Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEABRISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 3

Aufgabe 1. Geben Sie eine formale Definition des Möbiusbandes an und zeigen Sie (formal), dass das Möbiusband und die punktierte projektive Ebene eine Kreislinie als strengen Deformationsretrakt haben (oder: umfassen, nicht enthalten!).

Fundamentalgruppen interessanter Räume sind oftmals sogenannte *freie Gruppen*. Es folgen einige Grundlagen hierzu. Wir beginnen mit einem abstrakten Begriff von freien Objekten, oder genauer: von freien Elementen:
Oftmals bestehen Objekte von Kategorien aus einer "unterliegenden Menge" und Operationen. Ein gutes Beispiel hierfür sind Gruppen. Wir haben dann einen "Vergissfunktor", mit dem eben die Operationen vergessen werden. Wenn wir beispielsweise eine Gruppe G als $(|G|, +)$ schreiben, wobei $|G|$ die unterliegende Menge ist, ist der entsprechende Funktor $\mathcal{G}r \longrightarrow \mathcal{E}ns$ durch $G \mapsto |G|$ und $f \mapsto f$ auf Morphismen gegeben.
Für die folgende Definition ist es sinnvoll, diese Situation im Kopf zu haben, auch wenn die Definition selbst allgemeiner ist.

Definition Es sei $\mathcal{C}$ eine Kategorie und $\mathcal{V} : \mathcal{C} \longrightarrow \mathcal{E}ns$ ein kovarianter Funktor. Für eine Menge B ist ein *freies Element* auf B ein Tupel (F, ι), wobei F ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\iota : B \longrightarrow \mathcal{V}(F)$ ist und die folgende *universelle Eigenschaft* gilt:

> Für alle Tupel (Z, κ), wobei Z ein Objekt von $\mathcal{C}$ und $\kappa : B \longrightarrow \mathcal{V}(Z)$ ist, gibt es genau einen Morphismus $f : F \longrightarrow Z$ für welchen das Diagramm
>
> $$\begin{tikzcd} B \arrow[d, "\iota"'] \arrow[dr, "\kappa"] & \\ \mathcal{V}(F) \arrow[r, "\mathcal{V}(f)"'] & \mathcal{V}(Z) \end{tikzcd}$$
>
> kommutiert.

Die Menge B heißt dann *Basis* des freien Elements. Wenn (F, ι) ein freies Element ist, heißt F *freies Objekt*.

Aufgabe 2. Es sei B eine beliebige Menge. Überlegen Sie sich, dass die folgenden Tupel jeweils freie Elemente auf B sind. Die Vergissfunktoren sind hierbei die "offensichtlichen".

a) Für einen Ring (mit 1) R in der Kategorie der R-Moduln:
   Der Standardmodul $R^{(B)}$ auf der Basis B mit der Einbettung $B \hookrightarrow R^{(B)}$, $b \mapsto e_b = (\delta_{b,c})_{c \in B}$.

b) In der Kategorie der Monoide:
   Das Monoid der Wörter auf B, also $B^* := \bigcup_{n \in \mathbb{N}_0} B^n$ mit der Konkatination als Verknüpfung, mit der kanonischen Inklusion $B \hookrightarrow B^*$. (Die "Wörter" sind also formal Tupel über B; man schreibt diese dann als Wörter und nennt die Elemente aus B "Buchstaben". Man beachte hier, dass B^0 einelementig ist. Dieses eine Element wird *leeres Wort* genannt und mit $\sqcup$ bezeichnet.)

c) In der Kategorie der Gruppen:

Wir fixieren eine zu B disjunkte Menge, genannt B^{-1} mit einer Bijektion $B \to B^{-1}$. Das Bild eines Elementes $b \in B$ bezeichen wir mit b^{-1}. (Das ist erstmal nur eine Notation.)

Wir nennen nun ein Wort auf $B \cup B^{-1}$ *reduziert*, falls für kein $b \in B$ der Buchstabe b neben b^{-1} steht, d.h. weder die Kombination bb^{-1} noch die Kombination $b^{-1}b$ in dem Wort vorkommt.

Wir haben eine offensichtliche Verknüpfung reduzierter Wörter (mittels "kürzen").

Nun bildet die Menge der reduzierten Wörter, sagen wir $\mathrm{red}(B \cup B^{-1})$, mit der kanonischen Inklusion $B \hookrightarrow \mathrm{red}(B \cup B^{-1})$ ein freies Element.

Aufgabe 3. Es sei B eine Menge. Es seien nun (F_1, ι_1) und (F_2, ι_2) freie Element auf B. Zeien Sie:

Es gibt genau einen Morphismus $f : F_1 \to F_2$ mit $\mathcal{V}(f) \circ \iota_1 = \iota_2$ und genau einen Morphismus $g : F_2 \to F_1$ mit $\mathcal{V}(g) \circ \iota_2 = \iota_1$.

Diese beiden Morphismen sind invers zueinander, d.h. es gilt

$$g \circ f = \mathrm{id}_{F_1} \quad , \quad f \circ g = \mathrm{id}_{F_2} \ .$$

Bemerkung. Einige von Ihnen kennen dies schon. Für die anderen: Vergleichen Sie $g \circ f$ mit der Identität auf F_1. Beide erfüllen eine Eigenschaft, die diese Morphismen eindeutig charakterisiert.

Aufgabe 4. Es sei G ein endlicher nicht-gerichteteter Graph auf eines Eckenmenge V (= vertex set). Die Kanten seien – der Einfachheit halber – durch Tupel von Ecken gegeben.

Wir definieren einen *kombinatorischen Weg* (kurz: einen Weg) in G als ein Wort auf der Menge der Ecken, wobei zwei nebeneinanderliegende Ecken identisch oder durch eine Kante verbunden sind.

a) Zeigen Sie: Wir haben ein Gruppoid, dessen Objekte die Ecken von G und dessen Morphismen die kombinatorische Wege sind.

b) Wir haben nun einen offensichtlichen Begriff von "kürzen" von Wegen: Ein Weg ABA für (nicht notwendigerweise verschiedene) Ecken A, B wird zu AA gekürzt.

   Zeigen Sie, dass man mit gekürzten Wegen wieder ein Gruppoid erhält. Dieses Gruppoid nennen wir das *kombinatorische Fundamentalgruppoid* $\Pi(G)$. Für eine Ecke P_0 erhalten wir die *kombinatorische Fundamentalgruppe* $\pi_1(G, P_0)$.

c) Der Graph G sei nun zusammenhängend und es sei P_0 eine Ecke. Wir fixieren einen maximalen Baum T in G (einen sogenannten *Spannbaum*). Für jede Kante $k = \{A, B\}$ in $G - T$ fixieren wir eine Richtung und somit einen Weg (z.B. AB). Wir haben eindeutige gekürzte Wege von P_0 zu A und von B zu P_0 in T. Wenn man nun die drei Wege verbindet, erhält man einen geschlossenen gekürzten Weg von P_0 zu P_0. Es sei S die Menge dieser Wege.

   Zeigen Sie: $\pi_1(G, P_0)$ ist eine freie Gruppe auf S.

Aufgabe 5. Ab Montag: Es sei G wieder ein endlicher nicht-gerichteter Graph. Dem Graphen G kann man einen topologischen Raum G^{top} zuordnen. (Das ist noch leicht ...)

Zeigen Sie (mit Analysis!): Für je zwei Ecken P_0, P_1 von G entsprechen die gekürzten kombinatorischen Wege von P_0 nach P_1 in G den Homotopieklassen von Wegen von P_0 nach P_1 in G^{top}. Für eine Ecke P_0 erhält man auf diese Weise einen Isomorphismus

$$\pi_1(G, P_0) \simeq \pi_1(G^{top}, P_0) \ .$$