Zur Entwicklung der mathematischen Statistik in den Dreißigerjahren des 20. Jahrhunderts*

Hans-Joachim Girlich, Leipzig

Die Statistik vollzog im Jahrzehnt vor dem 2. Weltkrieg einen Entwicklungssprung, der durch zwei flankierende Werke charakterisiert werden kann. So behandelte Richard von Mises im ersten Band seiner Berliner Vorlesungen aus dem Gebiete der angewandten Mathematik von 1931 die auf seinem Kollektivbegriff beruhende: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik* als eine naturwissenschaftliche Methodenlehre. Dagegen gelang Harald Cramér in Stockholm mit seinem Buch *Mathematical Methods of Statistics*, das erst bei Kriegsende in Druck gegeben werden konnte, ein Durchbruch. Allgemeine Prinzipien der Parameterschätzung und des Testens von Hypothesen, maßgeblich geschaffen von Ronald A. Fisher, Jerzy Neyman und Egon S. Pearson, verstand er mittels des Apparats der Zufallsvariablen, den er 1936 in einem der *Cambridge Tracts in Mathematics* aufbereitet hatte, so darzustellen, dass eine derartige mathematische Statistik sich als eigenständige Disziplin der Mathematik abzeichnete.

Im Vortrag wird dieser komplizierte Entwicklungsprozess der Statistik exemplarisch erörtert. Dazu werden zwei bisher wenig beachtete Arbeiten von Joseph L. Doob und Eberhard Hopf aus dem Jahre 1934 herangezogen, in denen Probleme der klassischen Statistik und der statistischen Mechanik auf maßtheoretischer Grundlage studiert werden. Hopfs Untersuchungen mündeten 1937 in sein richtungsweisendes Werk *Ergodentheorie*.

In Ergänzung der Festschrift zum DMV- Jubiläum 1990 wird Hopfs Umfeld an der Universität Leipzig in Bezug auf die Statistik vorgestellt und dessen Beitrag für die Beförderung der Statistik-Ausbildung im Nachkriegsdeutschland diskutiert.

---

*Erweiterte Fassung eines Vortrages, gehalten am 9. März 2010 zur Gemeinsamen Jahrestagung der Deutschen Mathematiker-Vereinigung und der Gesellschaft für Didaktik an der Ludwig-Maximilians-Universität München.

1. Statistik zwischen Bologna und Zürich

Einen Eindruck von der Stellung der Statistik in der mathematischen Kommunität im Vorfeld der Dreißigerjahre wird durch die Akteure des *Internationalen Mathematiker-Kongresses* (IMK) im September 1928 in Bologna vermittelt.

In der Sektion IV-A (mit 28 Vorträgen)[1] sprachen zu Problemen der mathematischen Statistik: V. Romanovsky aus Taschkent über Verallgemeinerungen der Pearson-Kurven und L. March, der Direktor des französischen statistischen Amtes in Paris über Korrelation.

R.A. Fisher (1890-1962) deckte einen Zusammenhang zwischen dem χ^2 – Anpassungstest im Falle kleiner Stichproben und der Maximum-Likelihood-Methode auf. Zur Illustration verweist er auf ein Beispiel aus der Genetik, beschrieben in seinem Buch *Statistical Methods for Research Workers,* dessen 2. Auflage gerade erschienen war. Dieses Werk, das 14 Auflagen in 45 Jahren erleben wird, ist aus zwei Quellen gespeist, einerseits aus den Erfahrungen, die Fisher als Statistiker seit 1919 am Rothamsted Experimental Station unweit London gewonnen hatte, andererseits durch seine Fähigkeit zur Theorienbildung, die ihn nach Studien in Cambridge bei Bateson, Yule und Jeans zu der richtungsweisenden Arbeit *On the mathematical foundations of theoretical statistics* [2] brachte, der Grundlage für die Entwicklung der Statistik in den Dreißigerjahren.

Ein weiterer Beitrag stammte von J. Neyman (1894-1981) aus Warschau, in dem er über Methoden des Testens von Hypothesen berichtete, die aus einer Zusammenarbeit mit E.S. Pearson (1885-1980) hervorgegangen sind, die er 1926 begonnen hatte, als er Rockefeller-Stipendiat in London bei Karl Pearson und in Paris bei Borel, Lebesgue und Paul Lévy war. Neyman hatte an der Universität von Charkow bei S. Bernstein studiert und über Lebesgue'sche Integrationstheorie ein Buch geschrieben. Von 1917 bis 1921 arbeitete er unter Bernstein über Anwendungen der Wahrscheinlichkeitstheorie

[1] Atti del Congresso Internazionale dei Matematici, Bologna 1928, Tomo VI, Comunicazioni, Societa Tipografia, Bologna 1932.
[2] Philosophical Transactions of the Royal Society of London A, 222 (1921), 309-368.

auf die Versuchsplanung in der Landwirtschaft. Er promovierte 1924 in Warschau, wo er anschließend Vorlesungen über Statistik hielt.[3] Die Sektion IV-B war der angewandten Statistik vorbehalten. Hier sprachen unter anderen über Bevölkerungsstatistik R. Risser (Paris) und E.J. Gumbel (Heidelberg). Die traditionelle Sektion IV zur Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik wurde zu diesem 8. IMK erstmalig durch einen Plenarvortrag ergänzt und aufgewertet, den Emile Borel (1871-1956) hielt. Er brachte mit *Le Calcul des probabilités et les sciences exactes* sein Anliegen zum Ausdruck, das er zusammen mit acht Mitarbeitern zu verwirklichen begonnen hatte. Bei Gauthier-Villars waren die ersten Hefte[4] seiner breit angelegten Buchserie *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* (mit der Betonung auf den Anwendungen) bereits erschienen.
Borel sah insbesondere auf dem Gebiet der Physik neue Anwendungsmöglichkeiten für die Wahrscheinlichkeitstheorie. Allerdings geht er in seinem Vortrag nicht auf die dazu nötige Mathematik ein. Über die hierfür passenden stochastischen Prozesse wurden in der Sektion IV-A durch B. de Finetti (Rom), E. Slutsky (Moskau) und B. Hostinsky (Brünn) erste Vorstellungen dargelegt.

In den folgenden vier Jahren wurde der erforderliche mathematische Apparat entwickelt, über den S. Bernstein (Charkow) zum 9. IMK in Zürich dann in einem „Großen Vortrag“[5] berichtete. In der Sektion *Wahrscheinlichkeitsrechnung, Versicherungsmathematik und Statistik* finden wir wieder Vorträge von Romanovsky, Hostinsky und Risser. Hinzu kamen aus Berlin Beiträge von Richard von Mises (1883-1953) und seinen Mitarbeitern H. Pollaczek-Geiringer und G. Schulz. Von Mises hatte auf Wunsch der Kongressleitung ein Referat über Fragen der Wahrscheinlichkeitsrechnung zu erstatten. Er nutzte die

---

[3] C. Reid: *Neyman*, New York 1998.
[4] E. Borel (red. R. Lagrange) : *Principes et formules classiques* (I.1), Paris 1925; ders. (red. F. Perrin) : *Mécanique statistique classique* (II.3), Paris 1925.
[5] S. Bernstein: *Sur les liaisons entre les grandeurs aléatoires*. Verhandlungen des Internationalen Mathematiker-Kongresses Zürich 1932, 1. Band, S. 288-309. Vgl. auch H.-J. Girlich: *A.N. Kolmogoroff (1903-1987) und die Ursprünge der Theorie stochastischer Prozesse*. Algorismus 44 (2004), 407-421.

Gelegenheit, über seine „neue Wahrscheinlichkeitstheorie“ [6] zu sprechen, die er im Vorjahr in dem bereits eingangs erwähnten Lehrbuch in Hinblick auf breite Anwendungen ausgebaut hatte. Er würdigte auch die neueren Untersuchungen von A. Khintchine [7] und A. N. Kolmogoroff [8], obwohl diese Autoren nicht den Mises’schen Kollektivbegriff, sehr wohl aber seine Betonung eines Bezugssystems vor der Wahrscheinlichkeit und das Operieren mit Verteilungen übernommen hatten. In analoger Weise verwandten die Vertreter der russischen Schule Ideen von Borel[9], ohne dessen Klassifizierung von Wahrscheinlichkeiten beizupflichten.
Die Fortschritte, die bei der Lösung von Einzelproblemen der Wahrscheinlichkeitsrechnung in der Zeit zwischen dem 8. und 9. IMK erzielt wurden, verlangten nach einer allgemein akzeptierten Grundlegung der Wahrscheinlichkeitstheorie. Erst eine derartige Basis könnte ein Fundament auch für die mathematische Statistik legen, die von einer mathematischen Theorie noch weit entfernt war. Über die praktizierten Methoden der Statistik werde in den nächsten Abschnitten berichtet. Dazu wird eine Liste der verbreiteten Bücher vorangestellt.

2. Druckwerke der Statistik

Wir beginnen mit den deutschsprachigen Büchern zur Statistik:
[C-MSL] E. Czuber: *Wahrscheinlichkeitsrechnung,* 2. Band *Mathematische Statistik. Mathematische Grundlagen der Lebensversicherung.*4.Aufl., B.G.Teubner, Leipzig und Berlin 1938.
[C-SFM] E. Czuber: *Die statistischen Forschungsmethoden*. 3. Auflage, Seidel & Sohn, Wien 1938.
[W-GTS] H. Westergaard, H.C.Nybolle: Grundzüge der Theorie der Statistik. 2.völlig umgearbeitete Auflage, G. Fischer, Jena 1928.

---

[6] R. v. Mises: *Fundamentalsätze der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Math. Zeitschrift 4 (1919), 1-97; ders.: *Grundlagen der Wahrscheinlichkeitstheorie*. Math. Zeitschrift 5 (1919), 52-99.
[7] A. Khintchine: *Sur la loi forte des grands nombres*. Comptes rendus, Paris, 186 (1928), 285-287.
[8] A. N. Kolmogoroff: *Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung.* Math. Annalen 104 (1931), 415-458.
[9] E. Borel: *Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques.* Rendiconti d. Circ. Matem. di Palermo 27 (1909), 247-271.

[R-HMS] H. L. Rietz, F. Baur (Hrsg.): *Handbuch der mathematischen Statistik*. B. G. Teubner, Leipzig und Berlin 1930.
[BPR-M] R. Becker, H. Plaut, I. Runge: *Anwendungen der mathematischen Statistik auf Probleme der Massenfabrikation*. 2. Auflage, J. Springer, Berlin 1930.
[M-WSP] R. v. Mises: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik*. F. Deuticke, Leipzig und Wien 1931.
[B-MMV] W.-U. Behrens: *Mathematische Methoden für Versuchsansteller* auf den Gebieten der Naturwissenschaften, Landwirtschaft und Medizin. E. Ulmer, Stuttgart 1933.
[F-SMW] R. A. Fisher: *Statistische Methoden für die Wissenschaft*. [10] Oliver and Boyd, Edinburgh, London 1956.

Am Anfang des 20. Jahrhunderts war Czuber in Mitteleuropa der bedeutendste Experte der Wahrscheinlichkeitsrechnung und seine Bücher wurden immer wieder aufgelegt.[11] In den Dreißigerjahren entsprachen sie schwerlich dem Entwicklungsstand. So enthält der Band [C-MSL] in der ersten Hälfte unter dem Titel „Mathematische Statistik" allein klassische Bevölkerungsstatistik in der Fassung von 1910. [C-SFM] ist eine von F. Burkhardt erweiterte Auflage eines Textes von 1921, der in Struktur und Inhalt überwiegend dem bekannten Lehrbuch von Yule [12] entspricht. Czuber und Burkhardt haben kaum etwas an den statistischen Methoden geändert, sondern nur weitere Anwendungsbeispiele hinzugefügt. Wie auf der Grundlage des Czuber'schen Buches[13] eine statistische Qualitätskontrollmethodik erstmalig ausgearbeitet werden konnte, unter entscheidender Mitwirkung der Tochter des Göttinger Mathematikers Carl Runge, zeigt R. Tobies an [BPR-M].[14]

---

[10] Einzige autorisierte Übertragung der 12. Auflage von *Statistical Methods for Research Workers* ins Deutsche von Dora Lucka.
[11] H.-J. Girlich: *Emanuel Czuber (1851-1925) und die statistischen Forschungsmethoden*. X. Österreichisches Symposium zur Geschichte der Mathematik, Miesenbach 2010, S. 21-28.
[12] G. U. Yule: *An Introduction to the Theory of Statistics*. 5.Aufl.London 1919.
[13] Vielleicht auch angeregt durch W.A. Shewhart, vgl. dazu T. C. Fry: *Probability and its Engineering Uses*. Van Nostrand, New York 1928, S. 320.
[14] R. Tobies: *Iris Runge bei Osram und Telefunken*. Boethius, Band 61 Franz Steiner, Stuttgart 2010.

In Band [M-WSP] sind der Statistik drei Paragraphen gewidmet. §9. *Beschreibende Statistik* umfasst statistische Maßzahlen sowie die Beschreibung von Verteilungen durch Pearsonsche Kurven, Brunssche und Charliersche Entwicklungen. Im §10. *Theoretische Statistik* wird neben der Lexisschen Dispersionstheorie, zur Anpassung von empirischer und hypothetischer Verteilung das Pearsonsche χ^2-Verfahren und das von Mises selbst entwickelte ω^2-Verfahren dargestellt. Schließlich werden in §11mehrdimensionale Probleme unter *Korrelationstheorie* abgehandelt. Auf den letzten Teil des Buches: *Grundzüge der physikalischen Statistik*, der vier Paragraphen umfasst, werden wir später eingehen.
Die Mises'schen Vorlesungen [M-WSP] und eine für weitere Kreise bestimmte Zusammenfassung deren Grundideen[15], die ohne mathematische Formeln auskommt, nutzte W.-U. Behrens als Grundlage für sein Buch [B-MMV] für den Nicht-Fachmathematiker, wobei er mathematische Korrektheit in Inhalt und Form anstrebte. In der Auswahl und eigenen Entwicklung neuer statistischer Fragestellungen orientierte er sich an R. A. Fishers schon eingangs erwähnten Buches, dessen deutsche Übersetzung [F-SMW] erst nach dem 2. Weltkrieg erschienen ist, als das von Mises'sche „Kollektiv" durch „Population" abgelöst wurde.
Das schöne Handbuch [R-HMS] stammt aus dem Amerikanischen[16] und enthält ein Geleitwort von R. v. Mises.
Schließlich ist aus historischen Gründen [W-GTS] aufgeführt. Die erste Ausgabe des Buches von Westergaard ist bereits 1890 erschienen und wurde damals von Karl Pearson als bestes deutschsprachiges Buch zur Statistik bezeichnet.
In Frankreich wurde am Ausbau der Statistik systematisch am Institut Henri Poincaré, Paris, und im Rahmen von Borels *Traité du Calcul des Probabilités et de ses Applications* gearbeitet:
[RT-PS] R. Risser, C.-E. Traynard: *Les principes de la statistique mathématique* (I4, 338 p.) Paris 1933.
[CH-AA] C.-V.-L. Charlier: Application de la théorie des Probabilités a l'astronomie (II4, 179p.), Paris 1931.

[15] R. v. Mises: *Wahrscheinlichkeit, Statistik und Wahrheit*. J. Springer, Wien 1928.
[16] H. L. Rietz, Editor-in Chief: *Handbook of Mathematical Statistics*. Houghton Mifflin, Boston 1924.

[G-ASV] H. Galbrun : *Assurances sur la vie.*
(III1, 310 p.), *Calcul des primes*, Paris 1924 ;
(III2, 288 p.), *Calcul des réserves*, Paris 1927.
[R-SDB] R. Risser : *Application de la statistique à la démographie et à la biologie.* (III3,222 p.) Paris 1932.
[G-AIN] H. Galbrun : *Theorie mathématique de l'assurance invalidité et de l'assurance nuptialité.*
(III4, 154 p.), *Definitions et relations fondamentales*, Paris 1933.
(III5, 180 p.), *Calcul des primes et des réserves,* Paris 1933.
[G-TAM] H. Galbrun: *Theorie mathématique de l'assurances maladie.* (III6, 218 p.), Paris 1934.

Im Hinblick auf die Entwicklung einer modernen mathematischen Statistik waren geeignete wahrscheinlichkeitstheoretische Hilfsmittel erforderlich. Dazu hat in den Dreißigerjahren das Pariser Forschungsinstitut „Henri Poincaré“ beigetragen, das - durch die Rockefeller-Stiftung unterstützt - ein europäisches Zentrum der Stochastik bildete. Der entstandene Apparat der Zufallsvariablen wurde in folgenden Büchern vorgestellt:

[F-GVA] M. Fréchet: *Généralités sur les probabilités ; variables aléatoires.* (I3, 313p.) Paris 1937.
[L-AVA] P. Lévy: *Théorie de l'addition des variables aléatoires.* Gauthier-Villars, Paris 1937.
[C-RVD] H. Cramér: *Random Variables and Probability Distribution.* Cambridge University Press, London 1937.

3. Anpassungstests

Die statistischen Methoden wurden in der letzten Friedensdekade vor allem auf dem Gebiet des Testens von Hypothesen durch Neyman und E. Pearson bereichert. Sie führten Entscheidungsregeln ein, die durch kritische Bereiche charakterisiert sowie mittels verschiedener Fehlerarten bewertet werden und bestimmten beste Tests.[17] In engem Zusammenhang stehen hierzu Konfidenzintervalle, die sie unter

[17] J. Neyman, E. S. Pearson: *On the problem of the most efficient tests of statistical hypotheses.* Phil. Transact. Royal Soc. A, 231 (1933), 289-337;
J. Neyman, E. S. Pearson: *The testing of statistical hypotheses in relation to probabilities a priori*. Proc. Cambridge Philos. Soc. 29 (1933), 492-510.

Verwendung von Zufallsvariablen beschrieben.[18] Darauf soll hier nicht weiter eingegangen werden. Stattdessen werde die Genese von Anpassungstests diskutiert, die den bewährten χ^2 -Test von Karl Pearson für stetige Verteilungen verbesserten und mit den Namen von Cramér, von Mises, Smirnow und Kolmogoroff verbunden sind.
R. v. Mises hatte in [M-WSP] seine *Theoretische Statistik* im Wesentlichen auf Anpassungstests reduziert, auf die Prüfung, ob statistische Daten mit einer theoretischen Verteilungsannahme verträglich sind. Neben den bekannten Verfahren von Lexis und K. Pearson führt er für eine theoretische Verteilung V(x) und der empirischen Verteilung $S_n(x)$ das Abweichungsmaß

$$\omega^2 = \int \lambda_n(x)\ [S_n(x)-V(x)]^2\ dx$$

ein, wobei $\lambda_n(x)$ eine noch zu wählende positive Gewichtsfunktion ist. Unter der Hypothese V(x) ergibt sich für das binomialverteilte $nS_n(x)$:

$$ES_n(x) = V(x), \qquad \text{var}\ [nS_n(x)] = n\ V(x)[1-V(x)].$$

Damit lassen sich mit passendem λ_n auch die ersten beiden Momente von ω^2 berechnen, so dass $E(\omega^2) = 1$ gilt.
Da das Verteilungsgesetz von ω^2 im Allgemeinen noch von V abhängt, begnügt sich v. Mises damit zu prüfen, ob der empirische Wert von ω^2 sich von 1 um weniger als die Standardabweichung σ[19] unterscheidet. In diesem Falle erklärt er die Hypothese als zulässig.
Diese Vorgehensweise wurde von H. Geiringer aufgegriffen und auf den Fall unvollständiger Information über hypothetischen Verteilungen ausgedehnt.[20]
Um zu einem verteilungsfreien ω^2 – Test zu gelangen,d.h. zu einem Test mit einer Prüfgröße, die von der Verteilung V unabhängig ist, eignet sich folgende Modifizierung:

---

[18] J. Neyman: *Outline of a theory of statistical estimation based on the classical theory of probability*. Phil. Trans. Roy. Soc. A, 236 (1937), 330-380.

[19] In [M-WSP] wird noch mit „wahrscheinlichen Grenzen“ $\pm k\ \sigma$ gearbeitet. Wenn die Prüfgröße annähernd $N(1,\sigma^2)$-verteilt ist, so gilt k=0,674.

[20] H. Geiringer: *Methoden der theoretischen Statistik*. Compositio Mathematica 2 (1935), 276-320.

$$\omega_n^2 = n \int g[V(x)]\, [S_n(x)-V(x)]^2\, dV(x).$$

Für die Verteilungsfunktion $F_n(x)$ von ω_n^2 hat N. W. Smirnow eine Grenzverteilung bestimmt.[21] Für $g \equiv 1$ wurde diese tabelliert.[22]
H. Cramér verwendete die speziellen Abweichungsmaße

$$E \int [S_n(x)-V_i(x)]^2\, dx\,, \qquad i=1, 2, 3$$

wobei $V_i(x) = \Phi(x) + P_1(\Phi) + ... + P_i(\Phi)$ die i-te Partialsumme der Edgeworth-Entwicklung von V(x) bezeichnet.[23] Sein Anliegen bestand darin, die asymptotischen Eigenschaften der von Edgeworth 1905 vorgeschlagenen Entwicklung anzugeben.

Dagegen war v. Mises an weiteren Verallgemeinerungen des zentralen Grenzwertsatzes interessiert. Er trug darüber bereits auf der internationalen Tagung „Calcul des Probabilités" im Oktober 1937 in Genf [24] vor und führte sogenannte „statistische Funktionen" als Funktionale f auf konvexen Mengen im Raum der Verteilungsfunktion ein, dafür studierte er das Grenzverhalten von $f[S_n(x)] - f[V(x)]$. Über den dazu entwickelten von Mises-Kalkül hat er in einer Vortragsreihe an der Universität Rom im Februar 1952 ausführlich berichtet, wobei er auf einfache Weise die von Smirnow ermittelte Verteilung bestätigen konnte.[25]

Eine Prüfgröße, die verteilungsfrei und dazu noch konsistent ist, untersuchten A. Kolmogoroff und V. Glivenko[26]:

$$D_n = \sup |\, S_n(x) - V(x)\, |\,,$$

---

[21] N. W. Smirnow: *Über die Verteilung der ω^2-Tests von Mises* (russ.) Mat. Sbornik 2(1937), 973-993.

[22] D. B. Owen: *Handbook of Statistical Tables*. Reading, Mass., 1962.

[23] H. Cramér: *On the composition of elementary errors*. Second paper: Statistical applications. Skandinavisk Aktuarietidskrift (1928), 141-180.

[24] R. v. Mises: *Généralisation des théorèmes de limite classiques*. Actualités Scientifiques et Industrielles 736, 61-68, Paris 1938.

[25] R. v. Mises: *Théorie et application des fonctions statistiques*. Rendiconti di Matematica e delle sue applicazioni 11(1952), 374-410.

[26] A. Kolmogoroff: *Sulla determinazione empirica di una legge di distribuzione*. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari 4(1933), 83-91;
V. Glivenko: *Sulla determinazione empirica delle leggi di probabilità*. Giornale dell' Istituto Italiano degli Attuari 4(1933), 92-99.

Ersterer bestimmte die Grenzverteilung von nD_n und letzterer zeigte $D_n \rightarrow 0$ mit Wahrscheinlichkeit 1 („Fundamentalsatz der Statistik“). Für endlichen Stichprobenumfang: n=1(1)100 sind bei Owen die Werte x bzw. y mit $P(D_n \geq x) = 1\text{-}p$ für p = 0.80, 0.90, 0.95, 0.98, 0.99 und $P(D_n \leq c/n) = y$ für c= 1(1)15 tabelliert.

4. Statistik in Cambridge (USA)

Im Oktober 1930 traf Eberhard Hopf (1902-1983) in Cambridge (Massachusetts) ein. Er hatte als Wissenschaftler am Astronomischen Recheninstitut, Berlin-Dahlem, an der Berliner Universität im Vorjahr sich habilitiert und ein Rockefeller-Stipendium errungen, das ihm ermöglichte, mit George D. Birkhoff (1884-1944) über topologische Dynamik[27] an der Harvard Universität zu arbeiten. Zur statistischen Physik hatte Hopf gerade eine Arbeit[28] zum Poincaréschen Wiederkehrsatz veröffentlicht. Sein vorrangiges Interesse lag noch bei der Himmelsmechanik, insbesondere an mathematischen Problemen des Strahlungsgleichgewichts[29] in den äußeren Schichten von Sternen, die auf Integralgleichungen führen. Für die Behandlung von derartigen singulären Integralgleichungen vom Faltungstyp wurde er durch Norbert Wiener (1894-1964) vom M.I.T. auf eine funktionentheoretische Lösungsmethode geleitet, die als Wiener-Hopf-Faktorisierung[30] auch zur Lösung des Vorhersageproblems bei stochastischen Prozessen[31] später von Nutzen war.

---

[27] G. D. Birkhoff: *Dynamical Systems*. AMS Colloquium Publications, Vol. IX, New York 1927.

[28] E. Hopf: *Zwei Sätze über den wahrscheinlichen Verlauf der Bewegungen dynamischer Systeme*. Mathematische Annalen 103 (1930), 710-719.

[29] Vgl. E. Hopf: *Mathematical Problems of Radiative Equilibrium*. Cambridge Tracts in Mathematics and Mathematical Physics, No. 31, London 1934.

[30] N. Wiener, E. Hopf: *Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen*. Sitzungsberichte der Preußischen Akademie der Wissenschaften, phys.-math. Klasse 31(1931), 696-706.

[31] N. Wiener: *Extrapolation, Interpolation, and Smoothing of Stationary Time Series with Engineering Applications*. New York 1949.

Die Zusammenarbeit mit Birkhoff gipfelte in dessen Beweis des individuellen Ergodensatzes, zu dem Hopf wesentlich beigetragen hat.[32]

Nach Ablauf des Rockefeller-Stipendiats 1932 erhielt Hopf eine Anstellung als Assistant Professor der Mathematik am M.I.T. Die Gespräche über moderne Wahrscheinlichkeitstheorie, die Hopf mit Wiener führen konnte, der selbst zu den Pionieren der Stochastik gehörte und neben Hugo Steinhaus Wahrscheinlichkeitsräume noch vor Andrej Kolmogoroff konstruierte[33], bestärkten Hopf darin, eine moderne statistische Physik in Angriff zu nehmen, deren Kern die Ergodentheorie bildete. Dazu publizierte er eine umfangreiche Arbeit zu den Grundlagen, deren Anliegen er wie folgt beschrieb:

> It was the author's intention to apply modern mathematical tools to statistical phenomena effected by strictly causal mechanisms.[34]

Dabei setzte Hopf Kolmogoroffs maßtheoretischen Apparat[35] ohne jegliche Abstriche ein, um zumindest in der statistischen Physik die Wahrscheinlichkeitsrechnung als mathematische Naturwissenschaft im von Mises'schen Sinne dadurch zu legitimieren, dass hier die Massenerscheinungen eines konservativen Systems kausal bedingt sind.[36] Am 2. März 1931 schrieb Kolmogoroff an Alexandroff:

> Heute war ich bei Mises im Institut von 10 bis 12. ... Mises schreibt ein Buch über Wahrscheinlichkeitstheorie für irgendeinen Wiener Verlag. Ich sah die Korrekturfahnen: Prinzipien der *Kollektivslehre* etwas aufgebläht (100 S.),

---

[32] Vgl. in den Proceedings of the National Academy of Sciences (USA) die Arbeiten von Birkhoff: 17 (1931), 650-660; Hopf: 18 (1932), 93-100, 204-209; Koopman 17 (1931), 315-318 und J. von Neumann: 18 (1932), 70-82, 255-263.

[33] N. Wiener: *Differential-Space*. Journ. Math. and Physics 2(1923), 131- 174. Vgl. H.-J. Girlich: *Lomnicki – Steinhaus – Kolmogorov: steps to a modern probability theory*, in W. Wieslaw (Ed.) European Mathematics in the Last Centuries, Wroclaw 2005, 47-56.

[34] E. Hopf: *On causality, statistics and probability*. Journal of Mathematics and Physics 13(1934), 57-102, Zitat von Seite 64.

[35] A. Kolmogoroff: *Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Ergebnisse der Mathematik, Bd. 2.3, Berlin 1933.

[36] E. Hopf: *Remarks on causality and probability*. Journal of Mathematics and Physics 14 (1935), 4-9.

aktuelle Theorie (im Sinne von Tschebyscheff und Ljapunoff) sehr reduziert, aber die physikalischen Anwendungen werden sicherlich interessant.[37]

Der letzte Teil von [M-WSP] *Grundzüge der physikalischen Statistik* umfasst auf mehr als 150 Seiten vier Paragraphen[38] und Aufgaben. Dazu hatte Mises ein umfangreiches Material mit Hilfe seiner Kollektiv-Konzeption aufbereitet. Dabei setzte er auch Irrfahrten und Markoffsche Ketten ein.[39] Seine daran geknüpften Folgerungen hinsichtlich eines Pseudoergodensatzes und von Übergangswahrscheinlichkeiten als sachgemäße Grundlage physikalisch-statistischer Theorien wurde bereits zum 8. IMK in Bologna von Hadamard für die Ergodentheorie zurückgewiesen.[40] Für die statistische Mechanik und die Ergodentheorie arbeitete Hopf stattdessen erfolgreich mit zufälligen Prozessen, die von Khintchine stationäre stochastische Prozesse genannt wurden.[41]

Völlig frei von philosophischer Ursachenforschung wurde die von Khintchine und Kolmogoroff im ersten Drittel der Dreißigerjahre bereinigte Wahrscheinlichkeitstheorie wohl erstmalig von einem Harvard-Absolventen auf die mathematische Statistik im engeren Sinne angewandt. Es war Joseph L. Doob (1910-2004), der nach seiner Promotion 1932 nach New York ging und dort über Harold Hotelling (1895-1973) an der Columbia-Universität einen Zugang zur Statistik fand. Dieser hatte 1929 einige Monate mit Fisher in Rothamsted gearbeitet und versucht, die Gültigkeit der Maximum-Likelihood-Methode zu beweisen[42]. Das gelang mit den neuen Hilfsmitteln erstmalig erst Doob, indem er die Konsistenz der

---

[37] A.N. Shirjaev (Hrsg.): Kolmogoroff, Band 2, Ausgewählte Stellen aus dem Briefwechsel von A.N. Kolmogoroff und P.S. Alexandroff (russ.),Moskau 2003.
[38] §13.Die Aufteilungsgesetze der Gastheorie und Strahlungstheorie, §14.Schwankungserscheinungen, §15.Brownsche Bewegung und Diffusion, §16.Statistik des Zeitablaufs. Ergodenproblem.
[39] Er zitierte insbes. das Lehrbuch von A. Markoff (1912), das Liebmann ins Deutsche übersetzt hatte, und B. Hostinsky (1928).
[40] Vgl. Hadamard: Atti, tomo V, 133-139 ; Comptes rendus 186 (1928) 275f.
[41] A. Khintchine: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Mathematische Annalen 109 (1934), 604-615.
[42] H. Hotelling: *The consistency and ultimate distribution of optimal statistics*. Transactions of the American Mathematical Society 32(1930), 847-859.

ML-Schätzer zeigte.[43] Daran schließt sich eine strenge Untersuchung über die Fisher-Information[44] und die Cramér-Rao-Ungleichung an, die Doob früher als Rao, Cramér und Fréchet[45] herleiten konnte. Hotellings zweiter Mitarbeiter B. O. Koopman fand im Zusammenhang mit suffizienten Schätzern die Exponentialfamilie.[46]

5. Statistik an der Leipziger Universität

Auf der bereits erwähnten Tagung über Wahrscheinlichkeitstheorie in Genf referierte zur Eröffnung, neben dem Präsidenten M. Fréchet und Georg Pólya (Zürich), der Nobelpreisträger der Physik Werner Heisenberg (1901-1976) Über *Wahrscheinlichkeitsaussagen in der Quantentheorie der Wellenfelder*.[47] In der Sektion IV: *Le principe ergodique et les probabilités en chaîne*[48] sprachen E. Hopf über *Statistische Probleme und Ergebnisse in der klassischen Mechanik* sowie Hostinsky, Onicescu und Romanovsky über Ketten. Bedeutende Arbeiten zur mathematischen Statistik legten Glivenko und Neyman vor.[49]
Von den genannten Teilnehmern waren Heisenberg seit 1927 und Hopf seit 1936 Professoren der Universität Leipzig. Ihr in Leipzig gebliebener Kollege Bartel Leendert van der Waerden (1903-1996) war damals schon ein bedeutender Algebraiker mit Bezügen zur Physik[50]. Von Medizinern häufig um Rat zur Statistik gefragt, wurde

---

[43] J. L. Doob: *Probability and statistics*. Transactions of the American Mathematical Society 36 (1934), 759-775.
[44] J. L. Doob: *Statistical estimation*. Transactions of AMS 39 (1936), 410-421. Vgl. R. A. Fisher: Theory of statistical estimation. Proc. Cambridge Phil. Soc. 22(1925), 700-725. und Anm.2, worin die Begriffe Effizienz, Suffizienz und Informations-Matrix eingeführt wurden.
[45] M. Fréchet*: Sur l'extension de certaines evaluations statistiques au cas de petit echantillons.* Revue de l'Institut Intern. de Statistique 11(1943),182-205.
[46] B. O. Koopman : *On distribution admitting a sufficient statistic*. Transactions of AMS 39 (1936), 399-409. Vgl. dazu G. Darmois: *L'emploi des observations statistiques Methodes d'estimation.* Actualités sci. et ind. 356, Paris 1936.
[47] Actualités scientifiques et industrielles 734, Paris 1938.
[48] Actualités scientifiques et industrielles 737, Paris 1938.
[49] Actualités scientifiques et industrielles 739, Paris 1938; vgl. Anm. 26 und 18.
[50] B. L. van der Waerden: *Die gruppentheoretische Methode in der Quantenphysik*. Grundlehren Bd. 36, Berlin 1932.

er zu Untersuchungen[51] angehalten, die führten wohl zu folgenden Vorlesungen von B. L. van der Waerden:

- Statistische Methoden f. Mediziner & Biologen, WS 1939/40, 1std.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik, 1. Trim. 1940, 3std.; WS 1944/45, 4std.
- Wahrscheinlichkeitsrechnung, WS 1942/43, 3std.

Herbert Beckert (1920-2004) berichtete über seine Studienzeit in Leipzig speziell von dieser Vorlesung:

> „Die Wahrscheinlichkeitsrechnung von van der Waerden war sehr gut. Er ging nur beschränkt auf die Maßtheorie ein und verwies dabei auf sein Seminar, das mit zum tieferen Eindringen in die Wahrscheinlichkeitstheorie nach Kolmogorow gehöre."[52]

Hans Richter (1912-1978) wurde 1937 nach seiner Promotion bei van der Waerden Assistent am Institut für Wirtschaftswissenschaften und Statistik an der Universität Leipzig. Hier befasste er sich mit versicherungsmathematischen Problemen und habilitierte sich innerhalb von drei Jahren mit einer Arbeit über die Stabilisierung des Neuzuganges,z.B. einer Sterbekasse,zu gegebener Absterbeordnung.[53] 1944wurde Richter zum Extraordinarius für Versicherungsmathematik ernannt. Die Leipziger Erfahrungen von van der Waerden und Richter konnten nach dem Krieg in zwei modernen Lehrbüchern der Stochastik[54] verarbeitet werden, die den deutschen Studenten halfen, den isolationsbedingten Rückstand gegenüber dem Ausland auf dem Gebiet der Statistik zu verringern. Wegen des Währungsgefälles wurden im Osten Deutschlands auch eigens produzierte Übersetzungen genutzt.[55]

---

[51] B. L. van der Waerden in den Berichten zu den Verhandlungen der Sächsischen Akademie der Wissenschaften zu Leipzig, Math.-phys. Klasse 87(1935), 88(1936), 91 (1939), 92(1940).

[52] H. Beckert*: Begegnungen*. In K. Beyer (Hrsg.): Angewandte Analysis in Leipzig von 1922 bis 1985. Abhandlungen der Sächs. Akad. Wiss. zu Leipzig, Math-naturwiss. Klasse, Bd. 64, Heft 3, S. 70.

[53] H. Richter: *Untersuchungen zum Erneuerungsproblem*. Mathematische Annalen 118 (1941), 145-194.

[54] H. Richter: *Wahrscheinlichkeitstheorie*. Grundlehren Bd. 86, Berlin 1956; B.L.van der Waerden: *Mathematische Statistik*. Grundl. Bd.87, Berlin 1957.

[55] B. W. Gnedenko: *Lehrbuch der Wahrscheinlichkeitsrechnung*. Berlin 1957; M. Fisz: *Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematische Statistik*, Berlin 1958.

Zwei Werke von Leipziger Gelehrten zur Statistik, in denen die moderne Wahrscheinlichkeitstheorie noch nicht eingesetzt wurde, seien noch genannt. Walter-Ulrich Behrens (1902-1962) hatte in Leipzig vornehmlich Chemie studiert und nach der Promotion 1924 an der Landwirtschaftlichen Lehr- und Versuchsstation in Leipzig-Möckern gearbeitet. Seine Untersuchungen zur Reproduzierbarkeit von Beobachtungsdifferenzen bei kleinen Stichproben[56] wurden von R. A. Fisher aufgegriffen. Das komplizierte Behrens-Fisher-Problem fand erst spät eine befriedigende Erklärung.[57] Im Anschluss an Fishers *Statistical Methods* hat Behrens einen Leitfaden für Landwirte, Naturwissenschaftler und Mediziner verfasst.[58]
Felix Burkhardt (1888-1973), seit 1931 Professor an der Universität Leipzig, seit 1943 Ordinarius für Statistik[59], hatte das Lehrbuch von Czuber[60] bearbeitet und beträchtlich erweitert. Darin nahm er neuere Resultate auch von sich selbst und von van der Waerden auf (vgl. Anm.51). Sein Anliegen als Bevölkerungsstatistiker war zu zeigen, „wie die mathematisch-statistischen Methoden auf den verschiedenen Lebensgebieten fruchtbringend angewandt werden können“.
Statistik wird in Abhängigkeit vom Studienfach selbst heute für Volkswirte, Naturwissenschaftler und Mathematiker unterschiedlich aufgefasst. In den Dreißigerjahren wurde das Statistik-Programm von R. A. Fisher (vgl. Anm.2) und die statistische Mechanik[61] Schritt für Schritt mit der modernen Wahrscheinlichkeitstheorie verbunden. Die daraus hervorgegangenen Bücher von Cramér (1946), E. Hopf (1937) und Khintchine (1943)[62] waren Meilensteine auf dem Weg zur Etablierung der Statistik als mathematische Disziplin.

---

[56] W. U. Behrens: *Ein Beitrag zur Fehlerberechnung bei wenigen Beobachtungen*. Landwirtschaftliches Jahrbuch. 68(1928), 807-837.
[57] J. W. Linnik: *Statistische Probleme mit störenden Parametern* (russ.). Moskau 1966.
[58] W.-U. Behrens: *Mathematische Methoden für Versuchsansteller*. Stuttgart 1933.
[59] H.-J. Girlich: *Felix Burkhardt- ein sächsischer Pionier der Statistik in Deutschland.* Statistik in Sachsen 12 (2006) 3/4, 51-58.
[60] E. Czuber: *Die statistischen Forschungsmethoden*. 1. Auflage, Wien 1921, 3. erw. Aufl. hrsg. v. F. Burkhardt, Wien 1938. Zitat: S. VIII.
[61] R. H. Fowler: *Statistical Mechanics*. Cambridge 1929.
[62] A. J. Chintchin: *Mathematische Grundlagen der Statistischen Mechanik.* Moskau 1943 (russ.), New York 1949 (engl.), Mannheim 1964 (dt.).

ERGEBNISSE DER MATHEMATIK
UND IHRER GRENZGEBIETE

HERAUSGEGEBEN VON DER SCHRIFTLEITUNG
DES
„ZENTRALBLATT FÜR MATHEMATIK"
FÜNFTER BAND

2

ERGODENTHEORIE

VON

EBERHARD HOPF

MIT 4 FIGUREN

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1937