A. N. Kolmogoroff (1903 - 1987) und die Ursprünge der Theorie stochastischer Prozesse

Hans-Joachim Girlich

Universität Leipzig, Mathematisches Institut,
Augustusplatz 10, 04109 Leipzig

Zusammenfassung

Anläßlich des 100. Geburtstages von A.N. Kolmogoroff am 25. April diesen Jahres werden in der vorliegenden Note zwei seiner bahnbrechenden Arbeiten zu Theorie stochastischer Prozesse gewürdigt, die er Anfang der 30er Jahre geschrieben hat. Diese scheinen einerseits auf den Untersuchungen von A. Einstein (1905) und N. Wiener (1923) zur Brownschen Bewegung zu beruhen, andererseits durch die Modellierung von Kursen an der Pariser Börse von L. Bachelier (1900) tatsächlich angeregt worden zu seien. Es wird erläutert, wie Kolmogoroff mit einem maßtheoretischen Konzept über derartige Applikationen zu einer Wahrscheinlichkeitstheorie gelangt, die den strengen Anforderungen an eine mathematische Disziplin gerecht wird.

1 Einleitung

Andrej Nikolajewitsch Kolmogoroff, Professor an der Moskauer Universität für mehr als 50 Jahre, war und ist auch aus heutiger Sicht einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts.
Das Kolmogoroffsche Axiomensystem der Wahrscheinlichkeitsrechnung gehört nun bereits zum Allgemeingut auch für Nichtmathematiker. Eher nur den Fachleuten sind dagegen seine hervorragenden Resultate zur Mathematischen Logik und zur Komplexitätstheorie bekannt, ebenso zu den dynamischen Systemen und der Ergodentheorie, zu Turbulenz, Topologie und Informationstheorie (vgl. [35], [36], [37]).
Wir beschränken uns hier auf die Analyse zweier Arbeiten von Kolmogoroff, die als Geburtsurkunden einer modernen Wahrscheinlichkeitstheorie gelten, dem Gebiet der Mathematik, auf dem Kolmogoroff seine größten Erfolge erzielt hat.
Es handelt sich einmal um die Arbeit „Über die analytischen Methoden in

der Wahrscheinlichkeitsrechnung", die wir durch (AM) gesondert hervorheben, und um das Ergebnis-Heft „Grundbegriffe der Wahscheinlichkeitsrechnung" versehen mit der Abkürzung (GW) (vgl. [32], [34]).
Mittels stochastischer Kerne werden in (AM) stochastische Prozesse ohne Nachwirkung in stetiger Zeit eingeführt und ihre Charakteristiken über gewöhnliche bzw. partielle Differentialgleichungen bestimmt. Unser Anliegen besteht hier darin, den Unterschied zwischen einer physikalischen Modellbildung nach Einstein, Smoluchowski, Fokker, Planck und Chapman sowie einer erst zu schaffenden mathematischen Theorie stochastischer Prozesse herauszuarbeiten.
Knapp drei Jahre nach dem Einreichen von (AM) bei den „Mathematischen Annalen", schließt Kolmogoroff zu Ostern 1933 die berühmte Arbeit (GW) ab, mit dessen Hauptsatz er allgemeinere stochastische Prozesse erfassen kann, die nicht notwendig nachwirkungsfrei sind. Dazu werden Maße in Funktionenräumen konstruiert. Speziell für die Brownsche Bewegung hatte bereits Norbert Wiener zehn Jahre zuvor einen analogen Weg eingeschlagen. Weshalb letzterem zunächst kein Erfolg beschieden war und erst durch (GW) ein Durchbruch erzielt wurde, wird abschließend diskutiert.

2 Die zwanziger Jahre

Die Lehr- und Wanderjahre eines Wissenschaftlers in den Zwanzigern sind besonders produktive Jahre. Das bestätigt auch Kolmogoroff, der diese Zeitspanne in den 20er Jahren des 20. Jahrhunderts erlebte, die wir in Hinblick auf das Werk (AM), (GW) etwas näher untersuchen werden. Die Kenntnis des Umfelds an der Moskauer Universität und des Entwicklungsstands der Wahrscheinlichkeitsrechnung in Russland und schließlich Kolmogoroffs aktive Auseinandersetzung mit diesen Faktoren wird als Hintergrundinformation für das Werkverständnis nützlich sein.

2.1 Studium an der Moskauer Universität

Im Jahre 1920 schrieb sich Kolmogoroff in die Matrikel der Physikalisch-mathematischen Fakulät der Moskauer Universität ein. Hier lehrten Dmitri Fjodorowitsch Jegorow (1869 - 1931) und sein bedeutendster Schüler Nikolai Nikolajewitsch Lusin (1883 - 1950), welche die berühmte Moskauer Schule der Theorie reeller Funktionen begründet hatten. Begünstigt durch längere Studienaufenthalte in Paris hatten sie die durch Émile Borel und Henri Lebesgue geschaffene Richtung der reellen Analysis aufgegriffen und systematisch weiterentwickelt.
Während der ersten beiden Studienjahre hörte Kolmogoroff Vorlesungen bei Lusin zur Theorie analytischer Funktionen, bei Alexej Konstantinowitsch Wlassow (1868 - 1922) über projektive Geometrie und bei Pawel Samuelowitsch Uryson (1898 - 1924) sowie bei Pawel Sergejewitsch Alexandrow (1896

- 1982) über kombinatorische Topologie und deskriptive Mengenlehre. Mit letzterem verband Kolmogoroff seit 1929 eine enge Freundschaft, die auf einer gemeinsamen mehrwöchigen Reise auf der Wolga und durch den Kaukasus begann und ein ganzes Leben lang währte. Auf dieser Fahrt arbeitete er bereits an der analytischen Beschreibung Markowscher Prozesse in stetiger Zeit, die schließlich in (AM) mündete (vgl. [38]).
Zur mathematischen Forschungsarbeit wurde Kolmogoroff im Seminar von Wjatscheslaw Wasiljewitsch Stepanow (1889 - 1959) über trigonometrische Reihen angeregt. So gelang es ihm im Juni 1922 ein Beispiel einer Fourier-Reihe zu konstruieren, die fast überall divergiert. Dieses Resultat wurde 1923 im Band 4 der polnischen Zeitschrift „Fundamenta Mathematicae" zusammen mit Beiträgen von Fréchet, Lomnitzki, Steinhaus und Wiener veröffentlicht. Eine weitere Arbeit, über die Größenordnung von Fourier-Koeffizienten, die im gleichen Jahr ebenfalls in Polen publiziert wurde, machte Lusin auf den Neunzehnjährigen aufmerksam. Er erwählte ihn zu seinem persönlichen Schüler, womit eine intensive wissenschaftliche Betreuung verbunden war (vgl. [23], [47], [58], [24], [38]).
Als dann die nächsten Arbeiten des so geförderten Studenten Kolmogoroff an der Akademie der Wissenschaften in Paris von den großen Vorbildern Lebesgue und Borel vorgestellt und in den Comptes Rendus veröffentlicht wurden, entschloß sich dieser nach Abschluß seines Studiums 1925, eine Aspirantur am Forschungsinstitut für Mathematik und Mechanik an der Moskauer Universität (NIIM) aufzunehmen, dem Jegorow als Direktor vorstand. Lusin blieb auch hier sein Betreuer (vgl. [25], [26], [38]).

2.2 Wahrscheinlichkeitsrechnung am NIIM

Die Wahrscheinlichkeitsrechnung hatte in St. Petersburg durch Pafnuti Lwowitsch Tschebyschew (1821 - 1894) und seine beiden Schüler Andrej Andrejewitsch Markow (1856 - 1922) sowie Alexander Michailowitsch Ljapunow (1857 - 1918) einen hohen Stand erreicht, der im Westen Europas erst durch die Übersetzung des Lehrbuchs „Wahrscheinlichkeitsrechnung" von Markow in die deutsche Sprache im Jahre 1912 zur Kenntnis genommen wurde (vgl. [48]).
Allerdings waren auch die Mathematiker an der Moskauer Universität Anfang der 20er Jahre mit dieser Forschungsrichtung nicht genügend vertraut. Abhilfe schaffte zuerst Alexander Jakowlewitsch Khintchine (1894 - 1959), der hier 1916 sein Studium abgeschlossen hatte. Er arbeitete von 1919 bis 1926 als Mathematik-Professor sowohl am Polytechnischen Institut als auch am Pädagogischen Institut von Iwanowo-Wosniesensk, einer Stadt von einer halben Million Einwohner, 250 km nordöstlich von Moskau (vgl. [12], [13]).
Angeregt durch eine Arbeit von Borel (1909) kam Khintchine über die Zahlentheorie zum iterierten Logarithmus (vgl. [5], [16]) und damit in den folgenden Arbeiten zur Wahrscheinlichkeitsrechnung, speziell zu verschiedenen

Fassungen des Gesetzes der großen Zahlen und deren Verschärfung. Er gibt dort Moskau als Sitz des Autors an, da er neben seinen Lehrverpflichtungen in Iwanowo seit 1922 als wissenschaftlicher Mitarbeiter des gerade erst gegründeten NIIM fungierte (vgl. [17], [18]).
An der Anwendung analytischer Methoden auf die Wahrscheinlichkeitsrechnung fand Kolmogoroff schon 1924 Gefallen. Sein Metier waren bisher die Funktionenreihen. Deshalb lag es nahe, nach Bedingungen für die Konvergenz mit Wahrscheinlichkeit 1 von Summen unabhängiger Zufallsgrößen zu fragen. In seiner ersten und einzigen gemeinsamen Veröffentlichung mit Khintchine konnten sie einfache notwendige und hinreichende Bedingungen zeigen (vgl. [22]).
In den 20er Jahren erzielten Khintchine und Kolmogoroff weiterhin beachtliche Resultate über die Gültigkeit des schwachen wie auch des starken Gesetzes der großen Zahlen und des Gesetzes vom iterierten Logarithmus, die heute zum Grundbestand jeder Einführungsvorlesung in die Wahrscheinlichkeitsrechnung gehören. Im Jahre 1926 hielt Khintchine an der Moskauer Universität eine Spezialvorlesung über diese Gesetze und den zentralen Grenzwertsatz nach Ljapunow. Der Inhalt markiert den Stand der klassischen russischen Schule der Wahrscheinlichkeitsrechnung und ist in einer Monographie des NIIM nachzulesen (vgl. [27], [28], [30], [31], [56], [19]).

2.3 Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechung

Richard von Mises (1883 - 1953) entwickelte 1919 eine naturwissenschaftliche Grundlegung der Wahrscheinlichkeitsrechnung, die auf dem Häufigkeitsbegriff beruht (vgl. [49]). Kolmogoroff publizierte 1929 an versteckter Stelle eine Arbeit über die logische Struktur der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Diese soll zu einer ,,allgemeinen und rein mathematischen Theorie" führen, wobei ,,der allgemeine Begriff des Maßes einer Menge den Begriff der Wahrscheinlichkeit als Spezialfall umfaßt". ,,Insbesondere werden wir in der Wahrscheinlichkeitsrechnung vom Raum der Elementarfälle eines gegebenen Problems sprechen und über die Wahrscheinlichkeiten verschiedener Mengen dieser Fälle." ,,Wenn Größen, die vom Zufall abhängen (Zufallsgrößen), als Funktionen betrachtet werden, die auf dem Raum der Elementarfälle definiert sind, so erweisen sich alle diesbezüglichen Sätze der Wahrscheinlichkeitstheorie als spezielle Folgerungen von Sätzen solch einer allgemeinen Theorie." Letztere wurde vorher als Theorie meßbarer Funktionen eingeführt. ,,Wir definieren weiterhin die Unabhängigkeit eines Systems von Funktionen, wobei sich Unabhängigkeit als rein metrische Eigenschaft erweist." (vgl. [29] in [36] S. 48/49). Die hier vorgeschlagene abstrakte Maßbestimmung geht kaum über die Axiomatik von Lomnitzki aus dem Jahre 1920 und von Hausdorff hinaus (vgl. [47], [11]) und fand wie diese unter Fachkollegen wenig Resonanz.
Erst die Beschäftigung mit den stochastischen Prozessen in (AM) führte zur

Notwendigkeit einer geeigneten Ausgestaltung der Grundlagen einer Wahrscheinlichkeitstheorie, die in (GW) vollendet wurde.

3 Analytische Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung

Den Titel der Arbeit (AM) findet man in französischer Sprache als Kapitelüberschrift im „Essai philosophique des probabilités" von P.S. Laplace, der als Einführung in sein Werk „Théorie analytique des Probabilités" dient (von der 2. Auflage an als Einleitung integriert). Darin schreibt Laplace (vgl. [42]; [43], S. 18, 21, 36/37): „Aber die allgemeinste und direkteste Methode zur Lösung von Wahrscheinlichkeitsfragen besteht darin, sie auf Differenzengleichungen zurückzuführen."

Um diese Gleichungen zu behandeln, entwickelt er den Kalkül der erzeugenden Funktionen, den er an anderer Stelle die Grundlage seines Werkes nennt. Kolmogoroff greift in (AM) die Idee auf, für ein allgemeines Wahrscheinlichkeitsproblem, bei dem neben dem Zufall auch die Zeit eine Rolle spielt, geeignete Gleichungen aufzustellen und diese analytisch zu lösen.

Wir werden zunächst das Kolmogoroffsche Schema eines stochastisch-definiten Prozesses im Original angeben, bevor wir auf dessen Quellen Bezug nehmen. Schließlich wird auf die analytische Behandlung eingegangen.

3.1 Das Schema eines stochastisch-definiten Prozesses

Ein Prozess, das heißt die Zustandsänderung eines Systems, wird in der klassischen Mechanik durch die Formel $y = f(x, t_0, t)$ beschrieben. Hier handelt es sich um ein Schema, in welchem der Zustand y des Systems in einem Zeitpunkt t durch den Zustand x in einem beliebigen vorigen Moment t_0 eindeutig mittels f bestimmt ist.

„Außerhalb des Gebietes der klassischen Mechanik betrachtet man oft ... solche Schemata, in welchen der Zustand x des Systems in einem Zeitpunkt t_0 nur eine gewisse Wahrscheinlichkeit für den jeweils möglichen Zeitpunkt y in einem folgenden Moment $t > t_0$ definiert." Diese wird durch eine Funktion „$P(t_0, x, t, A)$ gegeben, wobei A eine Menge von Zuständen y ist und P die Wahrscheinlichkeit bezeichnet, einen Zustand y aus dieser Menge im Moment t zu erhalten" (vgl. [32], 416, wobei dort $\mathcal{E}$ durch A ersetzt ist).

Kolmogoroff fordert in (AM) §1 von dieser Funktion Eigenschaften, die in heutiger Terminologie denen einer Familie stochastischer Kerne entsprechen. Er geht aus von X, der Menge aller Zustände und betrachtet dazu ein Mengensystem $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von X, das alle einelementigen Teilmengen und X selbst enthält und eine σ-Algebra in X bildet. Er nimmt an, dass

(F1): P für festes t_0, x und t eine 1-normierte σ-additive Mengenfunktion auf $\mathfrak{A}$ ist.

(F2): P als Funktion des Zustands x in bezug auf $\mathfrak{A}$ meßbar ist,
(F3): P genügt für beliebige $t_1 < t_2 < t_3$ der Gleichung

$$P(t_1, x, t_3, A) = \int_X P(t_2, y, t_3, A) P(t_1, x, t_2, dy). \tag{1}$$

Die rechte Seite von (1) ist als Lebesgue-Stieltjes-Integral der $\mathfrak{A}$-meßbaren Funktion $g(y) := P(t_2, y, t_3, A)$ erklärt. Speziell bei einer abzählbaren Menge $X = \{y_1, y_2, \ldots, y_n, \ldots\}$ ergibt sich dafür

$$\sum_n P(t_2, y_n, t_3, A) P(t_1, x, t_2, \{y_n\}) = P(t_1, x, t_3, A), \tag{2}$$

wenn die Nachwirkungsfreiheit des Prozesses gefordert wird.

3.2 Bacheliers „Spéculation"

Kolmogoroff verweist in der Einleitung von (AM) auf Louis Bachelier (1870 - 1946) und dessen Arbeiten [1], [2], [3] als einzige Quelle der Modellierung von stochastischen Prozessen in stetiger Zeit. In Bacheliers Dissertation (vgl. [1], 35, 36, 38) wird der Kurs eines Wertpapiers an der Pariser Börse untersucht: "La loi de probabilité peut se déterminer par le principe de la probabilité composée. Désignons par $p_{x,t}dx$, la probabilité pour que, à l'époque t, le cours se trouve compris dans l'intervalle élémentaire $x, x + dx$. ... ou

$$p_{z,t_1+t_2} = \int_{-\infty}^{\infty} p_{x,t_1} p_{z-x,t_2} dx \tag{3}$$

telle est l'équation de condition à laquelle doit satisfaire la function p ... L'expression définitive de la probabilité est donc

$$p = \frac{1}{2\pi k\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4\pi k^2 t}}. \quad " \tag{4}$$

Dieser „Bacheliersche Fall", wie Kolmogoroff in (AM) §16 ausführt, entspricht $X = \mathbb{R}$ wobei P eine Verteilungsdichte f besitzt, die nach dem Parameter homogen ist:

$$f(s, x, t, y) = v(s, t, y - x). \tag{5}$$

Die Gleichung (1), die ein Axiom (F3) darstellt, reduziert sich dann auf Gleichung (3), die sich aus einem „Prinzip" ergibt, das aus der Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsrechnung herausführt.

3.3 Lokale Charakteristiken und Differentialgleichungen

Serge Bernstein (1880 - 1968) eröffnet mit seiner Arbeit [4] eine Renaissance der Markowschen Ketten, d.h. von nachwirkungsfreien stochastischen Prozessen in diskreter Zeit, die sich in das Kolmogoroffsche Schema stochastisch-definiter Prozesse einordnen lassen (vgl. (AM) §3 - 5, [15]). Der Vorteil der Prozesse in stetiger Zeit besteht darin, dass die Funktion P nicht über (1) bestimmt werden muß, sondern unter zusätzlichen Begingungen (F4), (F5) Differentialgleichungen genügt, die folgende lokale Charakteristiken enthalten (wobei wir uns auf den Fall $X = \mathbb{R}$ beschränken):

(F4): Es existieren für jedes t und $x \in X$ die Grenzwerte

$$A(t,x) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{\triangle t} \int_{\mathbb{R}} (y-x) P(t,x,t+\triangle t, dy),$$

$$B(t,x) := \lim_{\triangle t \to 0} \frac{1}{2 \triangle t} \int_{\mathbb{R}} (y-x)^2 P(t,x,t+\triangle t, dy).$$

(F5): Es existiert die partielle Ableitung

$$f(s,x,t,y) = \frac{\partial}{\partial y} - P(s,x,t,(-\infty,y])$$

und ist hinreichend glatt.

Unter den Voraussetzungen (F1) - (F5) und einer Stetigkeitsbedingung (F6) zeigte Kolmogoroff in (AM) §13 und §14, dass die Dichte f der (ersten) retrospektiven Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial s} f(s,x,t,y) = -A(s,x) \frac{\partial}{\partial x} f(s,x,t,y) - B(s,x) \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(s,x,t,y) \tag{6}$$

und der (zweiten) prospektiven Differentialgleichung

$$\frac{\partial}{\partial t} f(s,x,t,y) = -\frac{\partial}{\partial y}[A(t,y) f(s,x,t,y)] + \frac{\partial^2}{\partial y^2}[B(t,y) f(s,x,t,y)] \tag{7}$$

genügt.

Bachelier erhielt in [1] im homogenen Fall (5) die prospektive Wärmeleitungsgleichung als Spezialfall von (7). Kolmogoroff übertrug die in (AM) für $X = \mathbb{R}$ erzielten Ergebnisse auf den n-dimensionalen Fall in der Arbeit [33]. Die dabei (7) entsprechende Gleichung wurde bereits von Bachelier in [2] angegeben und gelöst.

Zum Abschluß dieses Abschnitts sei noch eine Fußnote aus dem Beitrag [59] angeführt: „Kolmogoroff told Albert Shiryaev that he has been very influenced by Bachelier (private communication from Shiryaev) [M.T.]."

3.4 Erste Aufnahme im Ausland

Im Juni 1930 begab sich Kolmogoroff auf eine neunmonatige Dienstreise nach Deutschland und Frankreich. Er wurde anfänglich von dem erfahrenen P.S. Alexandrow begleitet, der zu Vorlesungen nach Göttingen eingeladen war. Dort legte Kolmogoroff seine Arbeit (AM) David Hilbert vor, der sie 1931 in den Annalen publizierte. In München diskutierte er mit Constantin Carathéodory über Maß- und Integrationstheorie. Danach fuhren sie für einen Monat nach Sanary-sur-Mer nahe Toulon zu Maurice Fréchet, der sich gerade mit Markowschen Ketten in diskreter Zeit beschäftigte und mit dem sie die Markowsche Problematik unter dem allgemeinen Gesichtspunkt von (AM) erörterten. In Paris arbeitete Kolmogoroff ein Vierteljahr, wobei er wissenschaftlich sehr viel aus dem persönlichen Kontakten zu Paul Lévy profitierte. Weihnachten verlebte er in Göttingen, wo er die nächsten beiden Monate nutzte, um mit Richard Courant und seinen Schülern Kurt Friedrichs und Hans Lewy gegenseitige wissenschaftliche Beziehungen auf dem Gebiet der Grenzwertsätze aufzubauen, bei denen Diffusionsprozesse sich als Limites von Irrfahrten ergeben. Anfang März besuchte Kolmogoroff in Berlin Richard von Mises, der ihm die Korrekturfahnen seines Buches zur Wahrscheinlichkeitsrechnung auf der Grundlage der Kollektivmaßlehre zeigte und dessen physikalischer Anwendungsteil interessant zu werden verspricht (vgl. [38], [39]; (AM) §12, [7], [54], [20]; [50]).

4 Wahrscheinlichkeitstheorie

Kolmogoroff schreibt im Vorwort seines epochalen Werkes (GW), dass die „neuen Fragestellungen", die durch ein maßtheoretisches Konzept der Wahrscheinlichkeitsrechnung erfaßt werden können und diese zu einer Wahrscheinlichkeitstheorie erst machen „notwendigerweise aus einigem ganz konkreten physikalischen Fragestellungen entstanden sind."

In einer Fußnote verweist er auf die Brownsche Bewegung und damit implizit auf Einstein, Smoluchowski, Wiener. Das ist kein Widerspruch zu unserer These, Kolmogoroffs Quellen zu (AM) im Wesentlichen auf Bachelier zu reduzieren. Wir werden aber Vorgänger aus der Physik im nächsten Abschnitt namhaft machen, die zu ähnlichen Gleichungen gekommen sind, welche Kolmogoroff erst nach Abschluß von (AM) zur Kenntniss gelangten, sei es durch seinen Kollegen M. Leontowitsch, Physik-Professor an der Moskauer Universität, oder die Bücher von Hostinský und von Mises (vgl. [44], [41], [15], [50]).

Bei den „neuen Fragestellungen" geht es um einen mathematischen Apparat, der physikalische Prozesse unter Unsicherheit detaillierter abbildet als durch stochastische Kerne, die ihrerseits den modernen axiomatischen Wahrscheinlichkeitsbegriff benötigen, wie in 3.1 bereits ausgeführt wurde. Dazu ist das Konzept der Zufallsgrößen auf stetige Familien und deren Struktur auszudehnen. Das gelingt Kolmogoroff in (GW) auf überzeugende Weise.

Wir können hier nur zwei Aspekte herausgreifen, um die Tragweite zu illustrieren.
In 4.2 werden wir das Schema des stochastisch-definiten Prozesses zu einem stochastischen Prozess als Familie von Zufallsgrößen ausbauen. Die Nachwirkungsfreiheit wird hierbei durch bedingte Verteilungen beschrieben.
Schließlich werden in 4.3 die Pfadeigenschaften eines Prozesses durch geeignete Maße in Funktionenräumen präzisiert.

4.1 Brownsche (Molekular-) Bewegung

Jean Perrin (1870 - 1942) notiert in seinem bekannten Buch „Die Atome" über die Gesetze der Brownschen Bewegung:
„Einstein und Smoluchowski haben ... sich auch um den unendlich verwickelten Weg, den ein Teilchen während einer gegebenen Zeit beschreibt, nicht gekümmert, sondern haben als charakteristische Größe der Bewegung die gerade Verbindungslinie gewählt, welche den Ausgangs- und Endpunkt der Bahn verbindet ..." (vgl. [53] 102).
Da Kolmogoroff zur Beschreibung eines stochastisch-definiten Prozesses ebenfalls eine Charakteristik wählt, die nur von zwei Zeitpunkten abhängt, ist es nicht verwunderlich, wenn Albert Einstein (1879 - 1955) in [8] eine Verteilungsdichte der innerhalb t erfolgten Lagenveränderung (einer Komponente) der Form (4) erhält mit dem Diffusionskoeffizienten $D = \pi k^2$.
Marian von Smoluchowski (1872 - 1917) kommt sogar über den homogenen Bachelier-Fall (3) hinaus und stellt in [57] §5 eine Funktionalgleichung vom Typ (1) für die Verteilungsdichte des Übergangs von x_0 zu x auf, um äußere Kräfte berücksichtigen zu können. Der Physiker B. Hostinský verweist in seinem Büchlein [15] auf die Funktionalgleichung von S. Chapman für eine allgemeine Verteilungsdichte f (vgl. [6]) und trug damit zur Namensgebung Chapman-Kolmogoroffsche Gleichung für (1) bei. Ohne diese Gleichung zu benutzen, erhielten die Physiker A. Fokker und M. Planck auf heuristischem Wege die prospektive Differentialgleichung (7) (vgl. [10], [55]).

4.2 Markowsche Prozesse

„Ein stochastischer Prozeß ist eine einparametrige Schar $\mathbf{x}_t(-\infty < t < +\infty)$ von zufälligen Variablen", so definierte Khintchine in [21] einen der Basisbegriffe der Wahrscheinlichkeitstheorie. Ein stochastischer Prozeß heißt markowsch oder Markowscher Prozeß, wenn für beliebige $n \in \mathbb{N}$ und $t_1 < t_2 < \ldots < t_n < t$ und borelsches B fast sicher gilt

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x}_t \in B | \mathbf{x}_{t_1}, \mathbf{x}_{t_2}, \ldots, \mathbf{x}_{t_n}\right) = \mathbf{P}\left(\mathbf{x}_t \in B | \mathbf{x}_{t_n}\right). \tag{8}$$

Um Abhängigkeiten zwischen zufälligen Variablen zu erfassen, werden die Begriffe bedingte Wahrscheinlichkeit und bedingte Erwartung benötigt, die von Kolmogoroff in (GW) unter Benutzung des Satzes von Radon-Nikodym in voller Allgemeinheit eingeführt werden. Aus der Markow-Eigenschaft (8), die als Nachwirkungsfreiheit interpretiert wird, folgt fast sicher

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x}_{t_3} \in B | \mathbf{x}_{t_1}\right) = \mathbf{E}\left[\mathbf{P}\left(\mathbf{x}_{t_3} \in B | \mathbf{x}_{t_2}\right) | \mathbf{x}_{t_1}\right]. \tag{9}$$

Das ist gerade die Chapman-Kolmogoroffsche Gleichung (1) und die in 3.1 eingeführten stochastischen Kerne erscheinen hier als Übergangswahrscheinlichkeiten:

$$\mathbf{P}\left(\mathbf{x}_t \in B | \mathbf{x}_{t_0} = x\right) = P\left(t_0, x, t, B\right).$$

4.3 Maße in Funktionenräumen

Der in 4.1 erwähnte „unendlich verwickelte Weg" eines Brownschen Teilchens führt uns notwendig dazu, nicht nur endlich viele Variablen sondern gleichzeitig die gesamte Schar zu einem Elementarereignis zu betrachten. Das liefert uns eine Zeitfunktion, auch Pfad oder Realisierung genannt. In dem Raum der Pfade ist der Zufall durch ein Maß zu erfassen. Das gelingt erstmalig Norbert Wiener (1894 - 1964) nach analytischer Vorarbeit von Paul Lévy (1886 - 1971) (vgl. [60], [45], [46]). Allerdings finden diese recht verworrenen Bemühungen auf einem kaum erschlossenen Terrain Anfang der 20er Jahre unter den Zeitgenossen keinen Widerhall. Erst zehn Jahre später in Zusammenarbeit mit R. Paley und A. Zygmund kann N. Wiener streng beweisen, dass fast sicher die Brownschen Pfade überall stetig und nirgends differenzierbar sind (vgl. [61], [51], [52]).
Kolmogoroff zeigt zur gleichen Zeit in (GW) seinen „Hauptsatz", der unter einfachen Verträglichkeitsbedingungen an vorgegebene endlichdimensionale Verteilungen auf dem Raum der reellen Funktionen Wahrscheinlichkeitsmaße einzuführen gestattet. Somit können wichtige stochastische Prozesse erzeugt werden, insbesondere der Prozeß der Brownschen Bewegung, den W. Feller in [9] den Wiener-Bachelier-Prozeß nennt.
Auf dem Kolmogoroffschen Fundament (AM), (GW) wurde in den folgenden 20 Jahren eine mathematische Theorie stochastischer Prozesse errichtet, die in Joseph Doobs bekannter Wiley-Monographie „Stochastic Processes" ihren ersten umfassenden Ausdruck fand.

Literatur

[1] Bachelier, L.: Théorie de la Spéculation. Ann. Scient. de l'Ecole Norm. Super. 3^e Series, 17 (1900), 21 - 86.

[2] Bachelier, L.: Les probabilités à plusieurs variables. Ibid. 27 (1910), 339 - 360.

[3] Bachelier, L.: Calcul des probabilités. Gauthier-Villars, Paris 1912

[4] Bernstein, S.: Sur l'extension du théorèm limite du calcul des probabilités aux sommes de quantités dépendentes. Math. Ann. 97 (1926), 1 - 59.

[5] Borel, E.: Les probabilités dénombrables et leurs applications arithmétiques. Rend. Circ. Matem. Palermo, 27 (1909), 247 - 271.

[6] Chapman, S.: On the Brownian displacements and thermal diffusion of grains suspended in a non-uniform fluid. Proceed. Royal Soc. Series A, 119 (1928), A 781, 34 - 60.

[7] Courant, R., Friedrichs, K., Lewy, H.: Über die partiellen Differentialgleichungen der mathematischen Physik. Math. Annalen 100 (1928), 32 - 74.

[8] Einstein, A.: Über die von der molekularkinetischen Theorie der Wärme geforderte Bewegung von in ruhenden Flüssigkeiten suspendierten Teilchen. Ann. Physik (4), 17 (1905), 549 - 560.

[9] Feller, W.: An Introduction to Probability Theory and Its Applications. Vol. II, John Wiley, New York 1971.

[10] Fokker, A.D.: Die mittlere Energie rotierender elektrischer Dipole im Strahlungsfeld. Ann. Physik (4), 43 (1914), 810 - 820.

[11] Girlich, H.-J.: Hausdorffs Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie. In: Brieskorn (Hrsg.), Felix Hausdorff zum Gedächtnis. Vieweg, Braunschweig/Wiesbaden 1996, 31 - 70.

[12] Gnedenko, B.W.: Alexander Jakowlewitsch Khintchine (zum 60. Geburtstag) (Russ.) Uspechi Mat. Nauk 10 (1955), 3, 197 - 207.

[13] Gnedenko, B.W., Kolmogorov, A.N.: Alexander Jakowlewitsch Khintchine, Nekrolog (Russ.) Uspechi Mat. Nauk 15 (1960), 4, 97 - 110.

[14] Hald, A.: A History of Mathematical Statistics from 1750 to 1930. John Wiley, New York 1998.

[15] Hostinský, B.: Méthods générales du Calcul des Probabilités. Mémorial des Sciences mathématiques, Fasc. 52, Gauthier-Villars, Paris 1931.

[16] Khintchine, A.: Über dynamische Brüche. Math. Zeitschr. 18 (1923), 109 - 116.

[17] Khintchine, A.: Über einen Satz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Fundam. Math. 6 (1924), 9 - 20.

[18] Khintchine, A.: Über das Gesetz der großen Zahlen. Math. Ann. 96 (1926), 152 - 168.

[19] Khintchine, A.: Grundgesetze der Wahrscheinlichkeitstheorie (Russ.) Forschungsinst. Math. u. Mech. an der Moskauer Staatl. Univ., Moskau 1927, 91 Seiten.

[20] Khintchine, A.: Asymptotische Gesetze der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Math., 2. Band, Heft 4, Springer, Berlin 1933, 77. Seiten.

[21] Khintchine, A.: Korrelationstheorie der stationären stochastischen Prozesse. Math. Ann. 109 (1934), 604 - 615.

[22] Khintchine, A. und Kolmogoroff, A.: Über Konvergenz von Reihen, deren Glieder durch den Zufall bestimmt werden. Mat. Sborn. 32 (1925), 668 - 677.

[23] Kolmogoroff, A.: Une série de Fourier-Lebesgue divergente presque partout. Fundam. Math. 4 (1923), 324 - 328.

[24] Kolmogoroff, A.: Sur l'ordre de grandeur des coefficients de la série de Fourier-Lebesgue. Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. A, 1923, 83 - 86.

[25] Kolmogoroff, A.: Sur la convergence de séries de Fourier. Comptes rendus Acad. sci., Paris, 178 (1924), 303 - 306.

[26] Kolmogoroff, A.: Sur la possibilité de la définition générale de la dérivée, de l'intégrale et de la sommation des séries divergentes. Comptes rendus Acad. sci., Paris, 180 (1925), 362 - 364.

[27] Kolmogoroff, A.: Sur la loi des grandes nombres. Comptes rendus Acad. sci., Paris, 185 (1927), 917 - 919.

[28] Kolmogoroff, A.: Über die Summen durch den Zufall bestimmter unabhängiger Größen. Math. Ann. 99 (1928), 309 - 319.

[29] Kolmogoroff, A.: Allgemeine Maßtheorie und Wahrscheinlichkeitsrechnung (Russ.) Kommunist. Akademie, Sektion Naturwissenschaften und exakte Wissenschaften, mathem. Abteilung, 1 (1929), 8 - 21.

[30] Kolmogoroff, A.: Über das Gesetz des iterierten Logarithmus. Math. Ann. 101 (1929), 126 - 135.

[31] Kolmogoroff, A.: Sur la loi forte des grands nombres. Comptes rendus Acad. sci., Paris, 191 (1930), 910 - 912.

[32] Kolmogoroff, A.: Über die analytischen Methoden in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Ann. 104 (1931), 415 - 458.

[33] Kolmogoroff, A.: Zur Theorie der stetigen zufälligen Prozesse. Math. Ann. 108 (1933), 149 - 160.

[34] Kolmogoroff, A.: Grundbegriffe der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Ergebnisse der Math., 2. Band, Heft 3, Springer, Berlin 1933, 62 Seiten.

Ausgewählte Werke (einheitl. in russ. Sprache übersetzt und mit Kommentaren versehen, engl. Ausgabe bei Kluwer, 1991 - 1993)

[35] Kolmogoroff, A.: Mathematik und Mechanik. Nauka, Moskau 1985, 456 Seiten.

[36] Kolmogoroff, A.: Wahrscheinlichkeitstheorie und mathematische Statistik. Nauka, Moskau 1986, 534 Seiten.

[37] Kolmogoroff, A.: Informationstheorie und Theorie der Algorithmen, Nauka, Moskau 1987, 304 Seiten.

Kolmogoroff - Jubiläumsausgabe in drei Büchern (Russ.)

[38] Kolmogoroff, A.: 1. Buch: Biobibliographie, Fismatlit, Moskau 2003, 380 Seiten.

[39] Kolmogoroff, A.: 2. Buch: Ausgewählte Stellen aus dem Briefwechsel von A.N. Kolmogoroff und P.S. Alexandroff. Fismatlit, Moskau 2003, 672 Seiten.

[40] Kolmogoroff, A.: 3. Buch: Aus den Tagebüchern, Fismatlit, Moskau 2003, 232 Seiten.

[41] Kolmogoroff, A. und Leontowitsch, M.A.: Zur Berechnung der mittleren Brownschen Fläche. Phys. Zeitschr. Sowjetunion 4 (1933), 1 - 13.

[42] Laplace, P.S.: Oeuvres complètes, vol. VII. Gauthier-Villars, Paris 1886.

[43] Laplace, P.S.: Philosophischer Versuch über die Wahrscheinlichkeit. Herausgegeben von R.v. Mises, Ostwald's Klassiker der exakten Wissenschaften, Nr. 233. Geest & Portig, Leipzig 1932.

[44] Leontowitsch, M.: Zur Statistik der kontinuierlichen Systeme und des zeitlichen Verlaufes der physikalischen Vorgänge. Phys. Zeitschr. Sowjetunion 3 (1933), 35 - 63.

[45] Lévy, P.: Leçons d'analyse fonctionelle, Gauthier-Villars, Paris 1922.

[46] Lévy, P.: Calcul des probabiliés, Gauthier-Villars, Paris 1925.

[47] Lomnitzki, A.: Nouveaux fondements du calcul des probabilités. Fundamenta Mathematicae 4 (1923), 34 - 71.

[48] Markoff, A.A.: Wahrscheinlichkeitsrechnung. Nach der 2. russ. Auflage übersetzt von H. Liebmann, Teubner, Leipzig 1912.

[49] Mises, R. von: Grundlagen der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Math. Zeitschr. 5 (1919), 52 - 99.

[50] Mises, R. von: Vorlesungen aus dem Gebiete der Angewandten Mathematik. 1. Band: Wahrscheinlichkeitsrechnung und ihre Anwendung in der Statistik und theoretischen Physik. Deuticke, Leipzig 1931.

[51] Paley, R., Wiener, N.: Fourier Transforms in the Complex Domain. Amer. Math. Soc., Coll. Publ. 19, New York 1934.

[52] Paley, R., Wiener, N., Zygmund, A.: Notes on random functions. Math. Zeitschr. 37 (1933), 647 - 668.

[53] Perrin, J.: Die Atome. Steinkopf, Leipzig 1914 (franz.Orig.,Paris 1913).

[54] Petrowsky, I.: Über das Irrfahrtsproblem. Math. Ann. 109 (1934), 425 - 444.

[55] Planck, M.: Über einen Satz der statistischen Dynamik und seine Erweiterung in der Quantentheorie. Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss., phys.-math. Kl., 10.5. (1917), 324 - 341.

[56] Révész, P.: Die Gesetze der großen Zahlen, Birkhäuser, Basel 1968.

[57] Smoluchowski, M. von: Einige Beispiele Brownscher Molekularbewegung unter Einfluß äußerer Kräfte. Bull. Acad. Sci. Cracovie Mat.-nat. Kl. A, 1913, 418 - 434.

[58] Steinhaus, H.: Les probabilités dénombrables et leur rapport à la théorie de la mesure. Fundam. Math. 4 (1923), 286 - 310.

[59] Taqqu, M.: Bachelier and his times: A conversation with Bernard Bru. Finance Stochast. 5 (2001), 3 - 32.

[60] Wiener, N.: Differential-space. J. Math. Phys. 2 (1923), 131 - 174.

[61] Wiener, N.: Generalized harmonic analysis. Acta Math. 55 (1930), 117 - 258.