Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 10

Für Montag

Aufgabe 1. Es sei G eine Gruppe und H_1, H_2 Untergruppen von G. Ein Morphismus von G-Mengen von $G/{\sim_{H_1}}$ nach $G/{\sim_{H_2}}$ ist eindeutig bestimmt durch das Bild von $[e]_{H_1}$; sei dieses $[g]_{H_2}$. Wie ist der Morphismus nun genau gegeben? Wie lautet (in Bezug auf die Untergruppen) die (hinreichende und notwendige) Bedingung an ein $g \in G$, damit dieses einen Morphismus wie beschrieben induziert? Unter welcher Bedingung gibt es also einen Morphismus von $G/{\sim_{H_1}}$ nach $G/{\sim_{H_2}}$, unter welcher einen Isomorphismus? Wie kann die Menge der Morphismen von $G/{\sim_{H_1}}$ nach $G/{\sim_{H_2}}$ beschrieben werden? Wie kann die Automorphismengruppe einer G-Menge $G/{\sim_H}$ beschrieben werden?

Für die Übungsgruppe

Aufgabe 2. Es seien X_1, X_2 ein topologische Räume mit Überlagerungsoperationen durch die Gruppen G_1 bzw. G_2. Zeigen Sie:
$G_1 \times G_2$ definiert eine Überlagerungsoperation auf $X_1 \times X_2$ und

$$(X_1 \times X_2)/(G_1 \times G_2) \simeq X_1/G_1 \times X_2/G_2 \ .$$

Aufgabe 3. Es sei X ein wegzusammenhängender und lokal wegzusammenhängender topologischer Raum mit einer Überlagerungsoperation durch G. Ferner sei H eine Untergruppe von G. Zeigen Sie:

a) Wir haben eine Überlagerungen

$$X \longrightarrow X/H \xrightarrow{p} X/G \ .$$

b) Sei sei H' eine weitere Untergruppe von G. Dann sind die Überlagerungen $X/H \longrightarrow X/G$ und $X/H' \longrightarrow X/G$ genau dann isomorph, wenn H und H' konjugiert zueinander sind.

c) Die Überlagerung $X/H \longrightarrow X/G$ ist genau dann normal, wenn H normal in G ist. Wenn dies der Fall ist, ist die Decktransformationsgruppe von p, d.h. die Gruppe $\mathrm{Aut}(p)$, kanonisch isomorph zu G/H.

Aufgabe 4. Es sei X einfach zusammenhängend mit einer Überlagerungsoperation durch G. Dann ist für jeden Punkt $b \in X/G$ die Gruppe $\pi_1(X/G, b)$ kanonisch isomorph zu G.

Aufgabe 5. (Passend zur kalten Jahreszeit) Wie sieht die unverselle Überlagerung von $S^1 \vee S^1$ (der Einpunkt-Vereinigung) aus? Wie verallgemeinert sich dies für $S^1 \vee \cdots \vee S^1$?