Was ist Algebraische Topologie?

Claus Diem

Universität Leipzig

15.Februar 2014

Topologie und Algebra

Topos: Ort

Topologie und Algebra

Topos: Ort

Algebra: Wiederzusammensetzen zerbrochener Teile

Flächen

Eine *Fläche* ist eine 2-dimensionale Menge im Raum.

Flächen

Eine *Fläche* ist eine 2-dimensionale Menge im Raum.

Was heißt das?

Hintergrund

Seien zwei Mengen X und Y gegeben.

Eine *Abbildung* f von X nach Y ist nichts anderes als eine eindeutige Zuordnung von X nach Y. Dann heißt X die *Definitionsmenge* und Y die *Zielmenge* von f.

Hintergrund

Seien zwei Mengen X und Y gegeben.

Eine *Abbildung* f von X nach Y ist nichts anderes als eine eindeutige Zuordnung von X nach Y. Dann heißt X die *Definitionsmenge* und Y die *Zielmenge* von f.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2$$

Hintergrund

Seien zwei Mengen X und Y gegeben.

Eine *Abbildung* f von X nach Y ist nichts anderes als eine eindeutige Zuordnung von X nach Y. Dann heißt X die *Definitionsmenge* und Y die *Zielmenge* von f.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2$$

Oder kurz: $f(x) := x^2$.

Hintergrund

Seien zwei Mengen X und Y gegeben.

Eine *Abbildung* f von X nach Y ist nichts anderes als eine eindeutige Zuordnung von X nach Y. Dann heißt X die *Definitionsmenge* und Y die *Zielmenge* von f.

Beispiel:

$$f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad x \mapsto x^2$$

Oder kurz: $f(x) := x^2$.

So eine Abbildung heißt *bijektiv*, wenn es zu jedem $y \in X$ genau ein $x \in X$ mit $f(x) = y$ gibt.

Eine bijektive Abbildung heißt auch eine *Bijektion*.
Notation:

$$f : X \xrightarrow{\sim} Y$$

Hintergrund

Die Elemente des 3-dimensionalen Raumes nennen wir *Punkte*.
Bezeichnung: $P, Q, \dots$.

Hintergrund

Die Elemente des 3-dimensionalen Raumes nennen wir *Punkte*.
Bezeichnung: $P, Q, \ldots$.

Sei eine Menge X von Punkten, ein Punkt P in X und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Die ϵ-*Umgebung* von P in X ist die Menge, die aus allen Punkten in X besteht, deren Abstand zu P kleiner als ϵ ist.
Bezeichnung: $U_\epsilon(P, X)$.

Hintergrund

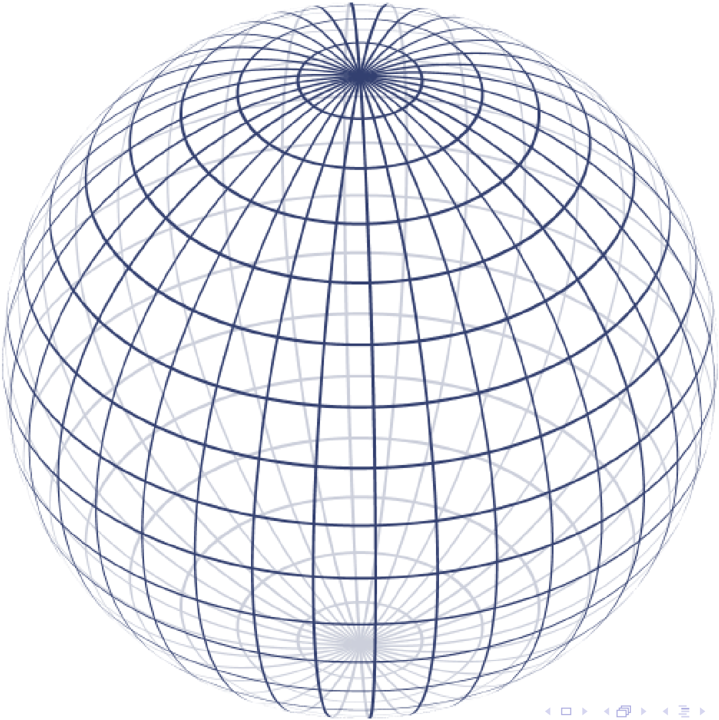
Die Elemente des 3-dimensionalen Raumes nennen wir *Punkte*.
Bezeichnung: $P, Q, \ldots$.

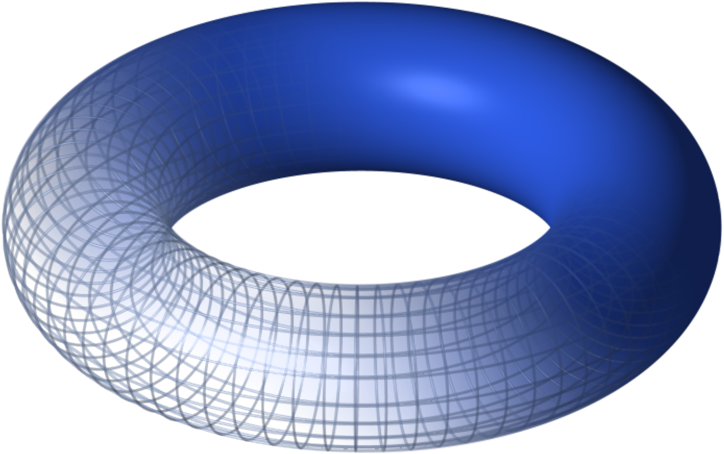
Sei eine Menge X von Punkten, ein Punkt P in X und ein $\epsilon > 0$ gegeben. Die ϵ-*Umgebung* von P in X ist die Menge, die aus allen Punkten in X besteht, deren Abstand zu P kleiner als ϵ ist.
Bezeichnung: $U_\epsilon(P, X)$.

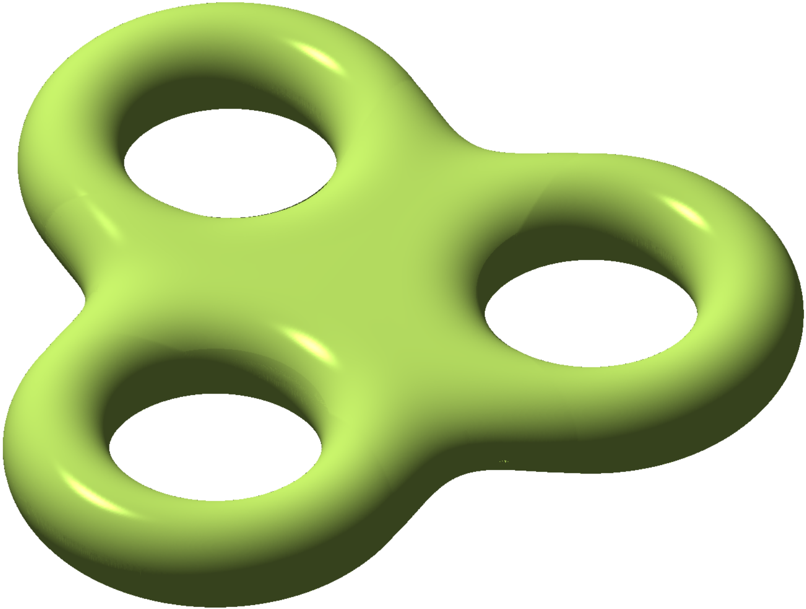
Eine *Fläche* F ist eine Menge von Punkten mit der folgenden Eigenschaft:

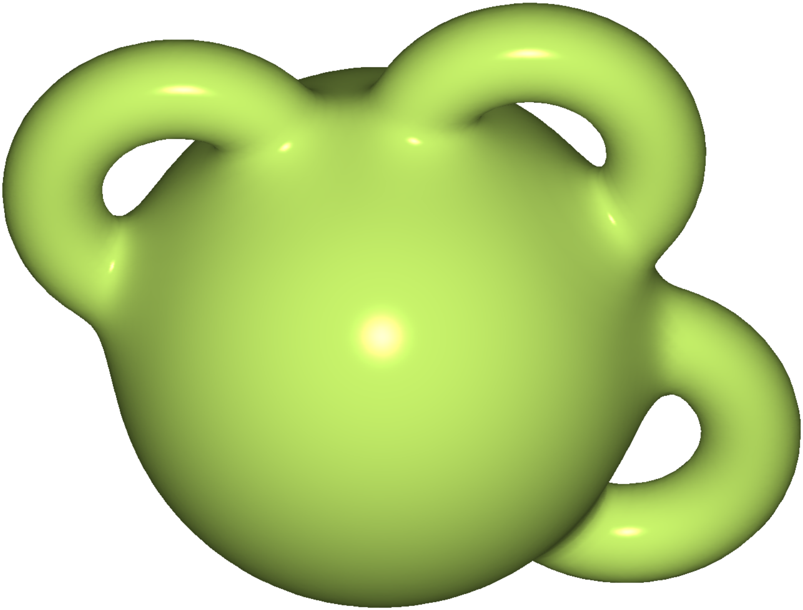
Zu jedem Punkt P auf der Fläche gibt es ein $\epsilon > 0$ und eine "schöne" Bijektion zwischen

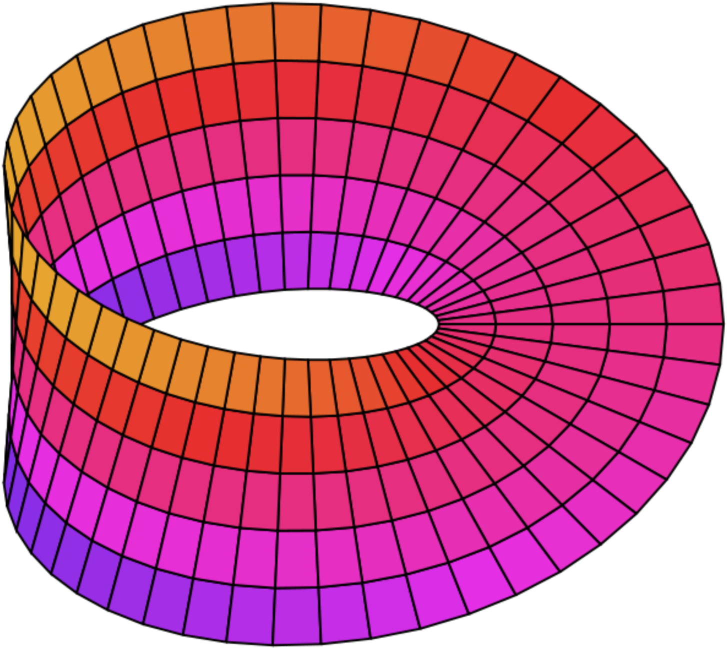
- $U_\epsilon(P, F)$ und
- der Kreisscheibe mit Radius ϵ: $U_\epsilon((0,0), \mathbb{R}^2)$.

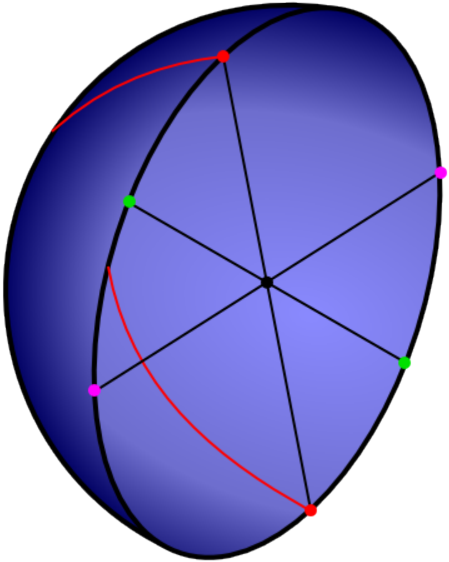


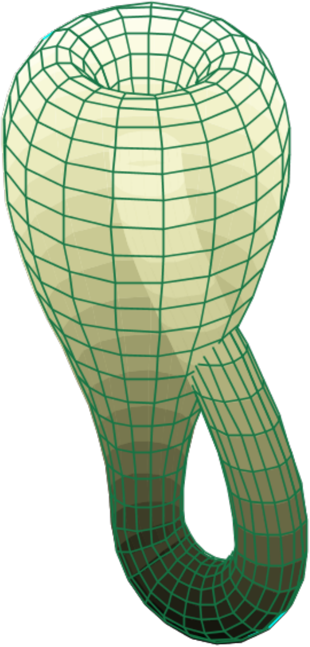












Aufgabe – allgemein

Aufgabe: “Klassifiziere” Flächen im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ oder sogar im n-dimensinalen Raum $\mathbb{R}^n$!

Aufgabe – allgemein

Aufgabe: “Klassifiziere” Flächen im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ oder sogar im n-dimensinalen Raum $\mathbb{R}^n$!

Das heißt:

- Wir definieren, wann wir Flächen als “im wesentlichen gleich” betrachten wollen.
- Wir packen “im wesentlichen gleiche” Flächen jeweils in einen “Sack”.
- Wir wollen nun aus jedem Sack genau eine Fläche angeben.

Aufgabe – allgemein

Aufgabe: “Klassifiziere” Flächen im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ oder sogar im n-dimensinalen Raum $\mathbb{R}^n$!

Das heißt:

- Wir definieren, wann wir Flächen als “im wesentlichen gleich” betrachten wollen.
- Wir packen “im wesentlichen gleiche” Flächen jeweils in einen “Sack”.
- Wir wollen nun aus jedem Sack genau eine Fläche angeben.

Beispiel: Wir betrachten nur das Innere von Dreiecken in der Ebene. Nun betrachten wir zwei solche Flächen als “im wesentlichen gleich”, wenn sie kongruent zueinander sind.

Aufgabe – allgemein

Aufgabe: “Klassifiziere” Flächen im 3-dimensionalen Raum $\mathbb{R}^3$ oder sogar im n-dimensinalen Raum $\mathbb{R}^n$!

Das heißt:

- Wir definieren, wann wir Flächen als “im wesentlichen gleich” betrachten wollen.
- Wir packen “im wesentlichen gleiche” Flächen jeweils in einen “Sack”.
- Wir wollen nun aus jedem Sack genau eine Fläche angeben.

Beispiel: Wir betrachten nur das Innere von Dreiecken in der Ebene. Nun betrachten wir zwei solche Flächen als “im wesentlichen gleich”, wenn sie kongruent zueinander sind.

Alternativ: Wir betrachten zwei solche Flächen als “im wesentlichen gleich”, wenn sie ähnlich zueinander sind.

Aufgabe – konkret

Die Aufgabe der algebraischen Topologie:

Wir betrachten zwei Flächen F_1, F_2 als “im wesentlichen gleich”, wenn es eine “schöne” Bijektion zwischen ihnen gibt.

Aufgabe – konkret

Die Aufgabe der algebraischen Topologie:

Wir betrachten zwei Flächen F_1, F_2 als "im wesentlichen gleich", wenn es eine "schöne" Bijektion zwischen ihnen gibt.

Genauer: Die beiden Flächen werden als "im wesentlichen gleich" betrachtet, wenn es eine stetige bijektive Abbildung von F_1 nach F_2 gibt, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Aufgabe – konkret

Die Aufgabe der algebraischen Topologie:

Wir betrachten zwei Flächen F_1, F_2 als "im wesentlichen gleich", wenn es eine "schöne" Bijektion zwischen ihnen gibt.

Genauer: Die beiden Flächen werden als "im wesentlichen gleich" betrachtet, wenn es eine stetige bijektive Abbildung von F_1 nach F_2 gibt, deren Umkehrabbildung auch stetig ist.

Idee: Man ordnet den Flächen algebraische Objekte zu, die "im wesentlichen gleich" sind, wenn die Flächen "im wesentlichen gleich" sind.

Wege

Ein *Weg* auf einer Fläche F ist eine stetige Abbildung γ von $[0,1]$ nach F.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow F \ , \ t \mapsto \gamma(t)$$

Wege

Ein *Weg* auf einer Fläche F ist eine stetige Abbildung γ von $[0,1]$ nach F.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow F \ , \ t \mapsto \gamma(t)$$

Ein Weg heißt *geschlossen*, falls sein Anfangs- und sein Endpunkt identisch sind.

Wege

Ein *Weg* auf einer Fläche F ist eine stetige Abbildung γ von $[0,1]$ nach F.

$$\gamma : [0,1] \longrightarrow F \ , \ \ t \mapsto \gamma(t)$$

Ein Weg heißt *geschlossen*, falls sein Anfangs- und sein Endpunkt identisch sind.

Wir betrachten nun geschlossene Wege mit einem festen Anfangs- und Endpunkt P_0.

Wege

Ein *Weg* auf einer Fläche F ist eine stetige Abbildung γ von $[0, 1]$ nach F.

$$\gamma : [0, 1] \longrightarrow F \ , \ t \mapsto \gamma(t)$$

Ein Weg heißt *geschlossen*, falls sein Anfangs- und sein Endpunkt identisch sind.

Wir betrachten nun geschlossene Wege mit einem festen Anfangs- und Endpunkt P_0.

Spezialfall: Der konstante Weg

Wege

Seien nun zwei geschlossene Wege α, β auf F gegeben.

Wege

Seien nun zwei geschlossene Wege α, β auf F gegeben.

Diese beiden Wege heißen *homotop*, wenn man α stetig in β transformieren kann.

Wege

Seien nun zwei geschlossene Wege α, β auf F gegeben.

Diese beiden Wege heißen *homotop*, wenn man α stetig in β transformieren kann.

Dies bedeutet:

Es gibt eine *stetige Familie* von Wegen γ_s mit $s \in [0, 1]$ mit $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$.

Wege

Seien nun zwei geschlossene Wege α, β auf F gegeben.

Diese beiden Wege heißen *homotop*, wenn man α stetig in β transformieren kann.

Dies bedeutet:

Es gibt eine *stetige Familie* von Wegen γ_s mit $s \in [0, 1]$ mit $\gamma_0 = \alpha$, $\gamma_1 = \beta$.

Ein Weg α heißt *zusammenziehbar*, wenn er homotop zum konstanten Weg ist.

Zusammenziehbare Wege

Resultate:

- In einer Kreisscheibe ist jeder Weg zusammenziehar.

Zusammenziehbare Wege

Resultate:

- In einer Kreisscheibe ist jeder Weg zusammenziehar.
- In einer gelochten Kreisscheibe ist der umrundende Weg nicht zusammenziehbar.

Wege

Grundlegende Tatsache:

Seien zwei “im wesentlichen gleiche” Flächen F_1 und F_2 gegeben. Dann entspricht jeder Weg auf F_1 genau einem Weg auf F_2.

Wege

Grundlegende Tatsache:

Seien zwei “im wesentlichen gleiche” Flächen F_1 und F_2 gegeben. Dann entspricht jeder Weg auf F_1 genau einem Weg auf F_2.

Und: Wenn zwei Wege auf F_1 sind genau dann homotop, wenn die entsprechenden Wege auf F_2 homotop sind.

Wege

Grundlegende Tatsache:

Seien zwei "im wesentlichen gleiche" Flächen F_1 und F_2 gegeben. Dann entspricht jeder Weg auf F_1 genau einem Weg auf F_2.

Und: Wenn zwei Wege auf F_1 sind genau dann homotop, wenn die entsprechenden Wege auf F_2 homotop sind.

Also: Wenn jeder Weg auf F_1 zusammenziehbar ist, dann ist auch jeder Weg auf F_2 zusammenziehbar.

Wege

Seien zwei Flächen F_1, F_2 gegeben.

Wege

Seien zwei Flächen F_1, F_2 gegeben.

Wenn nun

- jeder Weg auf F_1 zusammenziehbar ist
- aber nicht jeder Weg auf F_2 zusammenziehbar ist,

Wege

Seien zwei Flächen F_1, F_2 gegeben.

Wenn nun

- jeder Weg auf F_1 zusammenziehbar ist
- aber nicht jeder Weg auf F_2 zusammenziehbar ist,
- dann sind F_1 und F_2 nicht "im wesentlichen gleich".

Wege

Seien zwei Flächen F_1, F_2 gegeben.

Wenn nun

- jeder Weg auf F_1 zusammenziehbar ist
- aber nicht jeder Weg auf F_2 zusammenziehbar ist,
- dann sind F_1 und F_2 nicht "im wesentlichen gleich".

Anwendung: Eine Kreisscheibe ist "wesentlich verschieden" von einer gelochten Kreisscheibe.

Die Fundamentalgruppe

Wie kann man aber “kompliziertere Flächen” unterscheiden?

Z.B. eine Fläche mit zwei Löchern und eine Fläche mit einem Loch?

Die Fundamentalgruppe

Wie kann man aber “kompliziertere Flächen” unterscheiden?

Z.B. eine Fläche mit zwei Löchern und eine Fläche mit einem Loch?

Erste Idee: Wenn zwei Wege gegeben sind, kann man diese zu einem Weg zusammenfügen: Durchlaufe hierzu beide Wege in doppelter Geschwindigkeit.

Die Fundamentalgruppe

Wie kann man aber “kompliziertere Flächen” unterscheiden?

Z.B. eine Fläche mit zwei Löchern und eine Fläche mit einem Loch?

Erste Idee: Wenn zwei Wege gegeben sind, kann man diese zu einem Weg zusammenfügen: Durchlaufe hierzu beide Wege in doppelter Geschwindigkeit.

Zweite Idee: Identifiziere hierbei Wege, die homotop zueinander sind. Ein Weg α führt zu einem “Sack” von Wegen, sagen wir *a*.

Die Fundamentalgruppe

Wie kann man aber “kompliziertere Flächen” unterscheiden?

Z.B. eine Fläche mit zwei Löchern und eine Fläche mit einem Loch?

Erste Idee: Wenn zwei Wege gegeben sind, kann man diese zu einem Weg zusammenfügen: Durchlaufe hierzu beide Wege in doppelter Geschwindigkeit.

Zweite Idee: Identifiziere hierbei Wege, die homotop zueinander sind. Ein Weg α führt zu einem “Sack” von Wegen, sagen wir a.

Man erhält somit eine *Gruppe*, die sogenannte *Fundamentalgruppe*

$$\pi_1(F, P_0) \ .$$

Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, wobei je zwei Elementen a, b ein weiteres Element $a * b$ zugeordnet ist und dabei folgende Regeln gelten:

- Assozaitivität: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c
- Es gibt ein sogenanntes *neutrales Element* e mit $e * a = a = a * e$ für alle a.
- Zu jedem Element a gibt es ein sogenanntes *inverses Element* b mit $a * b = e = b * a$.

Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, wobei je zwei Elementen a, b ein weiteres Element $a * b$ zugeordnet ist und dabei folgende Regeln gelten:

- Assozaitivität: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c
- Es gibt ein sogenanntes *neutrales Element* e mit $e * a = a = a * e$ für alle a.
- Zu jedem Element a gibt es ein sogenanntes *inverses Element* b mit $a * b = e = b * a$.

Notation: $b := a^{-1}$

Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, wobei je zwei Elementen a, b ein weiteres Element $a * b$ zugeordnet ist und dabei folgende Regeln gelten:

- Assozaitivität: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c
- Es gibt ein sogenanntes *neutrales Element* e mit $e * a = a = a * e$ für alle a.
- Zu jedem Element a gibt es ein sogenanntes *inverses Element* b mit $a * b = e = b * a$.

Notation: $b := a^{-1}$, $a^2 := a * a$, ...

Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, wobei je zwei Elementen a, b ein weiteres Element $a * b$ zugeordnet ist und dabei folgende Regeln gelten:

- Assozaitivität: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c
- Es gibt ein sogenanntes *neutrales Element* e mit $e * a = a = a * e$ für alle a.
- Zu jedem Element a gibt es ein sogenanntes *inverses Element* b mit $a * b = e = b * a$.

Notation: $b := a^{-1}$, $a^2 := a * a$, ... , $a^{-2} := a^{-1} * a^{-1}$ ...

Gruppen

Eine *Gruppe* ist eine Menge, wobei je zwei Elementen a, b ein weiteres Element $a * b$ zugeordnet ist und dabei folgende Regeln gelten:

- Assozaitivität: $(a * b) * c = a * (b * c)$ für alle a, b, c
- Es gibt ein sogenanntes *neutrales Element* e mit $e * a = a = a * e$ für alle a.
- Zu jedem Element a gibt es ein sogenanntes *inverses Element* b mit $a * b = e = b * a$.

Notation: $b := a^{-1}$, $a^2 := a * a$, ... , $a^{-2} := a^{-1} * a^{-1}$ ...

Dann gilt für alle $m, n \in \mathbb{Z}$: $a^m * a^n = a^{m+n}$.

Gruppen

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition

Gruppen

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen mit der Addition

Gruppen

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation

Gruppen

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation
- Die Menge $\{1, -1\}$ mit der Multiplikation.

Gruppen

Beispiele:

- Die ganzen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen mit der Addition
- Die rationalen Zahlen ohne Null mit der Multiplikation
- Die Menge $\{1, -1\}$ mit der Multiplikation.
- Die Fundamentalgruppe einer Fläche

Fundamentalgruppen

Beispiele zu Fundamentalgruppen:

- In der Kreisscheibe sind alle Wege zusammenziehbar.

Fundamentalgruppen

Beispiele zu Fundamentalgruppen:

- In der Kreisscheibe sind alle Wege zusammenziehbar.
  Die Fundamentalgruppe besteht nur als einem Element.

Fundamentalgruppen

Beispiele zu Fundamentalgruppen:

- In der Kreisscheibe sind alle Wege zusammenziehbar.
  Die Fundamentalgruppe besteht nur als einem Element.
- Auf der Sphäre sind auch alle Wege zusammenziehbar.
  Die Fundamentalgruppe der Sphäre besteht wiederum nur aus einem Element.

- Wir betrachten die gelochte Kreisscheibe K. Sei nun γ der Weg, der das Loch einmal umrundet.

  Nun ist Element in der Fundamentalgruppe durch c^n mit einem eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ gegeben.

- Wir betrachten die gelochte Kreisscheibe K. Sei nun γ der Weg, der das Loch einmal umrundet.

  Nun ist Element in der Fundamentalgruppe durch c^n mit einem eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ gegeben.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(K) \quad , \quad n \mapsto c^n$$

- Wir betrachten die gelochte Kreisscheibe K. Sei nun γ der Weg, der das Loch einmal umrundet.

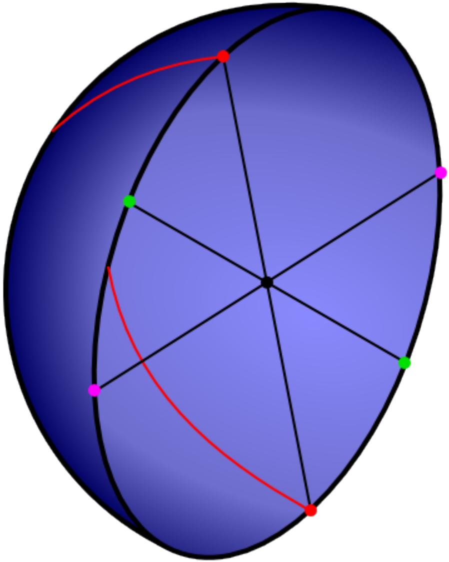
  Nun ist Element in der Fundamentalgruppe durch c^n mit einem eindeutigen $n \in \mathbb{Z}$ gegeben.

$$\mathbb{Z} \xrightarrow{\sim} \pi_1(K) \quad , \quad n \mapsto c^n$$

- Wenn man mehr Löcher hat, wird die Fundamentalgruppe komplizierer.

Fundamentalgruppen

- Wir betrachten die projektive Ebene.



Fundamentalgruppen

- Wir betrachten die projektive Ebene. Sei α ein Weg von "unten" nach "unten". Dann ist α^2 homotop zum konstanten Weg. Also ist $a^2 = e$.

  Die Fundamentalgruppe besteht aus zwei Elementen e, a

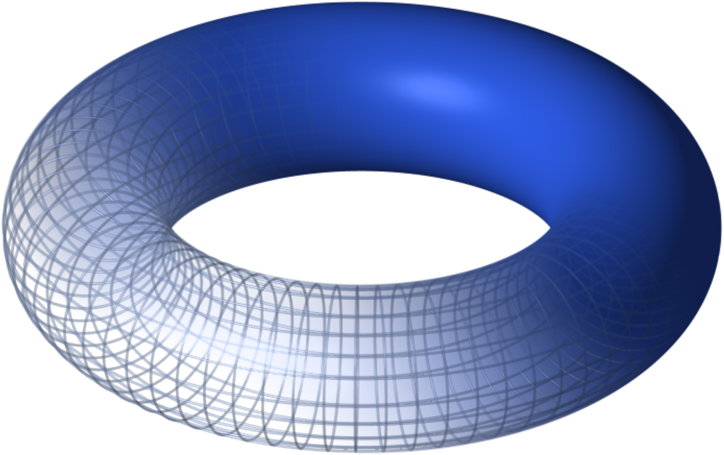
Fundamentalgruppen

- Wir betrachten die projektive Ebene. Sei α ein Weg von “unten” nach “unten”. Dann ist α^2 homotop zum konstanten Weg. Also ist $a^2 = e$.

  Die Fundamentalgruppe besteht aus zwei Elementen e, a mit $a^{-1} = a$.

Fundamentalgruppen

- Wir betrachten den Torus T.



Fundamentalgruppen

- Wir betrachten den Torus T. Es gibt zwei ausgezeichnete Wege: α, β. Hierbei ist $\alpha * \beta$ homotop zu $\beta * \alpha$.

Fundamentalgruppen

- Wir betrachten den Torus T. Es gibt zwei ausgezeichnete Wege: α, β. Hierbei ist $\alpha * \beta$ homotop zu $\beta * \alpha$. Es gilt also $a * b = b * a$. Jedes Element der Fundamentalgruppe ist in eindeutiger Weise durch $a^n * b^m$ mit $m, n \in \mathbb{Z}$ gegeben.

$$\mathbb{Z}^2 \xrightarrow{\sim} \pi_1(T) \quad , \quad (m,n) \mapsto a^m * b^n$$

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.
- Die mehrfachen Tori sind “wirklich verschieden” von der Sphäre.

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.
- Die mehrfachen Tori sind “wirklich verschieden” von der Sphäre.
- Für $m \neq n$ sind ist ein m-facher Torus “wirklich verschieden” von einem n-fachen Torus.

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.
- Die mehrfachen Tori sind “wirklich verschieden” von der Sphäre.
- Für $m \neq n$ sind ist ein m-facher Torus “wirklich verschieden” von einem n-fachen Torus.
- Jede “orientierbare geschlossene Fläche” ist “im wesentlichen gleich” zur Sphäre oder einem “mehrfachen Torus”.

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.
- Die mehrfachen Tori sind “wirklich verschieden” von der Sphäre.
- Für $m \neq n$ sind ist ein m-facher Torus “wirklich verschieden” von einem n-fachen Torus.
- Jede “orientierbare geschlossene Fläche” ist “im wesentlichen gleich” zur Sphäre oder einem “mehrfachen Torus”.
- Die Sphäre, die n-fachen Tori, die projektive Ebene und die Kleinsche Fläche sind “wesentlich verschieden”.

Ergebnisse

- Die “mehrfachen Tori” erhält man aus der Sphäre, indem man “Henkel anhängt”.
- Die mehrfachen Tori sind “wirklich verschieden” von der Sphäre.
- Für $m \neq n$ sind ist ein m-facher Torus “wirklich verschieden” von einem n-fachen Torus.
- Jede “orientierbare geschlossene Fläche” ist “im wesentlichen gleich” zur Sphäre oder einem “mehrfachen Torus”.
- Die Sphäre, die n-fachen Tori, die projektive Ebene und die Kleinsche Fläche sind “wesentlich verschieden”.
- Auch an die projektive Ebene und die Kleinsche Fläche kann man Henkel anhängen.

Ergebnis

Satz Jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der folgenden Flächen im "wesentlichen gleich":

- der Sphäre
- einem n-fachen Torus (= einer Sphäre mit n Henkeln) , $n \in \mathbb{N}$

Ergebnis

Satz Jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der folgenden Flächen im “wesentlichen gleich”:

- der Sphäre
- einem n-fachen Torus (= einer Sphäre mit n Henkeln) , $n \in \mathbb{N}$
- einer projektiven Fläche
- einer Kleinschen Fläche

Ergebnis

Satz Jede geschlossene Fläche ist zu genau einer der folgenden Flächen im “wesentlichen gleich”:

- der Sphäre
- einem n-fachen Torus (= einer Sphäre mit n Henkeln) , $n \in \mathbb{N}$
- einer projektiven Fläche
- einer Kleinschen Fläche
- einer projektiven Fläche mit n Henkeln, $n \in \mathbb{N}$
- einer Kleinschen Fläche mit n Henkeln, $n \in \mathbb{N}$