Ellipsen und Ellipsoide

- Mathematische Modelle -

Praktikumsarbeit
am Mathematischen Institut der Universität Leipzig

von

Loreen Hertäg

angefertigt im Mai 2003

Inhaltsverzeichnis

1 Historische Hintergründe und Zielsetzung

Die umfassendste Sammlung an mathematischen Modellen befindet sich am Mathematischen Institut der Universität Göttingen. Das 1929 vollendete Gebäude beherbergt über 60 Vitrinen mit Modellen. Der dazugehörige Katalog umfasst Tausende Nummern. 1863 gab es den ersten Hinweis zu Modellen solcher Art von Kummer. Es folgten weitere von ihm erläuterte Modelle im Jahre 1866 und 1872. In den 70er Jahren des 19. Jahrhunderts begann dann eine umfangreiche Produktion mathematischer Modelle. Am Anfang stellte man Kartonmodelle her, doch dies änderte sich kurz darauf und es entstanden zahlreiche Gipsmodelle. Die Originale wurden aus spezieller Modelliermasse produziert, sodass man später eine beliebige Anzahl von Gipsabdrücken gewinnen konnte. Mit Beginn des ersten Weltkrieges kam die Herstellung von mathematischen Modellen jedoch zum Erliegen. Leider sind seit dem die wertvollen Objekte fast in Vergessenheit geraden.

Auch am Mathematischen Institut der Universität Leipzig befindet sich eine Modellsammlung, die zur Zeit jedoch nicht der Öffentlichkeit zugänglich und auch nur teilweise katalogisiert bzw. beschrieben ist. Diese Lücken sollen mit Hilfe von Praktikums- und Staatsexamens- bzw. Diplomarbeiten geschlossen werden. Dabei steht die Erfassung der Objekte, deren ausführliche Beschreibung und ihre Präsentation im Vordergrund.

Diese Praktikumsarbeit soll mit ein erster Schritt zur Verwirklichung dieses Zieles sein. Am Anfang steht dabei eine ausführliche Vorstellung von Ellipsen, die dann später auf die Beschreibung von Ellipsoiden angewandt wird; die differentialgeometrischen Aspekte bleiben in dieser Arbeit unberücksichtigt. Abschließend wird ein konkretes Modell eines Ellipsoids aus der Modellsammlung des Mathematischen Instituts vorgestellt.

2 Die Kegelschnitte

Schneidet man einen Kreiskegel mit einer Ebene, so können drei verschiedene Klassen von Schnittkurven entstehen, die man Kegelschnitte nennt. Man unterscheidet die Fälle, je nachdem unter welchem Winkel die Schnittebene geneigt ist. Somit erhält man entweder Ellipsen, Parabeln oder Hyperbeln. (siehe Anhang: Abb. 1 und Abb. 2)

3 Ellipsen: Allgemeine Beziehungen

Die Ellipse ist eine geschlossene Kurve. Sie ist durch zwei Halbachsen eindeutig bestimmt. Diese Halbachsen stehen senkrecht aufeinander und schneiden sich im Mittelpunkt M der Ellipse. Als Achsen der Ellipse bezeichnet man die jeweils über den Mittelpunkt hinaus verdoppelten Halbachsen. Die Längen a, b der Halbachsen sind die Radien und die Längen $2a, 2b$ der Achsen die Durchmesser der Ellipse. Für $a = b$ haben wir es mit einem Kreis zu tun. Ansonsten, also wenn $a \neq b$, bezeichnet man die längere der beiden Achsen als Hauptachse und die kürzere als Nebenachse. Auf der Hauptachse befinden sich die beiden Brennpunkte F_1, F_2 der Ellipse. Die allgemeine Bezeichnung der Brennpunkte kommt von der Reflexionseigenschaft der Ellipse. Ein von F_1 ausgehender Strahl wird immer so an der Ellipse reflektiert, dass er durch F_2 geht. Die Entfernung vom Mittelpunkt zu einem Brennpunkt heißt lineare Exzentrizität und wird meist mit e bezeichnet. Die numerische Exzentrizität k bezeichnet den konstanten Wert des Verhältnisses der Abstände eines Punktes P der Ellipse von einem festen Punkt F, nämlich einem der Brennpunkte, und einer festen Geraden $\mathfrak{g}$, der sogenannten Leitlinie (siehe 4.2). Laut Anhang, Abb. 3 ergibt sich z.B. das Verhältnis: $\frac{d(P,F)}{d(P,\mathfrak{g})} = k$.

4 Definitionen

4.1 Ortsdefinition

Nach der Ortsdefinition besteht eine Ellipse $\mathfrak{E}$ aus der Menge aller Punkte P, für welche die Summe der Abstände von zwei festen Punkten F_1 und F_2 konstant gleich $2a$ ist. Somit gilt

$$\mathfrak{E} = \{P \mid d(F_1, P) + d(F_2, P) = 2a\}.$$

F_1 und F_2 sind dann die Brennpunkte von $\mathfrak{E}$ und $2a$ ist die Länge der Hauptachse von $\mathfrak{E}$.

4.2 Leitliniendefinition

Nach der Leitliniendefinition besteht eine Ellipse $\mathfrak{E}$ aus der Menge aller Punkte P, für welche das Verhältnis des Abstands zu einer Geraden $\mathfrak{g}$ und zu einem Punkt F konstant ist, sagen wir gleich k, wobei $0 < k < 1$, d. h. es gilt

$$\mathfrak{E} = \left\{ P \mid \frac{d(P, \mathfrak{g})}{d(P, F)} = k \right\}.$$

Die Gerade $\mathfrak{g}$ heißt Leitlinie von $\mathfrak{E}$ und F ist einer der Brennpunkte von $\mathfrak{E}$, nämlich der der Leitlinie am nächsten liegende.

Für $k = 1$ entsteht eine Parabel und für $k > 1$ Hyperbeln.

4.3 Leitkreisdefinition

Nach der Leitkreisdefinition besteht eine Ellipse $\mathfrak{E}$ aus der Menge aller Punkte P, für welche die Abstände von einem Kreis $\mathfrak{k}$ und einem Punkt F gleich sind, d.h. es gilt

$$\mathfrak{E} = \{P \mid d(\mathfrak{k}, P) = d(F, P)\}.$$

Der Punkt F ist einer der Brennpunkte der Ellipse $\mathfrak{E}$.

5 Konstruktionen

5.1 Gärtnerkonstruktion

Bei der Gärtnerkonstruktion nutzt man eine Eigenschaft der Ellipse, die bei der Ortsdefinition zum Tragen kommt. Man legt zwei Punkte F_1,F_2 fest und steckt diese mit Stecknadeln ab. Dann legt man eine Fadenschlinge um die beiden Nadeln, zieht diese mit einem Bleistift straff und fährt damit um die Punkte. Die Punkte F_1,F_2 sind dann die Brennpunkte der Ellipse.

5.2 Ellipsenkonstruktion

Der Ursprung eines kartesischen (x, y)-Koordinatensystems sei Mittelpunkt zweier unterschiedlich großer (also konzentrischer) Kreise $\mathfrak{k}_1$,$\mathfrak{k}_2$. Man zeichnet einen vom Ursprung ausgehenden Strahl. Durch den Schnittpunkt dieses Strahles mit dem kleineren der beiden Kreise wird eine Parallele $\mathfrak{g}$ zur x-Achse und durch den Schnittpunkt mit dem größeren der beiden Kreise eine Parallele $\mathfrak{l}$ mit der y-Achse konstruiert. Der Schnittpunkt von $\mathfrak{g}$ mit $\mathfrak{l}$ gehört zu $\mathfrak{E}$ und jeder Punkt aus $\mathfrak{E}$ entsteht so, indem man den Strahl geeignet wählt.

6 Wichtige Gleichungen

6.1 Die Scheitelgleichung und ihre Herleitung

Um die Scheitelgleichung herzuleiten, bringt man eine Ellipse $\mathfrak{E}$ in ein rechtwinkliges Koordinatensystem, wobei ein Scheitelpunkt der Ellipse $\mathfrak{E}$ im Koordinatenursprung liegen soll. Auf Grund der Definitionen und der Eigenschaften der Ellipsen kann man folgendes (laut Anhang, Abb. 4) sagen:

$$\begin{aligned} \frac{d(P,F)}{d(P,D)} &= k && (1)\\ \frac{d(O,F)}{d(O,L)} &= k && (2) \end{aligned}$$

Für die Längen der Strecken PF, PD, OF und OL werden andere Terme gesucht:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \sqrt{(x-d(O,F))^2+y^2} && (3)\\ d(P,D) &= x+d(O,L) && (4)\\ d(F,L) &= d(O,L)+k\cdot d(O,L)=d(O,L)\cdot(k+1)=d. && (5) \end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} d(O,L) &= \frac{d}{k+1} \quad \text{und} && (6)\\ d(O,F) &= \frac{k\cdot d}{k+1}. && (7) \end{aligned}$$

Die gefundenen Ausdrücke für die Längen der Strecken OL und OF werden in die Gleichungen (3) und (4) eingesetzt:

$$\begin{aligned} d(P,F) &= \sqrt{\left(x-\frac{k\cdot d}{k+1}\right)^2+y^2} && (8)\\ d(P,D) &= x+\frac{d}{k+1} && (9) \end{aligned}$$

Nun werden diese Terme in die Gleichung (1) $\frac{d(P,F)}{d(P,D)}=k$ eingesetzt:

$$\frac{\sqrt{\left(x-\frac{k\cdot d}{k+1}\right)^2+y^2}}{x+\frac{d}{k+1}}=k. \qquad (10)$$

Diese Gleichung wird umgeformt, bis man zu dem Ausdruck (11) gelangt:

$$y^2 = 2 \cdot k \cdot d \cdot x + (k^2 - 1) \cdot x^2 \tag{11}$$

Die zu dem Brennpunkt F gehörige Ordinate des Kegelschnittes in Normallage heißt Halbparameter und wird mit p bezeichnet. Wenn man diesen Parameter in die Gleichung einbaut, heißt sie:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x + (k^2 - 1) \cdot x^2 \tag{12}$$

Die Ellipse hat zwei Schnittpunkte mit der x-Achse. Um diese zu ermitteln, setzt man $y = 0$:

$$0 = x \cdot (2 \cdot p - (1 - k^2) \cdot x). \tag{13}$$

Hieraus folgt

$$x_1 = 0 \tag{14}$$

$$x_2 = \frac{2 \cdot p}{1 - k^2} = 2a. \tag{15}$$

Der zweite x-Wert ist gleichzeitig ein anderer Ausdruck für die Länge $2a$ der Hauptachse. Somit kann man für die Scheitelgleichung auch:

$$y^2 = 2 \cdot p \cdot x - \frac{p}{a} \cdot x^2 \tag{16}$$

angeben.

6.2 Von der Scheitelgleichung zur Mittelpunktsgleichung

Der wesentliche Unterschied zur Scheitelgleichung ist die Lage der Ellipse $\mathfrak{E}$ im Koordinatensystem. Der Mittelpunkt M der Ellipse $\mathfrak{E}$ fällt nun mit dem Koordinatenursprung $(0,0)$ zusammen (siehe Anhang, Abb. 5). Bei der Scheitelgleichung befand sich der Mittelpunkt M im Punkt $(a,0)$.

Um die Mittelpunktsgleichung aus der Scheitelgleichung ab zu leiten, führt man folgende Koordinatentransformation durch: $x = a + x'$ und $y = y'$

Nun erhält man für die Scheitelgleichung folgende Form:

$$y'^2 = 2 \cdot p \cdot (a + x') - \frac{p}{a} \cdot (a + x')^2. \tag{17}$$

Hieraus folgt

$$y'^2 = p \cdot a - \frac{p \cdot x'^2}{a}. \tag{18}$$

Es ist jedoch von Vorteil, nach der Transformation die gebräuchlichen Symbole x und y wieder zu verwenden:

$$y^2 = p \cdot a - \frac{p \cdot x^2}{a}. \tag{19}$$

Um die Größe p zu bestimmen, wird $x = 0$ gesetzt. Dadurch ergibt sich folgendes Bild (b ist die Länge der kleinen Halbachse):

$$y^2 = p \cdot a \tag{20}$$
$$y^2 = b^2. \tag{21}$$

Hieraus folgt

$$p = \frac{b^2}{a}. \tag{22}$$

Diesen Wert setzt man wieder in die Gleichung (19) ein und erhält so die allgemeine Mittelpunktsgleichung:

$$y^2 = -\frac{b^2}{a^2} \cdot x^2 + b^2 \tag{23}$$

oder

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1. \tag{24}$$

7 Ellipsoide: Beziehungen und wichtige Gleichungen

Ellipsoide sind Flächen zweiten Grades und zählen zu den Ei-Flächen. Ei-Flächen sind geschlossene, streng konvexe Flächen, deren Gaußsche Krümmung überall positiv ist. Ein Ellipsoid besitzt drei Hauptachsen, die senkrecht aufeinander stehen und im allgemeinen mit a, b und c bezeichnet werden. Bei ebenen Schnitten durch ein Ellipsoid entstehen Ellipsen. Wenn man zum Beispiel einen Schnitt bei $z = 0$ (z entspricht der Höhenachse im kartesischen Koordinatensystem) macht, erhält man die größtmögliche Ellipse für z. Sobald z wächst, schrumpft die Ellipse, bis $z = c$ ist. Die allgemein gebräuchliche und mit der Mittelpunktsgleichung der Ellipsen verwandte Gleichung für die Ellipsoide ist:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

8 Spezielle Ellipsoide

Es gibt spezielle Ellipsoide, abhängig von den Längen der Halbachsen.

1. Fall: $a = b = c$: Bei diesem Fall ist das Ellipsoid eine Kugel. Wie der Kreis ein Sonderfall bei den Ellipsen ist, so spielen die Kugeln auch eine besondere Rolle bei den Ellipsoiden.

2. Fall: $a = b > c$: Es entsteht ein abgeplattetes (zusammengedrücktes) Rotationsellipsoid, das sich durch Rotation der Ellipse um die kleine Achse ergibt. Dieses Ellipsoid wird auch zweiachsiges Ellipsoid genannt.

3. Fall: $a = b < c$: Es entsteht ein gestrecktes (lang gestrecktes) Rotationsellipsoid, das sich durch Rotation der Ellipse um die große Achse ergibt. Dieses Ellipsoid wird auch zweiachsiges Ellipsoid genannt.

4. Fall: $a \neq b, a \neq c, b \neq c$: Nur wenn alle drei Hauptachsen unterschiedliche Längen haben, spricht man von einem normalen, einem so genannten dreiachsigen Ellipsoid.

9 Beispiel: Modell

Ein Modell der Elipsoide habe die Hauptachsen:

Große Hauptachse $2a$ mit 12 cm => a = 6 cm
Mittlere Hauptachse $2b$ mit 9 cm => b = 4,5 cm
Kleine Hauptachse $2c$ mit 6 cm => c = 3 cm

Daraus folgt die Mittelpunktsgleichung für das Ellipsoid:

$$\frac{x^2}{6^2} + \frac{y^2}{4,5^2} + \frac{z^2}{3^2} = \frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20,25} + \frac{z^2}{9} = 1$$

Die Schnittkurven des Ellipsoids mit den Hauptachsen:

bei z = 0: $\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{20{,}25} = 1$
bei x = 0: $\frac{y^2}{20{,}25} + \frac{z^2}{9} = 1$
bei y = 0: $\frac{x^2}{36} + \frac{z^2}{9} = 1$

10 Anhang

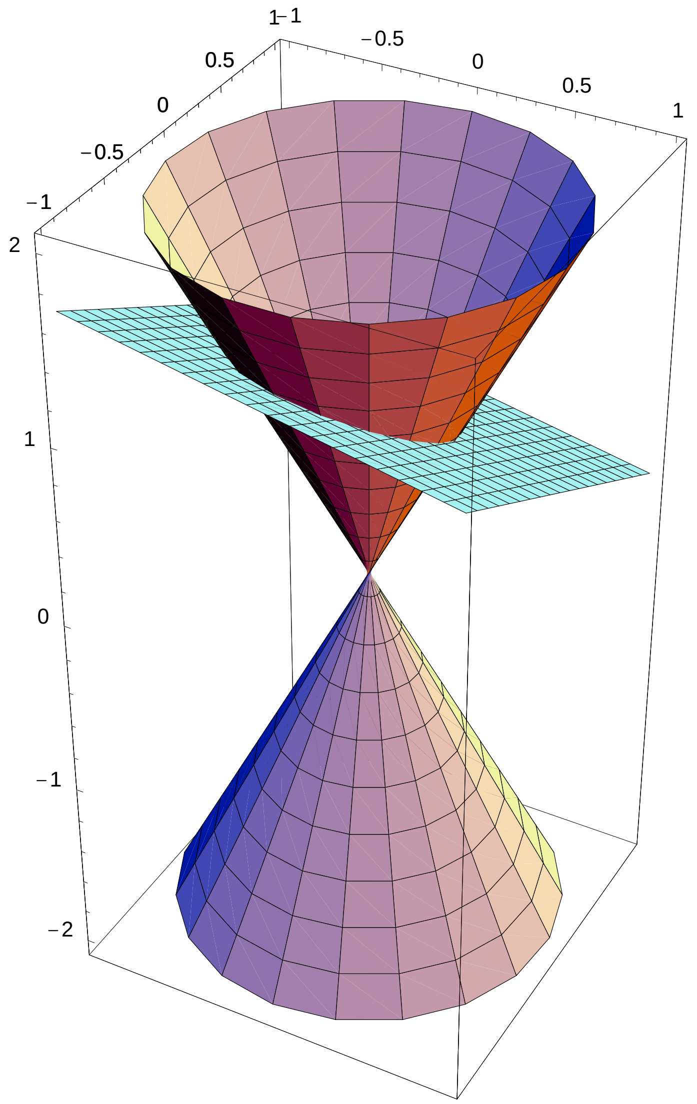

Abbildung 1: Ellipse

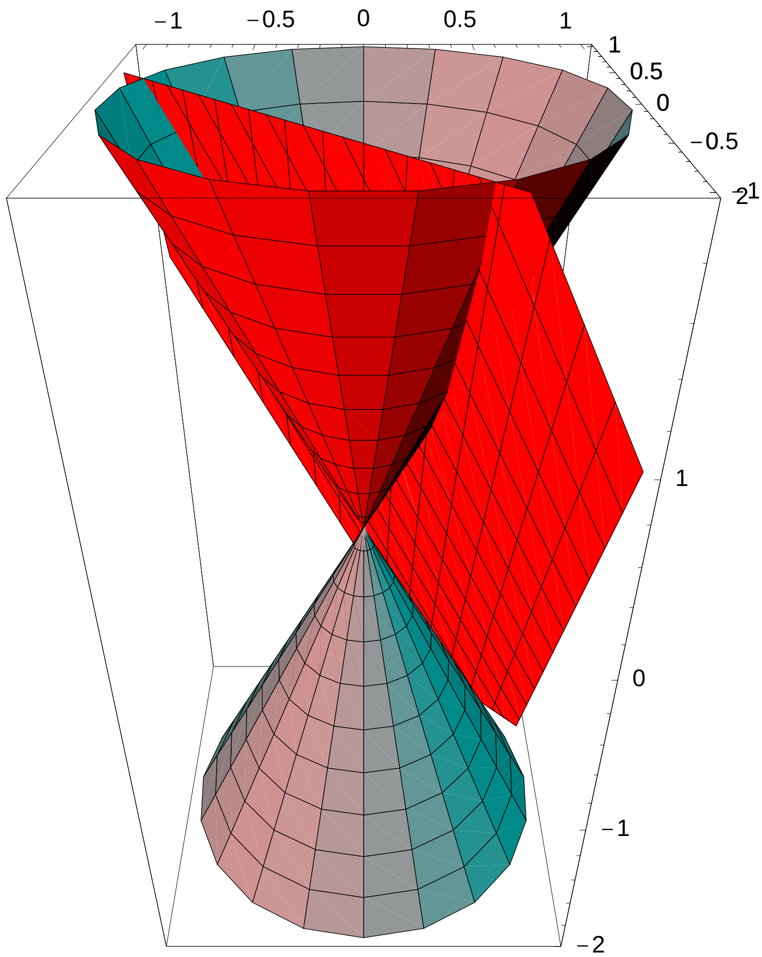

Abbildung 2: Parabel

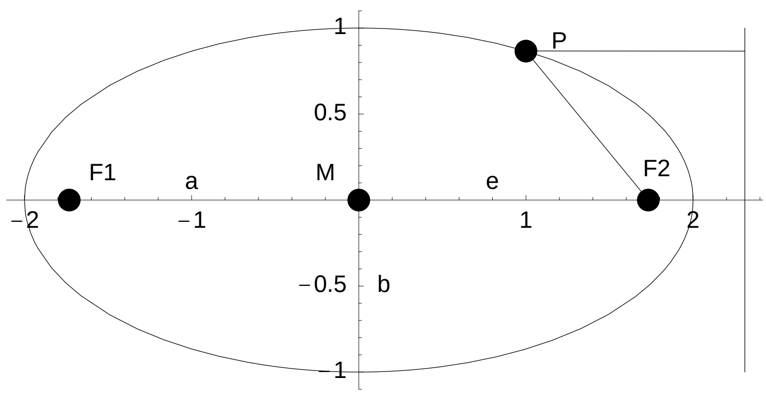

Abbildung 3: Ellipse mit Leitlinie

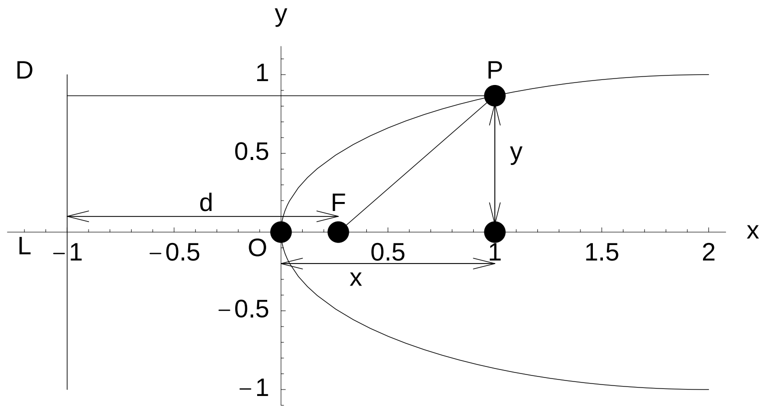

Abbildung 4: Ellipse mit Scheitelpunkt im Ursprung

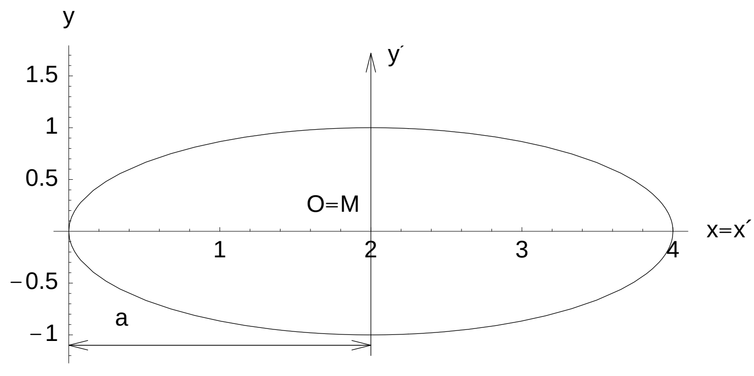

Abbildung 5: Ellipse: Koordinatentransformation