ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 5

In diesem Übungsblatt geht es nur um Kategorientheorie. Aufgabe 1 ist eine Fortsetzung der Vorlesung und ist auch inhaltlich relevant.

Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie.

Aufgabe 1. Es sei $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ ein kovarianter Funktor und $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$.

a) Es sei $a \in \mathcal{F}(A)$. Dann definieren die Abbildungen

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, X) \longrightarrow \mathcal{F}(X), f \mapsto \mathcal{F}(f)(a)$$

eine natürliche Transformation Φ_a vom Funktor $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ zum Funktor $\mathcal{F}$.

b) Die natürliche Transformation Φ_a ist durch $\text{id}_A \mapsto a$ eindeutig bestimmt.

c) Jede natürliche Transformation von $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -)$ nach $\mathcal{F}$ ist durch (genau) ein $a \in \mathcal{F}(A)$ auf die in a) beschriebene Weise gegeben.

d) Die Zuordnung

$$\mathcal{F}(A) \longrightarrow \text{NatTrans}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(A, -), \mathcal{F}), a \mapsto \Phi_a$$

ist eine Bijektion.

e) Das Tupel (A, a) ist genau dann ein universelles Element von $\mathcal{F}$, wenn Φ_a ein Isomorphismus von Funktoren ist.

f) Es sei nun $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ ein kontravarianter Funktor und wieder $A \in \text{ob}(\mathcal{C})$. Wir haben nun analog zu a) eine natürliche Transformation Φ_a vom Funktor $\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, A)$ zum Funktor $\mathcal{F}$. Formulieren Sie dies und übertragen Sie die Aussagen auf diese Situation.

Definition und Bemerkung Es sei A ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\mathcal{F} : \mathcal{C} \rightsquigarrow \mathcal{E}ns$ kovariant. (Natürlich kann man das variieren.)

Wenn es einen Isomorphismus von Funktoren $\text{Mor}_{\mathcal{C}} \longrightarrow \mathcal{F}$ gibt, heißt A *darstellendes Objekt* von $\mathcal{F}$. Mit d) sehen wir: Darstellende Objekte von $\mathcal{F}$ und universelle Objekte von $\mathcal{F}$ sind dasselbe.

Aufgabe 2. Es seien X und Y Objekte von $\mathcal{C}$. Zeigen Sie:

a) Sei $f : X \longrightarrow Y$ ein Morphismus. Dann sind die Abbildungen $(f_*)_Z : \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, X) \longrightarrow \text{Mor}_{\mathcal{C}}(Z, Y), g \mapsto f \circ g$ natürlich in Z .

b) Nach a) haben wir die Zuordnung

$$\text{Mor}_{\mathcal{C}}(X, Y) \longrightarrow \text{NatTrans}(\text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, X), \text{Mor}_{\mathcal{C}}(-, Y)), f \mapsto f_*.$$

Hier ist f_* die natürliche Transformation, die durch $Z \mapsto (f_*)_Z$ gegeben ist. Zeigen Sie, dass diese Abbildung eine Bijektion ist.

Bemerkung. Normalerweise schreibt man f_* für $(f_*)_Z$. Hier ist die verwendete Notation aber hilfreich.

Aufgabe 3. Wir nehmen an, dass in $\mathcal{C}$ endliche Koprodukte existieren. Sei ferner $\mathcal{V} : \mathcal{C} \rightarrow \mathcal{E}ns$ ein Funktor und seien X und Y disjunkte Mengen. Wir nehmen an, dass in $\mathcal{C}$ bezüglich $\mathcal{V}$ freie Elemente zu den Mengen X und Y existieren; seien F^X und F^Y entsprechende Objekte. Zeigen Sie: $F^X \sqcup F^Y$ ist frei auf $X \dot{\cup} Y$. Hierbei ist noch die universelle Abbildung $X \dot{\cup} Y \rightarrow \mathcal{V}(F^X \sqcup F^Y)$ geeignet zu wählen.

Wir studieren nun Produkte und Faserprodukte. Hierfür verwenden wir auch Objekte über einem Objekt S . Diese Objekte nennen wir *S-Objekte*, die entsprechenden Morphismen *S-Morphismen*. Wir verwenden diese Notation: Wenn $X = (A, f)$ ein *S-Objekt* ist, setzen wir $\pi_X := f$ und bezeichnen "das unterliegende Objekt" A auch mit X , d.h. $X = (X, \pi_X)$.

Aufgabe 4. a) Wir nehmen an, dass in $\mathcal{C}$ endliche Produkte existieren. Seien nun $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow W$ zwei Morphismen in $\mathcal{C}$. Wir fixieren Produkte $(X \times Y, (p_X, p_Y))$ und $(Z \times W, (p_Z, p_W))$. Wie sollte man dann definieren, was man unter dem Morphismus $f \times g : X \times Y \rightarrow Z \times W$ versteht? (In $\mathcal{E}ns$ sollte dies mit der bekannten Abbildung übereinstimmen.)

b) Es sei nun $S \in \mathcal{C}$. Wir nehmen an, dass in $\mathcal{C}$ endliche Faserprodukte über S existieren. Analog zu a) fixieren wir nun Faserprodukte. Seien nun $f : X \rightarrow Z, g : Y \rightarrow W$ zwei *S-Morphismen*. Dann haben wir einen induzierten *S-Morphismus* $f \times_S g : X \times_S Y \rightarrow Z \times_S W$. Wie sollte man diesen definieren?

c) Es sei $f : T \rightarrow S$ ein Morphismus in $\mathcal{C}$. Wir nehmen weiterhin an, dass in $\mathcal{C}$ endliche Faserprodukte über S existieren. Wenn nun X ein *S-Objekt* ist, haben wir ein Faserprodukt von X und (T, f) , sagen wir $(X \times_S T, p_X, p_T)$. Nun ist $(X \times_S T, p_T)$ ein *T-Objekt*.

i) Geben Sie eine universelle Eigenschaft an, welche das *T-Objekt* $(X \times_S T, p_T)$ erfüllt und somit bis auf eindeutige Isomorphie auch beschreibt. Geben Sie den entsprechenden Funktor von $\mathcal{C} \downarrow T$ nach $\mathcal{E}ns$ an.

ii) Wir wählen nun zu jedem *S-Objekt* X ein Faserprodukt mit (T, f) und erhalten jeweils ein *T-Objekt* $(X \times_S T, p_T)$. Geben Sie einen kovarianten Funktor von $\mathcal{C} \downarrow S$ nach $\mathcal{C} \downarrow T$ an, der auf Objekten durch $X \mapsto (X \times_S T, p_T)$ definiert ist.

Bemerkung. Die Auswahl in c) ii) ist eine nicht-triviale Angelegenheit. Man benötigt vielleicht ein geeignetes Auswahlaxiom. Dies ignorieren wir hier.

Aufgabe 5. Wir nehmen an, dass in $\mathcal{C}$ endliche Faserprodukte existieren. Seien nun X, Y *S-Objekte* und sei Z ein *Y-Objekt*. Zeigen Sie: Es gibt einen kanonischen Isomorphismus

$$X \times_S Z \simeq (X \times_S Y) \times_Y Z .$$

Bemerkung. Die Aussage ist eigentlich: Wenn man Faserprodukte wählt (was insbesondere auch bedeutet, dass man die universellen Morphismen wählt), dann gibt es diesen kanonischen Isomorphismus.