LÖSUNGEN ZUM PREISAUSSCHREIBEN 'MIT DEM ZUFALL AUF DU UND DU'

Erster Teil: Überlegen Sie mal ...

Zur Lösung dieser sechs Aufgaben reichen einfache Kenntnisse der Wahrscheinlichkeitstheorie und einige logische Überlegungen aus.

Aufgabe 1: Brieftauben

Aufgabentext: *Sie wollen einen Brief per Brieftaube verschicken. Die Grüne Timortaube kommt mit doppelt so hoher Wahrscheinlichkeit am richtigen Ziel an wie die Orientturteltaube. Mit welcher Variante kommt Ihre Nachricht mit höherer Wahrscheinlichkeit an?*

(a) *Sie schicken eine Grüne Timortaube los.*
(b) *Sie schicken zwei Orientturteltauben mit dem Brief (bzw. einer Kopie) los.*
(c) *Egal, die Wahrscheinlichkeiten von (a) und (b) sind gleich groß.*

Lösung: Antwort (a) ist richtig.

Begründung: Sei p (mit $0 \le p \le 1$) die Wahrscheinlichkeit, dass die Grüne Timortaube ankommt, wenn Sie sie losgeschickt haben. Da unsere Grüne Timortaube eine Expertin ist, kommt sie mit positiver Wahrscheinlichkeit an, also gilt $p > 0$. Schicken Sie die Orientturteltaube los, so erreicht diese also ihr Ziel mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{p}{2}$.

Nun schicken Sie aber zwei Orientturteltauben los. Sei A das Ereignis, dass mindestens eine der Tauben ankommt. Wir wollen die Wahrscheinlichkeit $\mathbb{P}(A)$ von A berechnen, was sich am besten über das Gegenereignis $A^{\rm c}$ von A berechnen lässt. Wir nehmen an, dass die beiden Tauben unabhängig voneinander ankommen. Also ist die Wahrscheinlichkeit von $A^{\rm c}$, dass beide Tauben nicht ankommen, gleich dem Produkt der beiden Wahrscheinlichkeiten, dass die eine nicht ankommt und dass die andere nicht ankommt. Diese beiden Wahrscheinlichkeiten sind natürlich jeweils gleich $1 - \frac{p}{2}$. Also haben wir

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^{\rm c}) = 1 - \Big(1 - \frac{p}{2}\Big)^2 = 1 - \left(1 - 2 \times 1 \times \frac{p}{2} + \Big(\frac{p}{2}\Big)^2\right) = p - \frac{p^2}{4}.$$

Diese Wahrscheinlichkeit ist wegen $p^2/4 > 0$ echt kleiner als die Wahrscheinlichkeit p, dass die Grüne Timortaube ankommt, wenn Sie sie losgeschickt haben. Also ist die Antwort (a) richtig.

Aufgabe 2: Pfannkuchen

Aufgabentext: *In einer Schüssel befinden sich zehn Pfannkuchen: Neun sind mit Marmelade und einer mit Senf gefüllt. Zwei Personen ziehen abwechselnd einen Pfannkuchen und beißen hinein, so lange, bis einer den Senfpfannkuchen erwischt, dieser Spieler hat verloren. Würden Sie lieber als Erster oder als Zweiter ziehen wollen?*

(a) *Als Erster.*
(b) *Als Zweiter.*
(c) *Egal, die Gewinnwahrscheinlichkeiten sind gleich.*

DANKE AN HANS HUBER FÜR DIE ERSTELLUNG DER LÖSUNGEN IM RAHMEN SEINES BETRIEBSPRAKTIKUMS

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Sei S_n das Ereignis, dass der Senfpfannkuchen im n-ten Zug gezogen wird, und $\mathbb{P}(S_n)$ seine Wahrscheinlichkeit. Es gewinnt der zuerst ziehende Spieler, wenn n gleich zwei, vier, sechs, acht oder zehn ist, in den anderen Fällen gewinnt der andere Spieler.

Wir zeigen nun, dass jedes $\mathbb{P}(S_n)$ gleich $\frac{1}{10}$ ist. Zunächst gilt

$$\mathbb{P}(S_1) = \frac{1}{10},$$

da nur einer der zehn Pfannkuchen der Senfpfannkuchen ist. Das Ereignis S_2 ist das Ereignis, dass im ersten Zug einer der neun Marmeladenpfannkuchen gezogen wird (dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$) und dass der Senfkuchen im zweiten Zug aus nun nur noch neun Pfannkuchen gezogen wird (dies passiert mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{9}$). Also gilt

$$\mathbb{P}(S_2) = \frac{9}{10} \times \frac{1}{9} = \frac{1}{10}.$$

Analog wird $\mathbb{P}(S_3)$ berechnet: Mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{10}$ wird im ersten Zug einer der neun Marmeladenpfannkuchen gezogen, anschließend wird mit Wahrscheinlichkeit $\frac{8}{9}$ einer der verbleibenden acht Marmeladenpfannkuchen (von neun verbleibenden Pfannkuchen) gezogen, und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$ wird anschließend im dritten Zug der Senfpfannkuchen (von acht verbleibenden Pfannkuchen) gezogen. Also haben wir

$$\mathbb{P}(S_3) = \frac{9}{10} \times \frac{8}{9} \times \frac{1}{8} = \frac{1}{10}.$$

In der selben Weise zeigt man, dass $\mathbb{P}(S_n) = \frac{1}{10}$ für jedes $n = 1, 2, 3, \dots, 10$ ist.

Also ist die Wahrscheinlichkeit, den Senfpfannkuchen zu ziehen, in jedem Zug gleich und damit Antwort (c) richtig.

Aufgabe 3: Kartendreier

Aufgabentext: *Von drei Karten ist die erste auf beiden Seiten rot, die zweite auf beiden Seiten weiß, die dritte hat eine rote und eine weiße Seite. Sie ziehen zufällig eine Karte und legen sie vor sich hin. Sie sehen eine weiße Seite. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass die Rückseite dieser Karte ebenfalls weiß ist?*

(a) *Fünfzig Prozent.*
(b) *Ein Drittel.*
(c) *Zwei Drittel.*

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Man hat also entweder die weiß/weiße Karte oder die weiß/rote Karte vor sich. Wenn man sie umdreht, kommt in ersten Fall also eine weiße Seite und im zweiten Fall eine rote Seite zum Vorschein. Man könnte nun fälschlicherweise denken, dass diese beiden Fälle mit gleicher Wahrscheinlichkeit auftreten, dass also Antwort (a) richtig sei.

Allerdings ist dies nicht der Fall. Die sechs Seiten der drei Karten liegen tatsächlich mit gleicher Wahrscheinlichkeit vor Ihnen. Insbesondere haben die beiden weißen Seiten der weiß/weißen Karte gemeinsam die doppelte Wahrscheinlichkeit, vor Ihnen zu liegen, wie die eine weiße Seite der weiß/roten Karte. Wenn Sie nun also eine weiße Seite sehen, ist es in zwei Drittel aller Fälle die weiß/weiße Karte (dann ist die Rückseite auch weiß) und sonst die weiß/rote Karte (dann ist die Rückseite rot). Also ist (c) richtig.

Aufgabe 4: Blausucht

Aufgabentext: *In einer Stadt sind 0,1% der Einwohner an Blausucht erkrankt. Ein Test soll herausfinden, ob Sie ebenfalls infiziert sind. Falls Sie es sind, so wird der Test Ihnen das mit 99% Zuverlässigkeit bescheinigen. Haben Sie keine Blausucht, so zeigt der Test in 2% der Fälle fälschlicherweise dennoch ein positives Ergebnis. Ihr Arzt sagt Ihnen, dass der Test bei Ihnen positiv ausgefallen ist. Mit welcher Wahrscheinlichkeit leiden Sie tatsächlich an Blausucht?*
(a) *94,7%.*
(b) *47%.*
(c) *4,7%.*

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Wir ermitteln den Anteil der wahrheitsgemäß positiv getesteten Bürger und teilen sie durch den Gesamtanteil der positiv getesteten Bürger, jeweils an der Gesamtbevölkerung. Dieser Quotient ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit.

Von den 0,1% erkrankten Bürgern werden 99% positiv getestet, also werden 0,099% der Gesamtbevölkerung wahrheitsgemäß positiv getestet. Von den 99,9% gesunden Bürgern werden fälschlicherweise 2% dennoch positiv getestet, also werden 1,998% aller Bürger fälschlicherweise positiv getestet. Der Gesamtanteil der positiv getesteten unter allen Bürgern ist also $0,099\% + 1,998\%$. Der gesuchte Quotient ist dann

$$\frac{0,00099}{0,01998 + 0,00099} \approx 0,047, \qquad \text{also } 4,7\%.$$

Es ist also ziemlich unwahrscheinlich, dass Sie tatsächlich krank sind; Antwort (c) ist richtig.

Aufgabe 5: Würfelereignis

Aufgabentext: *Welches Würfelereignis ist wahrscheinlicher?*
(a) *Eine Sechs bei einem Wurf.*
(b) *Ein Pasch beim Werfen von zwei Würfeln.*
(c) *Beide gleich.*

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Unser Würfel ist fair, d.h., alle Ergebnisse $1, 2, \dots, 6$ sind beim Wurf unseres Würfels gleich wahrscheinlich. Also hat jedes Ergebnis eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{6}$. Insbesondere beträgt die Wahrscheinlichkeit, eine Sechs in einem Wurf zu würfeln, $\frac{1}{6}$.

Wirft man nun zwei Würfel, so hat man 36 mögliche Ergebnisse, die alle gleich wahrscheinlich sind: Jedes mögliche Paar aus den Zahlen $1, 2, \dots, 6$ tritt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{36}$ auf, insbesondere jeder Pasch. Da es aber sechs verschiedene Päsche gibt, addieren sich deren Wahrscheinlichkeiten, d. h., die Wahrscheinlichkeit, einen Pasch zu werfen, ist gleich $6 \times \frac{1}{36} = \frac{1}{6}$.

Also sind die Wahrscheinlichkeiten, mit einem Würfel eine Sechs zu werfen, und mit zwei Würfeln einen Pasch zu werfen, gleich groß. Antwort (c) ist damit richtig.

Aufgabe 6: Urteilsfindung

Aufgabentext: *Die Richter Jakob und Johann fällen jeder in 80% der Fälle das richtige Urteil (schuldig/unschuldig). Normalerweise wird zu dritt abgestimmt, und die Mehrheit entscheidet. Leider ist der dritte Richter heute verhindert. Mit welcher Taktik ist die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Entscheidung größer?*
(a) *Nur Jakobs Stimme zählt.*
(b) *Der Wurf einer Münze zählt als dritte Stimme (Kopf=schuldig/Zahl=unschuldig).*
(c) *Die beiden Varianten liefern die selbe Wahrscheinlichkeit.*

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Die Richter Jakob und Johann urteilen jeweils mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,8$ richtig und die Münze mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,5$, und die drei Entscheidungen werden unabhängig voneinander gefällt. Die Wahrscheinlichkeit für eine richtige Entscheidung ist bei Taktik (a) also gleich $0,8$.

Nun berechnen wir diese Wahrscheinlichkeit bei Taktik (b). Uns interessieren alle Möglichkeiten, in denen mindestens zwei der drei Urteilsfinder richtig urteilen:

(1) Alle drei urteilen richtig (dies passiert mit einer Wahrscheinlichkeit von $0,8\times 0,8\times 0,5 = 0,32$),
(2) beide Richter urteilen richtig und die Münze falsch ($0,8 \times 0,8 \times 0,5 = 0,32$),
(3) Johann und die Münze urteilen richtig, Jakob falsch ($0,2 \times 0,8 \times 0,5 = 0,08$),
(4) Jakob und die Münze urteilen richtig, Johann falsch ($0,8 \times 0,2 \times 0,5 = 0,08$).

Um die Gesamtwahrscheinlichkeit für ein richtiges Urteil herauszufinden, bildet man die Summe der Wahrscheinlichkeiten dieser Fälle und erhält

$$0,32 + 0,32 + 0,08 + 0,08 = 0,8,$$

also die gleiche Wahrscheinlichkeit wie in der Taktik (a). Es ist also egal, ob nur Jakob entscheidet oder ob die Münze als dritte Stimme dient, in beiden Fällen beträgt die Wahrscheinlichkeit 80%, (c) ist richtig.

Zweiter Teil: Schätzen Sie mal ...

Die Lösungen dieser sechs Aufgaben sind zum Teil sehr aufwendig. Es wird jedesmal nur nach einer Schätzung gefragt; diese ist häufig einfacher zu erhalten als die hier angegebenen exakten Lösungen.

Aufgabe 7: Sudoku

Aufgabentext: *Auf einem* 9×9*-Sudoku-Feld werden zufällig neun Einsen, neun Zweien usw. verteilt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit entsteht hierbei ein korrekt ausgefülltes Sudoku?*

(a) *Rund 1 zu* 10^9.
(b) *Rund 1 zu* 10^{48}.
(c) *Rund 1 zu* 10^{100} *(d. h. rund 1 zu einem Googol).*

Lösung: Antwort (b) ist richtig.

Begründung: Sei R die Anzahl aller richtig ausgefüllten Sudokus, und sei A die Anzahl aller möglichen Füllungen eines 9×9-Feldes mit neun Einsen, neun Zweien, neun Dreien,…, neun Neunen. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist $p = R/A$.

Zuerst ermitteln wir A. Um die Anzahl der möglichen Verteilungen von neun Einsen auf 81 Felder zu ermitteln, gehen wir davon aus, dass wir jede Eins einzeln nacheinander legen. So haben wir für die erste Eins 81 freie Felder, für die zweite 80, für die dritte 79,…, und für die neunte 73. Da wir die neun Einsen unterscheiden, ist diese Anzahl gleich

$$(81)_9 = 81 \times 80 \times 79 \times \cdots \times 73.$$

(Im Allgemeinen schreiben wir $(n)_k$ (sprich: 'n Index k') für das Produkt aller natürlichen Zahlen von n bis $n - k + 1$).

Allerdings wird bei dieser Rechnung die Anzahl der möglichen Reihenfolgen, in der die Einsen gelegt werden, berücksichtigt. Da wir bei der Berechung von A jedoch die Einsen nicht unterscheiden, muss die obige Anzahl noch durch die Anzahl der möglichen Reihenfolgen von neun verschiedenen Objekten geteilt werden. Diese Anzahl ist offensichtlich gleich

$$9! = 9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1.$$

(Im Allgemeinen schreiben wir $n!$ (sprich: 'n Fakultät') für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis n. Dies ist die Anzahl der Reihenfolgen von n unterscheidbaren Objekten.)

Also ist die Anzahl aller Möglichkeiten, neun ununterscheidbare Einsen auf 81 Felder zu verteilen, gleich

$$\frac{(81)_9}{9!} = \frac{81 \times 80 \times 79 \times \cdots \times 73}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Als nächstes verteilen wir die neun Zweien. Es sind nur noch 72 Felder übrig, da die anderen durch Einsen besetzt sind. Also wollen wir die Anzahl aller Möglichkeiten, neun ununterscheidbare Zweien auf 72 Felder zu verteilen, ermitteln. Dies funktioniert genauso wie bei neun Einsen auf 81 Felder, bloß mit neun Feldern weniger; diese Anzahl ist gleich

$$\frac{(72)_9}{9!} = \frac{72 \times 71 \times 70 \times \cdots \times 64}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}.$$

Bei der Verteilung der Dreien sind es nur noch 63 Felder; wir erhalten

$$\frac{(63)_9}{9!} = \frac{63 \times 62 \times 61 \times \cdots \times 55}{9 \times 8 \times 7 \times 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1}$$

für die Anzahl, neun ununterscheidbare Dreien auf die verbleibenden 63 Felder zu verteilen. Das geht so weiter, bis wir zum Schluss neun ununterscheidbare Neunen auf nur noch neun Felder verteilen, wofür es $\frac{(9)_9}{9!} = \frac{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1}{9\times8\times7\times6\times5\times4\times3\times2\times1} = 1$ Möglichkeit gibt.

Um die Gesamtzahl A aller Möglichkeiten zu ermitteln, müssen wir alle neun bisher berechneten Anzahlen miteinander multiplizieren:

$$A = \frac{(81)_9}{9!} \times \frac{(72)_9}{9!} \times \frac{(63)_9}{9!} \times \frac{(54)_9}{9!} \times \frac{(45)_9}{9!} \times \frac{(36)_9}{9!} \times \frac{(27)_9}{9!} \times \frac{(18)_9}{9!} \times \frac{9!}{9!}.$$

Dabei kann man $(81)_9 \times (72)_9 \times (63)_9 \times (54)_9 \times (45)_9 \times (36)_9 \times (27)_9 \times (18)_9 \times (9)_9$ zu $81!$ zusammenfassen, da beide Terme gleich dem Produkt der Zahlen 1 bis 81 sind. Also ergibt sich zusammengefasst:

$$A = \frac{81!}{9!^9} \approx 5,31 \times 10^{70}.$$

Nun können wir bereits Lösung (c) ausschließen, da $p = \frac{R}{A} \geq \frac{1}{A} \geq 10^{-70}$, was viel größer als 10^{-100} ist.

Als nächstes muss die Anzahl R ermittelt werden. Diese Berechnung ist allerdings äußerst umfangreich, und daher geben wir nur einen Link auf eine Seite, die diese Berechnung durchführt:

`http://www.afjarvis.staff.shef.ac.uk/sudoku/sudgroup.html`.

Dort wird hergeleitet, dass

$$R \approx 6.67 \times 10^{21},$$

womit man dann $p = \frac{R}{A} \approx 1.26 \times 10^{-49} \approx \frac{1}{10^{48}}$ berechnen kann, also stimmt Lösung (b).

Hier begnügen wir uns aber damit, eine obere Abschätzung für die Wahrscheinlichkeit $p = \frac{R}{A}$ anzugeben, um zu zeigen, dass die Antwort (a) nicht richtig sein kann. Offensichtlich ist R nicht größer als die Anzahl R' aller möglichen Verteilungen, bei der in jeder Reihe jede Zahl von Eins bis Neun genau einmal vertreten ist. Diese Anzahl R' lässt sich wie folgt berechnen. Man hat für jede Reihe genau neun Möglichkeiten, die Eins zu platzieren, also insgesamt 9^9 Möglichkeiten für alle Einsen. Wenn man nun die Zweien platziert, hat man in jeder Reihe acht mögliche Platzierungen, da ein Feld je Reihe bereits durch eine Eins besetzt ist. Also gibt es insgesamt für die Zweien, vorausgesetzt die Einsen liegen schon, 8^9 Möglichkeiten. Für die Dreien gibt es dementsprechend nur noch sieben Felder je Reihe zur Auswahl und somit 7^9 Möglichkeiten. Das setzt sich fort, bis alle Zahlen verteilt sind und es für die Neunen zuletzt nur noch $1^9 = 1$ Möglichkeit gibt. Also gilt

$$R' = 9^9 \times 8^9 \times 7^9 \times 6^9 \times 5^9 \times 4^9 \times 3^9 \times 2^9 \times 1^9 = 9!^9 \approx 1,1 \times 10^{50}.$$

Bildet man nun den Quotienten aus R' und A, so erhält man eine Wahrscheinlichkeit, die größer ist als die gesuchte; es gilt

$$p = \frac{R}{A} \leq \frac{R'}{A} \approx \frac{1,1 \times 10^{50}}{5,31 \times 10^{70}} \approx 2,07 \times 10^{-21}.$$

Also ist p nicht größer als ungefähr $2,07 \times 10^{-21}$, womit man Lösung (a) ebenfalls ausschließen kann. Antwort (b) ist richtig.

Aufgabe 8: Traumskat

Aufgabentext: *Beim Skat kriegt jeder 10 von 32 Karten. Jeder hofft auf folgendes Blatt: alle vier Buben plus das Paar Ass, Zehn in drei verschiedenen Farben. Welche Wahrscheinlichkeit ist größer?*

(a) *Dieses Traumblatt zu bekommen.*
(b) *Am Stück zwölf Sechsen zu würfeln.*
(c) *Beide Wahrscheinlichkeiten sind gleich.*

Lösung: Antwort (a) ist richtig.

Begründung: Hier gibt es vier Möglichkeiten, wie das 'Traumblatt' aussehen kann: die vier Buben und jeweils das Ass und die Zehn von drei Farben (also einmal ohne Schellen, einmal ohne Herz, einmal ohne Grün und einmal ohne Eichel). Auf diese Weise ist das 'Traumblatt' in vier Blätter unterteilt.

Nun berechnen wir die Wahrscheinlichkeit für jedes dieser vier Blätter, es zu erhalten. Um ein gewisses Blatt zu erhalten, muss im ersten Zug eine der zehn gewünschten von den 32 vorhandenen Karten gezogen werden, bei der zweiten Ziehung eine der neun verbliebenen gewünschten von den 31 übrigen Karten usw., bis im zehnten Zug die letzte gewünschte Karte von den verbliebenen 23 Karten gezogen wird. Also ist die Wahrscheinlichkeit, dieses Blatt zu erhalten, gleich

$$\frac{10}{32} \times \frac{9}{31} \times \frac{8}{30} \times \frac{7}{29} \times \frac{6}{28} \times \frac{5}{27} \times \frac{4}{26} \times \frac{3}{25} \times \frac{2}{24} \times \frac{1}{23} = \frac{10!}{(32)_{10}} \approx 1,55 \times 10^{-8},$$

wobei wir an die Schreibweise 10! (sprich: 'zehn Fakultät') erinnern (siehe Aufgabe 7), die das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 10 bezeichnet, und an die Schreibweise $(32)_{10}$ (sprich: '32 Index 10') für das Produkt aller natürlichen Zahlen von 32 bis $32 - 10 + 1 = 23$.

Da es vier von diesen Blättern gibt, ist die Wahrscheinlichkeit, eines davon zu erwischen (also das 'Traumblatt' zu erhalten), ungefähr gleich

$$4 \times 1,55 \times 10^{-8} \approx 6,2 \times 10^{-8}.$$

Andererseits ist beim zwölfmaligen Werfen eines Würfels die Wahrscheinlichkeit, zwölf Sechsen zu werfen, gleich

$$\left(\frac{1}{6}\right)^{12} \approx 4,59 \times 10^{-10}.$$

Also ist die Wahrscheinlichkeit, ein 'Traumblatt' zu bekommen, höher, als zwölf Mal eine Sechs zu würfeln, d. h., die Antwort (a) ist richtig.

Aufgabe 9: Wurfmünze

Aufgabentext: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass beim 50maligen Werfen einer Münze irgendwann 7 Mal hintereinander Kopf geworfen wird?*

(a) *Rund 6,5%.*
(b) *Rund 16,5%.*
(c) *Rund 26,5%.*

Lösung: Antwort (b) ist richtig.

Begründung: Sei R_n das Ereignis, dass die erste Folge (der erste Run) von mindestens sieben Köpfen im n-ten Wurf beginnt, und sei $\mathbb{P}(R_n)$ seine Wahrscheinlichkeit. Da die Ereignisse R_n sich gegenseitig ausschließen, ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit gleich der Summe aller $\mathbb{P}(R_n)$ mit $n = 1, 2, 3, \dots, 44$, denn das größtmögliche n ist offensichtlich 44, da kein Run der Länge sieben nach dem 44sten Wurf anfängt (er muss ja spätestens im 50sten beendet sein).

Das Ereignis R_1, dass im ersten Wurf ein Run der Länge (mindestens) sieben beginnt, ist das Ereignis, dass die ersten sieben Würfe Kopf ergeben. Also ist seine Wahrscheinlichkeit gleich $\mathbb{P}(R_1) = 2^{-7}$, weil die Wahrscheinlichkeit, einmal Kopf zu werfen, 2^{-1} ist und sieben Köpfe hintereinander geworfen werden.

Bei der Berechnung von R_n mit $n \geq 2$ muss beachtet werden, dass direkt vor dem Beginn des Runs einmal Zahl geworfen wird, da der Run sonst nicht im n-ten Zug beginnen würde, sondern nur die Fortsetzung eines bereits laufenden Runs wäre. Für $n = 2, 3, \dots, 8$ ist R_n daher gerade das Ereignis, dass im $(n-1)$-ten Wurf Zahl fällt und danach sieben Mal Kopf, denn vor dem $(n-1)$-ten Wurf kann es keinen anderen Run der Mindestlänge sieben geben. Also haben wir

$$\mathbb{P}(R_2) = \mathbb{P}(R_3) = \cdots = \mathbb{P}(R_8) = 2^{-8}.$$

Ab R_9 muss auch berücksichtigt werden, dass zusätzlich noch ein Run ab dem ersten Wurf möglich ist. Die Möglichkeit jeweils eines Runs ab dem ersten und ab dem neunten Wurf ist allerdings bereits in R_1 enthalten. R_9 ist das Ereignis, dass R_1 nicht eintritt und im achten Wurf Zahl fällt und danach sieben Mal Kopf. Da R_1 nur von den ersten sieben Würfen abhängt, können wir die Wahrscheinlichkeit von R_9 angeben als

$$\mathbb{P}(R_9) = \big(1 - \mathbb{P}(R_1)\big) \times 2^{-8} = (1 - 2^{-7}) \times 2^{-8}.$$

Analog ist R_{10} das Ereignis, dass R_1 und R_2 beide nicht eintreten und im neunten Wurf Zahl fällt und danach sieben Mal Kopf. Daher haben wir

$$\mathbb{P}(R_{10}) = \big(1 - \mathbb{P}(R_1) - \mathbb{P}(R_2)\big) \times 2^{-8}.$$

Dies setzt sich nun so fort: Für jedes $n \geq 9$ ist R_n das Ereignis, dass die Ereignisse $R_1, \ldots, R_{n-8}$ alle nicht eintreten und im $(n-1)$-ten Wurf Zahl fällt und danach sieben Mal Kopf, also haben wir

$$\mathbb{P}(R_n) = \big(1 - \mathbb{P}(R_1) - \mathbb{P}(R_2) - \cdots - \mathbb{P}(R_{n-8})\big) \times 2^{-8} \qquad \text{für } n \geq 9.$$

Zuletzt muss man nun alle diese $\mathbb{P}(R_n)$ addieren (etwa mit Hilfe eines Taschenrechners) und erhält die gewünschte Wahrscheinlichkeit:

$$p = \mathbb{P}(R_1) + \mathbb{P}(R_2) + \mathbb{P}(R_3) + \cdots + \mathbb{P}(R_{44}) \approx 0,16507.$$

Damit ist Antwort (b) richtig.

Eine grobe Abschätzung dieser Wahrscheinlichkeit nach oben ist auch möglich, indem man die Subtraktion der Gegenereignisse ignoriert, d. h. $\mathbb{P}(R_n) \leq 2^{-8}$ für $n \geq 9$ abschätzt. Dadurch erhalten wir die obere Schranke

$$p \leq 2^{-7} + 43 \times 2^{-8} \approx 0,176.$$

Dies schließt sofort Antwort (c) aus, und man kann vermuten, dass (b) richtig ist, denn die obige Abschätzung lässt nur sehr kleine Terme weg und verliert dadurch sehr wenig. Wenn man dies genauer behandelt, kann man auf diese Weise auch Antwort (a) ausschließen.

Aufgabe 10: Lotto

Aufgabentext: *Welches Lottospiel würde größere Chancen auf den Hauptgewinn bieten?*
(a) *6 aus 49.*
(b) *5 aus 69.*
(c) *Beide Spiele gleich.*

Lösung: Antwort (b) ist richtig.

Begründung: Bei dem Volltreffer im Lotto '6 aus 49' müssen in sechs Ziehungen die sechs richtigen aus den 49 Kugeln gezogen werden. Bei der ersten Ziehung muss eine der sechs richtigen aus den 49 Kugeln fallen. Sofern dies geschieht, muss nun eine von fünf richtigen aus 48 gezogen werden. Wenn auch das geglückt ist, gibt es wieder eine ziehbare Kugel weniger und eine richtige Kugel weniger (nur noch vier aus 47). Es ergibt sich für die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, dass die sechs richtigen Kugeln gezogen werden:

$$\mathbb{P}(A) = \frac{6}{49} \times \frac{5}{48} \times \frac{4}{47} \times \frac{3}{46} \times \frac{2}{45} \times \frac{1}{44} = \frac{6!}{(49)_6} \approx 7,1 \times 10^{-8} \approx 0,0000071\%.$$

(Wie in Aufgabe 7 ist 6! (sprich: 'Sechs Fakultät') das Produkt aller natürlichen Zahlen von 1 bis 6 und $(49)_6$ (sprich: '49 Index 6') das Produkt aller natürlichen Zahlen von 49 bis $49-6+1=44$.)

Nun kommen wir zum Lotto '5 aus 69'. Für das Ereignis B, dass die fünf richtigen Kugeln gezogen werden, ergibt sich analog zu oben:

$$\mathbb{P}(B) = \frac{5!}{(69)_5} \approx 8,8 \times 10^{-8} \approx 0,0000088\%.$$

Also sind die Chancen auf den Hauptgewinn beim Lotto '5 aus 69' um knapp 24% höher als beim Lotto '6 aus 49'. Insbesondere ist Antwort (b) richtig.

Aufgabe 11: Geburtstag

Aufgabentext: *Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass unter 30 Personen mindestens 2 am gleichen Tag im Jahr Geburtstag haben?*
(a) *Rund 10,2%.*
(b) *Rund 40,3%.*
(c) *Rund 70,6%.*

Lösung: Antwort (c) ist richtig.

Begründung: Sei A das gesuchte Ereignis, nämlich dass mindestens 2 aus 30 Personen am selben Tag Geburtstag haben. (Wir nehmen natürlich an, dass alle 365 Tage als Geburtstage gleich wahrscheinlich sind und dass die Geburtstage der 30 Personen unabhängig von einander sind.) Die Wahrscheinlichkeit von A lässt sich am besten über das Gegenereignis A^c, dass jede der 30 Personen an einem anderen Tag Geburtstag hat, ermitteln.

Dazu ermittelt man nacheinander für jede Person die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ihr Geburtsdatum nicht mit dem Geburtsdatum einer vorherigen der 30 Personen identisch ist. Diese Wahrscheinlichkeit ist für die erste Person trivialerweise $\frac{365}{365} = 1$, da es noch keine vorherige Person gibt. Die Wahrscheinlichkeit, dass das Geburtsdatum der zweiten Person nicht gleich dem der ersten ist, beträgt $\frac{364}{365}$. Wenn die beiden (verschiedenen!) Geburtstage der ersten beiden Personen festgelegt worden sind, ergibt sich für die dritte Person analog die Wahrscheinlichkeit $\frac{363}{365}$, nicht am selben Tag Geburtstag zu haben wie eine der ersten beiden Personen. Das setzt sich bei allen Personen so fort, bis bei der letzten die Wahrscheinlichkeit $\frac{336}{365}$ beträgt, nicht an einem der 29 (verschiedenen!) Geburtstage der anderen 29 Personen Geburtstag zu haben.

Daraus ergibt sich für das Gegenereignis A^c von A:

$$\mathbb{P}(A^c) = \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \cdots \times \frac{336}{365} = \frac{(365)_{30}}{365^{30}} \approx 29,4\%,$$

wobei wir wieder die Schreibweise benutzten, die in der Lösung zu Aufgabe 7 eingeführt wurde. Die Wahrscheinlichkeit, die wir ermitteln wollen, ergibt sich folgendermaßen:

$$\mathbb{P}(A) = 1 - \mathbb{P}(A^c) \approx 0,706 = 70,6\%.$$

Also beträgt die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens zwei Personen am selben Tag Geburtstag haben, etwa 70,6%, d. h. Antwort (c) ist richtig.

Aufgabe 12: Kaffeebohne

Aufgabentext: *Sie backen einen Kuchen und fügen dem Teig acht Kaffeebohnen bei. Der fertige Teig wird dann in acht gleichartige Stücke geschnitten. Wenn Sie davon ausgehen, dass Sie gründlich gerührt haben — wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Kuchenstück genau eine Kaffeebohne landet?*
(a) *Weniger als 1%.*
(b) *Zwischen 1% und 10%.*
(c) *Mehr als 10%.*

Lösung: Antwort (a) ist richtig.

Begründung: Wir gehen davon aus, dass eine Bohne nach der anderen in den Kuchen fällt, und berechnen die Wahrscheinlichkeit, dass jede in ein anderes der acht Kuchenstücke als sämtliche Vorgänger fällt.

Für die erste Bohne ist diese Wahrscheinlichkeit trivialerweise $\frac{8}{8} = 1$, da in keinem der acht Kuchenstücke eine Bohne liegt. Für die zweite Bohne sind nur noch sieben von acht Stücken 'frei', die Wahrscheinlichkeit beträgt $\frac{7}{8}$. Für die dritte Bohne sind nur noch sechs von acht Stücken 'frei', die Wahrscheinlichkeit, nicht in ein schon besetztes Stück zu fallen, beträgt $\frac{6}{8}$. Das setzt sich so fort, bis für die letzte Bohne nur noch ein 'freies' Stück von acht übrig bleibt.

Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ergibt sich also als:

$$\frac{8}{8} \times \frac{7}{8} \times \frac{6}{8} \times \frac{5}{8} \times \frac{4}{8} \times \frac{3}{8} \times \frac{2}{8} \times \frac{1}{8} = \frac{8!}{8^8} = 0,0024 = 0,24\%.$$

Die Wahrscheinlichkeit, dass in jedem Stück genau eine Bohne ist, beträgt also weniger als 1%, daher ist Antwort (a) richtig.