Wintersemester 2018/2019
Fakultät für Mathematik und Informatik
Universität Leipzig

Prof. Dr. T. Finis
S. Kley

Lineare Algebra I
Probeklausur

28. Januar 2019

- Zeit zur Bearbeitung: 90 Minuten.
- Erlaubte Hilfsmittel: Keine.
- Schmierpapier geben Sie bitte *nicht* mit ab.
- Wenn Sie zusätzliche Zettel abgeben möchten, beschriften Sie bitte jeden dieser Zettel mit Name, Matrikelnummer und Nummer der Aufgabe.
- Schreiben Sie leserlich!

Name	
Matrikelnummer	
Studiengang	

A1	A2	A3	A4	A5	A6	Σ (von 34)	Note

Aufgabe 1 (8 Punkte)**.** Entscheiden Sie für die folgenden Aussagen jeweils, ob diese falsch oder wahr sind. Eine Begründung für Ihre Antwort ist nicht nötig und wird nicht berücksichtigt.

(i) Seien V und W n-dimensionale $\mathbb{K}$-Vektorräume, wobei n eine natürliche Zahl sei. Dann existiert ein

		Wahr	Falsch
1.	Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$,	☐	☐
2.	injektiver Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$,	☐	☐
3.	surjektiver Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$,	☐	☐
4.	bijektiver Vektorraumhomomorphismus $\varphi : V \to W$.	☐	☐

Lösung: w-w-w-w

(ii) Sind V ein Vektorraum und U ein Unterraum von V, dann

		Wahr	Falsch
1.	ist $V \setminus U$ ein Unterraum von V,	☐	☐
2.	ist in gewissen Fällen $V \setminus U$ ein Unterraum von V, in anderen nicht,	☐	☐
3.	ist $V \setminus U$ in jedem Fall kein Unterraum von V.	☐	☐

Lösung: f-f-w

(iii) Falls (v_1, v_2, v_3) ein linear unabhängiges Tripel von Vektoren in V ist, dann ist

		Wahr	Falsch
1.	(v_1, v_2) linear abhängig,	☐	☐
2.	(v_i, v_j) für manche $i, j \in \{1, 2, 3\}$ linear abhängig und für manche linear unabhängig,	☐	☐
3.	(v_i, v_j) für $i \neq j \in \{1, 2, 3\}$ linear unabhängig.	☐	☐

Lösung: f-w-w

(iv) Die Dimension $\dim \mathrm{im} f$ einer linearen Abbildung $f : V \to W$ entspricht

	Wahr	Falsch
1. $\dim \ker f$,	☐	☐
2. $\dim \mathrm{Bild} f$,	☐	☐
3. $\dim W$.	☐	☐

Lösung: f-w-f

(v) Matrixmultiplikation ist

	Wahr	Falsch
1. assoziativ,	☐	☐
2. kommutativ,	☐	☐
3. distributiv.	☐	☐

Lösung: w-f-w

(vi) Für alle $A, B, C \in \mathbb{K}^{n \times n}$ und alle $\lambda \in \mathbb{K}$ gilt

	Wahr	Falsch
1. $\det(A + B) = \det A + \det B$,	☐	☐
2. $\det(\lambda A) = \lambda \det A$,	☐	☐
3. $\det(AB(C)) = \det A \det B \det C$.	☐	☐

Lösung: f-f-w

(vii) Sei $Ax = b$ ein lineares Gleichungssystem mit einer quadratischen Matrix A. Dann ist

	Wahr	Falsch
1. dieses stets eindeutig lösbar,	☐	☐
2. die Entscheidung über die Lösbarkeit von A, b abhängig,	☐	☐

3. dieses stets lösbar. Die Entscheidung über die eindeutige Lösbarkeit hängt aber von A, b ab. ☐ ☐

Lösung: f-w-f

(viii) Für affine Unterräume gilt, dass

	Wahr	Falsch
1. jeder Untervektorraum ein affiner Unterraum ist,	☐	☐
2. jeder affine Unterraum ein Untervektorraum ist,	☐	☐
3. manche affinen Unterräume Untervektorräume sind.	☐	☐

Lösung: w-f-w

Hinweis zur Bewertung dieser Aufgabe: Für jede richtige Antwort wird ein Punkt hinzuaddiert, für jede falsche Antwort ein Punkt abgezogen. Eine Frage gilt als richtig beantwortet, wenn alle drei zur Frage gehörenden Kreuze richtig gesetzt sind. Unbeantwortete Fragen werden mit 0 *Punkten gewertet. Insgesamt wird diese Aufgabe mit mindestens* 0 *Punkten bewertet.*

Aufgabe 2 (4 Punkte)**.** Sei f eine Abbildung einer Menge X in sich selbst. Zeigen Sie: Wenn $f \circ f = id$ gilt, dann ist f bijektiv.

Lösung:
Für die Bijektivität von f sind Injektivität und Surjektivität zu zeigen. Wir zeigen zunächst, dass f injektiv ist:
Es seien $x, y \in X$ derart, dass $f(x) = f(y)$. Ziel ist es, nachzuweisen, dass $x = y$ folgt. Da $f \circ f = id$ gilt, gilt:

$$x = id(x) = f \circ f(x) = f(f(x)) \overset{\text{Annahme}}{=} f(f(y)) = f \circ f(y) = id(y) = y,$$

was genau das ist, was wir wollten. Die Injektivität ist also gezeigt.

Nun zeigen wir, dass f auch surjektiv ist. Dies machen wir per Widerspruch:
Angenommen f ist nicht surjektiv. Dann gilt:

$$\exists\, x \in X : \quad f(y) \neq x \qquad \forall y \in X$$

Da f wie oben gezeigt injektiv ist, folgt für dieses x dann

$$y = id(y) = f \circ f(y) = f(f(y)) \overset{f \text{ injektiv}}{\neq} f(x) \qquad \forall y \in X.$$

Dies ist klarerweise ein Widerspruch, denn $f(x)$ liegt per Definition von f in X. Also war unsere Annahme falsch und f ist surjektiv.

Aufgabe 3 (6 Punkte). Geben Sie alle linearen Abbildungen von $(\mathbb{F}_2)^2 \to (\mathbb{F}_2)^2$ an.

Lösung:
Die linearen Abbildungen von $(\mathbb{F}_2)^2$ nach $(\mathbb{F}_2)^2$ sind jeweils durch die folgenden Abbildungsvorschriften gegeben:

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} 0 \\ a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a \\ a+b \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} b \\ a+b \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} a+b \\ a+b \end{pmatrix}$$

Aufgabe 4 (6 Punkte)**.** Zeigen Sie, dass das folgende nichtlineare Gleichungssystem für $0 \leq \alpha, \beta, \gamma \leq 2\pi$ genau achtzehn Lösungen besitzt:

$$\begin{array}{rcrcrcl} \sin\alpha & + & 2\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0 \\ 2\sin\alpha & + & 5\cos\beta & + & 3\tan\gamma & = & 0 \\ -\sin\alpha & - & 5\cos\beta & + & 5\tan\gamma & = & 0. \end{array} \tag{1}$$

Lösung:
Offensichtlich lässt sich das lineare Gleichungssystem (1) schreiben als

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 5 & 3 \\ -1 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Unser Vorgehen ist also, den Kern der Koeffzientenmatrix zu bestimmen und dann darin diejenigen Vektoren $(x, y, z)^T$ zu bestimmen, welche sich in einer Form $(x, y, z)^T = (\sin\alpha, \cos\beta, \tan\gamma)^T$ schreiben lassen für gewisse $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$.
Durch Anwenden des Gauß-Algorithmus' auf die erweiterte Koeffizientenmatrix erhält man

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 5 & 3 & 0 \\ -1 & -5 & 5 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \rightsquigarrow \cdots \rightsquigarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right).$$

Im Kern der Koeffizientenmatrix liegt demnach lediglich der Vektor $(0, 0, 0)^T$ und zu betrachten bleibt die Gleichung

$$\begin{pmatrix} \sin\alpha \\ \cos\beta \\ \tan\gamma \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Über trigonometrische Funktionen sollte (für den Fall $\alpha, \beta, \gamma \in [0, 2\pi]$) bekannt sein, dass

$$\begin{aligned} \sin\alpha = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \alpha \in \big\{0, \pi, 2\pi\big\} \\ \cos\beta = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \beta \in \big\{\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}\big\} \\ \tan\gamma = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad \gamma \in \big\{0, \pi, 2\pi\big\}, \end{aligned}$$

woraus sich insgesamt genau 18 mögliche Lösungen für das lineare Gleichungssystem (1) ergeben.

Aufgabe 5 (6 Punkte)**.** Bestimmen Sie den Rang und die Determinante der folgenden reellen $n \times n$-Matrix, wobei $a \neq b$:

$$A := \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b & a & b & \cdots & b \\ b & b & a & \cdots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \cdots & a \end{pmatrix}.$$

Lösung:
Vorangestellt betrachten wir den Fall $n = 1$. Dann gilt $\det A = a$ sowie $\operatorname{rank} A = 0$, falls $a = 0$, und ansonsten $\operatorname{rank} A = 1$. Sei nun $n \geq 2$. Wir beginnen mit der Determinante der Matrix, denn im günstigsten Fall können wir aus dieser auch den Rang ablesen.

$$\begin{aligned}
\det A &\overset{\substack{\text{1. Zeile von} \\ \text{Rest abziehen}}}{=} \det \begin{pmatrix} a & b & b & \cdots & b \\ b-a & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ b-a & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b-a & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} \\
&\overset{\substack{\text{Entw. nach 1.} \\ \text{Spalte}}}{=} a \cdot \det \begin{pmatrix} a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} \\
&\quad - (b-a) \det \underbrace{\begin{pmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix}}_{=:C_{a,b}} \\
&\quad + (b-a) \det \begin{pmatrix} b & b & b & \cdots & b \\ a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & a-b & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b \end{pmatrix} \\
&\quad - \cdots + (-1)^{n+1}(b-a) \det \begin{pmatrix} b & b & b & \cdots & b & b \\ a-b & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & a-b & 0 \end{pmatrix}
\end{aligned}$$

Abgesehen von der ersten lassen sich all diese Matrizen durch Spaltentausch in die Form $C_{a,b}$ bringen. Beachtet man, dass sich aus jedem so einen Tausch ein Faktor (-1) vor der jeweiligen Determinante ergibt, erhält man

$$\begin{aligned}\det A &= a(a-b)^{n-1} - (n-1)(b-a)\det C_{a,b} \\ &= a(a-b)^{n-1} - (n-1)(b-a)\big(b(a-b)^{n-2}\big) \\ &= \big(a+(n-1)b\big)(a-b)^{n-1}.\end{aligned}$$

Nun zum Rang. Hier unterscheiden wir verschiedene Fälle. Ist $\det A \neq 0$, so ist $\operatorname{rank} A = n$. Da $a \neq b$, kann der Fall $\det A = 0$ nur eintreten, wenn $a = -(n-1)b$. Klarerweise ergibt das im Fall $b = 0$, dass $\operatorname{rank} A = 0$. Ist $b \neq 0$, so ergibt sich durch geeignete Gauß-Schritte $\operatorname{rank} A = n - 1$.

Aufgabe 6 (4 Punkte)**.** Wir betrachten die Menge $\mathbb{Z}^{n\times n}$ aller $n \times n$-Matrizen mit ganzzahligen Einträgen. Zeigen Sie, dass es für $A \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ genau dann ein $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$ mit $AB = I_n$ gibt, falls $\det A = \pm 1$ ist.

Lösung:
Zu zeigen ist eine Äquivalenz, d.h., es müssen zwei Implikationen nachgewiesen werden.

Man nehme zunächst an, es gibt eine Matrix $B \in \mathbb{Z}^{n\times n}$, sodass $AB = I_n$. Dies bedeutet, dass die Matrix A invertierbar ist, und für ihre Inverse gilt $A^{-1} = B$, da Inverse eindeutig bestimmt sind. Um eine Aussage über die Determinante von A treffen zu können, liegt es auf der Hand, sich die Darstellung der Inversen A^{-1} über die Adjunkte A^{adj} von A anzusehen. Es gilt

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}.$$

Wegen der Definition von A^{adj} über Minoren der Matrix A und wegen z.B. der Leibniz-Formel, die man zur Darstellung dieser Minoren nutzen kann, ist schnell ersichtlich, dass alle Einträge von A^{adj} ganze Zahlen sind, d.h., $A^{\mathrm{adj}} \in \mathbb{Z}^{n\times n}$. Aus der Aufgabenstellung ist bekannt, dass $\frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}} = A^{-1} = B$ in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ liegt. Damit das erfüllt sein kann, muss in Anbetracht des bisher Gezeigten dann $\frac{1}{\det A} \in \mathbb{Z}$ erfüllt sein. Dies ist genau dann der Fall, wenn $\det A = \pm 1$.

Die Gegenrichtung argumentiert ganz analog. Es gelte $\det A = \pm 1$. Da $\det A \neq 0$, wissen wir, es existiert eine Inverse zu A. Wir müssen lediglich nachweisen, dass all ihre Einträge ganze Zahlen sind. Wie oben können wir schreiben $A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$ und erneut ist klar, dass A^{adj} in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ liegt. Wegen $\frac{1}{\det A} = \pm 1 \in \mathbb{Z}$, ist auch das Produkt $\frac{1}{\det A} A^{\mathrm{adj}}$ in $\mathbb{Z}^{n\times n}$ und die gesuchte Matrix B ist in $B = A^{-1}$ gefunden.