Name, Vorname:	______________________________
Matrikel-Nr.:	_ | _ | _ | _ | _ | _ | _
Lehramt:	☐ Ja oder ☐ Nein

1	2	3	4	5	6	7	8	9	Σ	Note

Klausur zur Vorlesung
"Lineare Algebra 1" - bei Prof. Dr. B. Fritzsche am 05.02.2018

Wenn es nicht ausdrücklich anders angegeben ist, sind die Antworten zu begründen.

Bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen, $\mathbb{N}_0$ die Menge aller nichtnegativen ganzen Zahlen, $\mathbb{Z}$ die Menge aller ganzen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen. Mit I_p wird die p-reihige Einheitsmatrix symbolisiert. Für die aus genau p Zeilen und genau q Spalten bestehende Nullmatrix wird $0_{p\times q}$ geschrieben.

1. Definieren Sie den Begriff eines Vektorraumes über einem Körper $\mathcal{K}$, wobei Sie den Begriff einer Gruppe als bekannt voraussetzen können. (5 Punkte)

2. Untersuchen Sie, ob folgende Mengen $\mathcal{M}$ Unterräume von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ sind und berechnen Sie gegebenenfalls die Dimension $\dim \mathcal{M}$, falls $\mathcal{M}$ ein Unterraum von $\mathbb{R}^{2\times 2}$ ist:

   (a) $\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & b \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2} : b \in \mathbb{R} \right\}$. (b) $\mathcal{M} := \left\{ A \in \mathbb{R}^{2\times 2} : A^T = -A \right\}$. (7 Punkte)

3. Untersuchen Sie, ob folgende Vektorsysteme $\mathcal{M}$, bestehend aus den Vektoren v_1, v_2 und v_3, eine Basis des $\mathbb{R}$-Vektorraumes V sind:

   (a) $V := \mathbb{R}^3; v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$.

   (b) $V := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}; v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$.

   (c) $V := \mathbb{R}^{2\times 2}; v_1 := \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$. (4 Punkte)

4. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und $\mathfrak{X}$ ein affiner Vektorunterraum eines $\mathcal{K}$-Vektorraumes V mit $\mathfrak{X} \neq \emptyset$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{X}$ sowie $(\alpha_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{K}$ mit $\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_n = 1$, wobei 1 das Einselement in $\mathcal{K}$ (d.h., das neutrale Element der Multiplikation in $\mathcal{K}$) bezeichnet. Beweisen Sie, dass $x := \alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2 + \ldots + \alpha_n x_n$ zu $\mathfrak{X}$ gehört. (3 Punkte)

5. Gegeben seien die reellen Matrizen $A := \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, B := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, C := \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, D := \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ sowie $E := \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ und $F := \begin{pmatrix} B^T \\ D^T \end{pmatrix}$. Berechnen Sie $A + 2F^*, \mathcal{R}(AC + 3I_2), \operatorname{tr}(F^2)$ und $\operatorname{rank} E$. (5 Punkte)

6. Bezeichne $\mathcal{U}_q := \{U \in \mathbb{C}^{q\times q} : U^* U = I_q\}$. Beweisen Sie, dass die Menge

   $$\mathcal{M} := \left\{ \begin{pmatrix} U & B \\ 0_{q\times q} & I_q \end{pmatrix} : U \in \mathcal{U}_q \quad \text{und} \quad B \in \mathbb{C}^{q\times q} \right\}$$

   bezüglich der Matrizenmultiplikation eine Gruppe bildet. Untersuchen Sie, ob die Gruppe kommutativ ist. (6 Punkte)

7. Sei $\mathcal{K}$ ein Körper. Des Weiteren seien $A \in \mathcal{K}^{p\times p}, B \in \mathcal{K}^{p\times q}$, und $M := \begin{pmatrix} A & B \\ 0_{q\times p} & I_q \end{pmatrix}$, wobei vorausgesetzt wird, dass A den Rang p besitzt. Beweisen Sie, dass $F := M^T M$ eine invertierbare Matrix ist und bestimmen Sie die Matrix F^{-1} (in Abhängigkeit von A und B). (5 Punkte)

8. Sei $b \in \mathbb{R}^q$. Begründen Sie, dass $x = \frac{1}{1+b^T b} b$ die eindeutige Lösung des linearen Gleichungssystems $(I_q + bb^T)x = b$ ist. (4 Punkte)

9. Seien $\mathcal{U} := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ und $\mathcal{W} := \operatorname{span} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$. Berechnen Sie $\dim(\mathcal{U} + \mathcal{W})$. (4 Punkte)