UNIVERSITÄT BIELEFELD
Fakultät für Mathematik

Didaktik der Mathematik
Universität Leipzig

Zufall gegen Strategie: Das LUPI-Spiel im Stochastikunterricht

Experiment und Theorie – Analoges und Digitales

Was erwartet Sie heute bei uns?

I
Vorstellen und Ausprobieren des LUPI-Spiels

II
Zufall und Wahrscheinlichkeit im Mathematikunterricht

III
Welche Zahlen wählen LUPI-Spielende und warum?

IV
Das LUPI-Spiel – Zufall… Strategie… Was denn nun?

V
Simulationen zum LUPI-Spiel

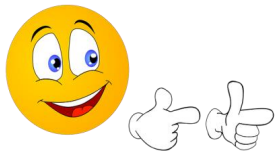
VI
Das LUPI-Spiel im Mathematikunterricht

I Das LUPI (Lowest Unique Positive Integer) - Spiel

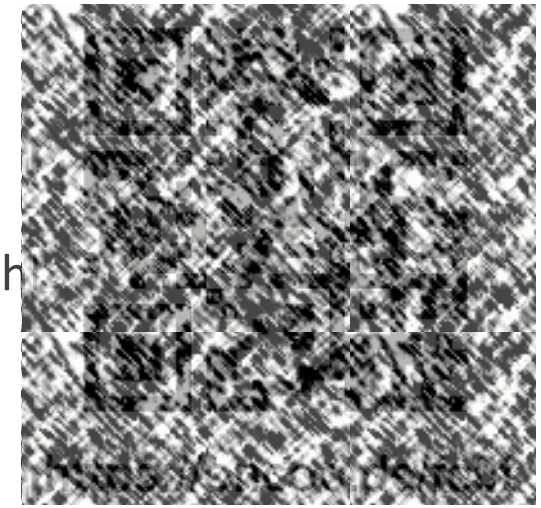
Spielregeln:

Alle Teilnehmenden wählen jeweils geheim eine natürliche Zahl von 1 bis 15.

Es gewinnt die Person, deren Zahl möglichst klein ist und nur 1x gewählt wurde.



Jetzt sind Sie dran!
Geben Sie bitte Ihre **Zahl**,
eine **kurze Begründung** für Ihre Wah
und **ein Kürzel/Ihren Namen** an.



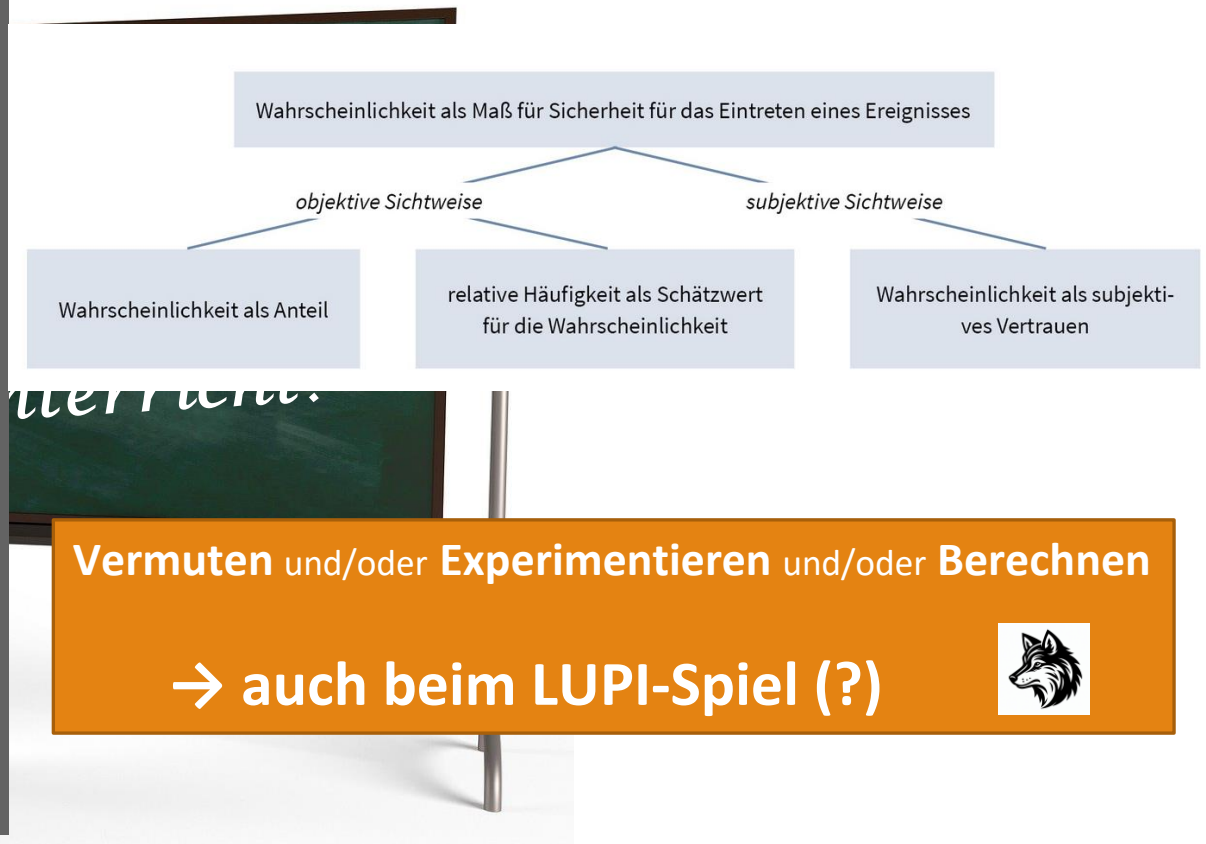
I Das LUPI – Spiel: Was es schon gibt - und was nicht…

Wenige fachmathematische Untersuchungen:

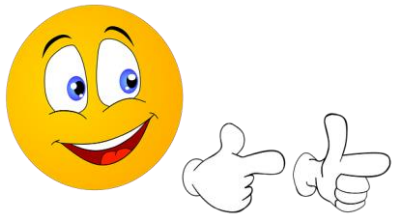
- Stets unter dem Blickwinkel der Spieltheorie, wie sich „rational denkende Menschen verhalten“
- Kategorie der **statischen Spiele**, bei denen die beteiligten Spielenden als Entscheidungsträger ihre Entscheidung gleichzeitig ohne Kenntnis der anderen Entscheidungen treffen
  = **Spiel mit imperfekter Information** wird (Riechmann, 2013)
- Experimentelle Versuchsreihe von 50 Spielrunden mit 3–4 Personen und der Auswahl der Zahlen von 1–3 bzw. 1–4 (Yamada & Hanaki, 2016; Yamada, 2024)

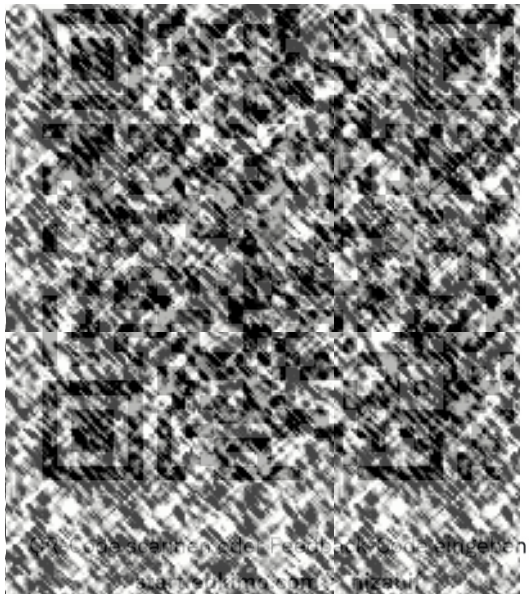
Bislang **keine** fachdidaktischen Vorschläge oder Erfahrungen für den Einsatz im Mathematikunterricht.

II Zufall und Wahrscheinlichkeit im MU … und das LUPI-Spiel (?)



III Zahlenwahl beim LUPI – Spiel: Was vermuten Sie?





1. Welche Zahl (1-15) wurde in unserer Studie mit insgesamt 814 Personen am häufigsten gewählt?
2. Welche Zahl (1-15) hat am häufigsten gewonnen?
3. Gibt es Unterschiede zwischen weiblichen und männlichen Spielenden?

III Zahlenwahl beim LUPI – Spiel: Ergebnisse unserer Studien

Tab. 1

Absolute und relative Häufigkeiten der gewählten Zahlen

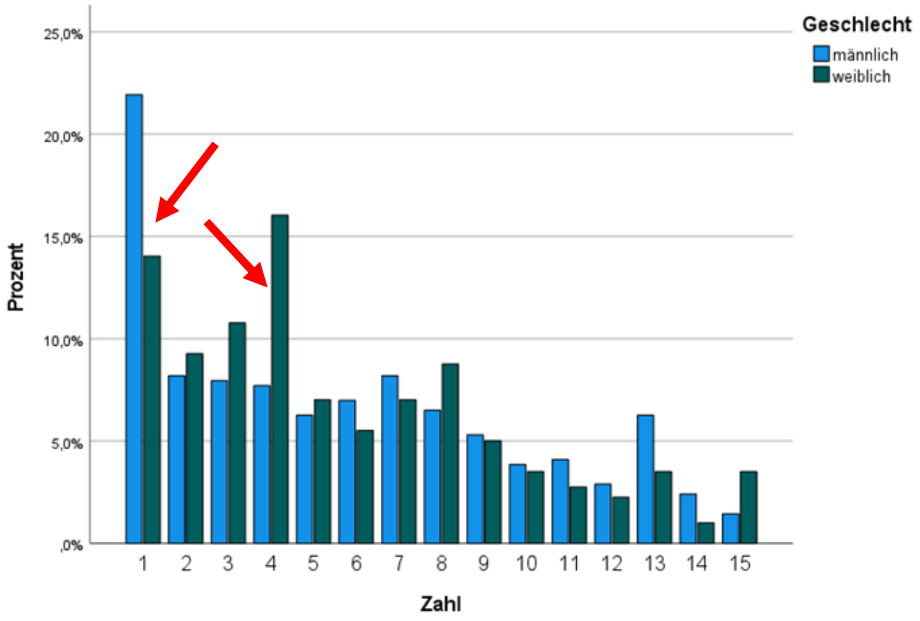
Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	Σ
abs. H.	147	71	76	96	54	51	62	62	42	30	28	21	40	14	20	814
rel. H. in %	18.1	8.7	9.3	11.8	6.6	6.3	7.6	7.6	5.2	3.7	3.4	2.6	4.9	1.7	2.5	100

Tab. 2

Absolute und relative Häufigkeiten der Gewinnzahlen der 36 Spielrunden

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	k.G.	Σ
abs. H.	5	8	6	3	8	2	1	1	1	1	0	0	0	0	0	0	36
rel. H. in %	13.9	22.2	16.7	8.3	22.2	5.6	2.8	2.8	2.8	2.8	0	0	0	0	0	0	100

Anmerkung: k. G. - keine Gewinnzahl



III Zahlenwahl beim LUPI – Spiel

Warum nur die Zahlen von 1 bis 15?

ChatGPT

Gute Idee! Das LUPI-Spiel eignet sich super für den Unterricht. 😊

Wahl des Zahlenbereichs für 25 Spieler

Damit das Spiel gut funktioniert, sollte der Zahlenbereich so gewählt werden, dass:

- Es genügend mögliche Zahlen gibt, damit nicht jede Zahl zwangsläufig mehrfach gewählt wird.
- Es aber auch nicht zu viele Zahlen gibt, sodass die Wahrscheinlichkeit steigt, dass mehrere Zahlen alleine stehen (was das Spiel weniger spannend macht).

Faustregel für die Anzahl der Zahlen

Ein guter Startpunkt ist ungefähr **die Hälfte der Spieleranzahl**, also:

$$n \approx \frac{Anzahl\ der\ Spieler}{2}$$

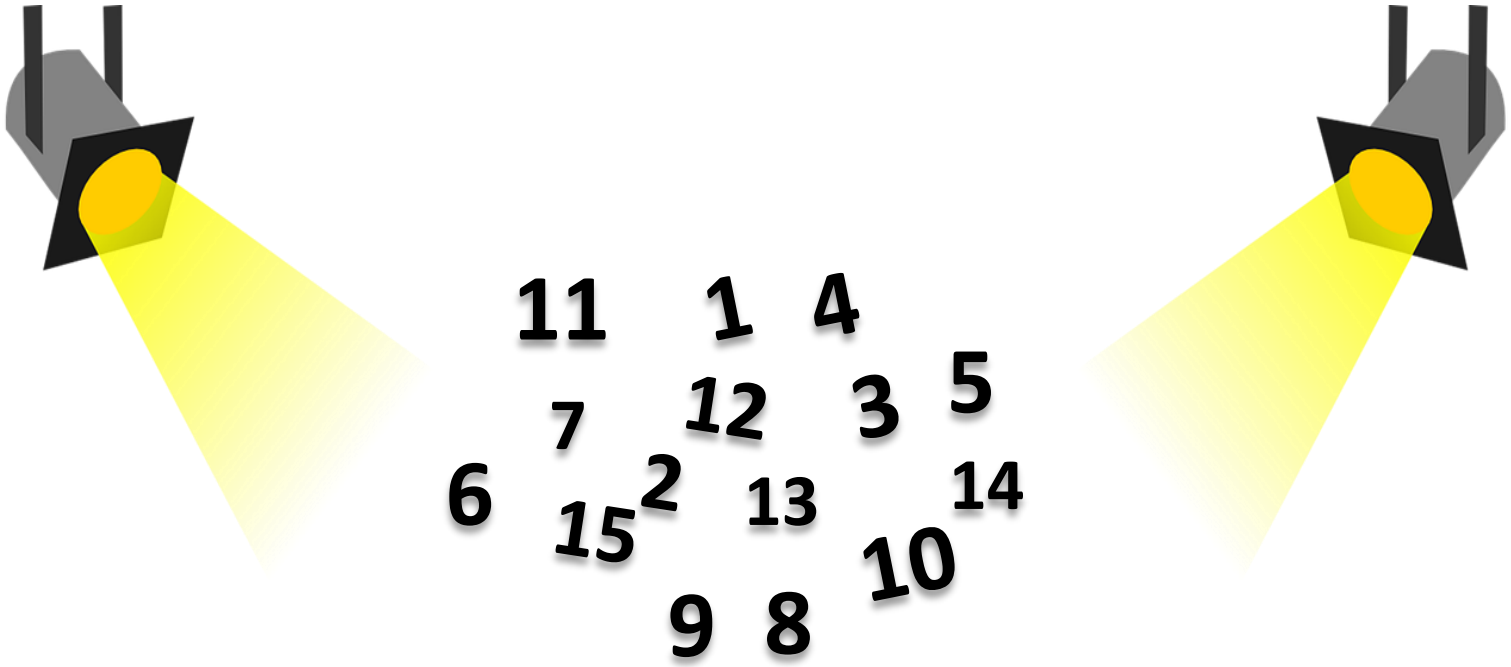
Das ergibt für deine 25 Schüler etwa **Zahlen von 1 bis 12 oder 1 bis 15.**

Empfohlene Zahlenbereiche für 25 Spieler

- **1 bis 12** → Wahrscheinlich noch viele doppelte Zahlen, das Spiel bleibt spannend.
- **1 bis 15** → Etwas mehr Vielfalt, aber immer noch taktisch interessant.
- **1 bis 20** → Mehr strategischer Raum, aber eventuell weniger Konflikte.

Ich würde **1 bis 15** empfehlen, damit es nicht zu zufällig wird, aber auch nicht zu chaotisch.

III Zahlenwahl beim LUPI – Spiel: Ihre Ergebnisse



III Begründungen beim LUPI – Spiel: Was vermuten Sie?

(1) Mit welchen Begründungen rechnen Sie?

(2) *Murmelphase*:
Versuchen Sie, die Begründungen zu ordnen/zu kategorisieren.

III Begründungen beim LUPI – Spiel: Finale Begründungskategorien

(1) Gruppenbezogene Überlegungen
(2) Mathematisches
(3) Situatives Gefühl
(4) Persönliches
(5) Ästhetisches
(6) Welt- und Allgemeinwissen
(7) Spielregelfokus
(8) Unspezifischer Grund
(9) Ineffabilität
(99) keine Antwort

Krohn & Schumacher (i. V.)

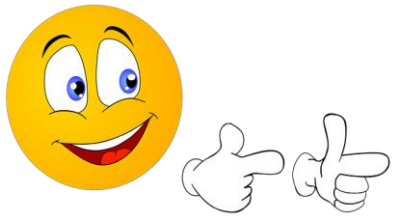
III Begründungen beim LUPI – Spiel

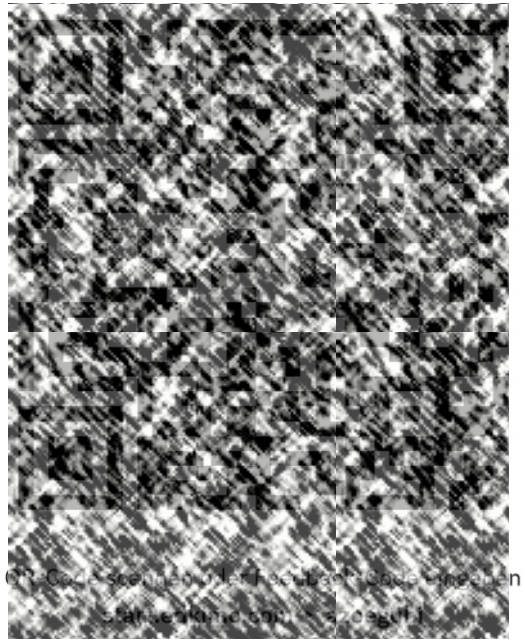
Unser Codierleitfaden

Kategorie	Definition	Ankerbeispiele	Codierregel
1 – Gruppenbezogene Überlegungen	Es werden Überlegungen angestellt, die einen Bezug zur Gruppe aufweisen.	• „Weil viele denken…“ • „Die anderen werden…“ • „Bei dieser Gruppengröße…“	Es muss explizit ein Bezug zur Gruppe hergestellt werden.
2 – Mathematisches	Es werden Bezüge zur Mathematik hergestellt bzw. mathematische Überlegungen durchgeführt.	• „Kleinste gerade Primzahl“ • „Ist eine vollkommene Zahl.“ • „Ist ein Teiler von 42.“	Es muss explizit ein Bezug zur Mathematik hergestellt werden.
3 – Situatives Gefühl	Es werden eigene aktuelle psychologische, motivationale Gründe für die Wahl der Zahl herangezogen.	• „Ich traue mich jetzt einfach mal.“ • „Weil ich auf mein Bauchgefühl gehört habe.“ • „Einfach mal rein ins Risiko.“	Es muss ein Bezug zur individuellen, momentanen Gefühlslage genannt werden.
4 – Persönliches	Es werden persönliche Gründe für die Wahl der Zahl angeführt.	• „Lieblingszahl.“ • „Meine Trikotnummer.“ • „Alter meines Hundes.“	Es muss explizit ein persönlicher Bezug zu der Zahl dargestellt werden.
5 – Ästhetisches	Die Ästhetik (Schönheit) der Zahl wird als Grund für deren Wahl angeführt.	• „Besonders hübsch.“ • „Wegen der Form der Zahl.“ • „Zahl sieht schön aus.“	Es muss auf eine ästhetische Eigenschaft der Zahl hingewiesen werden.
6 – Welt- und Allgemeinwissen	Es werden alltägliche Gegebenheiten oder Alltags-/Weltwissen zur Begründung für die Wahl der Zahl herangezogen.	• „Unglückszahl.“ • „Weil heute der 4. ist.“ • „Aller guten Dinge sind 3.“	Es wird ein konkreter Bezug zur Lebenswelt/zum Allgemeinwissen hergestellt.
7 – Spielregelfokus	Es wird auf die Spielregeln als Begründung für die Wahl der Zahl verwiesen.	• „Letzte Chance, nicht ganz hinten zu wählen.“ • „Liegt recht nahe am Anfang, aber nicht ganz vorn.“ • „Ist die kleinste Zahl mit der man gewinnen kann.“	Es muss ein Bezug zu den Inhalten der Spielregeln hergestellt werden.
8 – Unspezifischer Grund	Die Begründung ist nicht eindeutig einer der Kategorien zuzuordnen.	• „Weil sie gut ist.“ • „Weil es cool ist.“ • „Ist eine besondere Zahl.“	Es wird eine Begründung angeführt, die nicht eindeutig einer der anderen Kategorien zugeordnet werden kann. Z.B. wird die Besonderheit einer Zahl nicht näher erläutert, was keine eindeutige Zuordnung zu einer anderen Kategorie zulässt.
9 – Ineffabilität	Es kann kein expliziter Grund für die Wahl der Zahl formuliert werden. Der Grund konnte nicht in Worte gefasst werden.	• „Weiß ich nicht.“ • „Keine Gründe.“ • „Kann ich nicht sagen.“	Es wird als Begründung sinngemäß angeführt, dass man nicht weiß, warum man sich für die Zahl entschieden hat.
99 – keine Antwort	Es wird keine Begründung für die Wahl der Zahl formuliert.	[leeres Feld/keine Eintragung]	Es wurde keine Begründung notiert.

III Begründungen beim LUPI – Spiel: Was vermuten Sie?

Jetzt sind Sie gefragt!



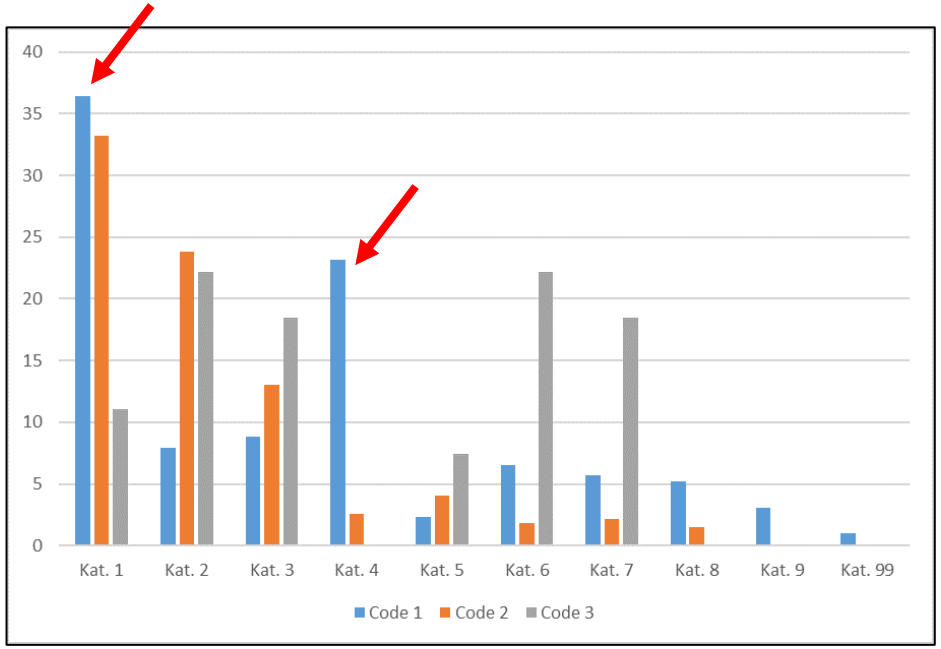


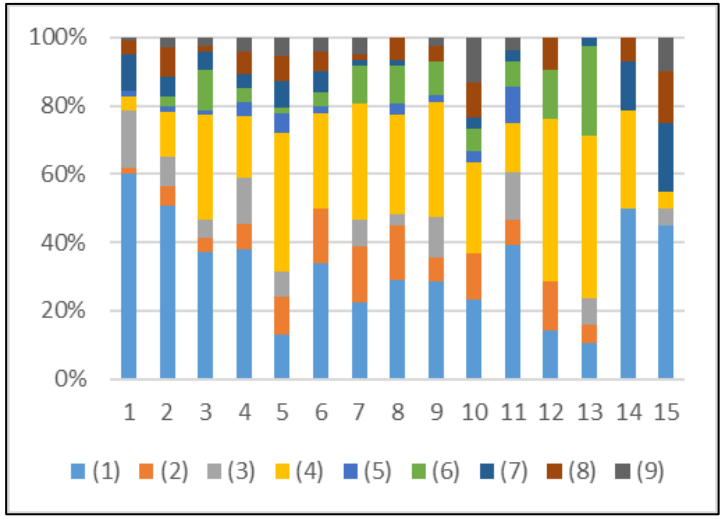
Welches sind die 3 am häufigsten vorkommenden Begründungskategorien?

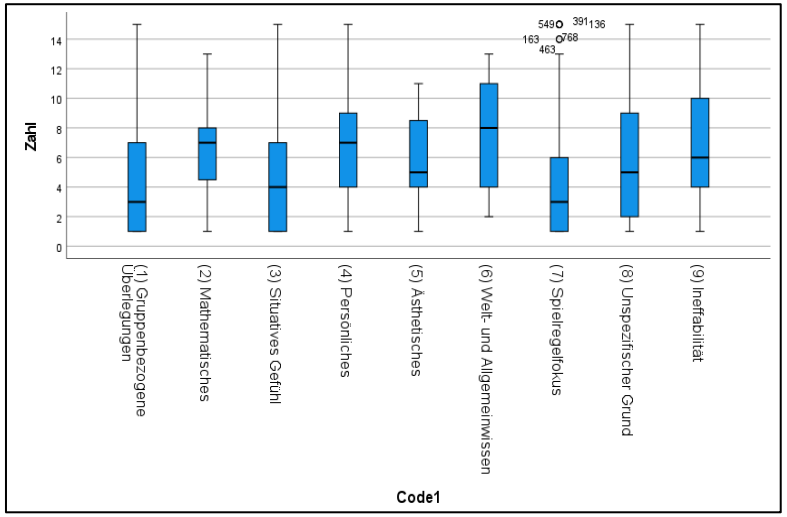
(1) Gruppenbezogene Überlegungen
(2) Mathematisches
(3) Situatives Gefühl
(4) Persönliches
(5) Ästhetisches
(6) Welt- und Allgemeinwissen
(7) Spielregelfokus
(8) Unspezifischer Grund
(9) Ineffabilität
(99) keine Antwort

(1) Gruppenbezogene Überlegungen
(2) Mathematisches
(3) Situatives Gefühl
(4) Persönliches
(5) Ästhetisches
(6) Welt- und Allgemeinwissen
(7) Spielregelfokus
(8) Unspezifischer Grund
(9) Ineffabilität
(99) keine Antwort

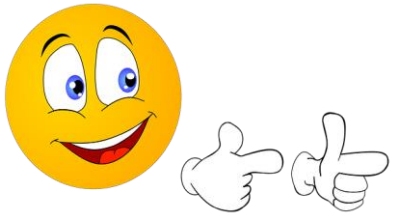
III Begründungen beim LUPI – Spiel: Ergebnisse der Hauptstudie







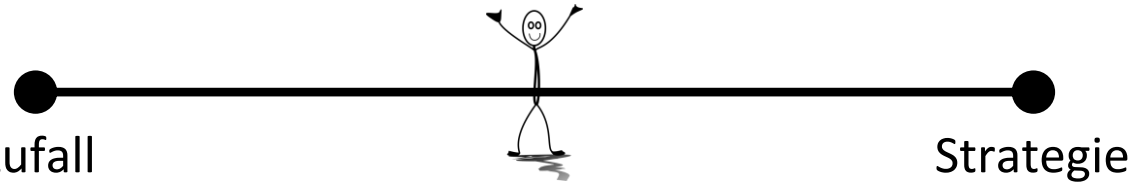
IV Strategie oder Zufall beim LUPI – Spiel: 2. Spielrunde



(1) Wir spielen LUPI noch einmal, nur etwas anders:

Bitte notieren Sie Ihre Zahl + Ihren Namen/Ihr Kürzel auf einer Karte, dieses Mal ohne Begründung.

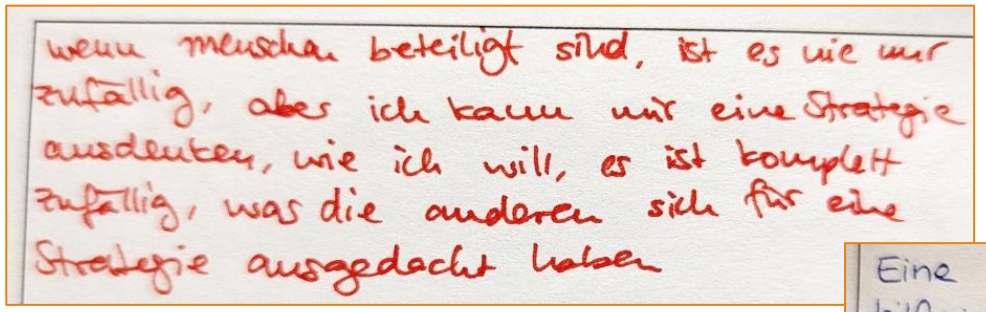
(2) Haben Sie Ihre Entscheidung anders getroffen?
Wenn ja, inwiefern?

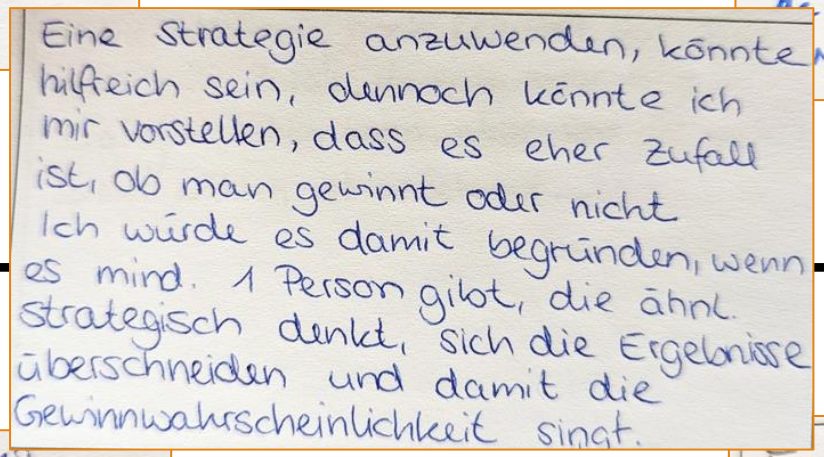


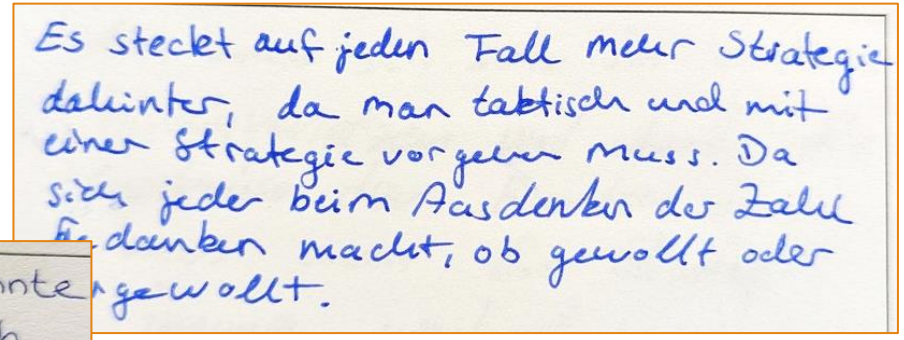
Option: *Meinungsstrahl*

(3) Zufall oder Strategie: Was ist es denn nun?

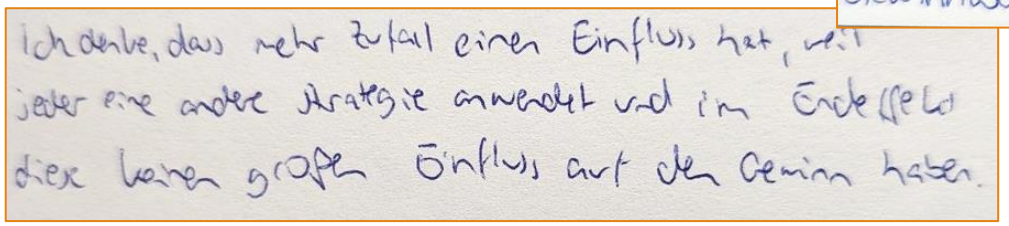
IV Strategie oder Zufall beim LUPI – Spiel: 2. Spielrunde

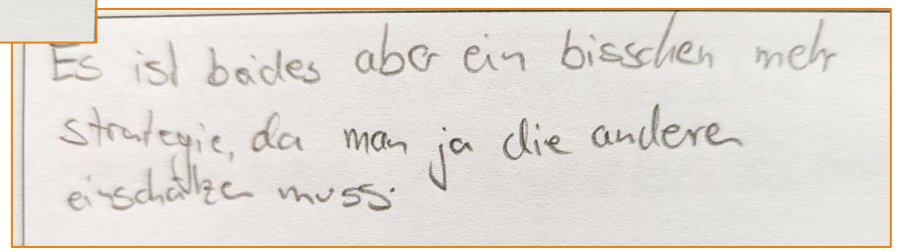

wenn Menschen beteiligt sind, ist es wie nur zufällig, aber ich kann mir eine Strategie ausdenken, wie ich will, es ist komplett zufällig, was die anderen sich für eine Strategie ausgedacht haben


Eine Strategie anzuwenden, könnte hilfreich sein, dennoch könnte ich mir vorstellen, dass es eher Zufall ist, ob man gewinnt oder nicht. Ich würde es damit begründen, wenn es mind. 1 Person gibt, die ähnl. strategisch denkt, sich die Ergebnisse überschneiden und damit die Gewinnwahrscheinlichkeit sinkt.


Es steckt auf jeden Fall mehr Strategie dahinter, da man taktisch und mit einer Strategie vorgehen muss. Da sich jeder beim Ausdenken der Zahl Gedanken macht, ob gewollt oder gewollt.

Zufall — Strategie


Ich denke, dass mehr Zufall einen Einfluss hat, weil jeder eine andere Strategie anwendet und im Endeffekt dies keinen großen Einfluss auf den Gewinn haben.


Es ist beides aber ein bisschen mehr Strategie, da man ja die andere einschätzen muss.

Sekundarstufe II, Leipzig 2024

IV Strategie oder Zufall beim LUPI – Spiel

Mögliche Fragen, die man in der Unterrichts-Diskussion aufwerfen kann:

- Welche **zufälligen** und **strategischen Einflüsse** bietet die Spielregel?
- Kann man überhaupt von einer "**optimalen Strategie**" sprechen, wenn jeder Spieler auch strategisch denkt?
- Wie beeinflusst die **Gruppengröße** (z. B. 25 Personen) das Gleichgewicht zwischen Zufall und Strategie?
- Gibt es **Situationen**, in denen es besser ist, zufällig zu wählen, und wann könnte es besser sein, eine Strategie zu haben?
- Was passiert, wenn **mehrere Runden** gespielt werden?
- …

IV Strategie oder Zufall beim LUPI – Spiel: Zentrale Ergebnisse der Langzeitstudie I

TOP 3-Zahlen der jeweiligen Runden (N=193):

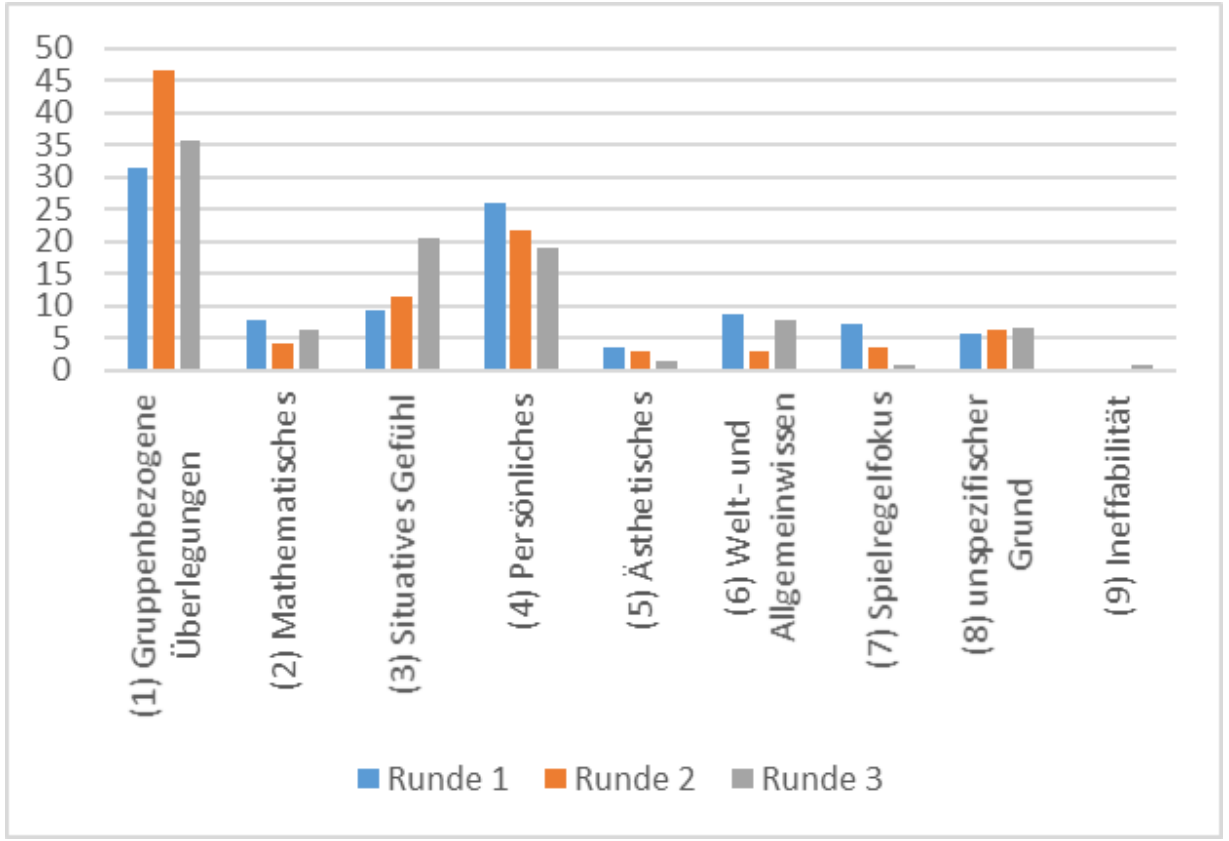
Runde 1	Runde 2	Runde 3
1 (19,7 %)	4 (18,7 %)	2 (16,6 %)
4 (12,4 %)	2 (13,0 %)	1 (16,1 %)
2 & 8 (je 9,3 %)	1 (12,4 %)	4 (15,0 %)

Gewinnzahlen über die drei Runden:

Zahl	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	k.G.
abs. H.	1	2	4	2	2	3	2	4	1	0	2	0	1	0	0	0
rel. H. in %	4,1	8,3	16,7	8,3	8,3	12,5	8,3	16,7	4,1	0	8,3	0	4,1	0	0	0

IV Strategie oder Zufall beim LUPI – Spiel: Zentrale Ergebnisse der Langzeitstudie II

Relative Häufigkeiten in Prozent der Kategorien für Code 1 zu den drei Messzeitpunkten



V LUPI aus der Sicht des Zufalls

Lässt sich im Fall eines *rein zufälligen Spiels* ohne Strategieeinflüsse (!) eine Wahrscheinlichkeit bestimmen? Und wenn ja, wie?

Zur Erinnerung: 25 Spielende in einer Klasse, Zahlen zwischen 1 und 15

Plugging (18) into the general stochastic approximation result (6) gives the desired result for fixed N-player games.

For *Poisson-distributed* N, we have

$$\Pr(X(k)=j+1)=\frac{e^{np_k}(np_k)^{j+1}}{(j+1)!}=\frac{np_k}{j+1}\frac{e^{np_k}(np_k)^{j}}{j!}=\frac{np_k}{j+1}\Pr(X(k)=j+1).$$

Plugging this into (17) yields

$$\begin{aligned}&\mathbb{E}\left[r_k^{PFD}(t)\,|\mathcal{F}_t\right]\\&=\sum_{j=0}^{N-1}\frac{np_k}{j+1}\Pr(X(k)=j+1)\,\mathbb{E}\left[(j+1)(u_k(t)+c)\,|Y(k)=j\wedge X(k)=j+1\right]\\&=np_k\sum_{j=0}^{N-1}\Pr(X(k)=j+1)\,\mathbb{E}\left[(u_k(t)+c)\,|Y(k)=j\wedge X(k)=j+1\right]\\&=np_k\left(\pi_k(p(t))+c\right).\end{aligned}$$

Using this in the general stochastic approximation result (6) gives the desired result for Poisson games. Q.E.D.

Östling et al. 2011, S. 44

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung

In Sekundarstufe I: **Reduktion** der Fälle: 4 Spielende, Zahlen von 1 bis 3

Mögliche heuristische Strategie zum Lösen dieses (kleinen) Problems: Systematisches Probieren

Spieler 1	Spieler 2	Spieler 3	Spieler 4
1	1	1	1
1	1	1	2
1	1	1	3
1	1	2	1
…	…	…	…

Insgesamt $3 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 3 = 81$ Möglichkeiten

Aber: Für das ursprüngliche Problem mit 25 Spielenden und 15 Zahlen …

… **15^{25} Möglichkeiten**

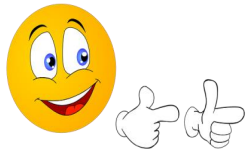
Die Zahl 252.511.682.940.423.488.616.943.359.375 lautet

252 Quadrilliarden 511 Quadrillionen
682 Trilliarden 940 Trillionen
423 Billiarden 488 Billionen
616 Milliarden 943 Millionen
359 Tausend 375

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung

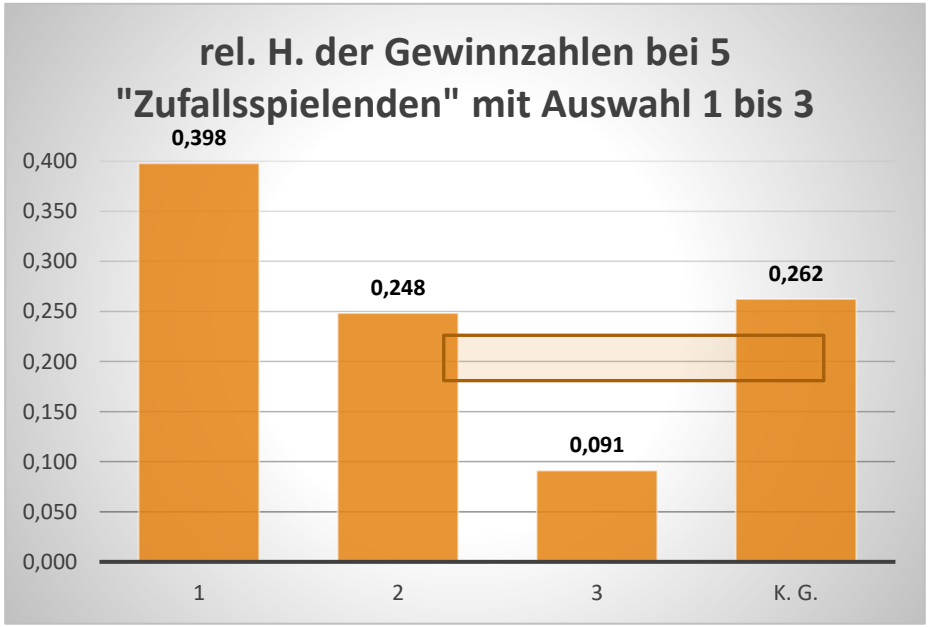
Digitale Simulation mittels Tabellenkalkulation
über einige/viele/sehr viele Runden
(→ Empirisches Gesetz der großen Zahlen)

[Vorlage: https://kurzlinks.de/1tpf]



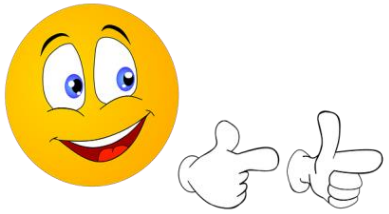
Hilfreiche Befehle:
= Zufallsbereich()
= Wenn()
= Zählenwenn()

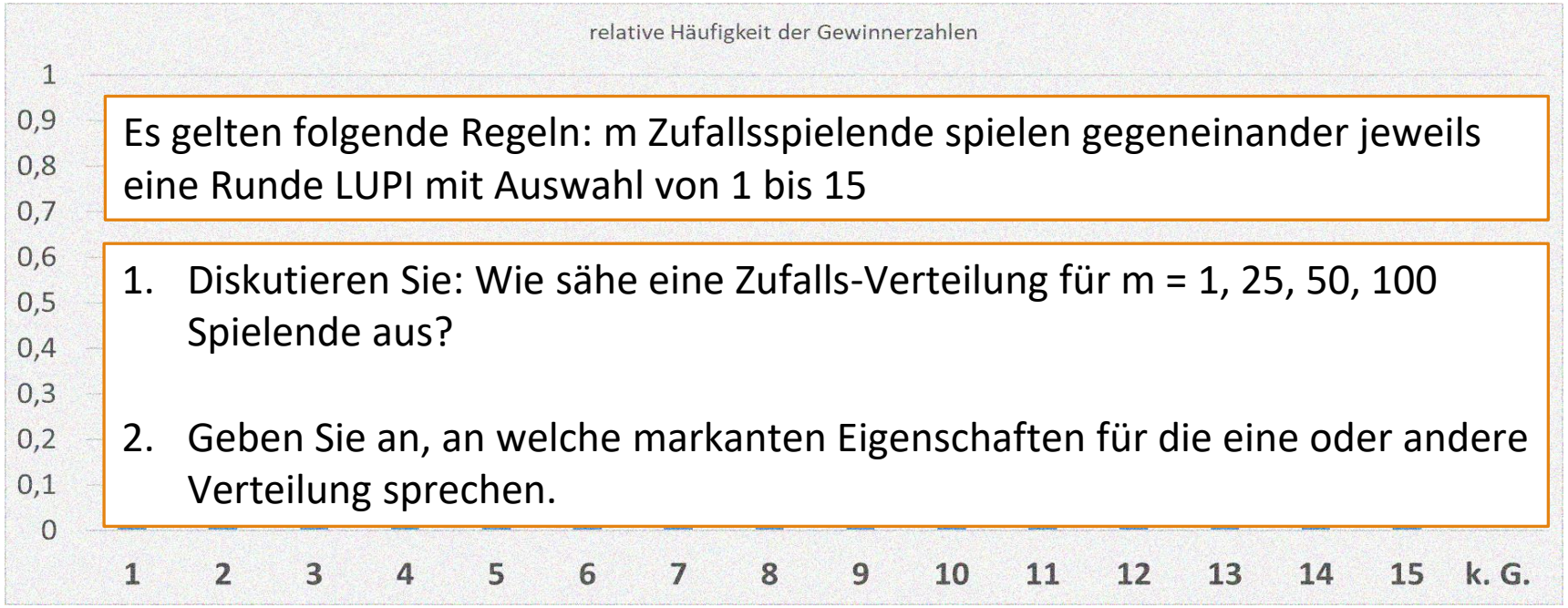
Wahrscheinlichkeiten der Gewinnzahlen	
1	0,395
2	0,247
3	0,099
k. G.	0,259



Potenzial und Grenzen einer Simulation

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung



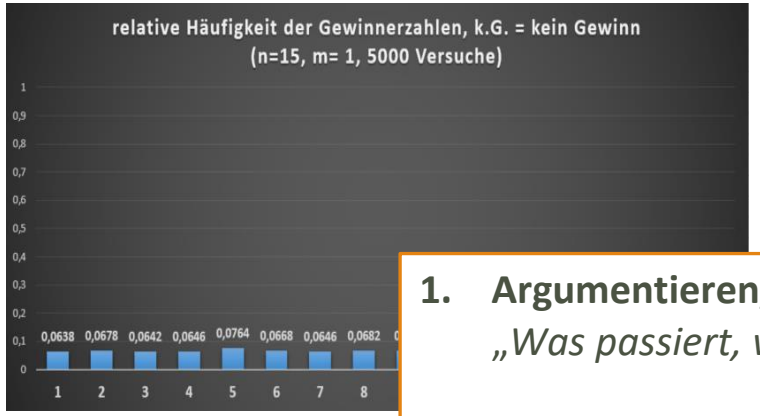


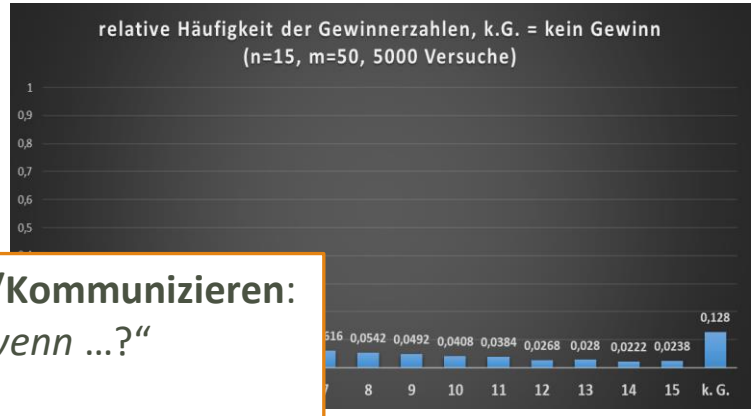
Es gelten folgende Regeln: m Zufallsspielende spielen gegeneinander jeweils eine Runde LUPI mit Auswahl von 1 bis 15

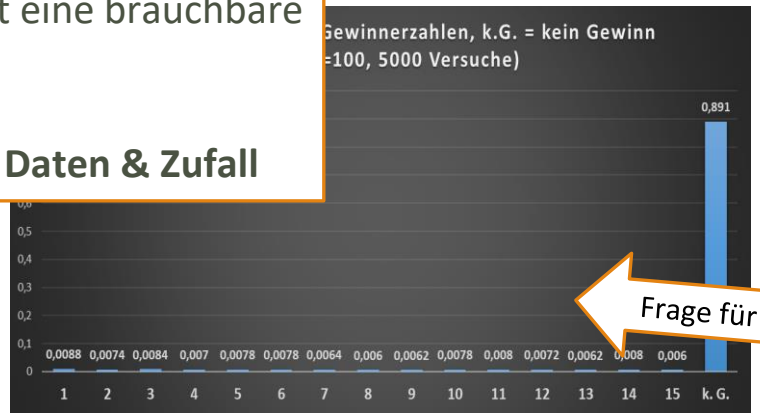
1. Diskutieren Sie: Wie sähe eine Zufalls-Verteilung für m = 1, 25, 50, 100 Spielende aus?

2. Geben Sie an, an welche markanten Eigenschaften für die eine oder andere Verteilung sprechen.

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung







1. **Argumentieren/Kommunizieren**: *„Was passiert, wenn …?“*
2. **Ausprobieren** ist eine brauchbare Strategie!
3. Verbindung von **Daten & Zufall**

Erste Ergebnisse bei ca. 200 Lernenden aus Leipzig mit 4 vorgegebenen Verteilungen zeigen:
(konstantes $n = 15$, variables $m = 1, 25, 50, 100$)

- Genannte Eigenschaften bzw. Hinweise für die Lernenden: „Laplace-Versuch“, „Gleichverteilung“, „kein Gewinn-Fälle“, „abfallende Wahrscheinlichkeiten je größer…“, …
- **ab Klassenstufe 9** wurde die Verteilung der Häufigkeiten nahezu fehlerfrei antizipiert und begründet
- **Klassenstufen 6 bis 8** bereits > 75% korrekt zugeordnet und begründet (geringe Unsicherheit bei *m*=25 und *m*=50)

Frage für die Experten: Warum hier wieder annähernd Gleichverteilung?

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung

Theoretischen a-priori-Wahrscheinlichkeitszugang **inhaltlich** verstehen (Krohn & Schumacher 2024)

Vorbetrachtung: 1.) für die 1 am einfachsten, weil nur eine Bedingung (alleinig)
2.) Je größer die Zahl, desto kleiner die Wahrscheinlichkeit, dass sie LUPI-Zahl ist.

- Wahrscheinlichkeit, eine bestimmte Zahl k von 1 bis n zu wählen ist $\frac{1}{n}$, diese Zahl k nicht zu wählen ist $\frac{n-1}{n}$
- Wahrscheinlichkeit, dass eine bestimmte Person aus m Personen die einzige ist, die rein zufällig eine Zahl k von 1 bis n wählt, ist $\frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$
- die Wahrscheinlichkeit p, dass nur genau eine Person aus m Personen die einzige ist, die eine Zahl k von 1 bis n wählt,
  ist $p = \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1} = m \cdot \frac{1}{n} \cdot \left(\frac{n-1}{n}\right)^{m-1}$ → also z. B. mit m=25 und n=15: $p = \frac{25}{15} \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{24} \approx 0{,}318$

V LUPI aus der Sicht des Zufalls zwischen Simulation und Berechnung

Theoretischer a-priori-Wahrscheinlichkeitszugang **eher formal**

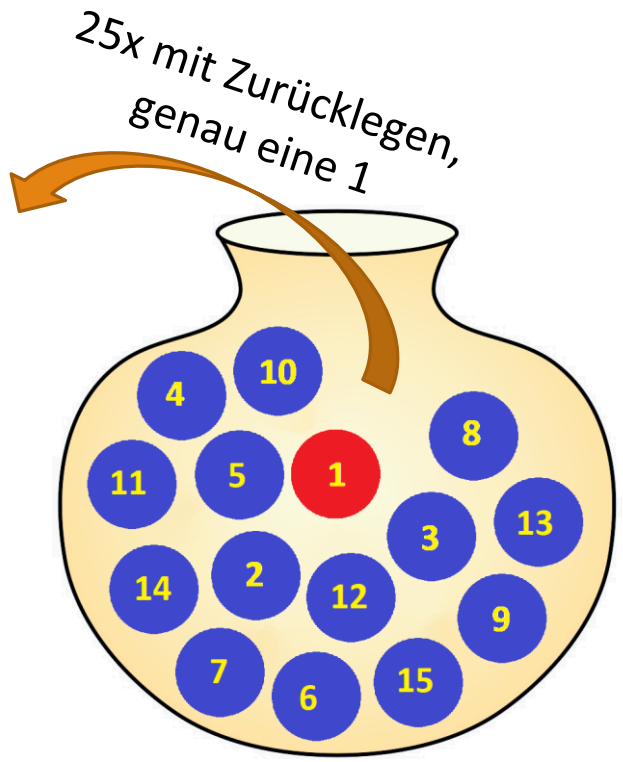
sei $X \sim B(m, p, k)$ mit m... Anzahl der Spielenden

$p = \frac{1}{15}$ (wegen 15 Zahlen)

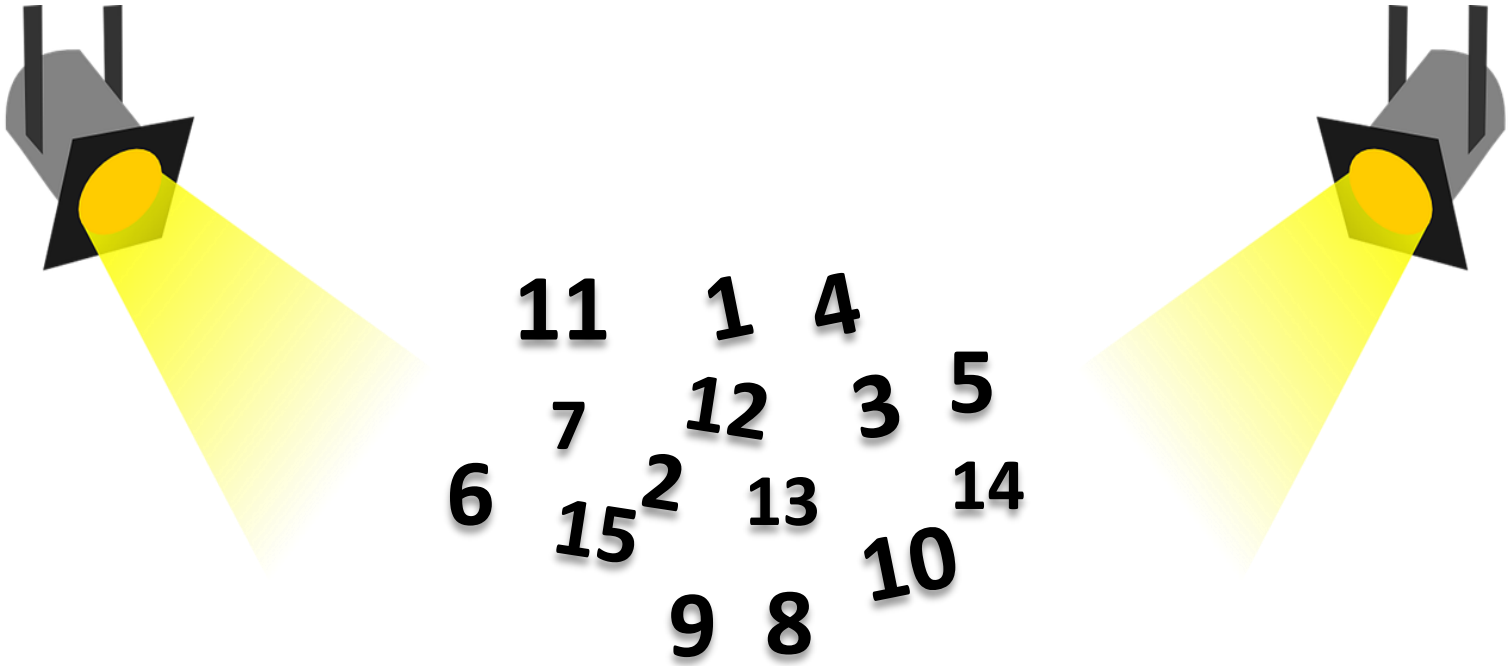
$k = 1$ (Anzahl Einsen)

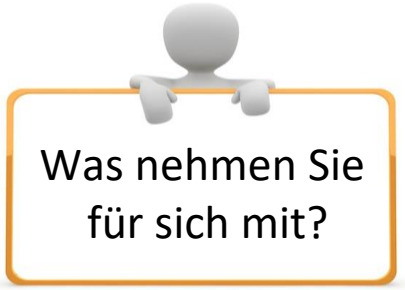
allgemein $P(X = k) = \binom{m}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{m-k}$

für z. B. m=25 $P(X = 1) = \binom{25}{1} \cdot \left(\frac{1}{15}\right)^1 \cdot \left(\frac{14}{15}\right)^{24} = 0{,}318$



Gewinnzahl aus der 2. Spielrunde





VI LUPI im Mathematikunterricht!

- Jeder kann gewinnen!
- LUPI als motivierendes Spiel für den Stochastikunterricht, das leicht und schnell umsetzbar ist.
- Alle drei Zugänge zur Wahrscheinlichkeit können mit LUPI thematisiert werden, v. a. aber der häufig vernachlässigte subjektivistische Zugang.
- Kommunizieren, Argumentieren, Simulieren, Thematisieren von Heuristiken im Fokus.

Danke für Ihre Neugier, Ihr Interesse und Ihre Zeit! ☺

Mehr Informationen

...oder einfach Google nach „LUPI-Spiel“ fragen!

☺

https://www.mathcs.uni-leipzig.de/math/abteilungen/didaktik-der-mathematik/lupi-spiel

Literatur

Kleine, M., & Schmelzer, N. (2023). Steck weg, die 6! Grundvorstellungen zum Wahrscheinlichkeitsbegriff verbinden. *mathematik lehren*, *2023*(236), 24-28.

Krohn, T., & Schumacher, S. (2024). Das LUPI-Spiel: Zufall und Strategie vereint. In P. Ebers, F. Rösken, B. Barzel, A. Büchter, F. Schacht & P. Scherer (Hrsg.): *Beiträge zum Mathematikunterricht* 2024, S. 1014-1044. WTM.

Krohn, T., & Schumacher, S. (i. V.). Das LUPI-Spiel: „No risk, no fun“ – Entscheidungsfindung unter Ungewissheit im Mathematikunterricht. *Journal für Mathematikdidaktik*. Special Issue: Risk Literacy.

Riechmann, T. (2013). *Spieltheorie*. Vahlen.

Östling, R., Wang, J. T., Chou, E. Y., & Camerer, C. F. (2011). Testing game theory in the field: Swedish LUPI lottery games. *American Economic Journal: Microeconomics, 3*(1), 1-33.

Yamada, T. (2024). Evolutionary competition in small-size lowest unique integer games. *Journal of Advanced Computational Intelligence and Intelligent Informatics*, 28(2), 413-430.http://dx.doi.org/10.20965/jaciii.2024.p0413

Yamada, T., & Hanaki, Y. (2016). An experiment on lowest unique integer games. *Physica A: Statistical Mechanics and its Applications, 463*, 88-102. https://doi.org/10.1016/j.physa.2016.06.108