i) $\mathrm{Abb}(\{*\}, \_)$ und $\mathrm{id}_{\mathcal{E}ns}$.

ii) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{T}op}(\{*\}, \_)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : \mathcal{T}op \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

iii) $\mathrm{Mor}_{\mathcal{M}on}(\mathbb{N}_0, \_)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : \mathcal{M}on \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

iv) $\mathrm{Mor}_{R-\mathcal{M}od}(R, \_)$ und dem Vergissfunktor $\mathcal{V} : R - \mathcal{M}od \longrightarrow \mathcal{E}ns$.

Geben Sie weitere Isomorphismen von Funktoren "dieser Art" an.

Wir fixieren für das Folgende eine Kategorie $\mathcal{C}$ und ein Objekt S von $\mathcal{C}$.

Definition Wir definieren wie folgt eine Kategorie:

- Objekte: Tupel (X, f), wobei $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$, $f : S \longrightarrow X$.
- Morphismen: Ein Morphismus von (A, f) nach (B, g) ist ein Morphismus $h : A \longrightarrow B$ mit $h \circ f = g$.
- Kompositionen: von $\mathcal{C}$ induziert.

Wir nennen die Objekte der Kategorie *Objekte unter* S, die Morphisen *Morphismen unter* S. Die Kategorie nennen wir entsprechend die *Kategorie der Objekte unter* S; Bezeichnung: $S \downarrow \mathcal{C}$.
Analog definieren wir die *Kategorie der Objekte über* S, $\mathcal{C} \downarrow S$
In beiden Fällen nennen wir die Objekte S*-Objekte* und die Morphismen S*-Morphismen*.
Man schreibt für (X, f) auch X. Der Morphismus f heißt dann *Strukturmorphismus* von X.

Beispiel Sei $\mathcal{C}om\mathcal{R}ing$ die Kategorie der kommutativen Ringe und R ein kommutativer Ring. Dann ist $R \downarrow \mathcal{C}om\mathcal{R}ing = R - \mathcal{C}om\mathcal{A}lg$, die Kategorie der kommutativen R-Algebren.

Aufgabe 2. Geben Sie in $S \downarrow \mathcal{C}$ ein initiales Element und in $\mathcal{C} \downarrow S$ ein terminales Element an.

Definition Seien $q_X : X \longrightarrow S$ und $q_Y : Y \longrightarrow S$ Morphismen. Ein *Faserprodukt* von $(X, q_X), (Y, q_Y)$ *über* S ist ein Objekt P zusammen mit Morphismen $p_X : P \longrightarrow X$, $p_Y : P \longrightarrow Y$ so, dass $q_X \circ p_X = q_Y \circ p_Y$ gilt und für alle Objekte Z und alle Morphismen $f_X : Z \longrightarrow X$, $f_Y : Z \longrightarrow Y$ mit $q_X \circ f_X = q_Y \circ f_Y$ genau ein Morphismus $h : Z \longrightarrow P$ mit $p_X \circ h = f_X$, $p_Y \circ h = f_Y$ existiert.

$$\begin{tikzcd}
& Z \arrow[ddl, "f_X"'] \arrow[ddr, "f_Y"] \arrow[d, dotted, "h"] & \\
& P \arrow[dl, "p_X"] \arrow[dr, "p_Y"'] & \\
X \arrow[dr, "q_X"'] & & Y \arrow[dl, "q_Y"] \\
& S &
\end{tikzcd}$$

Wenn wir zu (X, q_X) (Y, q_Y) eim Faserprodukt über S gewählt haben, schreiben wir hierfür auch $X \times_{S;q_X,q_Y} Y := P$. Wenn die Morphismen "klar" sind, schreiben wir hierfür auch $X \times_S Y$.

Analog definieren wir Kofaserprodukte.

Aufgabe 3. Argumentieren Sie: Ein Faserprodukt von (X, q_X) und (Y, q_Y) wie oben ist "fast dasselbe" wie ein Produkt von $(X, q_X), (Y, q_Y)$ in der Kategorie der Objekte über S, d.h. in $\mathcal{C} \downarrow S$. (Genauer: Wenn man das eine der beiden hat, erhält man in offensichtlicher Weise das andere. Es gibt einen "ganz kleinen" Unterschied zwischen diesen beiden.)

Eine analoge Aussage gilt dann (offensichtlich) auch für Kofaserprodukte und Koprodukte in der Kategorie der Objekte unter S, also in $S \downarrow \mathcal{C}$.

Aufgabe 4. Zeigen Sie, dass in den folgenden Kategorien Faserprodukte von je zwei Objekten existieren: $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{T}op$, $\mathcal{G}rp$, $R - \mathcal{M}od$ für einen Ring R.

Aufgabe 5. Zeigen Sie, dass in den folgenden Kategorien Kofaserprodukte von je zwei Objekten existieren: $\mathcal{E}ns$, $\mathcal{T}op$, $R - \mathcal{M}od$ für einen Ring R, $\mathcal{G}rp$.

Hinweis. Für alle Kategorien in Aufgaben 4 und 5 gilt: Faserprodukte sind Unterstrukturen von Produkten, Kofaserprodukte sind Quotienten von Koprodukten. Bei Gruppen müssen Sie "das Kleinste rausteilen", das Sie vernünftigerweise verwenden können.