Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 6

Auf diesem Blatt beweisen wir den Satz von Seifert und van Kampen mittels des Satzes über Fundamentalgruppoide aus der Vorlesung. Der Beweis ist fast vollständig kategorientheoretisch, und es ist sinnvoll, hier in einem weiteren Bogen einige kategorientheoretische Begriffe einzuführen.
Wir gehen dies dann am Montag durch.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Definition Eine *Unterkategorie* von $\mathcal{C}$ ist eine Kategorie, deren Objekte und Morphismen auch Objekte und Morphismen von $\mathcal{C}$ sind.
Eine *volle Unterkategorie* von $\mathcal{C}$ ist eine Unterkategorie $\mathcal{C}'$ von $\mathcal{C}$ mit: Für alle $A, B \in$ ob$(\mathcal{C})$ ist $\mathrm{Mor}_{\mathcal{C}'}(A,B) = \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B)$.

Definition Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ ein Funktor. Dann ist $\mathcal{F}$

- *voll*, falls für alle $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(B))$ injektiv ist,
- *getreu*,[1] falls für alle $A, B \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ die Abbildung $\mathcal{F} : \mathrm{Mor}_{\mathcal{C}}(A,B) \to \mathrm{Mor}_{\mathcal{D}}(\mathcal{F}(A), \mathcal{F}(\mathcal{B}))$ surjektiv ist,
- *essentiell surjektiv*, falls für alle $Y \in \mathrm{ob}(\mathcal{D})$ ein $X \in \mathrm{ob}(\mathcal{C})$ mit $\mathcal{F}(X) \approx Y$ existiert.

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{D}$ kovariant. Zeigen Sie:

a) Wenn es einen Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ mit $\mathcal{G} \circ \mathcal{F} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$, $\mathcal{F} \circ \mathcal{G} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{D}}$ gibt (wobei "$\approx$" für Isomorphie von Funktoren steht (Stichwort: Natürliche Transformationen)), dann ist $\mathcal{F}$ eine Äquivalenz von Kategorien.

b) Es sei $\mathcal{F}$ eine Äquivalenz von Kategorien. Wenn nun $\mathcal{D}$ klein ist, gibt es einen Funktor $\mathcal{G} : \mathcal{D} \rightsquigarrow \mathcal{C}$ wie in a).

Aufgabe 2. Es sei $\mathcal{C}$ eine kleine Kategorie, $\mathcal{C}'$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$, es sei $\mathcal{I} : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$ der Inklusionsfunktor.
Überlegen Sie sich, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) $\mathcal{C}'$ ist eine volle Unterkategorie von $\mathcal{C}$ und jedes Objekt aus $\mathcal{C}'$ ist zu einem aus $\mathcal{C}$ isomorph.

ii) $\mathcal{I}$ ist eine Äquivalenz von Kategorien

iii) Es gibt einen Funktor $\mathcal{R} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{C}'$ mit $\mathcal{R} \circ \mathcal{I} = \mathrm{id}_{\mathcal{C}'}$, $\mathcal{I} \circ \mathcal{R} \approx \mathrm{id}_{\mathcal{C}}$.

[1] Dieses schöne Wort ist von Ihrer Kommilitonen Anna Juliane Rämisch; üblich ist *treu*.

Definition Ein Funktor wie in iii) heißt *Retraktion* von $\mathcal{I}$. Hierfür kann von einem Funktor $\mathcal{I} : \mathcal{C}' \rightsquigarrow \mathcal{C}$ ausgegangen werden, wobei $\mathcal{C}'$ nicht notwendigerweise eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist. (Es ist dann aber $\mathcal{I}$ getreu und man kann – den Begriff der Unterkategorie verallgemeinernd – sagen, dass das Tupel $(\mathcal{C}', \mathcal{I})$ eine Unterkategorie von $\mathcal{C}$ ist.) Wenn es so ein $\mathcal{R}$ gibt, heißt $\mathcal{C}'$ (oder auch $(\mathcal{C}', \mathcal{I})$) *Retrakt* von $\mathcal{C}$.

Aufgabe 3. Es sei X ein topologischer Raum mit einem Retrakt $A \subseteq X$; es sei ι die Inklusion und $r : X \to A$ eine Retraktion. Was folgt dann, wenn wir den Fundamentalgruppoidfunktor anwenden?

Definition Es sei X ein topologischer Raum, $A \subseteq X$. Das Fundamentalgruppoid auf der *Basispunktmenge* A sei die volle Unterkategorie von $\Pi(X)$ mit Objekten (=Punkten) in A. Dies wird $\pi_1(X, A)$ oder $\Pi_A(X)$ bezeichnet.
(Achtung: $\pi_1(X; x_1, x_2)$ ist eine Menge von Homotopieklassen, aber $\pi_1(X, \{x_1, x_2\})$ ist ein Gruppoid.)

Aufgabe 4. Es sei wiederum X ein topologischer Raum und $A \subseteq X$. Überlegen Sie sich: $\pi_1(X, A)$ ist genau dann ein Retrakt von $\Pi(X)$, wenn A jede Wegzusammenhangskomponente von X trifft. Wie ist dann explizit ein Retrakt gegeben?

Aufgabe 5. Es sei X ein topologischer Raum, der von offenen Unterräumen U und V überdeckt wird. Ferner sei A eine Teilmenge von X, welche jede Wegzusammenhangskomponente von $U \cap V, U$ und V treffe. Zeigen Sie, dass das Diagramm von Gruppoiden

$$\begin{tikzcd} \pi_1(U \cap V, A \cap (U \cap V)) \arrow[r] \arrow[d] & \pi_1(U, A \cap U) \arrow[d] \\ \pi_1(V, A \cap V) \arrow[r] & \pi_1(X, A) \end{tikzcd}$$

(mit den offensichtlichen Homomorphismen) kokartesisch ist.

Hinweis. Sie sollten den Begriff des Retrakts verwenden und hiermit direkt die universelle Eigenschaft nachrechnen.

Aufgabe 6. Beweisen Sie den Satz von Seifert und van Kampen.

Hinweis. Dies ist eine relativ einfache, aber keine vollkommen triviale Folgerung aus dem obigen Satz. Es muss noch gezeigt werden, dass es von jedem Punkt einen Weg zum Basispunkt gibt.

Bemerkung. Die Aussge in Aufgabe 5 wurde von Ronald Brown bewiesen. Im englischsprachigen wikipedia-Artikel zum Satz von Seifert und van Kampen finden Sie weitere Informationen hierzu.

Noch eine Aufgabe bis Mittwoch:

Aufgabe 7. Es seien (X, x_0), (Y, y_0) punktierte topologische Räume.
Zeigen Sie: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$\pi_1(X \times Y, (x_0, y_0)) \simeq \pi_1(X, x_0) \times \pi_1(Y, y_0) \ .$$

Versuchen Sie auch, das "kanonisch" auch durch "natürlich" zu ersetzen und dabei genau hinzuschreiben, was das bedeuten sollte. (Stichwort ist wieder Natürliche Transformation)