Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 13

Aufgabe 1. Sei G ein Gruppoid mit Labelmenge A. In der Vorlesung haben wir gezeigt, dass G-Mengen den Darstellungen R von G mit $R(a) \cap R(b) = \emptyset$ für $a \neq b$ entsprechen. Zeigen Sie, dass hierbei die Morphismen von G-Mengen den natürlichen Transformationen entsprechen.

Aufgabe 2. Sei G eine Gruppe und $H \leq G$ eine Untergruppe. Wir können nun jeder Darstellung (X, φ) von G durch Einschränkung eine Darstellung von H zuordnen. Die so erhaltene Darstellung heißt die *Restriktion* von (X, φ) bezüglich H. Entsprechend kann man für G-Mengen verfahren. Analoges gilt auch für Morphismen. Wir erhalten einen Funktor von der Kategorie der Darstellungen von G in die Kategorie der Darstellungen von H und einen Funktor von der Kategorie der G-Mengen in die Kategorie der H-Mengen. (Das ist nur die Einleitung. Es ist zu leicht, um eine Übungsaufgabe zu sein.)
Die Aufgabe ist nun:

a) Entwickeln Sie etwas Analoges für Gruppoide und Untergruppoide.

b) Wenden Sie Ihre Definitionen wie folgt an: Zeigen Sie, dass für Raumpaare (B, A) gilt:

   i) Wir haben einen induzierten kovarianten Funktor $\Pi(B) - \mathcal{E}ns \rightsquigarrow \Pi(A) - \mathcal{E}ns$.

   ii) Hiermit ist das Diagramm

$$\begin{tikzcd} \mathcal{C}ov(B) \arrow[r, rightsquigarrow] \arrow[d, rightsquigarrow] & \Pi(B) - \mathcal{E}ns \arrow[d, rightsquigarrow] \\ \mathcal{C}ov(A) \arrow[r, rightsquigarrow] & \Pi(A) - \mathcal{E}ns \end{tikzcd} ,$$

   wobei links der Pullback-Funktor für $\iota : B \hookrightarrow A$ steht, kommutativ.

Beachten Sie hier: Da wir hier Pullbacks zur Inklusion $\iota : A \hookrightarrow B$ betrachten, kann man für eine Überlagerung (X, p) von B für den Pullback auf A setzen: $(p^{-1}(A), p_{|p^{-1}(A)})$.
Wenn Sie ganz mutig sind, können Sie die ganze Aufgabe auch auf Homomorphismen von Gruppoiden und auf stetige Abbildungen zwischen topologischen Räumen verallgemeinern.

Aufgabe 3. Sei B ein lokal wegzusammenhängender und semi-lokal einfach zusammenhängender Raum.

Schließen Sie den Beweis der folgenden zentralen Aussage ab:

Der Faserungsfunktor

$$\mathcal{F} : \mathcal{C}ov(X) \rightsquigarrow \Pi(B) - \mathcal{E}ns$$

ist ein Isomorphismus von Kategorien.

Wir haben hierzu in der Vorlesung gezeigt:

- Der Funktor ist voll treu.
- Wir haben eine Zuordnung $G : ob(\Pi(B) - \mathcal{E}ns) \longrightarrow ob(\mathcal{C}ov(B))$, die die unterliegenden Mengen der Objekte (die Mengen der "Punkte") invariant (unverändert) lässt, und für die gilt: $\mathcal{F}(G(X)) = X$ für alle $\Pi(B)$-Mengen X.

Aufgabe 4. Wiederholen Sie die Galoistheorie für endliche Körpererweiterungen und studieren Sie die Galoistheorie für unendliche Körpererweiterungen, letzteres anhand des Buches Bosch: Algebra.