



# Das LUPI-Spiel: Zufall und Strategie vereint im Mathematikunterricht

Lowest **U**nique **P**ositive **I**nteger-Spiel – Die kleinste alleinstehende Zahl gewinnt!

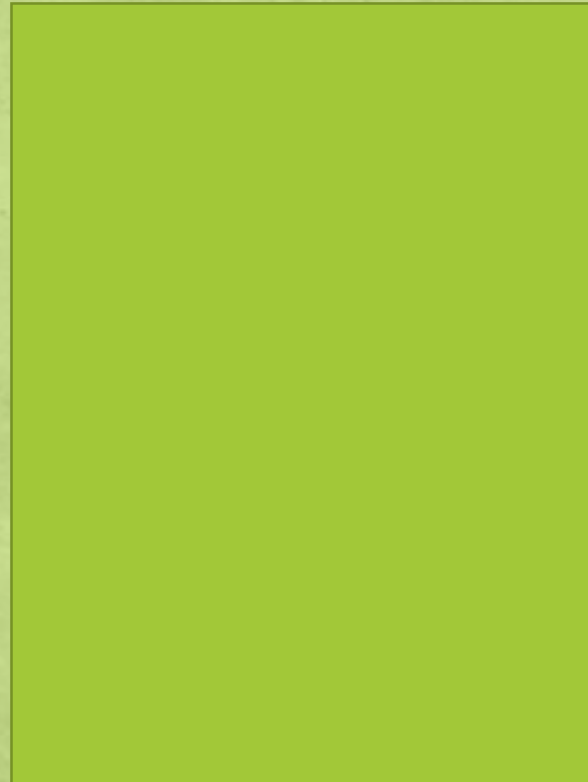
57. Jahrestagung der GDM 2024 in Essen  
5. März 2024



## Bevor es losgeht: Das LUPI-Spiel ganz konkret

### Spielregeln:

- Wählen Sie bitte eine natürliche Zahl zwischen 1 und 15.
- Es gewinnt die Person, deren Zahl möglichst klein ist und nur 1x gewählt wurde.
- Gibt es keine kleinste alleinige Zahl, gewinnt niemand.



1. [Zahl], Name/Pseudonym
2. → Auf den Stapel
3. → Alle an die Tafel
4. Gespannt sein auf später 😊



# Das LUPI – Spiel im MU: Worum geht es heute?

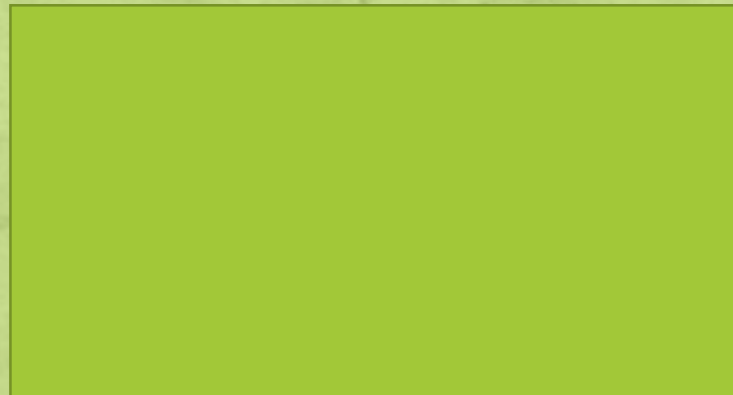
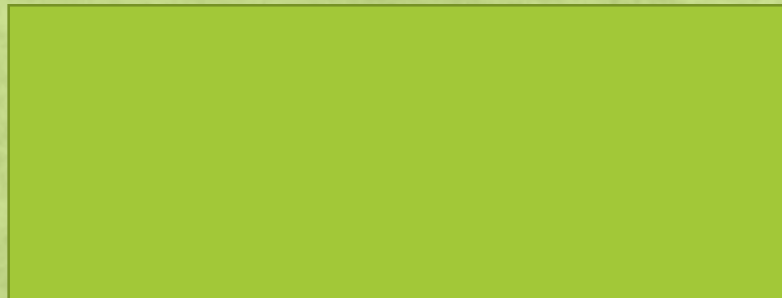
1. Das LUPI-Spiel in Alltag, Spieltheorie und Fachdidaktik
2. Vorschläge für und Erfahrungen von LUPI im Stochastikunterricht
  - 2.1 LUPI - Das Zufallsspiel: Drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit
  - 2.2 LUPI – Das Strategiespiel: Subjektiv-spieltheoretischer Ansatz
3. Auflösung des Gewinnspiels + Fazit und Ausblick



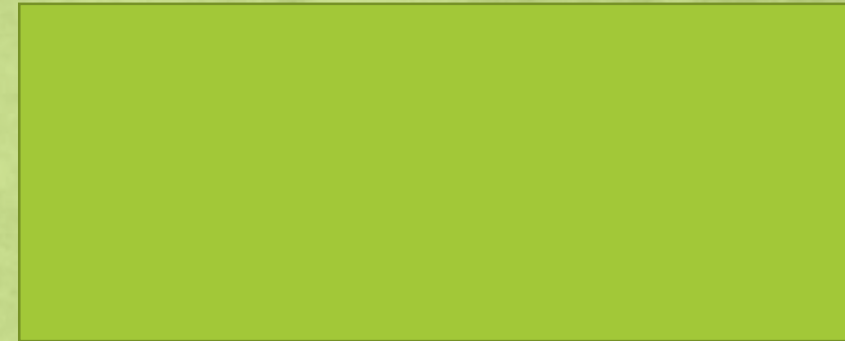
# **Das LUPI-Spiel in Alltag, Spieltheorie und Fachdidaktik**



# 1. Das LUPI-Spiel in Alltag, Spieltheorie und Fachdidaktik



A daily LUPI game called "Limbo" was offered by the Swedish state gaming company Svenska Spel between January and March 2007, attracting on average about 50,000 players. (Östling et al. 2011)



- Spektrum der Wissenschaft, Nov. 1997
- (Dezimal-)Zahlen von 0 bis 100
- N = 2728 Teilnehmende
- modifizierte Regel ( $\frac{2}{3}$  des arithm. Mittel der Einsendungen)  $\rightarrow$  ca. 14,7

+ weitere ähnliche Aktionen in anderen Ländern

+ weitere Aktionen bei Mediamarkt, Kaufland, ...

<https://www.merkur.de/lokales/muenchen-1k/euro-hausbesitzer-524754.html>  
<https://www.lottodeals.org/2016/09/26/millionen-deal-von-prosieben-sat-1-lohnt-sich-das-telefonergewinnspiel/>  
<https://www.aftonbladet.se/sportbladet/spe/a/0EpboB/svenska-spel-stanger-ner-spelet-limbo>



# 1. Das LUPI-Spiel in Alltag, Spieltheorie und Fachdidaktik



## Wenige fachmathematische Untersuchungen

- Kategorie der **statischen Spiele**, bei denen die beteiligten Spielenden als Entscheidungsträger ihre Entscheidung gleichzeitig ohne Kenntnis der anderen Entscheidungen treffen = **Spiel mit imperfekter Information** wird (Riechmann 2013)
- Experimentelle Versuchsreihe von 50 Spielrunden mit 3–4 Personen und der Auswahl von 1–3 bzw. 1–4 (Yamada & Hanaki 2016)

Bislang **keine** fachdidaktischen Vorschläge oder Erfahrungen für den Einsatz des Spiels im Mathematikunterricht





# 1. Das LUPI-Spiel in Alltag, Spieltheorie und Fachdidaktik

Kernforderungen der Fachdidaktik an eine schulische stochastische Grundbildung sind u. a.:

1. die **Fähigkeit zur Interpretation und kritischen Bewertung** stochastischer Informationen und zur **Modellierung stochastischer Phänomene**, die mithilfe von Daten und/oder Wahrscheinlichkeitsmodellen **auch in alltäglichen Kontexten** beschrieben werden (Krüger et al. 2015)
2. das Ziel, im späteren Leben **stochastische Entscheidungsprozesse reflektiert** zu bewältigen (NCTM 2000, S. 48f. sowie Eichler & Vogel 2013)
3. der Aufbau tragfähiger Vorstellungen für den Umgang mit/in Zufallssituationen durch die Verbindung der verschiedenen Sichtweisen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff: **subjektiver, frequentistischer und theoretischer Zugang** (Malle/Malle 2003)



*Inwieweit lassen sich die drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit (theoretisch, frequentistisch, subjektiv) mit einem einfachen Spiel wie LUPI mit Zufalls- und Strategieinflüssen gewinnbringend kombinieren und können die oben beschriebenen zentralen Anforderungen an den Stochastikunterricht erfüllt werden?*



# Vorschläge für und Erfahrungen von LUPI im Stochastikunterricht





## 2.1 LUPI - Das Zufallsspiel: Drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

### Der theoretische a-priori-Wahrscheinlichkeitszugang

- Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Zahl  $k$  von 1 bis  $n$  zu wählen ist  $\frac{1}{n}$ , diese Zahl  $k$  nicht zu wählen ist  $\frac{n-1}{n}$ .
- Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person aus  $m$  Personen die einzige ist, die rein zufällig eine Zahl  $k$  von 1 bis  $n$  wählt, ist  $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$
- die Wahrscheinlichkeit  $p$ , dass nur genau eine Person aus  $m$  Personen die einzige ist, die eine Zahl  $k$  von 1 bis  $n$  wählt, ist  $p = \sum_{i=1}^m \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} = \frac{m}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$

→ für die **LUPI-Zahl 1** gilt mit  $n = 15$  und  $m = 25$  (gut in z. B. Schulklassen):  $p = \frac{25}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{24} \approx 0,318 \approx 32\%$

→ für **LUPI-Zahlen > 1** schwieriger durch zusätzliche Bedingung, dass keine kleinere Zahl auch nur einmal gewählt ist

→ prinzipiell in der **Sekundarstufe 1** lösbar (Laplace-Wahrscheinlichkeit, Baumdiagramm, ...), später im Kontext diskreter Zufallsgrößen effektiver

→ **inhaltliches Verständnis**, dass je größer die Zahl, desto kleiner die Wahrscheinlichkeit, dass sie LUPI-Zahl ist



## 2.1 LUPI - Das Zufallsspiel: Drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit

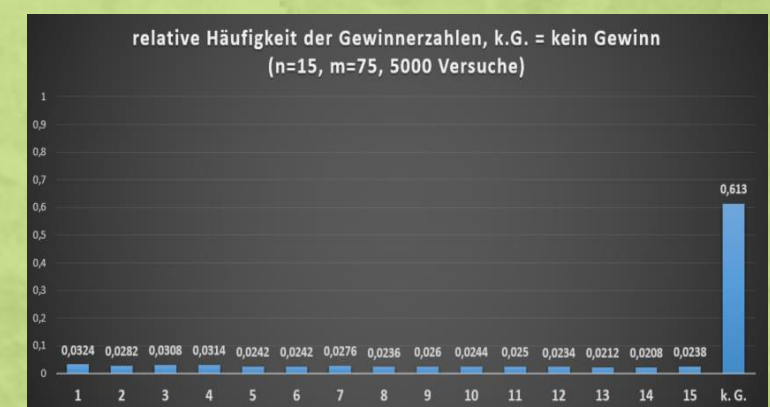
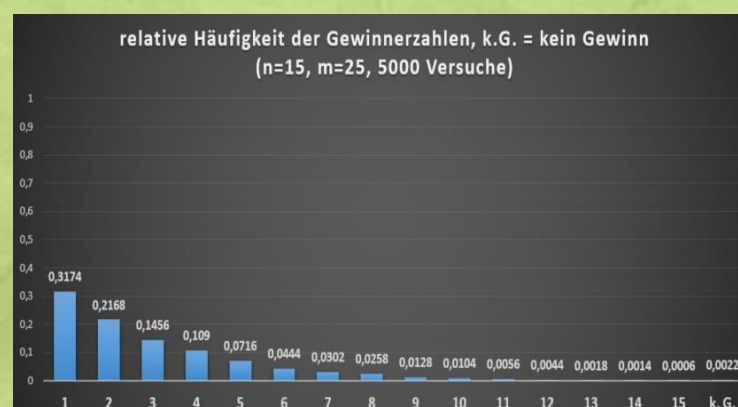
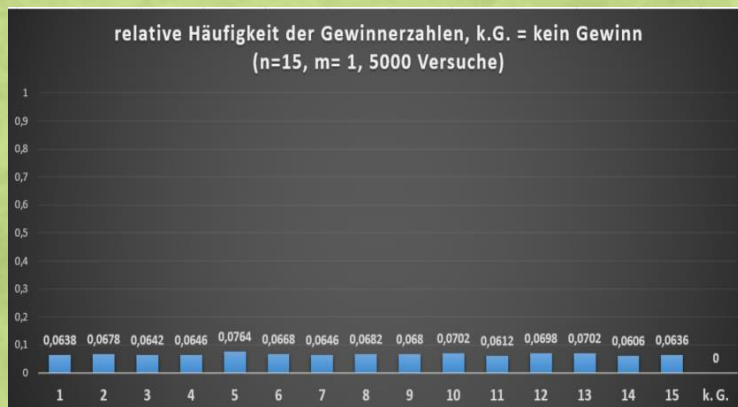
### Der frequentistische a-posteriori (und auch subjektive) Wahrscheinlichkeitszugang

- Nutzung digitaler Medien wie GeoGebra, MS Excel usw.
- Nur wenige Funktionen nötig: z. B. in Excel: Zufallsbereich(), Zählenwenn()
- Potenzial nutzen:
  - große Anzahl an unabhängigen Versuchsdurchführungen
  - variable Parameter  $n$  und  $m$
  - unmittelbare Visualisierung

Argumentieren/Kommunizieren  
**„Was passiert, wenn ...?“**

Erste Ergebnisse bei ca. 200 Lernenden aus Leipzig mit 4 vorgegebenen Verteilungen (konstantes  $n = 15$ , variable Werte für  $m$  mit  $m = 1, 25, 50, 100$ ) zeigen:

- ab Klassenstufe 9 wurde die Verteilung der Häufigkeiten nahezu fehlerfrei antizipiert und begründet
- Klassenstufen 6 bis 8 bereits > 75% korrekt zugeordnet und begründet





## 2.2 LUPI – Das Strategiespiel: Subjektiv-spieltheoretischer Ansatz

*Number Challenge – exklusiv & möglichst klein!*

Bei diesem kleinen Experiment gelten folgende einfache Regeln:

- Alle Teilnehmenden wählen jeweils geheim eine natürliche Zahl von 1 bis 15.
- Es gewinnt die Person, deren Zahl möglichst klein ist und nur 1x gewählt wurde.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Wie entscheiden Sie sich?

\_\_\_\_\_

Bitte geben Sie im Folgenden Ihr Geschlecht, Ihre gewählte Zahl und eine kurze Begründung für Ihre Wahl an.

Geschlecht: w  m  d       Meine Zahl:

Begründung für die Wahl:

Vielen Dank für Ihre Teilnahme & viel Erfolg!

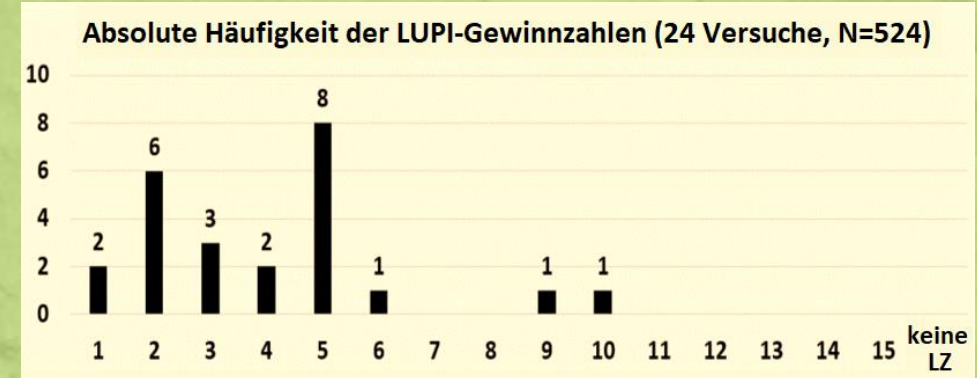
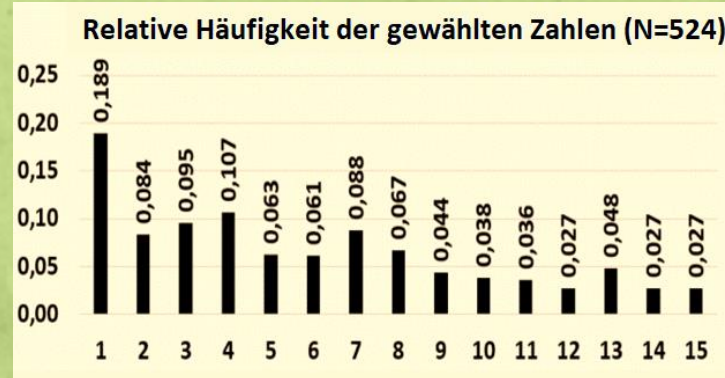


- einfacher analoger oder digitaler Einsatz
- kleiner Gewinn als Motivation
- Zahlenwahl & Begründung!
- Zeitumfang: ca. 10 Min. (inkl. Spielregelerklärung)
- ab Primarstufe aufwärts in allen Altersklassen und Schulformen problemlos durchführbar



## 2.2 LUPI – Das Strategiespiel: Subjektiv-spieltheoretischer Ansatz

Ergebnisse der Durchführung  
in 24 Gruppen mit 11 bis 35  
Teilnehmenden  
(N=524)



Vielfalt an Begründungen:

Geschlecht: w  m  d  Meine Zahl:

Begründung für die Wahl:

Umgekehrte Psychologie.  
Alle wählen höhere Zahlen.

Geschlecht: w  m  d  Meine Zahl:

Begründung für meine Wahl:

Ich habe die 1  
genommen weil ich  
denke das die anderen  
denken das viele die  
1 nehmen werden und  
des wegen nehmen die  
anderen nicht. (vielleicht)

Geschlecht: w  m  d  Meine Zahl:

Begründung für meine Wahl:

Ich nehme die 7, weil  
Es meine Lieblingszahl ist  
und weil ich die 7 beim Fuß-  
ball habe

Geschlecht: w  m  d  Meine Zahl:

Begründung für meine Wahl:

Nicht zu groß, nicht zu klein  
mit der 3 werd ich glücklich sein.

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15  
Geschlecht: w  m  d

fand die Zahl toll hat mich an-  
geschmeichelt :)

Geschlecht: w  m  d

1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

Aufgrund der Form der Zahl?  
Flamingo  
Die Zahl ähnelt einem Flamingo  
und ist deshalb sehr spezifisch.

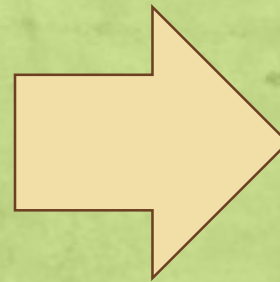
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15

$\frac{1}{7}$  erster Wert  $\frac{1}{n}$ , der im  
Sexagesimalsystem der Babylonier  
ein nicht abbrechendes  
Sexagesimalbruch ist.

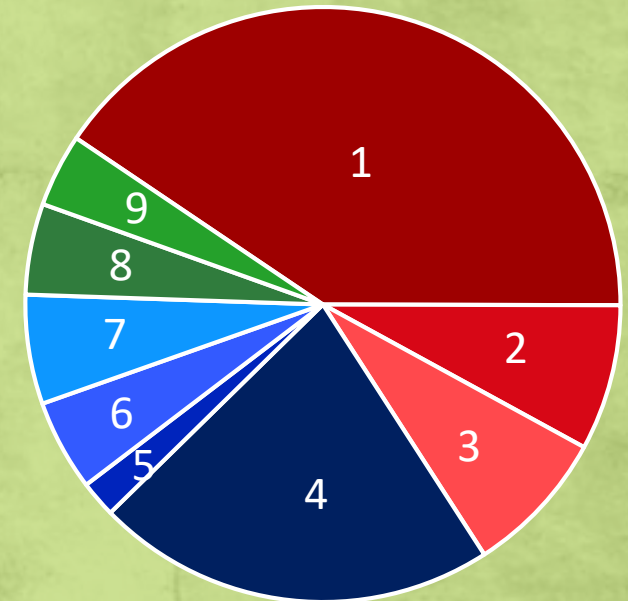


## 2.2 LUPI – Das Strategiespiel: Subjektiv-spieltheoretischer Ansatz

- Qualitative Inhaltsanalyse der individuellen Begründungen (Mayring 2015), Mehrfachzuordnungen möglich, 2 Codierende  
Interraterreliabilität (20 % der Fälle, zufällig)  
Cohens  $\kappa$  für die nominalskalierten Kategorien  
Code 1 bei  $\kappa = 0,862$  („sehr gut“)  
Code 2 bei  $\kappa = 0,623$  („gut“)  
Code 3 nicht berechnet
- Quantitative Bestimmung der Gesamtverteilung der Kategorien
- Analyse der Zusammenhänge zwischen Kategorien, gewählten Zahlen und der Gruppengröße



- 1) Spieltheoretische Überlegungen
- 2) Mathematik
- 3) Eigene Disposition
- 4) Persönliches
- 5) Ästhetik
- 6) Lebensweltbezug
- 7) Spiel(regel)bezug
- 8) nicht interpretierbar im Sinne einer Kategorie
- 9) keine Ahnung
- 99) fehlende Antwort






Vorstellungen der Lernenden für den Stochastikunterricht nutzen!



## Das LUPI-Spiel im Mathematikunterricht: Fazit

### Das LUPI-Spiel: „Spannung, Spiel (und Schokolade)“ ...

Kernforderungen der Fachdidaktik an eine schulische stochastische Grundbildung sind u. a.:

1. die **Fähigkeit zur Interpretation und kritischen Bewertung** stochastischer Informationen und zur **Modellierung stochastischer Phänomene** auch in **alltäglichen Kontexten** beschrieben werden (Krüger et al. 2015) 
2. das Ziel, im späteren Leben **stochastische Entscheidungsprozesse** reflektiert zu bewältigen (NCTM 2000, S. 48f. sowie Eichler & Vogel 2013) 
3. der Aufbau tragfähiger Vorstellungen für den Umgang mit/in Zufallssituationen durch die Verbindung der verschiedenen Sichtweisen zum **Wahrscheinlichkeitsbegriff** (Malle/Malle 2003) 

**... für alle Schulformen und darüber hinaus.**



## Das LUPI-Spiel im Mathematikunterricht: Ausblick



Die weitere Entwicklung finden Sie auch auf unserer LUPI-Homepage.

<https://www.mathcs.uni-leipzig.de/math/abteilungen/didaktik-der-mathematik/lupi-spiel>

- Ausarbeitung einer (digitale) Lernumgebung sowohl für den Unterricht als auch für den universitären Einsatz
- Weitere Untersuchungen der individuellen, subjektiven Überzeugungen der Lernenden mit Hilfe von Interviews, auch vor dem Hintergrund der mehrfachen Wiederholung des LUPI-Spiels

Bei Fragen kontaktieren Sie uns gern!





# Das LUPI-Spiel: Zufall und Strategie vereint im Mathematikunterricht



Baek, S. K. & Bernhardsson, S. (2010). Equilibrium solution to the lowest unique positive integer game. *Fluctuation and Noise Letters*, Vol. 09, No. 01 (S. 61–68).

Döring, N. & Bortz, J. (2016). *Forschungsmethoden und Evaluation in den Sozial- und Humanwissenschaften*. Springer.

Duval, R. (1999). Representation, Vision and Visualization: Cognitive Functions in *Mathematical Thinking. Proceedings of the Meeting of the North American Chapter of the International Group Psychology of Mathematics Education 1999* (S. 3–26).

Eichler, A. & Vogel, M. (2013). *Leitidee Daten und Zufall: Von konkreten Beispielen zur Didaktik der Stochastik*. Springer.

Krüger, K., Sill, H-D. u. a. (2015). *Didaktik der Stochastik in der Sekundarstufe I*. Springer.

Malle, G. & Malle, S. (2003): Was soll man sich unter einer Wahrscheinlichkeit vorstellen? *Mathematik lehren 118*, Friedrich-Verlag (S. 52–56).

Mayring, P. (2015). *Qualitative Inhaltsanalyse: Grundlagen und Techniken*. Beltz.

NCTM – The National Council of Teachers of Mathematics (2000). *Principles and standards for school mathematics*.

Östling, R., J. T.-Y. Want, E. Y. Chou, C. F. Camerer (2011). Testing Game Theory in the Field: Swedish LUPI Lottery Games. *American Economics Journal, Microeconomics* 3, August 2011 (S. 1–33).

Yamada, T. & Hanaki, N. (2016). An Experiment on Lowest Unique Integer Games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications*, 463/2016 (S. 88–102).