Süßmilch und Euler - zwei kooperierende Stammväter der Demographie in Deutschland

HANS-JOACHIM GIRLICH, LEIPZIG

Johann Peter Süßmilch (1707-1767), Propst zu Cölln an der St. Petri-Kirche und Leonhard Euler (1707-1783), der Direktor der Mathematischen Klasse, der in praxi häufig auch die Geschäfte der Berliner Akademie führte, trafen sich viele Jahre lang bei den regulären Donnerstagssitzungen der Königlichen Academie der Wissenschaften zu Berlin. Wie und weshalb der Theologe, der sich um eine beschreibende Bevölkerungsstatistik für Preußen verdient gemacht hatte, diese Gelegenheit nutzen konnte, den berühmten Mathematiker dafür zu gewinnen, anspruchsvolle mathematische Modelle für die Entwicklung von Populationen aufzustellen, das soll in Folgendem skizziert werden. Ihre Zusammenarbeit führte zu einem mehrbändigen Werk, das nicht nur in den deutschsprachigen Ländern, sondern auch in England und Holland, mit ihren gewichtigen Vorreitern der Demographie, als eine eine neue Disziplin hervorbringende Monographie weite Verbreitung fand (vgl. [15]).

1. Herkunft und Ausbildung

J.P. Süßmilch wurde in Zehlendorf bei Berlin als Sohn des Sattlers und Krügers Elias Süßmilch geboren, der 1707 den an der viel befahrenen Landstraße zwischen Berlin und Potsdam gelegenen Zehlendorfer Erbbaukrug übernommen hatte. Johann Peter wuchs bei seinen Großeltern mütterlicherseits in der Domstadt Brandenburg auf, wo er bis zu deren Tod das Neustädtische Lyzeum besuchte. Als erst Neunjähriger wechselte er an das Berliner Gymnasium zum Grauen Kloster über, wo er bis 1724 blieb und durch Johann Leonhard Frisch (1666-1743) insbesondere für die Naturwissenschaften interessiert wurde. Im letzten Schuljahr vernachlässigte er den gymnasialen Unterricht und belegte stattdessen am Anatomischen Theater Vorlesungen, um einmal Arzt zu werden. Seine Eltern bevorzugten dagegen eine juristische Laufbahn und schickten ihn an die Lateinschule von August Hermann Francke (1663-1727). Allerdings bewirkte wohl dieser, dass Süßmilch Ostern 1727 an der Universität Halle ein Theologiestudium begann, das er nach dem Tode von Francke zu Ostern 1728 in Jena fortsetzte. Hier fand er einen Zugang zur Mathematik über die Professoren

Jacob Carpov (1699-1768), der die mathematische Methode des Philosophen Christian Wolff (1679-1751) auf die Theologie anwendete, sowie Georg Erhard Hamberger (1697-1755), der ihm auch das physikalische Experiment nahebrachte und zu der Doktorarbeit „Dissertatio physica de cohaesione et attractione corporum“ anregte, die er im Frühjahr 1732 erfolgreich verteidigte (vgl.[26], [6]).

Zu dieser Zeit war der gleichaltrige Leonhard Euler bereits wohlbestallter Professor der Physik und ordentliches Mitglied der Kaiserlichen Akademie in St. Petersburg. Diese schnelle Karriere wurde durch die angesehene Baseler Mathematikerfamilie Bernoulli auf mannigfaltige Weise gefördert. Leonhards Vater, Paulus Euler (1670-1745), beschäftigte sich während seines Theologie-Studiums in Basel unter Jakob Bernoulli (1655-1705) intensiv mit Mathematik. Im Riehner Pfarrhaus brachte er seinem Sohn bereits Stifels „Coss“ bei. Als dieser neunjährig die Baseler Lateinschule besuchte, wurde er zusätzlich durch den Privatlehrer Johannes Burckhardt (1691-1743) auf mathematischem Gebiet unterrichtet. Schon 1720 wird Euler an der Baseler Universität immatrikuliert. Er hörte Vorlesungen über Geometrie und Arithmetik bei Johann Bernoulli (1667-1748), dem damals bedeutendsten aktiven Mathematiker. Dieser gab „mir alle Sonnabend Nachmittag einen / freyen Zutritt bey sich, und hatte die Güte mir die gesammelten Schwierigkeiten zu erläutern“, die bei der selbständigen Lektüre schwieriger mathematischer Bücher auftraten. Die intensive Betreuung führte 1726 zu Eulers erster in Leipzig gedruckten mathematischen Abhandlung und der Lösung einer Preisaufgabe der Pariser Akademie der Wissenschaften. Mit der Habilitationsschrift „Dissertatio physica de sono“ von 1727 und der Vermittlung von Daniel Bernoulli (1700-1782), der bereits 1725 nach St.Petersburg berufen worden war, konnte Euler die oben genannte Position 1730 erringen. Nachdem Daniel Bernoulli 1733 in die Schweiz zurückgekehrt war, übernahm Euler dessen Professur der Mathematik. (vgl. [11], [21]).

2. Das entscheidende Jahr

Am 31. Mai 1740 starb der „Soldatenkönig“ Friedrich Wilhelm I., der 1723 Christian Wolff bei Androhung der Todesstrafe des Landes verwiesen hatte. Eine Woche nach Amtsantritt lässt Friedrich II. den Frühaufklärer Wolff bitten, aus Marburg zurückzukehren. Am 14. Juni beauftragt er den sächsischen Gesandten am Petersburger Hof, den großen „Algebraisten“ Euler zu gewinnen. Dem Naturwissenschaftler von altem Adelsgeschlecht Pierre-Louis Moreau de Maupertuis (1698-1759) schrieb der König selbst, um ihm die Leitung der Berliner Akademie anzutragen (vgl.[18]). Doch die schwelende Habsburger Erbfolgeproblematik nach dem Tode Kaiser Karl VI. im Oktober 1740 nutzte Friedrich II. zur Annexion Schlesiens aus, die Reorganisation der Leibnizschen Sozietät verzögerte sich. Bereits im Januar 1741 war Schlesien von preußischen Truppen besetzt, nur die Festungen Glogau, Brieg, Breslau, Neiße und Glatz leisteten noch Widerstand. In St. Petersburg überbrachte der preußische Gesandte von Mardenfeld am 15. Februar Euler die Berufungsurkunde. Zwei Tage später rückt das Kalcksteinsche Infanterieregiment mit Süßmilch als Feldprediger nach Schlesien ab. Dieser hatte nach Beendigung seiner Studien in Jena die Stelle eines Hauslehrers für einen Sohn des General Wilhelm von Kalckstein übernommen und 1736 die des Feldpredigers erhalten. Nach dem Fall der Festung Glogau beendete Süßmilch „auf dem Marsch zu Schweidnitz“ am 27. März die Vorrede seines Buches zur Bevölkerungsstatistik, auf das wir im nächsten Abschnitt näher eingehen werden. Ein lobendes Vorwort dazu schrieb kein geringerer als Wolff, der an die Universität Halle zurückgekehrt war. In der Zwischenzeit war auch Maupertuis im Feldlager des Königs zu Reichenbach eingetroffen und mit diesem Richtung Brieg weitergezogen. Am10. April kommt es zur Schlacht von Mollwitz, bei der Maupertuis von österreichischen Truppen gefangengenommen und nach Wien verbracht wurde (vgl.[11] S.80). Süßmilch konnte den Husaren entkommen. Schließlich hat die preußische Infanterie noch die Schlacht gerettet, die Friedrich II. schon verloren glaubte. Am 19. Juni verließ Euler St. Petersburg und traf mit seiner Familie am 25. Juli in Berlin ein. Friedrich II. schickt aus dem Feldlager an Euler am 4. September 1741 ein Begrüßungsschreiben. Erst acht Jahre später kommt es zu einer persönlichen Begegnung der beiden in Potsdam.

3. Göttliche Ordnung (1741)

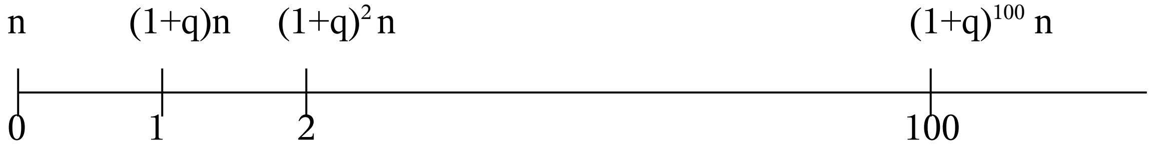
Im Mai 1741 erschien bei I.C. Spener in Berlin ein Buch mit dem merkwürdigen Titel: „Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts, aus der Geburt, Tod, und Fortpflanzung desselben erwiesen von Johann Peter Süßmilch“. Wenn der Feldprediger Süßmilch in der Aufschrift eine theologische Interpretation der beobachteten Gesetzmäßigkeiten der menschlichen Population entsprechend seiner Vorbilder William Derham (1657-1735), Kanoniker in Windsor, und der Ärzte John Arbuthnott (1667-1735) sowie Bernard Nieuwentyt (1654-1718) hervorhebt, so handelt es sich inhaltlich um das erste bedeutende Werk der Bevölkerungsstatistik in Deutschland. Von der Anlage her schließt es sich stärker an das bahnbrechende Buch von John Graunt (1620-1674) an, das 1702 auch in deutscher Übersetzung in Leipzig publiziert wurde. Die umfangreiche ausländische Literatur, die im ersten Drittel des 18. Jahrhunderts erschienen ist, wurde monographisch aufgearbeitet und Listen über die Getauften, die Bestatteten und die Verheirateten aus Brandenburg und Preußen zusammengestellt und ausgewertet. Allerdings bewegen sich die eingesetzten mathematischen Hilfsmittel noch im Rahmen der Arithmetik. Die Anwendung dieser auf Graunt zurückgehenden Analysemethodik auf ökonomische Daten, wie sie etwa William Petty (1623-1687) praktiziert hat, führte auf den umfassenden Begriff „Politische Arithmetik“, der auch den Bevölkerungsstatistiker Süßmilch charakterisiert. Wahrscheinlichkeitsrechnung, wie sie etwa in Jakob Bernoullis „Ars conjectandi“ seit 1713 vorliegt, wird von ihm nicht verwendet. Nur von „wahrscheinlichen Wahrheiten“ ist im Zusammenhang mit dem Erfahrungswert der Listen die Rede (vgl.[23],[5],[1],[19],[12],[20]).

4. Die Zeit der Verdoppelung

Die Frage nach dem Wachstum von Städten wie London wird bereits von Graunt aufgeworfen. Süßmilch interessiert sich besonders für die Vermehrung (und deren Geschwindigkeit) der Bevölkerung in den preußischen und brandenburgischen Landen. Als eine Kennziffer der Vermehrung wählt er die Zeitspanne aus, die zu einer Verdopplung der Bevölkerung führt. Das Problem lag im 18. Jahrhundert darin, dass Volkszählungen in deutschen Landen nur für einzelne Städte durchgeführt worden waren. Deshalb musste man auf die zugänglichen Daten der Kirchenbücher ausweichen, die durch Süßmilch in Listen verdichtet wurden. Mit der Annahme, die Zahlen der Einwohner eines Gebietes wachsen im gleichen Verhältnis wie die ihrer Toten, berechnete er die Zeit der Verdopplung für verschiedene Länder seines Königs unter der zusätzlichen Hypothese, die Einwohnerzahlen bilden bei äquidistanter Beobachtung eine arithmetische Folge. Für das Herzogtum Pommern stellte er zum Beispiel fest, in 20 Jahren ist die Bevölkerung um 1/5 gewachsen, also findet in 100 Jahren eine Verdopplung statt. Dabei ermittelte er die Wachstumsrate nicht durch Vergleich von zwei Jahreszahlen im vorgegebenen zeitlichen Abstand (hier von 20 Jahren), sondern berechnete zunächst Durchschnittszahlen über einen größeren Zeitraum, die Störungen, wie z.B. Seuchen in einzelnen Jahren weitgehend ausglichen. Eine andere Fehlerquelle ist der prinzipielle Abbruch der Ratenberechnung nach der ersten Dezimalen (Runden war hier nicht üblich), wodurch die Kennziffern bis zu 100% verfälscht wurden.

Euler hat das Problem der Verdoppelung im Sinne seiner „Rettung der Göttlichen Offenbarung gegen die Einwürfe der Freygeister“ von 1747 aufgegriffen um zu zeigen, wie die Nachkommen eines einzigen Paares die Erde füllen können (vgl. [7], S.116). Er stellt folgende Aufgabe: Wie groß ist die jährliche Zuwachsrate q, wenn nach einem Jahrhundert sich die Anzahl der Menschen verdoppelt ? Euler löste dieses Problem unter der Hypothese, die

Anzahlfolge, bezogen auf die Jahresenden, ist eine geometrische Folge.



Damit wird eine Population von n Menschen für ein gewisses q nach 100 Jahren sich verdoppeln und es gilt

$$(1+q)^{100}\, n = 2n \quad . \qquad (1)$$

Durch Logarithmieren (Basis 10) erhält er sofort

$$\lg (1+q) = 0{,}0030103 \qquad (2)$$

und hieraus $\quad q = 0{,}0069555 \approx 1/144 \quad .$

Würde Süßmilch mit seiner Bezugsperiode von 20 Jahren die Eulersche Hypothese verwenden, so ergäbe sich für die Verdopplungszeit in Pommern nur 80 Jahre.

5. An der Berliner Akademie

Nach Beendigung des 2. Schlesischen Krieges im Friedensschluss von Dresden kehrte Friedrich II. im Januar 1746 nach Potsdam zurück und verpflichtete Maupertuis zum Präsidenten der L'Academie Royale des Sciences et des Belles Lettres de Berlin, die im Vorjahr mit der Berufung von 26 Mitgliedern, darunter Süßmilch, neu gebildet worden war.

Am 6. Februar 1749 wurde von Süßmilch die „Abhandlung von dem schnellen Wachstum der Königlichen Residentz Berlin" in der Versammlung der Königlichen Akademie der Wissenschaften der philosophischen Klasse vorgestellt. Diese Anwendung der arithmetischen Bevölkerungsstatistik auf die Stadt Berlin, analog zur Untersuchung von Maitland über London, wurde vom „Beständigen Sekretär" der Akademie, J.H. Samuel Formey (1711-1797), zur Veröffentlichung in den Akademieberichten („Mémoires...) nicht angenommen. Vielleicht war auch das ein Grund für Süßmilch, sich stärker um schärfere mathematische Hilfsmittel für seine Bevölkerungsanalysen zu bemühen. Er bat

Euler, ihm zu helfen, die Verdopplungszeit x für verschiedene bevölkerungsstatistisch relevante q zu berechnen, um sie in einer Tafel zusammenstellen zu können. Analog zu (1) gilt

$$(1+q)^{x}\, n = 2n \quad . \qquad (3)$$

Durch Logarithmieren folgt

$$x \lg(1+q) = 0{,}30103 \quad , \qquad (4)$$

woraus die Verdopplungszeit durch eine Division erhalten wird. Süßmilch geht davon aus, dass in den preußischen Landen im Durchschnitt von 36 Lebenden einer innerhalb Jahresfrist stirbt. Verhalten sich die Gestorbenen zu den Geborenen eines Jahres wie a zu b, so ergibt sich die Zuwachsrate

$$q = \text{Überschuss} / n = (b-a) / 36\, a \quad . \qquad (5)$$

6. Das Eulersche Modell des allmählichen Wachstums

Wie Euler in seinem Werk „Mechanica sive motus scientia analytice“ von 1736 die Bewegung von Körpern mathematisch modellierte, so stellte er ein vergleichsweise elementares mathematisches Modell für die Entwicklung einer geschlossenen Population mit einfachem Reproduktionsverhalten auf. Er trifft dazu folgende Annahmen:

A1: Konstantes Heiratsalter: 20 Jahre.

A2: Konstante Kinderzahl: es werden nur Zwillinge verschiedenen Geschlechts geboren und zwar am Ende des 2., 4. und 6. Ehejahres.

A3: Konstante Absterbeordnung: jeder stirbt erst am Ende des 40. Lebensjahres.

Wir wählen das Doppeljahr als Zeiteinheit und führen den Zeitpunkt $n \in \mathbf{N}$ ein, den wir als Zeitpunkt am Ende des 2n-ten Jahres nach dem Anfangszeitpunkt n=0 interpretieren.

A4: Anfangsbedingung: zur Zeit n=0 besteht die Population aus einem Paar, das gerade geheiratet hat.

Wir fragen nun nach der Population zum Zeitpunkt n, charakterisiert durch die Anzahl G_n der Geborenen, L_n der Lebenden und T_n der gerade Gestorbenen.

Offenbar gilt für diese Folgen unter A1 – A4:

n:	0	1	2	3	4	. . .	9	10	11	12	13	14
G_n	0	2	2	2	0	. . .	0	2	0	2	4	6
T_n	0	0	0	0	0	. . .	0	2	0	0	0	0
L_n	2	4	6	8	8	. . .	8	6	6	8	12	18

n:	15	16	17	. . .	20	21	22	23	24	25	26	27
G_n	4	2	0	. . .	0	0	0	2	6	12	14	12
T_n	0	0	0	. . .	0	2	2	2	0	0	0	0
L_n	22	24	24	. . .	24	22	20	20	26	38	52	64

Für die Folge der Geborenen folgt aus A1 und A2 für $n \geq 13$:

$$G_n = G_{n-11} + G_{n-12} + G_{n-13} \quad . \qquad (6)$$

Bei Kenntnis der Geborenenzahlen ergibt sich wegen A3 für die Lebenden

$$L_n = G_n + G_{n-1} + ... + G_{n-19} \quad , \qquad (7)$$

und für die Toten zur Zeit $n \geq 20$: $\quad T_n = G_{n-20} \quad .$ (8)

Betrachten wir die Potenzreihenentwicklung der rationalen Funktion

$$r(x) = \frac{2}{1-x^{11}-x^{12}-x^{13}} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad , \qquad (9)$$

so liefert Koeffizientenvergleich

$a_0 = 2$, $a_1 = a_2 = . . . = a_{10} = 0$, $\quad a_{11} = a_{12} = 2$, (10)

sowie für $n \geq 13$:

$$a_n = a_{n-11} + a_{n-12} + a_{n-13} \quad . \qquad (11)$$

Aus unserer Tabelle für G_n und (10) sowie der Übereinstimmung der Bildungsgesetze (6) und (11) folgt $G_n = a_{n+10}$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{G_{n+1}}{G_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lambda_0 \quad , \qquad (12)$$

wobei λ_0 eine positive Wurzel des charakteristischen Polynoms c(u) ist. Nach Euler (vgl. [7], S.354) existiert der Grenzwert λ_0 in (12), wenn die Beträge aller anderen Wurzeln von c(u) kleiner als λ_0 sind.
Bezeichnet $p_m(x)$ das Nennerpolynom vom Grade m von r(x), so erhalten wir $c(u) = p_m(1/u)\, u^m$. Die 13 Wurzeln des Polynoms $c(u) = u^{13} - u^2 - u - 1$ wurden von Emil Gumbel (1891-1966) untersucht und $\lambda_0 \approx 1{,}0961$ sowie

$|\lambda_k| < \lambda_0$ für k = 1, ... ,12 festgestellt.

Für die Lebenden bekommen wir aus (7) und (12) leicht

$$\lim_{n\to\infty} \frac{L_{n+1}}{L_n} = \lambda_0 = 1{,}0961 \quad . \tag{13}$$

Damit wird die Hypothese, die ein geometrisches Wachstum annimmt und bereits in Abschnitt 4 verwendet wurde, im Eulerschen Wachstumsmodell bestätigt, allerdings erst nach einer langen Einschwingphase.

7. Göttliche Ordnung (1761)

Süßmilch hat über das Bevölkerungswesen in Deutschland eine Reihe von Akademie-Vorträgen gehalten, zu denen er von Maupertuis ermuntert worden war, und verschiedene Denkschriften verfasst (vgl. [24,25]). Er verfolgte die internationale Literatur auf dem Gebiet der Bevölkerungsstatistik, wobei ihn Euler bei der Beschaffung unterstützte (vgl. Eulers Briefwechsel [17] mit J.C. Wettstein in London). Da er auch aus dem Ausland positive Reaktionen zu seiner Arbeit erhalten hatte, entschloss er sich, nach 20 Jahren eine zweite Ausgabe seines Werkes über die Göttliche Ordnung mit „theils verbesserten, theils ganz neuen Betrachtungen“ herauszubringen. In seiner Vorrede, im Inhaltsverzeichnis und an mehreren Stellen im Text bedankt sich Süßmilch bei Euler insbesondere für den „bey der Berechnung der Verdoppelung geleisteten Beystand“ (vgl.[23], 3.Ausgabe, Vorrede, S.VIII). Louis Gustave du Pasquier, der Herausgeber des Bandes 7 der ersten Serie von Eulers Opera omnia leitet daraus die Berechtigung ab, die ersten 15 Paragraphen des achten Kapitels des

Süßmilchschen Buches als geistiges Eigentum von Euler in dessen Opera omnia aufzunehmen. Dabei behauptet Pasquier ([10], S.533/534), dass „zwei weitere Tabellen mit zugehörigem Text von Euler herrühren", er spricht sogar von „aktenmäßig festgestellter Autorschaft". Davon kann man Eulers Autorenschaft an 3 Tabellen bestätigen. Der zugehörige Text ist der Diktion nach von Süßmilch verfasst. Dieser verzichtet weitgehend auf die Darstellung des mathematischen Kalküls, auf dem die Eulerschen Tabellen basieren und den wir in den Abschnitten 4 bis 6 skizziert haben. Dafür wird der Anwendung von Listen und Tabellen auf das Bevölkerungswesen breiter Raum eingeräumt. Süßmilch hat in [23], 3. Ausgabe, §152 den Übergang von dem arithmetischen zum geometrischen Wachstum vollzogen. Zur Berechnung der gesuchten Verdopplungszeit x nach Formel (4) werden Briggsche Logarithmen benötigt und es ist eine Division auszuführen. Diese Arbeit wurde von Euler geleistet für q = 1/m mit m=10(1)30, m=32(2)50, m=55(5)100, m=110(10)500 und m=1000. Das Resultat veröffentlichte Süßmilch als Tabelle in §156 auf den Seiten 285 und 286. Wird die Zuwachsrate q speziell nach Formel (5) in Abhängigkeit vom Verhältnis a:b der Gestorbenen zu den Geborenen berechnet, wobei einer von 36 bei insgesamt 100 000 Menschen stirbt, so ist für a=10 und b=11(1)20 sowie b=22/25/30 eine Tabelle in §152 abgedruckt, deren letzten beiden Spalten q=1/m mit m = 36a/(b-a) und x enthalten. Die zugehörige Verdopplungszeit könnte durch Rundung aus der Tabelle von §156 erhalten werden. An zwei Stellen sind Fehler festzustellen, die wohl nicht vom Setzer verursacht wurden. Aus der ersten Zeile der Tabelle in §152 mit b=11 ist zu entnehmen, dass dem Rechner die Formel (5) nicht geläufig ist und er die Zuwachsrate recht umständlich gewinnt und zu m=361 statt zu m=360 gelangt, für b=13 wird m=138 angegeben, obwohl m=120 hier richtig wäre. Letzteres Ergebnis wurde in [2] korrigiert.
Im §160 wird das Eulersche Wachstumsmodell A1-A4 (vgl. Abschnitt 6) ohne jegliche Formel dargestellt und dazu die „Eulerische Tabelle des allmählichen

Wachsthums“ angegeben, die insbesondere die Folgen der Geborenen und der Lebenden enthält. Während wir uns mit $27 \cdot 2 = 54$ Jahren begnügen, legte Euler diese Tabelle auf 300 Jahre aus und erhält speziell $G_{150} = 214\,370$ sowie eine Population von $L_{150} = 3.993\,954$. Süßmilch merkt dazu an: „So unordentlich diese Progreßionen auch anfänglich scheinen; so werden sie doch endlich, wenn sie stets fortgesetzt werden, in eine geometrische Progreßion verwandelt...“.
Diese Aussage ist aus der Tabelle nicht ablesbar, nur $G_{150} < G_{145} < G_{146}$. Die Lebendenfolge ist dagegen nach n=105 monoton wachsend mit den Quotienten $L_{148}/L_{147} \approx 1{,}0996$ und $L_{150}/L_{149} \approx 1{,}0410$.
Die Süßmilchsche Bezeichnung Tabelle des „allmählichen Wachsthums“ weist einerseits auf den allmählichen Aufbau einer Bevölkerung aus einem einzigen Paar hin, andererseits könnte auch damit die langsame Konvergenz der Lebendenfolge gemeint sein. Gehen wir von dem in Abschnitt 6 berechneten Grenzwert $\lambda_0 = 1{,}0961$ für die Zuwachsrate q in zwei Jahren aus, so erhalten wir aus der Formel (4) für die Verdopplungszeit $x = 0{,}30103/0{,}03985 \approx 7{,}55$.
Damit würde sich die Bevölkerung später in reichlich 15 Jahren verdoppeln, was durchaus nicht „allmählich“ ist.

8. Der Fund im Notizbuch H6

Das obige Zitat über die Verwandlung der Geborenenfolge in eine geometrische Progression wird in der Süßmilchschen „Anmerkung“ ergänzt durch einen Hinweis auf „Series recurrentes“, die Euler in [7] in Caput XIII und folgenden untersucht hat. Das genügte bereits Gumbel in [13], die von uns in Abschnitt 6 vorgestellte mathematische Modellierung zum Euler-Modell A1-A4 zu entwickeln, welche diese „Verwandlung“ erklärt. Sieben Jahre später fand sich im Zusammenhang mit der Vervollständigung der Herausgabe von Eulers Gesammelten Werken in St.Petersburg Eulers Adversaria mathematica H6 von 1750-1755. Darin befand sich eine Arbeit, zunächst in französisch, am Ende lateinisch geschrieben, die Eulers Theorie zum Wachstumsmodell A1 bis A4 offenbart, allerdings für zwei leicht modifizierte Modelle.

Modell I: AI1 = A1, AI2 = A2.

AI3 : Alle Personen werden 50 Jahre alt (keiner erreicht 52).

Zu einem beliebigen aber festen Zeitpunkt τ sei die Altersverteilung einer Population gegeben durch die Anzahl der Personen vom Alter aus dem Intervall $[2\alpha, 2(\alpha+1))$, $\alpha=0,1,...,25$, nach Euler kurz „vom Alter 2α“. Die Personen „vom Alter 2α“ bilden eine sogenannte Kohorte α.

AI4: Der Umfang jeder Kohorte ändert sich nach 2 Jahren um ein und demselben Faktor λ.

Die Veränderung der Altersverteilung wird nach Euler erfasst durch die Tabelle

α	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$\tau=0$	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k	l
$\tau=2$	m+n+o	a	b	c	d	e	f	g	h	i	k

α	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22	23	24	25
$\tau=0$	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z	ђ
$\tau=2$	l	m	n	o	p	q	r	s	t	u	v	w	x	y	z

In den betrachteten 2 Jahren werden wegen AI1 und AI2 genau m+n+o Kinder geboren und wegen AI3 sterben genau ђ Personen. Also folgt wegen AI4

$$L_2 - L_0 = (\lambda - 1)\, L_0 = m + n + o - \text{ђ} = \lambda a - \text{ђ} \ , \qquad (13)$$

sowie $a = \lambda b$, $b= \lambda c$, $c = \lambda d$, ... , $x=\lambda y$, $y = \lambda z$, $z = \lambda \text{ђ}$.

Hieraus ergibt sich $y = \lambda^2 \text{ђ}$, ... , $o = \lambda^{12}\text{ђ}$, $n = \lambda^{13}\text{ђ}$, $m = \lambda^{14}\text{ђ}$, . . . , $a = \lambda^{25}\text{ђ}$.

Aus (13) bekommen wir als Bestimmungsgleichung für den Faktor λ:

$$\lambda^2 + \lambda + 1 = \lambda^{14} \ . \qquad (14)$$

Euler erhält die Näherungslösung $\lambda_0 = 1{,}0883$. Damit ergibt sich nach Formel (4) die Verdopplungszeit zu $2\cdot 0{,}30103 / \lg (1{,}0883) \approx 16{,}38$,

d.h. reichlich 16 Jahre.

Modell II: AII1 = A1. AII2 = A2, zusätzlich werden noch am Ende des 8. und 10. Ehejahres Zwillinge geboren. AII3 =AI3. AII4 = A4.

Gegenüber Modell I hat sich die Kinderzahl pro Ehepaar auf 10 vergrößert. Wie beim Modell von Abschnitt 6 wird mit einem einzigen Paar zur Zeit n = 0 gestartet und das Doppeljahr als Zeiteinheit gewählt. Euler konstruierte zu Modell II eine Tabelle, bestehend aus einer Folge von Altersverteilungen mit α=0,1, . . . ,25 zu den Zeitpunkten $\tau = n$, d.h. nach 2n Jahren, mit n=0,1, . . . ,34, sowie zwei zusätzlichen Spalten mit der Folge der Lebenden (L_n) bzw. der Toten (T_n). Die Geborenenfolge (G_n) bildet bereits die erste Spalte ($\alpha = 0$). Wegen AII2 ergibt sich sofort für $n \geq 15$:

$$G_n = G_{n-11} + G_{n-12} + G_{n-13} + G_{n-14} + G_{n-15}\ . \tag{15}$$

Damit lässt sich die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} G_n x^n$ als eine einfache rationale Funktion r(x) darstellen, die sich reduzieren lässt auf

$$r(x) = \frac{2x-2x^6}{1-x-x^{11}+x^{16}}\ . \tag{16}$$

Die zugehörige charakteristische Gleichung

$$c(u) = u^{16} - u^{15} - u^5 + 1 = 0 \tag{17}$$

wurde von Euler näherungsweise gelöst durch $\lambda = 1{,}13315$ und die Geborenenfolge im Limes als geometrische Progression mit dem Faktor λ bezeichnet. Damit bricht Eulers Eintrag im Notizbuch H6 ab. Wie Gumbel 160 Jahre später eine derartige Analyse vervollständigt hat, haben wir im Abschnitt 6 skizziert. Wir fügen noch die Verdopplungszeit hinzu:

$$2\cdot 0{,}30103 / \lg(1{,}13315) \approx 11 \text{ Jahre}\ .$$

9. Schlussbemerkung

Ein Demograph versucht die vielfältigen Ursachen und Wirkungen der lokalen und zeitlichen Variationen in der Anzahl der Ehen, Geburten und Sterbefälle einer Bevölkerung zu erschließen. Mit seiner „Göttlichen Ordnung“ wurde

Süßmilch zum Stammvater der Demographen in Deutschland (vgl. die Würdigungen [3], [14]). Wie der Ökonom Oskar Morgenstern (1902-1977) den Mathematiker John von Neumann (1903-1957) für die mathematische Modellierung wirtschaftlichen Verhaltens gewinnen konnte, so gelang es Süßmilch, den Mathematiker Euler anzuregen, das Verhalten von Populationen zu modellieren. Dabei spielte die theologische Harmonie und ihr gemeinsames Wirken gegen die „Freygeister“ eine nicht unwesentliche Rolle. Wenn auch Eulers Wachstumsmodellen heute keine praktische Bedeutung zugebilligt werden kann, so ist sein Beitrag zur Mathematisierung – jenseits von Astronomie und Physik – einer Disziplin wie Bevölkerungswesen, eine wissenschaftliche Pioniertat (vgl. [22]). Wir haben uns in dieser Note auf die mathematische Behandlung eines einzigen Problems beschränkt, auf das der Zeit der Verdopplung. Das Problem war für das 18. Jahrhundert relevant, doch müsste es heute in Europa durch die Frage nach der Zeit der Halbierung einer Bevölkerung ersetzt werden (vgl [4]).
Um Euler zu den Stammvätern der Demographie zählen zu können, ist noch seine Abhandlung über Sterbetafeln (vgl. [E60]) zu nennen. Die Süßmilchsche Sterbetafel, die durch seinen Schwiegersohn Christian Jacob Baumann verbessert wurde (vgl. [2], Anhang S.34-36), war bei Lebensversicherungen in Deutschland bis ins 19. Jahrhundert im Gebrauch.

Literatur

[1] Arbuthnott, J.: An Argument for Divine Providence, taken from the constant Regularity observ’d in the Birth of both Sexes. Philosophical Transactions 27(1712), 186-190.
[2] Baumann, C.J. (Hg): Anmerkungen und Zusätze zu Süßmilchs Göttlicher Ordnung. Berlin 1776. Nachdruck: Göttingen 1988.
[3] Birg, H.(Hg.): Ursprünge der Demographie in Deutschland. Frankfurt 1986.
[4] Birg, H.: Die demographische Zeitenwende. München 2005.
[5] Derham, W.: Physico-theology, or a demonstration of Being and Attributes of God from his works of creation. London 1713. Deutsch: Hamburg 1732.

[6] Elsner, E.: Johann Peter Süßmilch, ein großer Sohn Zehlendorfs. Zehlendorfer Chronik **8**(1993), 5-14.
[7] Euler,L.: Introductio in analysin infinitorum. Lausanne 1748.
[8] Euler,L.: Sur la multiplication du genre humain. In [10], 545-552.
[9] Euler, L.: Recherches generales sur la mortalite et la multiplication du genre humain. Mémoires de l'académie des sciences de Berlin **16**(1767), 144-165. Nachdruck in [10], 79-98.
[10] Euler, L.: Leonardi Euleri Opera Omnia. Serie 1, Band 7, Leipzig 1923.
[11] Fellmann, E.A.: Leonhard Euler. Reinbek bei Hamburg 1995.
[12] Graunt, J.: Natural and Political OBSERVATIONS Mentioned in a following INDEX and made upon the Bills of Mortality. London 1676, erste Auflage 1662, deutsche Ausgabe: Leipzig 1702.
[13] Gumbel, E.J.: Eine Darstellung statistischer Reihen durch Euler. Jahresbericht d. Deutschen Mathematiker-Vereinigung **25**(1916), 251-264.
[14] Hax, H. (Hg): Über Johann Peter Süßmilchs „Göttliche Ordnung". Vademecum zu dem deutschen Klassiker der Bevölkerungswissenschaft. Düsseldorf 2001.
[15] Hecht, J.: Johann Peter Süßmilch – ein deutscher Prophet im Ausland. In: [3], 153-212.
[16] Hull, C.H. (ed.): The Economic Writings of Sir William Petty together with the Observations upon the Bills of Mortality more probably by Captain John Graunt. Cambridge 1899.
[17] Juškevič, A.P. und E. Winter (Hg.): Die Berliner und Petersburger Akademie der Wissenschaften im Briefwechsel Leonhard Eulers. Teil 3, Berlin 1976.
[18] Mittenzwei, I. und E. Herzfeld: Brandenburg-Preußen 1648 bis 1789. Berlin 1987.
[19] Nieuwentyt, B.: L'existence de dieu démontrée par les merveilles de la nature. Amsterdam 1726.
[20] Petty, W. : Political Arithmetick. London 1690, Nachdruck in [16].
[21] Raith, M.: Der Vater Paulus Euler - Beiträge zum Verständnis der geistigen Herkunft Leonhard Eulers. In: Gedenkband des Kantons Basel-Stadt 1983, 459-470.
[22] Smith, D. and N. Keyfitz (eds.): Mathematical Demography. Berlin 1977.
[23] Süßmilch, J.P.: Die göttliche Ordnung in den Veränderungen des menschlichen Geschlechts. 1. Ausgabe: Berlin 1741, Nachdruck: Düsseldorf 2001; 3. Ausgabe (in zwei Teilen): Berlin 1765, Nachdruck: Göttingen 1988; 4.Ausgabe (in drei Teilen): Berlin 1776, Nachdruck Göttingen 1988.
[24] Süßmilch, J.P.: Die königliche Residenz Berlin und die Mark Brandenburg im 18. Jahrhundert. Schriften und Briefe. Herausgegeben von Jürgen Wilke, Berlin 1994.

[25] Süßmilch, J.P.: Gedancken von den epidemischen Krankheiten und dem grösseren Sterben des 1757ten Jahres. Berlin 1758, Nachdruck in [3], 263-342.
[26] Wilke, J.: Curriculum vitae: Johann Peter Süßmilch. In: [24], 216-259.