Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 2

Definition Wir fixieren eine Kategorie. Die folgenden Definitionen beziehen sich auf diese feste Kategorie.

- Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt *Monomorphismus* (oder einfach *mono*), falls für alle Morphismen $e_1, e_2 : X \longrightarrow A$ (mit beliebigem X) gilt: Wenn $f \circ e_1 = f \circ e_2$ ist, dann ist $e_1 = e_2$.
- Ein Morphismus $f : A \longrightarrow B$ heißt *Epimorphismus* (oder einfach *epi*), falls für alle Morphismen $g_1, g_2 : B \longrightarrow C$ (mit beliebigem C) gilt: Wenn $g_1 \circ f = g_2 \circ f$ ist, dann ist $g_1 = g_2$.

Aufgabe 1

a) Wir fixieren weiterhin eine Kategorie $\mathcal{C}$. Es sei $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus. Zeigen Sie:

  - Wenn es einen Morphismus $g : B \longrightarrow A$ mit $g \circ f = \mathrm{id}_A$ gibt, dann ist f ein Monomorphismus.

  - Wenn es einen Morphismus $e : B \longrightarrow A$ mit $f \circ e = \mathrm{id}_B$ gibt, dann ist f ein Epimorphismus.

b) Es sei nun ein kovarianter Funktor $\mathcal{V} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ fixiert, der auf den Morphismenmengen injektiv ist – dies nennt man einen *treuen* Funktor. (Die Bezeichnung "$\mathcal{V}$" deutet darauf hin, dass man sich diesen Funktor als Vergissfunktor vorstellen sollte.) Es sei wiederum $f : A \longrightarrow B$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Wir sagen, dass f *injektiv* bzw. *surjektiv* (bzgl. $\mathcal{V}$) ist, falls $\mathcal{V}(f) : \mathcal{V}(A) \longrightarrow \mathcal{V}(B)$ injektiv bzw. surjektiv ist.

  Zeigen Sie: Wenn f injektiv ist, dann ist f ein Monomorphismus, und wenn f surjektiv ist, dann ist f ein Epimorphismus.

c) Es sei R ein Ring. Zeigen Sie: In der Kategorie $R-\mathcal{M}od$ sind Monomorphismen stets injektiv und Epimorphismen stets surjektiv.

d) Zeigen Sie: In der Kategorie der Ringe ist der (eindeutige) Homomorphismus $\mathbb{Z} \longrightarrow \mathbb{Q}$ ein Epimorphismus.

Aufgabe 2 Zeigen Sie: Es gibt keinen kovarianten Funktor von der Kategorie der Gruppen in die Kategorie der Gruppen, der jede Gruppe auf ihr Zentrum abbildet. (Wir machen keine Voraussetzung daran, wie die Homomorphismen abgebildet werden.)

Definition Es sei $G = (G, \cdot)$ ein Gruppe und X eine Menge. Eine *Gruppenoperation* von G auf X ist eine Abbildung $\circ : G \times X \longrightarrow X$ derart, dass das Folgende gilt:

- $\forall x \in X : e \circ x = x$
- $\forall g, h \in G \; \forall x \in X : g \circ (h \circ x) = (g \cdot h) \circ x$

Eine Gruppenoperation von G auf X heißt auch eine *G-Operation*. Ein Tupel bestehend aus einer Menge X zusammen mit einer Gruppenoperation von G auf X heißt eine *G-Menge*.

Wenn $(X, \circ)$ eine G-Menge ist, bezeichnen wir – wie z.B. auch bei Gruppen üblich – $(X, \circ)$ mit X und $\circ$ mit $\circ_X$. Mit dieser Notation ist somit $X = (X, \circ_X)$.

Seien X und Y zwei G-Mengen. Ein *Homomorphismus von G-Mengen* von X nach Y ist eine Abbildung $F : X \longrightarrow Y$ derart, dass für alle $g \in G$ und alle $x \in X$ gilt: $g \circ_Y F(x) = F(g \circ_X x)$.

Aufgabe 3

Sei G eine Gruppe.

a) Zeigen Sie, dass die G-Mengen mit den angegebenen Homomorphismen und offensichtlichen Verknüpfungen eine Kategorie bilden!

b) Es sei X eine Menge, $\mathrm{Sym}(X)$ die symmetrische Gruppe auf X. Ein Homomorphismus $G \longrightarrow \mathrm{Sym}(X)$ heißt eine *Darstellung* von G auf X. Zeigen Sie, dass es eine "offensichtliche" Bijektion zwischen der Menge der G-Operationen auf X und der Menge der Darstellungen von G auf X gibt!

c) Eine *Darstellung* von G ist ein Tupel (X, σ), wobei X eine Menge und σ eine Darstellung von G auf X ist. Wie sollte (möglichst elegant) man den Begriff eines *Homomorphismus von Darstellungen von G* definieren, damit jeder Homomorphismus von G-Mengen genau einem Homomorphismus von Darstellungen von G entspricht und umgekehrt?

d) Überlegen Sie sich: Die Darstellungen von G bilden (mit geeigneten Verknüpfungen) eine Kategorie, welche isomorph zur Kategorie der G-Mengen ist.

e) Den Begriff der *Darstellung* einer Gruppe kann man verallgemeiern. Von der Verallgemeinerung aus, die wir hier einführen, haben wir in c) *mengentheoretische Darstellungen* definiert.

   Es sei hierzu zusätzlich eine beliebige Kategorie $\mathcal{C}$ fixiert. Was sollte dann eine *Darstellung* von G auf einem Objekt von $\mathcal{C}$ sein? Was sollte ein Momorphismus von Darstellungen von G auf Objekten aus $\mathcal{C}$ sein? Was sollte die Kategorie der Darstellungen von G auf Objekten von $\mathcal{C}$ sein?