Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Prof. Tanja Eisner

Leipzig, den 11. 2. 2019

Analysis I
Klausur

Viel Erfolg!

Die Bearbeitungszeit der Klausur beträgt 90 Minuten. Es gibt 58 Punkte und 24 Zusatzpunkte. Alle angegebenen Lösungswege müssen nachvollziehbar und lesbar sein, fehlende Begründungen mindern die Bewertung.
Schreiben Sie bitte unbedingt auf jedes Blatt Ihren Namen und Ihre Matrikelnummer!

Aufgabe 1. (*Mengen, Abbildungen, Induktion, reelle Zahlen*)

a) *(4 Zusatzpunkte)* Sei $f : M \to N$ eine Abbildung und $A, B \subset N$. Zeigen Sie

$$f^{-1}(A \cup B) = f^{-1}(A) \cup f^{-1}(B).$$

b) *(4 Punkte)* Beweisen Sie die Bernoullische Ungleichung

$$(1+x)^n \geq 1 + nx$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ und alle $n \in \mathbb{N}$.

c) *(4 Punkte)* Beweisen Sie, dass die Vereinigung von zwei abzählbaren Mengen wieder abzählbar ist.

d) *(4 Punkte, 2 Zusatzpunkte)* Zeigen Sie, dass $\inf(2A) = 2 \inf A$ für jede nach unten beschränkte Menge $A \subset \mathbb{R}$ gilt. (Dabei ist $2A := \{2a : a \in A\}$.) Gilt die Aussage, wenn man 2 durch -1 ersetzt?

Aufgabe 2. (*Folgen*)

a) *(2 Punkte)* Sei $(a_n) \subset \mathbb{C}$ eine Folge. Formulieren Sie die Aussage „(a_n) ist keine Cauchyfolge" mit Hilfe von Quantoren.

b) *(4 Punkte, 4 Zusatzpunkte)* Prüfen Sie die angegebenen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. deren Grenzwerte.

$$(-1)^n \sqrt[n]{n}, \quad \frac{8n^5 + 2019n^4 + 3}{7n^6 - \sqrt{n} - 1}, \quad \left(\frac{n-1}{n}\right)^{17n-1}, \quad \frac{\cos(\pi n)}{\ln n}.$$

Aufgabe 3. (*Reihen*)

a) *(4 Punkte)* Sei $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe. Zeigen Sie, dass (a_n) gegen Null konvergiert. Gilt die Umkehrung und warum?

Bitte wenden!

b) *(4 Punkte, 4 Zusatzpunkte)* Sind die folgenden Reihen konvergent und warum?

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \ln n, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{n!}{n^n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sqrt{n}}{n^2+1}, \quad \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n\pi^{2n}}{(2n)!}.$$

c) *(6 Punkte)* Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^n}{n}x^n$$

und bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für die die Reihe konvergiert.

Aufgabe 4. (*Funktionen, Stetigkeit und Grenzwerte*)

a) *(4 Punkte)* Zeigen Sie nach Definition, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = x^2$ stetig ist. Ist sie gleichmäßig stetig in $\mathbb{R}$ und warum?

b) *(4 Punkte)* Untersuchen Sie die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} x\sin(\frac{1}{x}), & x > 0, \\ -x, & x \leq 0 \end{cases}$$

auf Stetigkeit.

c) *(4 Punkte)* Zeigen Sie mit Hilfe des Zwischenwertsatzes, dass ein $x \in \mathbb{R}$ existiert mit $\cos x = x$.

(4 Zusatzpunkte) Zeigen Sie die Eindeutigkeit der Lösung. (Hinweis: Eine Skizze kann helfen.)

d) *(4 Punkte)* Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte.

$$\lim_{x\to\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x}), \quad \lim_{x\to 0}\frac{\cos x - 1}{x^2}.$$

Aufgabe 5. (*Differenzierbarkeit*)

a) *(6 Zusatzpunkte)* Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$f(x) = \begin{cases} x\ln(1+x^2), & x > 0, \\ 0, & x \leq 0 \end{cases}$$

in jedem Punkt differenzierbar ist, und bestimmen Sie ihre Ableitung.

b) *(4 Punkte)* Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ differenzierbar. Zeigen Sie, dass f genau dann konstant ist, wenn $f'(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt.

c) *(6 Punkte)* Untersuchen Sie mit Hilfe der Differentialrechnung die Funktion

$$f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, \quad f(x) = 2x^4 - 4x^2 + 17$$

auf Monotonie und finden Sie ihre lokalen Extrema. Skizzieren Sie grob den Graphen der Funktion.