

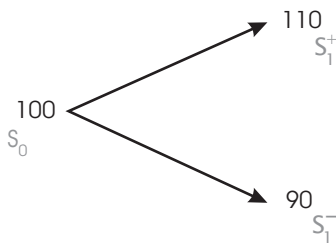
Approximation von Aktienkursen

Die Approximation von Aktienkursen erweist sich in der Finanzmathematik als nützliches Hilfsmittel. So kann man z.B. Aktienkurse durch ein sogenanntes Cox-Ross-Rubinstein Modell approximieren. Dabei wird die Zeitachse in viele (sehr kleine, z.B. sekundlich oder noch kleiner) Teile geteilt. In jedem dieser Zeitintervalle läßt man für den Aktienkurs nur zwei Bewegungen zu: Ein kleiner Sprung nach oben oder ein kleiner Sprung nach unten. Dass man damit sehr komplexe Aktienverhalten approximieren kann, sieht man z.B. in den beiden Bildern rechts unten.

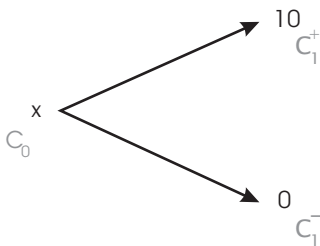
In einer solchen einfachen Periode kann man sehr leicht rechnen. So kann man den Preis eines Calls mit als lineares Gleichungssystem ausdrücken und ausrechnen!

Was ist ein Call ? Ein Call auf die Aktie X mit Laufzeit 1 Jahr und Basispreis 100 erlaubt dem Inhaber nach einem Jahr die Aktie X für 100 zu kaufen. Ist die Aktie bspweise auf 120 gestiegen, so macht er einen direkten Gewinn von 20. Ist sie allerdings nur auf 80 gestiegen, ist sein Recht nutzlos. Die Frage ist nun, wie hoch ist der Preis eines solchen Calls ?

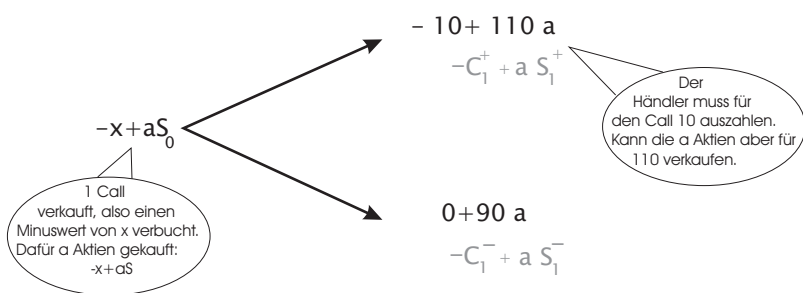
In einem Cox-Ross-Rubinstein Modell kann man das wie folgt ausrechnen:



Das wäre ein (mögliches) Modell für eine Aktienbewegung in einem Zeitintervall. Zugegeben, die Aktienbewegung ist eher typisch für ein größeres Zeitintervall wie eine Woche, aber dafür lässt sich besser damit rechnen! Wenn der Call am Zeitpunkt 1 (das ist hier einfach rechts mit 90 und 110) ausgeübt wird, so ist sein Wert natürlich (!) 10 bzw. 0. Den Preis zur Zeit Null kennen wir noch nicht, schreiben also x.



Jetzt möchten wir die beiden kombinieren. Ein Händler hat nun einen Call verkauft, und dafür eine Prämie x erhalten. X wird kleiner als 10 sein (wieso?) Er muss sich mit der Aktie absichern. Sagen wir er kauft einen Anteil a an Aktien. (Dabei kann a auch 0,5 sein, schließlich wird tatsächlich nicht 1 Call verkauft, sondern 1000 oder 1000000...). Er hat also a Aktien und -1 Call. Wie sieht das nun aus ?



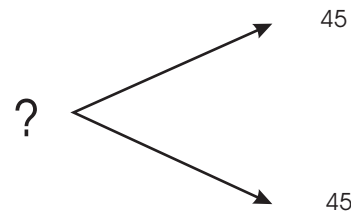
Am Besten, der Händler hat gar kein Risiko, also

$$-10 + 110a = 90a$$

$$a = \frac{C_1^+ - C_1^-}{S_1^+ - S_1^-}$$

d.h. also $a = 0,5$. Mit dieser Wahl von a ist der Händler risikolos. Jede andere Wahl hat entweder in + oder in - einen Verlust zur Folge !!

Dies ist schon einmal eine interessante Beobachtung. Der Händler kann sich vollkommen absichern. Man spricht von einem **Hedge**. Zurück zu unserer eigentlichen Frage: Was kostet der Call ?



Lassen wir eine Verzinsung mal außer acht, so ist diese "Strategie" sicher 45 wert. Also erhalten wir

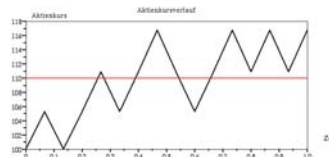
$$-x + a \cdot 100 = 45$$

mit $a = 0,5$ schließen wir

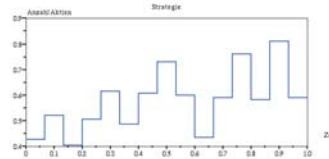
$$x = 5.$$

Der Call kostet demnach 5.

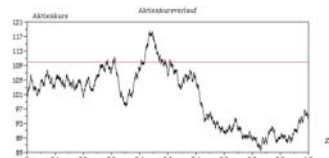
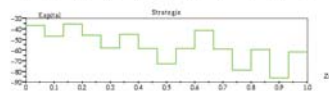
$$x = \frac{C_1^+ S_1^- - C_1^- S_1^+}{S_1^+ - S_1^-}$$



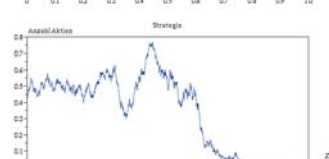
Eingabewerte	
Anfangskurs	:100,0
Strike	:100,0
Ausübungszeitpunkt	:1,0
Anzahl der Perioden	:15
Volatilität	:0,20
Zinsen	:0,04
Typ der Option	:Call



Werte der Option und Strategie	
Aktienkurs (T=1,0)	:116,6
Wert der Option (T=1,0)	:6,8
Wert der Strategie (T=1,0)	:6,8
Preis der Option (T=0)	:5,83



Eingabewerte	
Anfangskurs	:100,0
Strike	:100,0
Ausübungszeitpunkt	:1,0
Anzahl der Perioden	:1000
Volatilität	:0,20
Zinsen	:0,04
Typ der Option	:Call



Werte der Option und Strategie	
Aktienkurs (T=1,0)	:93,9
Wert der Option (T=1,0)	:0,0
Wert der Strategie (T=1,0)	:0,0
Preis der Option (T=0)	:5,63

