Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 8

Aufgabe 1. (Bis morgen) Zeigen Sie, dass die Kleinsche Fläche (gegeben durch die Anhefteabbildung, die dem Wort $aba^{-1}b$ entspricht) eine Summe von $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ mit $\mathbb{P}^2(\mathbb{R})$ ist.

Aufgabe 2. (Bis morgen) Eine Gruppe der Form $\langle\, s_1, \ldots, s_m \mid r_1, \ldots, r_n \,\rangle$ nennen wir eine *endlich dargestellte Gruppe*. Zeigen Sie, dass jede solche Gruppe isomorph zur Fundamentalgruppe eines punktierten topologischen Raumes ist.

Aufgabe 3. Bekanntlich haben wir die Überlagerung $\mathbb{R} \longrightarrow S^1$, $t \mapsto e^{2\pi it}$. Überlegen Sie sich, dass die Einschränkung hiervon auf $(0, \infty)$ keine Überlagerung ist.

Aufgabe 4. Es seien X und Y kompakte Hausdorff-Räume und es sei $f : X \to Y$ ein lokaler Homöomorphismus, d.h. zu jedem $x \in X$ gibt es eine Umgebung U von x, welche unter f homöomorph auf ihr Bild abgebildet wird. Zeigen Sie: f ist eine Überlagerung mit endlichen Fasern.

Aufgabe 5. Geben Sie ein Beispiel für einen surjektiven lolaken Homöomorphismus an, der keine Überlagerung ist.

Aufgabe 6. Es sei $p : X \to Y$ eine Überlagung. Beweisen oder widerlegen Sie:

a) Ist Y kompakt, so auch X.

b) Ist X kompakt, so auch Y.

c) Ist Y ein Hausdorff-Raum, so auch X.

d) Ist X ein Hausdorff-Raum, so auch Y.