Privatdozent Dr. Claus Diem
diem@math.uni-leipzig.de

Christoph Eikemeier
eikemeier@math.uni-leipzig.de

ALGEBRAISCHE TOPOLOGIE
ÜBUNGSBLATT NR. 1

Die zentrale Aussage, welche wir beweisen werden ist: Für Mannigfaltigkeiten X und Y ist eine Homotopie von X nach Y dasselbe wie ein Weg $I = [0,1] \to \mathcal{C}(X,Y)$, wobei $\mathcal{C}(X,Y)$ der Raum der stetigen Abbildungen $X \to Y$ ist, welcher mit der sogenannten kompakt-offen Topologie versehen wird.

Aufgabe 1. Es sei X eine Menge und B eine Teilmenge von X. Es sei nun $\mathcal{T}$ die Menge der Teilmengen von X, welche (beliebige) Vereinigungen endlicher Durchschnitte von Mengen aus B sind. Zeigen Sie: $\mathcal{T}$ ist die kleinste Topologie, welche B umfasst.

Bemerkung. Für zwei Mengen X, Y sagen wir, dass Y die Menge X *umfasst*, wenn X eine Teilmenge von Y ist. Dies bedeutet dann also, dass X jedes Element *von Y enthält.*

Definition. Die soeben beschriebene Topologie von X heißt die *von B erzeugte Topologie*; man sagt, dass B die Topologie *erzeugt*. Die Menge B heißt dann *Subbasis* der Topologie. (Von einem systematischen Gesichtspunkt aus könnte auch von einem *Erzeugendensystem* sprechen, aber das macht man eher nicht.)

Es seien nun X und Y topologische Räume.

Aufgabe 2. Es sei $f : X \to Y$ eine Abbildung und B eine Subbasis der Topologie von Y. Zeigen Sie: f ist genau dann stetig, wenn für jedes $U \in B$ das mengentheoretische Urbild $f^{-1}(U)$ offen in X ist.

Definition. Es seien von nun an X und Y Mannigfaltigkeiten. Die *kompakt-offen Topologie* ist diejenige Topologie auf $\mathcal{C}(X,Y)$, welche von den Mengen der Form

$$M(K,U) := \{f \in \mathcal{C}(X,Y) \mid f(K) \subset U\} \,,$$

wobei $K \subseteq X$ kompakt und $U \subseteq Y$ offen sind, erzeugt wird. Wir betrachten nun $\mathcal{C}(X,Y)$ mit dieser Topologie.

Aufgabe 3. Zeigen Sie, dass die Auswertungs-Abbildung

$$e : \mathcal{C}(X,Y) \times X \longrightarrow Y \quad (f,x) \longmapsto f(x)$$

stetig ist.

Aufgabe 4. Für eine Abbildung $F : X \times I \to Y$ definieren wir für alle $i \in I$ die Abbildung $f_i : X \to Y$, $x \mapsto F(x,i)$. Zeigen Sie:
F ist genau dann stetig, wenn die folgenden Bedingungen gelten:

i) Für alle $i \in I$ ist f_i stetig.

ii) Die Abbildung $I \to \mathcal{C}(X,Y)$, $i \mapsto f_i$ ist stetig.

Hinweis. Zerlegen Sie die Abbildung in die Komposition „offensichtlich“ stetiger Abbildungen.