

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 11

Aufgabe 1. Zeigen Sie, dass es Summen $P\#T$ und $P\#K$ gibt, die homöomorph zueinander sind.

Aufgabe 2. Eine Gruppe der Form $\langle s_1, \dots, s_m \mid r_1, \dots, r_n \rangle$ nennen wir eine *endlich dargestellte Gruppe*. Zeigen Sie, dass jede solche Gruppe isomorph zur Fundamentalgruppe eines punktierten topologischen Raumes ist.

Aufgabe 3. Bekanntlich haben wir die Überlagerung $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$. Überlegen Sie sich, dass die Einschränkung hiervon auf $(0, \infty)$ keine Überlagerung ist.

Definition. Für zwei topologische Räume X und Y heißt eine stetige Abbildung $f : X \longrightarrow Y$ ein *lokaler Homöomorphismus*, wenn jeder Punkt aus X eine offene Umgebung U in X hat mit

- i) $f(U)$ ist offen in Y
- ii) $f|_U : U \longrightarrow f(U)$ ist ein Homöomorphismus.

Aufgabe 4. Es seien X und Y kompakte Hausdorff-Räume und es sei $f : X \rightarrow Y$ ein lokaler Homöomorphismus. Zeigen Sie: f ist eine Überlagerung mit endlichen Fasern.

Aufgabe 5. Geben Sie ein Beispiel für einen surjektiven lokalen Homöomorphismus an, der keine Überlagerung ist.

Aufgabe 6. Es sei $p : X \rightarrow Y$ eine Überlagerung. Beweisen oder widerlegen Sie:

- a) Ist Y kompakt, so auch X .
- b) Ist X kompakt, so auch Y .
- c) Ist Y ein Hausdorff-Raum, so auch X .
- d) Ist X ein Hausdorff-Raum, so auch Y .