Universität Leipzig
Mathematisches Institut

Klausur zur Vorlesung Algebra I

Wintersemester 2018–19

Wichtige Hinweise:

- Um 100% der Punkte zu bekommen, werden nur Lösungen zu **drei** Aufgaben benötigt, oder **zwei** Lösungen wenn Aufgabe 1 gelöst wird. Die Aufgaben können **beliebig** gewählt werden. Extra Punkte können jedoch mit Lösung einer vierten Aufgabe gewonnen werden.
- Alle abgegebene Blätter müssen beginnend mit “1” lückenlos und ohne Wiederholungen **numeriert** sein.
- Jede Aufgabe soll auf einem neuem Blatt anfangen.
- Auf dem ersten Blatt ist die **Anzahl** der abgegebenen Blätter zu vermerken.
- Jedes abgegebene Blatt muß oben mit **Name, Matrikelnummer und Nummer der darauf behandelten Aufgabe** versehen sein. Diese Angaben sowie die Lösungen sind in **gut lesbarer Schrift** zu verfassen.
- Alle Aussagen sind zu begründen.

Aufgabe 1 ((2+1+3)+(3+3+2+1+3+4)) = 22 Punkte)**.**

(A) Was ist eine *Wirkung* von einer Gruppe G auf eine Menge Ω? Zeigen Sie, dass für eine solche Wirkung

(a) für jedes $g \in G$ die Abbildung $\rho_g\colon \alpha \mapsto g\alpha$ in der symmetrischen Gruppe Σ_Ω von Ω liegt,

(b) $\theta\colon g \mapsto \rho_g$ ist ein Homomorphismus $G \to \Sigma_\Omega$,

(c) falls G einfach ist, gilt entweder (i) θ ist injektiv oder (ii) die Wirkung ist trivial (d.h. $g\alpha = \alpha$ für alle g, α).

(B) Sei jetzt G eine einfache Gruppe mit $|G| = 60$.

(a) Beweisen Sie dass G sechs Untergruppen der Ordnung 5 hat, die alle zueinander konjugiert sind;

(b) Beweisen Sie, dass G isomorph zu einer Untergruppe G_1 von S_6 ist;

(c) Beweisen Sie, dass $A_6 \cap G_1 = G_1$, also $G_1 \leqslant A_6$.

(d) Sei $\Omega = \{hG_1 \mid h \in A_6\}$ und betrachte die Wirkung von A_6 auf Ω durch Linksmultiplikation: $g(hG_1) = (gh)G_1$ für alle $g \in A_6$, $hG_1 \in \Omega$.

(e) Zeigen Sie, dass $G_1 \leqslant \mathrm{stab}_{A_6}(\alpha)$ für das Element $\alpha = G_1$ von Ω, und folgern Sie, dass G_1 auf $\Omega \setminus \{\alpha\}$ durch Linksmultiplikation wirkt.

(f) Wieviele Elemente hat $\Omega \setminus \{\alpha\}$? Beweisen Sie, dass $G \cong A_5$.

[Falls Sie Teile der Sylow'schen Sätze benutzen, sollen sie genau genannt werden.]

Aufgabe 2 (2+3+3+3= 11 Punkte)**.**

(a) Sei $K \triangleleft G$ und $U \triangleleft G/K$. Zeigen Sie, dass es einen Normalteiler $L \triangleleft G$ gibt mit $K \leqslant L$ und $U = L/K$.

(b) Beweisen Sie mittels des ersten Isomorphiesatzes den dritten Isomorphiesatz: Seien M, N Normalteiler von G mit $N \leqslant M$; dann gilt $M/N \triangleleft G/N$ und $(G/N)/(M/N) \cong G/M$.

(c) Eine (nicht notwendig endliche) Gruppe heißt *hyperabelsch*, falls jede nicht-triviale Quotientengruppe von G einen nicht-trivialen abelschen Normalteiler hat. Beweisen Sie, dass jede Quotientengruppe G/K einer hyperabelschen Gruppe G auch hyperabelsch ist.

(d) Beweisen Sie, dass eine endliche Gruppe hyperabelsch ist, dann und nur dann, wenn sie auflösbar ist.

(Bitte wenden)

Aufgabe 3 (2+3+3+3= 11 Punkte).

(a) Wie sind die Untergruppen $\mathrm{Z}_r(G)$ der aufsteigenden Zentralreihe einer Gruppe G definiert? Was ist eine nilpotente Gruppe?

(b) Beschreiben Sie die Gruppen $\mathrm{Z}_r(D)$ der aufsteigenden Zentralreihe für die Diedergruppe $D = \langle a, b \mid a^8 = b^2 = 1, bab = a^{-1} \rangle$ der Ordnung 16.

(c) Sei G nilpotent und $H < G$. Zeigen Sie, dass $H < \mathrm{N}_G(H)$.

(d) Zeigen Sie dass für jede endliche Gruppe G, jede Sylowgruppe P und jede Untergruppe $U \leqslant G$ mit $\mathrm{N}_G(P) \leqslant U$ gilt $\mathrm{N}_G(U) = U$. Folgern Sie, dass Sylowuntergruppen von endlichen nilpotenten Gruppen normal sind.

[Falls Sie Teile der Sylow'schen Sätze benutzen, sollen sie genau genannt werden.]

Aufgabe 4 (3+8=11 Punkte).

(a) Beweisen Sie die folgende Aussage (das Lemma von Eisenstein).
Sei J faktoriell mit Quotientenkörper K, und $f = \sum_0^n a_i x^i \in J[x]$. Falls es ein Primelement $p \in J$ gibt mit $p \nmid a_n$, $p \mid a_i$ für $i = 0, \ldots, n-1$ und $p^2 \nmid a_0$, dann ist f irreduzibel in $J[x]$.
(Es folgt dann von einem Kriterium von Gauß dass f auch irreduzibel über K ist.)

(b) Zeigen Sie, wie diese Kriterien zur Irreduzibilität der folgenden Polynome über $\mathbb{Q}$ führen:
(i) $2x^4 - 6x^2 + 9x - 15$, (ii) $x^{2019} + 201x^9 + 2019$, (iii) $x^6 + x^3 + 1$,
(iv) $\Phi_p(x) = x^{p-1} + x^{p-2} + \cdots + x + 1$, für eine Primzahl p.
[Hinweis: $f(x)$ irreduzibel $\Leftrightarrow$ $f(x+1)$ irreduzibel.]

Aufgabe 5 (2+3+6 = 11 Punkte).

(a) Was ist ein Zerfällungskörper für ein Polynom f über einem Körper K?

(b) Die Galoisgruppe $\mathrm{Gal}_K(f)$ für ein Polynom f über einem Körper K wird als $\mathrm{Gal}(L/K)$ definiert, für einen Zerfällungskörper L. Bestimmen Sie $\mathrm{Gal}_K(f)$ für $f = x^3 + 5x + 3$ in jedem der drei Fälle
(i) $K = \mathbb{Q}$; (ii) $K = \mathbb{F}_5$; (iii) $K = \mathbb{F}_{11}$.

(c) Sei f ein Polynom vom Grad 4 über einem Körper K mit $\operatorname{char} K \neq 2$, und sei L sein Zerfällungskörper. Beweisen Sie die folgende Aussage: Falls $\mathrm{Gal}(L/K) \cong A_4$, dann ist L von der Form $L = M(\sqrt{a}, \sqrt{b})$ für einen Körper M mit M/K Galois vom Grad 3 und Elemente $a, b \in M$.
[Teile des Fundamentalsatzes der Galoistheorie, die benutzt werden, sollen genau genannt werden.]

(Bitte wenden)

Aufgabe 6 (2+2+3+2+2=11 Punkte)**.** Sei p eine ungerade Primzahl und $\Phi_p(x) = x^{p-1} + \cdots + x + 1$.

(a) Zeigen Sie, dass $x^p - 1 = (x-1)\Phi_p(x)$, und bestimmen Sie alle Nullstellen in $\mathbb{C}$ von Φ_p. Sei ζ eine dieser Nullstellen.

(b) Beweisen Sie, dass $\mathbb{Q}(\zeta)$ ein Zerfällungskörper für $\Phi_p(x)$ über $\mathbb{Q}$ ist. Bestimmen Sie $[\mathbb{Q}(\zeta)\colon \mathbb{Q}]$, und geben Sie eine $\mathbb{Q}$-Basis für $\mathbb{Q}(\zeta)$ an.

(c) Zeigen Sie:

(i) für jedes $g \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$ ein $\mu(g) \in \mathbb{Z}$ mit $g(\zeta) = \zeta^{\mu(g)}$ existiert.

(ii) $\mu(g)\mu(h) \equiv \mu(gh) \mod p$ für alle g, $h \in \mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q})$.

(iii) $\mathrm{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta)/\mathbb{Q}) \cong \mathbb{F}_p^\times$, die multiplikative Gruppe von $\mathbb{F}_p$.

Nun seien $f(x) = x^p - 3$ und λ die reelle Nullstelle von f.

(d) Zeigen Sie, dass $[\mathbb{Q}(\lambda)\colon \mathbb{Q}] = p$ und $[\mathbb{Q}(\zeta, \lambda)\colon \mathbb{Q}] = (p-1)p$.

(e) Folgern Sie, dass f irreduzibel über $\mathbb{Q}(\zeta)$ ist.