Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 2

In den folgeden Aufgaben geht es um den Themenkomplex des Transports der Topologie eines topologischen Raumes mittels einer Abbildung.

Aufgabe 1. Es sei $(X_i)_{i\in I}$ eine Familie topologischer Raume, Y eine Menge und $(f_i : X_i \to Y)_{i\in I}$ eine Familie von Abbildungen.
Die von den Abbildungen f_i $(i \in I)$ *koinduzierte Topopogie* auf Y ist wie folgt definiert: Eine Teilmenge A von Y ist genau dann offen, wenn für alle $i \in I$ ihr Urbild $f_i^{-1}(A)$ offen in X_i ist.
Zeigen Sie:

a) Die koinduzierte Topologie ist in der Tat eine Topologie auf Y.

b) Bezüglich dieser Topologie ist eine Teilmenge A genau dann abgeschlossen, wenn ihre Urbilder $f_i^{-1}(A)$ abgeschlossen sind.

c) Die induzierte Topologie ist die feinste Topologie auf Y, bezüglich welcher die f_i $(i \in I)$ stetige Abbildungen sind.

Aufgabe 2. Es sei X ein topologischer Raum und R eine Äquivalenzrelation auf der unterliegenden Menge von X. (Wir schreiben $x \sim_R y$ für xRy.)
Wir haben die Projektion $p : X \to X_{/\sim_R}$, $x \mapsto [x]_{\sim_R}$. Die von dieser Abbildung koinduzierte Topologie auf $X_{/\sim_R}$ heißt *Quotiententopologie* auf $X_{/\sim_R}$. Den Raum $X_{/\sim_R}$ nennen wir *den (!) Quotienten-* oder *Faktorraum* von X nach R. (Siehe Bemerkung unten!)

a) Zeigen Sie: Das Tupel $(X_{/\sim_R}, p)$ erfüllt die folgende *universelle Eigenschaft*:

> Für alle Tupel (Z, r), wobei Z ein topologischer Raum und $r : X \to Z$ eine stetige Abbildung mit $\forall x, x' \in X : x \sim_R x' \to r(x) = r(x')$ ist, gibt es genau eine stetige Abbildung $f : X_{/\sim_R} \to Z$ mit $f \circ p = r$.

Es sei nun (Y, q) ein Tupel bestehend aus einem topologischen Raum Y und einer stetigen Abbildung $q : X \to Y$. Wir sagen, dass (Y, q) die *universelle Quotienteneigenschaft* von X nach R besitzt, falls $\forall x, x' \in X : x \sim_R x' \to q(x) = q(x')$ und folgendes gilt:

> Für alle Tupel (Z, r), wobei Z ein topologischer Raum und $r : X \to Z$ eine stetige Abbildung mit $\forall x, x' \in X : x \sim_R x' \to r(x) = r(x')$ ist, gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y \to Z$ mit $f \circ q = r$.

b) Zeigen Sie: Wenn (Y_1, q_1) und (Y_2, q_2) die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzen, dann gibt es genau eine stetige Abbildung $f : Y_1 \to Y_2$ mit $f \circ q_1 = q_2$. Diese Abbildung ist dann ein Homöomorphismus.

c) Insbesondere gilt: Wenn (Y, q) die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt, dann ist Y mittels eines "kanonischen" Homöomorphismus homöomorph zu $X_{/\sim_R}$.

d) Geben Sie ein explizites Kriterium dafür an, dass ein Tupel (Y, q), wobei Y ein topologischer Raum und $q : X \to Y$ eine stetige Abbildung ist, die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt. (Sie können die Tauglichkeit Ihres Kriteriums dann an der nächsten Aufgabe testen.)

Bemerkung. Wenn (Y, q) die universelle Quotienteneigenschaft von X nach R besitzt, kann man (Y, q) auch *einen (!) Quotienten-* oder *Faktorraum* von X nach R nennen. Es ist hier wichtig, dass q ein Teil des Datums ist. In diesem Sinne kann man auch definieren: *Der Quotienten-* oder *Faktorraum* sei das Tupel $(X_{/\sim_R}, p)$. Hier kann aber p weglassen, da man es auch wieder zurückgewinnen kann.

Zusatz. Wenn Sie mit der kategorientheoretischen Formulierung universeller Eigenschaften vertraut sind, sollten Sie sich überlegen, wie man diese Formulierung hier genau anwendet. (Welche Kategorien und Funktoren werden betrachtet?)

Aufgabe 3. Zeigen Sie: Bezüglich der durch $0 \sim 1$ erzeugten Äquivalenzrelation auf $I := [0, 1]$ hat

$$I \to S^1 \ , \ t \mapsto e^{2\pi t}$$

die universelle Quotienteneigenschaft.

Aufgabe 4. Es sei $r : X \to Z$ eine stetige Abbildung topologischer Räume. Wir definieren wie folgt eine Äquivalenzrelation R auf X: $x \sim_R x' :\Longleftrightarrow r(x) = r(x')$.

Zeigen Sie, dass die folgenden Aussagen äquivalent sind:

i) Die Abbildung r ist surjektiv und die Topologie von Z ist die von r koinduzierte Topologie.

ii) (Z, r) hat die universelle Quotienteneigenschaft bezüglich von X nach R.

iii) Die nach Aufgabe 2 a) existierende und eindeutige stetige Abbildung $f : X_{/\sim_R} \to Z$ mit $f \circ p = r$ (mit p wie dort) ist ein Homöomorphismus.

Definition. Wenn $r : X \to Z$ die beschriebenen Eigenschaften hat, heißt r *identifizierend.*

Aufgabe 5. Es seien S, X, Y tolopogische Räume und $f : S \to X, g : S \to Y$ stetige Abbildungen. Es sei R die von $f(s) \sim g(s)$ für $s \in S$ erzeugte Äquivalenzrelation auf $X \sqcup Y$. Wie zuvor haben wir den Quotientenraum $(X \sqcup Y)_{/\sim_R}$ und die Projektion $p : X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)_{/\sim_R}$. Zeigen Sie:

a) Die kanonischen Abbildungen $X \hookrightarrow X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)_{/\sim_R}$, $Y \hookrightarrow X \sqcup Y \to (X \sqcup Y)_{/\sim_R}$ sind Einbettungen topologischer Räume (d.h. Homöomorphismen auf ihre Bilder).

b) Das Tripel bestehend aus $(X \sqcup Y)_{/\sim_R}$ und den Einbettungen in a) hat die universelle Eigenschaft des Push-outs (auch Kofaserprodukt genannt) für $(S, f : S \to X, g : S \to Y)$.

Aufgabe 6. Zeigen Sie mit einer expliziten Konstruktion, dass es in der Kategorie der punktierten topologischen Räume Summen (von je zwei Objekten) gibt.

Benutzen Sie hierfür die vorherige Aufgabe und beachten Sie: Es sei $*$ ein festes Element. Dann stehen für einen topologischen Raum X die Punkte von X in Bijektion mit den (stetigen) Abbildungen $\{*\} \to X$.