Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 4

Definition Es sei X ein topologischer Raum. Die Menge der Wegzusammenhangskomponenten wird mit $\pi_0(X)$ bezeichnet.

Aufgabe 1. Geben Sie einen separierten topologischen Raum an, der zusammenhängend aber nicht wegzusammenhängend ist.

Definition Es sei X ein topologischer Raum. Eine stetige Abbildung $S^1 \to X$ nennt man auch eine *(freie) Schleife* in X. Für $x_0 \in X$ ist dann eine *(punktierte) Schleife* in (X, x_0) eine Schleife in X mit $1 \mapsto x_0$. Die Menge der Schleifen in (X, x_0) bildet den Menge der Punkte des *Schleifenraums*. Diesen statten wir mit der kompakt-offen Topologie aus.

Aufgabe 2. Es sei X eine Mannigfaltigkeit. Zeigen Sie: $\pi_1(X, x_0) = \pi_0(\Omega(X, x_0))$ als Menge.

In den folgenden Aufgaben studieren wir, für einen topologischen Raum X, den Zusammenhang zwischen Homotopieklassen von Wegen in X (was immer bedeutet, dass Homotopie relativ zu ∂I betrachtet wird) einerseits und Klassen freier Schleifen bezüglich beliebiger ("freier") Homotopie andererseits.

Aufgabe 3. Es seien, wie in der Vorlesung, Wege links, rechts, unten, oben in I^2 definiert. (links$(t) = (0, t)$ etc.) Es sei X ein topologischer Raum. Es sei $f : \partial(I^2) \to X$ eine stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

i) f ist zu einer stetigen Abbildung von I^2 nach X fortsetzbar.

ii) f selbst ist nullhomotop.

iii) Es ist $f_*(\text{links} * \text{oben}) \simeq f_*(\text{unten} * \text{rechts})$ rel ∂I.

Man beachte hier: In ii) werden "freie Homotopien" d.h. Homotopien "ohne Basispunkt" betrachtet.

Definition Ein *topologisches Monoid* ist ein topologischer Raum X zusammen mit einem Element $e \in X$ und einer stetigen Abbildung (Verknüpfung) $\circ : X \times X \to X$ derart, dass die Monoidaxiome gelten. Wie üblich bezeichnen wir den Raum und den Raum mit den Extradaten mit demselben Symbol.

Aufgabe 4. Zeigen Sie: Für ein topologisches Monoid X mit neutralem Element e ist $\pi_1(X, e)$ ist abelsch.

Hinweis. Wenden Sie Aufgabe 3 an! (Die Lösung ist sehr einfach ...)

Aufgabe 5. Es sei X ein topologischer Raum, $x_0 \in X$. Es sei $\Phi_X : \pi_1(X, x_0) \simeq [(S^1, 1), (X, x_0)] \to [S^1, X]$ die kanonische Abbildung. Zeigen Sie:

a) Φ_X ist natürlich in X. Schreiben Sie hierfür zuerst auf, was das (offenbar) bedeuten soll.

b) Φ_X ist surjektiv.

c) Für $\alpha, \beta \in \pi_1(X, x_0)$ gilt genau dann $\Phi_X(\alpha) = \Phi_X(\beta)$, wenn α und β konjugierte Gruppenelemente sind.

Aufgabe 6. Es sei X ein wegzusammenhängender Raum. Zeigen Sie, dass äquivalent sind:

i) Jeder geschlossene Weg ist zusammenziehbar / nullhomotop.

ii) Für einen Punkt x_0 von X ist $\pi_1(X, x_0) = 1$.

iii) Für jeden Punkt x_0 von X ist $\pi_1(X, x_0) = 1$.

iv) Je zwei Wege in X mit demselben Anfangs- und Endpunkten sind homotop zueinander relativ zu ∂I.

v) Jede freie Schleife in X ist nullhomotop.

Beachten Sie hier: In i) werden Homotopien relativ zu ∂I betrachtet, in v) werden beliebige Homotopien betrachtet.

Hierzu noch eine Definition:

Definition Ein wegzusammenhängender Raum X heißt *einfach zusammenhängend*, wenn die genannten Bedingungen erfüllt sind.