Wintersemester 2018/2019
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Prof. Dr. T. Finis
S. Kley

Lineare Algebra I
Klausur

21. Februar 2019

- Zeit zur Bearbeitung: 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Keine.
- Schmierpapier geben Sie bitte *nicht* mit ab.
- Wenn Sie zusätzliche Zettel abgeben möchten, beschriften Sie bitte jeden dieser Zettel mit Name, Matrikelnummer und Nummer der Aufgabe.
- Schreiben Sie leserlich!

Name	
Matrikelnummer	
Studiengang	
Lehramt (ja/nein)	

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ (von 34)	Note

Aufgabe 1 (8 Punkte). Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob diese falsch oder wahr sind. Eine Begründung für Ihre Antwort ist nicht nötig und wird nicht berücksichtigt.

(i) Ist V ein $\mathbb{K}$-Vektorraum, so ist

	Wahr	Falsch
1. $\{x + y \mid x, y \in V\} = V$,	☐	☐
2. $\{x + y \mid x, y \in V\} = V \times V$,	☐	☐
3. $\{\lambda v \mid \lambda \in \mathbb{K}, v \in V\} = \mathbb{K} \times V$.	☐	☐

(ii) Wie viele Unterräume hat $\mathbb{R}^2$?

	Wahr	Falsch
1. Genau zwei: $\{0\}$ und $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
2. Genau vier: $\{0\}$, $\mathbb{R} \times \{0\}$, $\{0\} \times \mathbb{R}$ und $\mathbb{R}^2$.	☐	☐
3. Unendlich viele.	☐	☐

(iii) Der nur aus dem Nullvektor bestehende Vektorraum $V = \{0\}$

	Wahr	Falsch
1. besitzt eine Basis, die nur aus dem Nullvektor besteht,	☐	☐
2. besitzt die Basis $\emptyset$,	☐	☐
3. besitzt gar keine Basis.	☐	☐

(iv) Für Unterräume eines Vektorraums V gilt stets

	Wahr	Falsch
1. $(U_1 + U_2) + U_3 = U_1 + (U_2 + U_3)$,	☐	☐
2. $U_1 \cap (U_2 + U_3) = (U_1 \cap U_2) + (U_1 \cap U_3)$,	☐	☐
3. $U_1 + (U_2 \cap U_3) = (U_1 + U_2) \cap (U_1 + U_3)$.	☐	☐

(v) Ist b eine der Spalten der Koeffizientenmatrix A im linearen Gleichungssystem $Ax = b$, dann ist das Gleichungssystem $Ax = b$

	Wahr	Falsch
1. in jedem Fall lösbar,	☐	☐
2. in keinem Fall lösbar,	☐	☐
3. die Entscheidung über die Lösbarkeit von b abhängig.	☐	☐

(vi) Die folgenden Vorschriften definieren Äquivalenzrelationen auf der Menge der natürlichen Zahlen:

	Wahr	Falsch
1. $x \sim y \Leftrightarrow x, y$ gerade,	☐	☐
2. $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ gerade,	☐	☐
3. $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ gerade,	☐	☐
4. $x \sim y \Leftrightarrow x - y$ ungerade,	☐	☐
5. $x \sim y \Leftrightarrow x + y$ ungerade.	☐	☐

(vii) Folgende Objekte haben eine Dimension:

	Wahr	Falsch
1. ein Vektor,	☐	☐
2. eine Basis,	☐	☐
3. ein Unterraum.	☐	☐

(viii) Für Vektorräume und Gruppen gilt, dass

	Wahr	Falsch
1. jeder Vektorraum eine Gruppe ist,	☐	☐
2. jeder Vektorraum eine abelsche Gruppe ist,	☐	☐

3.	jede abelsche Gruppe zu einem Vektorraum gemacht werden kann,	☐	☐
4.	die Menge der linearen Abbildungen eines Vektorraums V in einen Vektorraum W bezüglich der punktweisen Addition eine Gruppe ist,	☐	☐
5.	die Menge der linearen Abbildungen eines Vektorraums V in einen Vektorraum W bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe ist,	☐	☐
6.	die Menge der invertierbaren linearen Abbildungen eines Vektorraums V in einen Vektorraum W bezüglich der Hintereinanderausführung eine Gruppe ist.	☐	☐

Hinweis zur Bewertung dieser Aufgabe: Für jede richtige Antwort wird ein Punkt hinzuaddiert, für jede falsche Antwort ein Punkt abgezogen. Eine Frage gilt als richtig beantwortet, wenn alle drei (bzw. fünf, sechs) zur Frage gehörenden Kreuze richtig gesetzt sind. Unbeantwortete Fragen werden mit 0 *Punkten gewertet. Insgesamt wird diese Aufgabe mit mindestens* 0 *Punkten bewertet.*

Lösung 1. Wir geben die Lösungsvektoren der einzelnen Aufgaben an:

(i) w-f-f

(ii) f-f-w

(iii) f-w-f

(iv) w-f-f

(v) w-f-f

(vi) f-w-w-f-f

(vii) f-f-w

(viii) w-w-f-w-f-f

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei $\mathbb{K} = \mathbb{F}_p$ für eine Primzahl p der endliche Körper mit p Elementen. Zeigen Sie, dass die Menge

$$Q := \{x^2 \in \mathbb{K} \mid x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}\}$$

bezüglich der Multiplikation eine Gruppe bildet.

Lösung 2. Wir wissen, dass $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bezüglich '$\cdot$' eine kommutative Gruppe bildet. Darum genügt es, zu zeigen, dass Q eine Untergruppe von $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ bildet, denn dann ist Q auch selbst eine Gruppe *(1 Punkt)*. Also:

(i) Da $1 = 1^2 \in Q$, ist also $Q \neq \emptyset$ *(1 Punkt)*.

(ii) Seien $x^2, y^2 \in Q$, dann ist auch $x^2y^2 = (xy)^2 \in Q$ (da kommutativ!). Also ist Q abgeschlossen bezüglich '$\cdot$' *(1 Punkt)*.

(iii) Sei $x^2 \in Q$, dann ist insbesondere $x \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$. Da $\mathbb{K} \setminus \{0\}$ eine Gruppe ist, ist also auch $x^{-1} \in \mathbb{K} \setminus \{0\}$ und es gilt $xx^{-1} = x^{-1}x = 1$. Wir erhalten also

$$x^2(x^{-1})^2 = x^2x^{-1}x^{-1} = x(xx^{-1})x^{-1} = xx^{-1} = 1 = (x^{-1})^2x^2$$

und damit $(x^2)^{-1} = (x^{-1})^2 \in Q$. Also ist Q auch bezüglich der Inversenbildung abgeschlossen. *(1 Punkt)*

Wegen (i), (ii) und (iii) ist also Q eine Untergruppe und alles gezeigt.

Aufgabe 3 (6 Punkte)**.** Sei $V = \mathbb{K}^{3\times 3}$ der Vektorraum aller 3×3-Matrizen über einem Körper $\mathbb{K}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $f : V \to \mathbb{K}^3$ gemäß $f(A) := \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix}$ linear ist.

(b) Bestimmen Sie die Dimensionen des Kerns und des Bildes von f.

(c) Geben Sie eine Basis von $\ker f$ an.

Lösung 3. (a) Wir müssen zeigen, dass f sowohl additiv als auch homogen ist. Also:

(i) Seien $A, B \in V$, dann gilt

$$f(A+B) = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} + b_{11} + b_{22} + b_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} + b_{12} + b_{23} + b_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} + b_{13} + b_{21} + b_{32} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} + b_{22} + b_{33} \\ b_{12} + b_{23} + b_{31} \\ b_{13} + b_{21} + b_{32} \end{pmatrix}$$
$$= f(A) + f(B).$$

(1 Punkt)

(ii) Seien $A \in V$ und $\alpha \in \mathbb{K}$, dann gilt

$$f(\alpha A) = \begin{pmatrix} \alpha a_{11} + \alpha a_{22} + \alpha a_{33} \\ \alpha a_{12} + \alpha a_{23} + \alpha a_{31} \\ \alpha a_{13} + \alpha a_{21} + \alpha a_{32} \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} a_{11} + a_{22} + a_{33} \\ a_{12} + a_{23} + a_{31} \\ a_{13} + a_{21} + a_{32} \end{pmatrix} = \alpha f(A).$$

(1 Punkt)

(b) Zunächst stellen wir fest, dass $\dim V = 9$ gilt. Außerdem ist $\operatorname{Bild} f = \mathbb{K}^3$, denn setzen wir $a_{22} = a_{33} = a_{23} = a_{31} = a_{21} = a_{32} = 0$, dann sehen wir, dass sich durch f jeder beliebige Vektor $v \in \mathbb{K}^3$ darstellen lässt. Wegen $0 \leq \dim \operatorname{Bild} f \leq 3$ gilt also $\dim \operatorname{Bild} f = 3$ *(1 Punkt)*. Schließlich erhalten wir

$$\dim \ker f = \dim V - \dim \operatorname{Bild} f = 9 - 3 = 6$$

(1 Punkt).

(c) Nach Aufgabe (b) wird der Kern von f durch 6 Basiselemente aufgespannt. Der Ansatz $f(A) = 0$ und die Lösung des sich daraus ergebenden Gleichungssystems liefert z.B.

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$$

(2 Punkte).

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Seien $A, B \in \mathbb{K}^{n\times n}$. Zeigen Sie, dass die Ungleichungen

$$\text{rank}A + \text{rank}B - n \leq \text{rank}AB \leq \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}$$

gelten.

Lösung 4. Wir betrachten die linearen Abbildungen $\varphi_A, \varphi_B : \mathbb{K}^n \to \mathbb{K}^n$ gemäß $\varphi_A(x) = Ax$ und $\varphi_B(x) = Bx$ (also die mit A und B assoziierten linearen Abbildungen). Es gelten: $\dim \text{Bild}\varphi_A = \text{rank}A$ und $\dim \text{Bild}\varphi_B = \text{rank}B$.

(i) Wir zeigen zunächst $\text{rank}AB \leq \min\{\text{rank}A, \text{rank}B\}$, also

$$\dim \text{Bild}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \min\{\dim \text{Bild}\varphi_A, \dim \text{Bild}\varphi_B\} :$$

Zunächst stellen wir fest, dass durch die Verkettung der Definitionsbereich von φ_A eigeschränkt wird auf den Vektorraum $\text{Bild}\varphi_B$, und somit ist

$$\dim \text{Bild}(\varphi_A \circ \varphi_B) \leq \dim \text{Bild}\varphi_B$$

erfüllt *(1 Punkt)*. Außerdem liefert die Dimensionsformel für lineare Abbildungen:

$$\begin{aligned}\dim \text{Bild}(\varphi_A \circ \varphi_B) &= \dim \text{Rstr}_{\text{Bild}\varphi_B}(\text{Bild}\varphi_A) = \dim \text{Bild}\varphi_B - \dim\ker \text{Rstr}_{\text{Bild}\varphi_B}(\text{Bild}\varphi_A)\\ &\leq \dim \text{Bild}\varphi_B\end{aligned}$$

(1 Punkt). Außerdem gilt für den Vektorraum $\text{Bild}\varphi_B$, dass $\text{Bild}\varphi_B \subseteq \mathbb{K}^n$, und damit also auch $\varphi_A(\text{Bild}\varphi_B) \subseteq \varphi_A(\mathbb{K}^n)$ *(1 Punkt)*, was insgesamt die Behauptung liefert.

(ii) Jetzt zeigen wir noch $\text{rank}A + \text{rank}B - n \leq \text{rank}AB$, also

$$\dim \text{Bild}\varphi_A + \dim \text{Bild}\varphi_B - n \leq \dim \text{Bild}(\varphi_A \circ \varphi_B) :$$

Zunächst stellen wir fest, dass

$$\ker \varphi_A + \ker \varphi_B \geq \ker(\varphi_A \circ \varphi_B) \tag{1}$$

gilt *(1 Punkt)*, und darum erhalten wir

$$\begin{aligned}&-\dim\ker \varphi_A - \dim\ker \varphi_B \leq -\dim\ker(\varphi_A \circ \varphi_B)\\ \Leftrightarrow\ &-\dim\ker \varphi_A + n - \dim\ker \varphi_B \leq n + n - \dim\ker(\varphi_A \circ \varphi_B)\\ \Leftrightarrow\ &\text{rank}A + \text{rank}B \leq n + \text{rank}(AB)\\ \Leftrightarrow\ &\text{rank}A + \text{rank}B - n \leq \text{rank}(AB)\end{aligned}$$

(1 Punkt). Es reicht also aus, zu zeigen, dass (1) gilt. Sei dafür $x \in \ker(\varphi_A \circ \varphi_B)$. Dann ist entweder $x \in \ker \varphi_B$ oder aber es ist $x \in \varphi_B^{-1}(\ker \varphi_A)$. Wir erhalten also

$$\begin{aligned}\dim\ker(\varphi_A \circ \varphi_B) &= \dim(\varphi_B^{-1}(\ker \varphi_A)) = \dim\ker \varphi_A + \dim(\ker \varphi_B \cap \varphi_B^{-1}(\ker \varphi_A))\\ &\leq \dim\ker \varphi_A + \dim\ker \varphi_B\end{aligned}$$

(1 Punkt), und wir sind fertig.

Bem.: Man hätte bei dieser Aufgabe auch direkt über den Rang, ohne die Abbildungen, argumentieren können. Das ist ein Lösungsvorschlag.

Aufgabe 5 (6 Punkte). Sei $A = (a_{ij}) \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann ist die Spur von A definiert als $\mathrm{tr}A := \sum_{i=1}^n a_{ii}$.

(a) Zeigen Sie, dass die Abbildung $\varphi : \mathbb{R}^{n\times n} \to \mathbb{R}$ gemäß $\varphi(A) = \mathrm{tr}A$ linear ist.

(b) Zeigen Sie, dass im Fall $A = A^{\mathrm{tr}}$ und $A^2 = 0_{n\times n}$ dann $A = 0_{n\times n}$ folgt.

(c) Zeigen Sie, dass es keine Matrizen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$ gibt, die $AB - BA = I_n$ erfüllen.

Lösung 5. (a) Es ist wieder zu zeigen, dass φ additiv und homogen ist. Also:

(i) Seien $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$, dann gilt

$$\varphi(A+B) = \mathrm{tr}(A+B) = \sum_{i=1}^n (a_{ii} + b_{ii}) = \sum_{i=1}^n a_{ii} + \sum_{i=1}^n b_{ii} = \mathrm{tr}A + \mathrm{tr}B = \varphi(A) + \varphi(B)$$

(1 Punkt).

(ii) Seien $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$, dann gilt

$$\varphi(\alpha A) = \mathrm{tr}(\alpha A) = \sum_{i=1}^n (\alpha a_{ii}) = \alpha \sum_{i=1}^n a_{ii} = \alpha \mathrm{tr}A = \alpha\varphi(A)$$

(1 Punkt).

(b) Wir führen den Beweis per Widerspruch. Angenommen, A wäre nicht die Nullmatrix. Dann gibt es mindestens ein Element $a_{ik} \neq 0$ *(1 Punkt)*. Dann folgt aber

$$0 = \sum_{k=1}^n a_{ik}^2 = \sum_{k\neq i} a_{ik}^2 + a_{ii}^2 \geq a_{ii}^2 > 0,$$

Widerspruch *(1 Punkt).*

(c) Auch hier führen wir einen Widerspruchsbeweis. Angenommen, die Aussage wäre richtig. Dann gilt insbesondere auch $\mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(I_n)$ *(1 Punkt)*. Beachten wir Teil (a), so folgt

$$\begin{aligned} n &= \mathrm{tr}(I_n) = \mathrm{tr}(AB - BA) = \mathrm{tr}(AB) - \mathrm{tr}(BA) = \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(B)\mathrm{tr}(A) \\ &= \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) - \mathrm{tr}(A)\mathrm{tr}(B) = 0. \end{aligned}$$

Widerspruch, da $n \in \mathbb{N}$ *(1 Punkt).*

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Berechnen Sie die Determinante der folgenden reellen $n \times n$-Matrix:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & & \vdots \\ 0 & a & \ddots & \ddots & 0 \\ \vdots & & \ddots & 1 & a \\ 0 & \cdots & 0 & a & 1 \end{pmatrix}.$$

Lösung 6. Wir führen den Beweis per Induktion über $n \in \mathbb{N}$. Bezeichne D_n die Determinante der Matrix $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ und symbolisiere $A^{(n)}$ die Matrix mit den Ausmaßen n mal n.

(IA)

$n = 1$: $D_1 = \det(1) = 1$.

$n = 2$: $D_2 = \det \begin{pmatrix} 1 & a \\ a & 1 \end{pmatrix} = 1 - a^2$

$n = 3$:

$$\begin{aligned} D_3 = \det \begin{pmatrix} 1 & a & 0 \\ a & 1 & a \\ 0 & a & 1 \end{pmatrix} &= 1 \cdot 1 \cdot 1 + a \cdot a \cdot 0 + 0 \cdot a \cdot a - a \cdot a \cdot 1 - 1 \cdot a \cdot a - 0 \cdot 1 \cdot 0 \\ &= 1 - 2a^2 = (1 - a^2) - a^2 \cdot 1 = D_1 - a^2 D_2 \end{aligned}$$

(1 Punkt)

(IV) Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $D_n = D_{n-1} - a^2 D_{n-2}$ *(1 Punkt)*.

(IS) $(n-1) \mapsto n$:

$$\begin{aligned} \det A^{(n)} &= 1 \cdot \det A^{(n-1)} - a \cdot \det \begin{pmatrix} a & 0 & \cdots & 0 \\ a & 1 & a & \\ 0 & a & 1 & \ddots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \\ &= \det A^{(n-1)} - a^2 \det A^{(n-2)} \\ &= D_{n-1} - a^2 D_{n-2} \end{aligned}$$

(2 Punkte). Dabei wurde in beiden Schritten jeweils nach der ersten Zeile entwickelt.