Universität Leipzig
Mathematisches Institut
Prof. Dr. Bernd Kirchheim
Dr. Stefano Modena

WS2018/19

Funktionalanalysis I
Übungsscheinklausur Funktionalanalysis I WiSe 2018/19
Musterlösungen

Klausureinsicht am 15.2. um 15Uhr im A314

Wir zeigen verschiedene mögliche Lösungen und Argument auf, die vollständigen Minimallösungen jeder einzelnen Aufgabe sind entsprechend kürzer.

Aufgabe 1. Bestimmen Sie

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \text{ und } 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \dots .$$

Lösung. Wir betrachten die Funktion $f(x) = x^2$, $x \in [-\pi, \pi]$ und berechnen die Fourier Koeffizienten:

$$c_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) e^{-inx} dx = \frac{2}{n^2} (-1)^n,$$

für $n \neq 0$ und

$$c_0 = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} x^2 dx = \frac{\pi^2}{3}.$$

Daher, und weil f eine lipschitzstetige 2π-periodische Fortsetzung hat

$$f(x) = x^2 = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} (-1)^n e^{inx} + \frac{\pi^2}{3} \quad \forall x \in [-\pi, \pi]$$

Deswegen, für $x = \pi$,

$$\begin{aligned} \pi^2 &= 2 \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{1}{n^2} (-1)^{2n} + \frac{\pi^2}{3} \\ &= 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} + \frac{\pi^2}{3} \end{aligned}$$

und dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{1}{4} \frac{2\pi^2}{3} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Ganz ähnlich, für $x = 0$ erhalten wir

$$0 = 2 \sum_{n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}} \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{\pi^2}{3} = 4 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} + \frac{\pi^2}{3}$$

und dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \frac{\pi^2}{12}.$$

Bemerkung:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}-2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2}=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}(1-2\frac{1}{4}),$$

also reicht es, die erste Summe zu berechnen. Hierfür könnte man natürlich auch die Sinusreihe für $g(x) = x$ und Plancherelidentität $\|g\|_2^2 = \dots$ nutzen (man muss also nur einmal partiell integrieren um die Koeffizienten zu bestimmen)

Aufgabe 2. Auf $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}_+)$, $1 \leq p \leq \infty$ betrachten wir den linearen Operator S definiert durch

$$(S(x))_{n+1} = \frac{x_n}{n+1} \text{ für } n \in \mathbb{N}_+ \text{ und } (S(x))_1 = 0, \text{ wenn } x \in \ell^p.$$

(a) Zeigen Sie, dass $S \in L(\ell^p)$ bestimmen Sie $\sigma(S), \sigma_p(S)$ und $\sigma_{ap}(S)$.

(b) Ist S kompakt?

Lösung. Wir beweisen zunächst, dass $S \in L(\ell^p)$. Sei

$$y := S(x)$$

d.h.

$$y_{n+1} = \frac{x_n}{n+1}.$$

Dann, für alle $n \geq 1$,

$$|y_{n+1}| \leq |x_n|.$$

Für $p < \infty$,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |y_n|^p = \sum_{n=1}^{\infty} |y_{n+1}|^p \leq \sum_{n=1}^{n} |x_n|^p.$$

Das impliziert, dass $y \in \ell^p$, und $\|y\|_{\ell^p} = \|S(x)\|_{\ell^p} \leq \|x\|_{\ell^p}$. Deswegen gilt $S \in L(\ell^p)$.

Nun betrachten wir (motiviert durch die Indexverschiebung in der Definition und die Formel für den Spektralradius) Potenzen von S. Induktion gibt

$$(S^j(x))_{n+j} = \frac{1}{(n+j)(n+j-1)\dots(n+1)} x_n \text{ wenn } n \in \mathbb{N}_+, \text{ und}$$

$$(S^j(x))_n = 0 \quad \forall j \leq n.$$

Analog zu den obigen Normabschätzungen folgt

$$\|S^j\| \leq \frac{1}{(j+1)\dots \cdot 2} \leq \frac{1}{j!} \text{ also } r_\sigma(T) = \lim_{j\to\infty} \sqrt[j]{\|S^j\|} = 0,$$

analog zum Konvergenzradius der Exponentialreihe. Da das Spektrum immer nichtleer ist, folgt $\{0\} = \sigma(S)$. Wegen $x_n = (n+1)(S(x))_{n+1}$ ist S injektiv, also $\sigma_P(S) = \emptyset$, da aber S^{-1} auf seinem Definitionsbereich nicht stetig (bzw $\|S(e_n)\| \leq \frac{1}{n}\|e_n\|$) ist $\sigma_{AP}(S) = \{0\}$.

(b) Wir zeigen jetzt, dass der Operator S kompakt für alle $p \in [1, \infty]$ ist. Es gibt verschiedene Wege, die Kompaktheit von S zu zeigen. Eine ist die folgende. Es gilt: ein Operator $S \in L(X)$ in einem Banachraum X ist kompakt, falls $S = \lim_{j\to\infty} S_j$, wobei $S_j \in L(X)$ und $\text{Im}S_j$ hat endliche dimension.

Für alle $j \in \mathbb{N}_+$ definieren wir die Projektion S_j auf den ersten j Koordinaten:

$$P_j : \ell^p \to \ell^p, \qquad (P_j(x))_n := \begin{cases} x_n, & n \leq j, \\ 0, & n > j. \end{cases}$$

Es ist klar, dass $\mathrm{Im} P_j$ endliche Dimension hat. Wir definieren jetzt

$$S_j := P_j \circ S.$$

Da $\mathrm{Im} P_j$ endliche Dimension hat, hat auch $\mathrm{Im} S_j \subseteq \mathrm{Im} P_j$ endliche Dimension. Wir zeigen jetzt:

$$\|S - S_j\|_{L(\ell^p)} \to 0, \text{ mit } j \to \infty. \tag{1}$$

Sei $x \in \ell^p$, mit $\|x\|_{\ell^p} \leq 1$. Wir haben

$$(S - S_j)(x)_{n+1} = \begin{cases} 0, & n \leq j, \\ \frac{x_n}{n+1}, & n > j. \end{cases} \tag{2}$$

Deswegen, für $p < \infty$,

$$\|(S - S_j)(x)\|_{\ell^p}^p = \sum_{n=j+1}^{\infty} \frac{|x_n|^p}{(n+1)^p} \leq \frac{1}{(j+2)^p} \sum_{n=j+1}^{\infty} |x_n|^p \leq \frac{1}{(j+2)^p} \|x\|_{\ell^p},$$

und dann folgt die Ungleichung

$$\|(S - S_j)\|_{L(\ell^p)} \leq \frac{1}{(j+2)}, \tag{3}$$

die auch (1) impliziert. Für $p = \infty$, (3) folgt sofort aus (2).

Wichtig! Wir könnten auch die Spektralradiusüberlegungen in (a) auslassen und nun Spektraltheorie für kompate Operatoren nutzen: Wir berechnen jetzt $\sigma_p(X)$, d.h. wir fragen uns, für welche $\lambda \in \mathbb{C}$ ist $\lambda I - S$ injektiv. Wir haben

$$(\lambda I - S)(x) = 0,$$

genau dann, wenn

$$\lambda x_1 = 0$$

und, für alle $n \geq 1$,

$$\lambda x_{n+1} - \frac{x_n}{n+1} = 0.$$

Deswegen, $(\lambda I - S)(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 0$, d.h. $\lambda I - S$ ist injektiv für alle $\lambda \in \mathbb{C}$ und $\sigma_p(S) = \emptyset$. Da S kompakt, gilt $\sigma(S) \subseteq \sigma_p(S) \cup \{0\}$ und $0 \in \sigma_{AP}(S)$, siehe auch das explizite Argument am Ende von (a). Damit

$$\{0\} \subset \sigma_{AP}(S) \subset \sigma(S) = \{0\}.$$

Aufgabe 3. 1. In $\ell^p = \ell^p(\mathbb{N}_+)$, $1 \le p < \infty$ betrachten wir den die Vektoren $x_n = \sqrt{n}e_n - \sqrt{n+1}e_{n+1}$. Für welche p ist $\operatorname{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}_+\})$ dicht in ℓ^p?

2. Sei V der Unterraum aller Folgen $x \in \ell^\infty = \ell^\infty(\mathbb{N}_+)$ für die

$$\phi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^{N} x_n$$

existiert. Zeigen Sie, dass V abgeschlossen ist, und das $\phi \in V^*$.

Beweisen Sie also Existenz eines linearen Operators $\Phi \in (\ell^\infty)^*$, so dass $\Phi(x) = \lim_{n\to\infty} x_n$ wenn dieser Grenzwert existiert, und Φ translations-invariant ist, d.h.

$$\Phi(x_1, x_2, x_3, x_4, \ldots) = \Phi(x_2, x_3, x_4, x_5, \ldots) \text{ für alle } x \in \ell^\infty.$$

Ist Φ hierdurch eindeutig bestimmt?

Lösung. 1. Es gilt

$$\overline{\operatorname{span}(\{x_n : n \in \mathbb{N}_+\})} \neq \ell^p \iff \exists f \in (\ell^p)^* \setminus \{0\}\ \langle f, x_n\rangle = 0\ \forall n.$$

Wir können den Dualraum $(\ell^p)^*$ von ℓ^p mit dem Raum $\ell^{p'}$ identifizieren. Sei dann $a = (a_n)_n \in \ell^{p'}$, mit

$$\langle a, x_n \rangle = 0,$$

für alle n. Das bedeutet

$$a_n\sqrt{n} - a_{n+1}\sqrt{n+1} = 0$$

für alle n, und dann

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{n}} a_1,$$

für alle n. Die Folge $(1/\sqrt{n})$ gehört zu ℓ^q genau dann, wenn $q > 2$. Deswegen eine nicht triviale $f \in (\ell^p)^*$ existiert, mit $\langle f, x_n\rangle = 0$ für alle n, genau dann, wenn $p' > 2$, d.h. $p < 2$.

2. Wir definieren $\phi_N(x) = \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n$. Dann ist klarerweise jedes ϕ_N linear und wegen $|\phi_N(x)| \le \|x\|_\infty$ stetig mit $\|\phi_N\|_* \le 1$. Wir sehen damit auch sofort, dass

$$(T(x))_N = \phi_N(x) \text{ für } N \in \mathbb{N}_+, \text{ definiert } T \in L(\ell^\infty, \ell^\infty).$$

Ausserdem ist $V = T^{-1}(c)$ wobei $c \le \ell^\infty$ der abgschlossene Teilraum aller konvergenten Folgen ist. Damit ist V abgeschlossen.

Wir können auch expliziter argumentieren. Es folgt mit Standartmethoden aus Analysis 1, dass für jedes $x \in \ell^\infty$

$$\limsup_{N\to\infty} \phi_N(x) \le \limsup_{n\to\infty} x_n \text{ und } \liminf_{n\to\infty} x_n \le \liminf_{N\to\infty} \phi_N(x). \tag{4}$$

Wenn $x \notin V$, dann gibt es $a \in \mathbb{R}, \varepsilon > 0$ mit

$$\liminf_N \phi_N(x) < a - 2\varepsilon \text{ und } \limsup_N \phi_N(x) > a + 2\varepsilon.$$

Aus (4) sehen wir, dass für jedes $y \in B_\varepsilon(\ell^\infty)$

$$\liminf_N \phi_N(x+y) < a - \varepsilon \text{ und } \limsup_N \phi_N(x) > a + \varepsilon.$$

D.h. $B_\varepsilon(x) \cap V = \emptyset$, also ist $\ell^\infty \setminus V$ offen.

Auf V gilt $\phi(x) = \lim_N \phi_N(x)$ also ist ϕ linear und $\|\phi\| \leq \sup_N \|\phi_N\| = 1$, somit $\phi \in V^*$. Es existiert also, nach dem "großen" Satz von Hahn-Banach eine stetige lineare Erweiterung Φ von ϕ auf ℓ^∞. Wegen (4) folgt sofort $\Phi(x) = \phi(x) = \lim_n x_n$ wenn $\lim_n x_n$ existiert, denn dann $x \in V$.

Schließlich sei $x \in \ell^\infty$, und $y := (x_2, x_3, \dots)$. Wir wollen zeigen, dass $\Phi(x) = \Phi(y)$, d.h. (da Φ linear ist) $\Phi(x-y) = 0$. Sei $z := x - y$. Wir haben

$$z_n = x_n - x_{n+1}.$$

Wir berechnen

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n.$$

Wir haben

$$\frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n = \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N (x_n - x_{n+1}) = \frac{1}{N}(x_1 - x_{N+1}),$$

und dann

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N z_n = 0.$$

Deswegen $z \in V$ und $\Phi(z) = \phi(z) = 0$.

Es gibt mehr als eine Erweiterung von ϕ und alle Erweiterungen erfüllen (a) und (b). Deswegen ist Φ nicht eindeutig bestimmt.

Wir geben noch eine explizitere Begründung für die Abgeschlossenheit von V und, dass Φ den Grenzwert erweitert

Sei $(x^{(k)})_{k\in\mathbb{N}_+}$ eine Folge in V, so dass $x^{(k)} \to x$ mit $k \to \infty$ (bezüglich der ℓ^∞-Norm). Wir wollen zeigen, dass $x \in V$ (und dann ist V abgeschlossen). Wir sollen zeigen, dass

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{n=1}^N x_n$$

existiert, wobei

$$x = (x_1, x_2, x_3, \dots).$$

Seien

$$a_k := \phi(x^{(k)}).$$

Es gilt

$$|a_k| = |\phi(x^{(k)})| \leq \|x^{(k)}\|_{\ell^\infty} \leq C,$$

wobei C eine Konstante ist, die nicht von k abhängt. Diese Konstante existiert, da die Folge $(x^{(k)})_k$ konvergent und dann beschränkt in ℓ^∞ ist. Die Folge von

Zahlen $(a_k)_k$ ist dann beschränkt und deswegen hat sie eine konvergente Teilfolge $(a_{k'})_{k'}$, $a_{k'} \to a$, mit $k' \to \infty$. Wir haben dann

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - a\right| &\leq \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n^{(k')}\right| + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n^{(k')} - a_{k'}\right| + \left|a_{k'} - a\right| \\ &\leq \|x - x^{(k')}\|_{\ell^\infty} + \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n^{(k')} - a_{k'}\right| + \left|a_{k'} - a\right|.\end{aligned}$$

Für $\varepsilon > 0$ fest, finden wir k' groß genug, so dass

$$\|x - x^{(k')}\|_{\ell^\infty} \leq \varepsilon, \qquad \left|a_{k'} - a\right| \leq \varepsilon.$$

Für solche k', finden wir N_0 groß genug, so dass für alle $N \geq N_0$,

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n^{(k')} - a_{k'}\right| \leq \varepsilon,$$

und dann

$$\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - a\right| \leq 3\varepsilon.$$

Wir haben dann

$$\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n \to a \text{ mit } N \to \infty,$$

d.h. $x \in V$ und V ist abgeschlossen.

Wenn der Limes $\alpha := \lim_n x_n$ existiert, dann existiert auch der Limes

$$\phi(x) = \lim_{N\to\infty} \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n = \alpha. \tag{5}$$

Nämlich, sei $\varepsilon > 0$ fest und N_0 groß genug, so dass für alle $n \geq N_0$, $|x_n - a| \leq \varepsilon$. Wir haben, für alle $N \geq N_0$,

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - a\right| &= \left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N a\right| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^N |x_n - a| \\ &\leq \frac{1}{N}\sum_{n=1}^{N_0} |x_n - a| + \frac{1}{N}\sum_{n=N_0+1}^{N} |x_n - a| \\ &\leq 2\|x\|_{\ell^\infty}\frac{N_0}{N} + \varepsilon\frac{N - N_0}{N}.\end{aligned}$$

Diese Ungleichung gilt für alle $N \geq N_0$, für $\varepsilon > 0$ fest. Dann, wenn $N \to \infty$, haben wir

$$\limsup_{N\to\infty}\left|\frac{1}{N}\sum_{n=1}^N x_n - a\right| \leq \varepsilon.$$

Da $\varepsilon > 0$ beliebig ist, erhalten wir (5).