Wahrscheinlichkeitstheorie

gehört bei
Prof. Dr. Bernd Kirstein
Universität Leipzig
Sommersemester 2009

Dieses Skript ist eine Zusammenstellung der Mitschriften der Vorlesung *Wahrscheinlichkeitstheorie 1* des Sommersemesters 2009 und *Wahrscheinlichkeitstheorie 2* des Wintersemesters 2009/2010 bei Herrn Prof. Dr. Kirstein.
Es kann weder Vollständigkeit noch Fehlerfreiheit garantiert werden. Dieses Dokument wurde in Einverständnis mit Herrn Prof. Dr. Kirstein angefertigt. Es stellt keinen Ersatz für den Besuch der Veranstaltung dar!
Die vorliegende Version stammt vom 4. Juni 2011.

Inhaltsverzeichnis

v1
06.4.2009

1. Zufall und Wahrscheinlichkeit

1.1. Einleitung und Motivierung

Im Mittelpunkt steht in dieser Vorlesung der Zufall. Hierbei versuchen wir, Gesetzmäßigkeiten des Zufalls zu finden und zu studieren. Dies ist die Grundaufgabe der Stochastik, die sich zusammensetzt aus:

- Wahrscheinlichkeitstheorie (Modelle für das Studium eines vom Zufall gesteuerten Geschehens, Theorie der möglichen Ereignisse und Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens)
- Mathematische Statistik (Gewinnung allgemeiner Aussagen aus beschränkten Datenmaterial, d.h. aus Stichproben und a priori Informationen)

Übersicht des Zusammenhangs zwischen mengentheoretischen Operationen bei Ereignissen und den aussagenlogischen Verknüpfungen bei Ereignisaussagen:

Mengentheoretische Operation	Aussagenlogische Entsprechung
A=B	A ist gleichbedeutend mit B
$A \subseteq B$	A impliziert B
$\Omega \setminus B$	nicht B
$A \cap B$	A und B
$A \cup B$	A oder B
$A \setminus B = A \cap (\Omega \setminus B)$	A, aber nicht B
Ω	Die stets wahre Aussage
$\emptyset$	Die stets falsche Aussage
$\bigcap\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$	Alle A_j, $j \in \mathbb{N}$ gleichzeitig
$\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j$	Mindestens eines der A_j, $j \in \mathbb{N}$
$\liminf_{n\to\infty} A_n (= \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcap\limits_{l=n}^{\infty} A_l)$	Ereignis bestehend im Eintreten aller A_j, mit Ausnahme höchstens endlich vieler
$\limsup_{n\to\infty} A_n (= \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \bigcup\limits_{l=n}^{\infty} A_l)$	Ereignis bestehend im Eintreten unendlich vieler der A_j, $j \in \mathbb{N}$

Einfachste mathematische Beschreibung des Sammelns von Erfahrungen ist das Zählen. Wir betrachten ein Zuffalsexperiment Z mit Grundraum Ω von möglichen Versuchsausgängen. Es werde Z genau n-mal unter dem gleichen Komplex von Bedingungen durchgeführt. Wir betrachten ein solches zufälliges Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ von dem entscheidbar ist, ob es bei jedem der Versuche eingetreten ist oder nicht. Es sei das zufällige Ereignis A genau $N_n(A)$ -mal bei unseren Versuchen eingetreten. Dann gibt uns die relative Häufigkeit: $H_n(A) = \frac{N_n(A)}{n}$ einen gewissen Aufschluss darüber, wie sicher das Eintreten von A ist. Eine Bewertungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit sollte sich an folgenden Eigenschaften der relativen Häufigkeit orientieren:

a) Für jedes zufällige Ereignis A gilt $0 \leq H_n(A) \leq 1$.

b) Es ist $H_n(\Omega) = 1$.

c) Es ist $H_n(\emptyset) = 0$.

d) Falls $A \cap B = \emptyset$, so ist $H_n(A \cup B) = H_n(A) + N_n(B)$.

Diese Überlegungen führen uns auf die Betrachtung einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ in einer Menge Ω und eines Inhaltes $P : \mathfrak{A} \to [0, 1]$ für den $P(\Omega) = 1$ erfüllt ist. Es hat sich jedoch bereits in der Anfangsphase der axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie gezeigt, dass diese Begriffsbildungen noch keine zufrieden stellende Beschreibung liefern. Es zeigt sich nämlich, dass die Forderung an einen Inhalt zu wenig ist. Man benötigt tatsächlich σ-Addivität, also ein Maß.

1.2. Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir die Zufallsexperimente des einfachsten Typs nach Pierre Simon Laplace (1748-1827). Begriff der Wahrscheinlichkeit auf Gleichmöglichkeit zurückgeführt. Wir betrachten ein Experiment mit endlich vielen Versuchsausgängen $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$. Sei

$$\Omega = \{\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n\}.$$

Für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ wird, wenn **card**A die Anzahl der Elemente von A bezeichnet, $P(A) = \frac{\mathrm{card\,A}}{n}$ definiert. Es ist dann $n = \mathrm{card}\,\Omega$ die Anzahl der möglichen Fälle. Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ wird also dem Elementarereignis ω_j die gleiche Wahrscheinlichkeit $P(\omega_j) = \frac{1}{n}$ zugeordnet. $\Rightarrow$ Z ist ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ mit $P(\Omega) = 1$. Dieses Maß heißt **diskrete Gleichverteilung** auf Ω und wird mit P_n bezeichnet. Ist P das **Zählmaß** auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$, so ist $P(\omega_i) = \frac{1}{n}$.

Definition 1.2.1. Seien $n \in \mathbb{N}, \Omega$ eine n-elementige Menge und bezeichne P_n die diskrete Gleichverteilung auf $\mathfrak{P}(\Omega)$, dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ das zu Ω gehörige **Laplace-Experiment**.

Beispiel 1.2.1. *Experiment Z besteht im gleichzeitigen Werfen 2er homogener, unterscheidbarer Würfel. Hier empfiehlt sich die Wahl des Grundraumes*

$$\Omega = \{1, \ldots, 6\} \times \{1, \ldots, 6\}; \quad \mathrm{card}\,\Omega = 36.$$

Ereignisaussage: „Augensumme kleiner als 5“ entspricht dem Ereignis

$$A = \{(1, 1), (1, 2), (1, 3), (2, 1), (2, 2), (3, 1)\}.$$

Für dieses gilt dann $P(A) = \frac{\mathrm{card\,A}}{36} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$.

Die Behandlung von Laplaceexperimenten erfordert Kombinatorik. Einige Kombinatorische Grundformeln von k-Tupel aus genau n verschiedenen Ereignissen:

Tupel / Auswahl	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnet	Auswahl der Variationen mit Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse: n^k	Anzahl der Variationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse: $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	Anzahl der Kombinationen mit Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse: $\binom{n+k-1}{k}$	Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholung von n Elementen zur k-ten Klasse: $\binom{n}{k}$

v2
07.4.2009

Beispiel 1.2.2 (Übereinstimmung von Geburtstagen). *Es mögen k Studenten zu einer Studiengruppe gehören. Bekannt ist, dass keiner am 29.02 Geburtstag hat. Wir treffen die Annahme, daß alle anderen Tage gleichberechtigt dafür sind, als Geburtstag in Erscheinung zu treten. Welche Wahrscheinlichkeit besitzt das Ereignis, welches der Ereignisaussage „Mindestens zwei Studenten der Gruppe haben am gleichen Tag Geburtstag.“ entspricht?*

Lösung. *Es liegt eine Auswahl geordneter k-Tupel mit Wiederholungen vor. Hier ist n=365. Wir wählen den Grundraum* $\Omega = \mathop{\times}\limits_{j=1}^{k} \{1, ..., 365\}$. *Hierbei legt die Überlegung zugrunde, daß die von 29. Februar verschiedenen 365 Tage eines Jahres wie auch die k Studenten durchnummeriert haben. Das Elementarereignis* $(\omega_1, ..., \omega_k) \in \Omega$ *entspricht dem der Ereignissaussage „Für jedes* $j \in \{1, ..., k\}$ *hat der Student j am Tag* ω_j *Geburtstag“. Hier ist es günstig, das Komplementär-ereignis* $\Omega \setminus A$ *,welches der Eireignisaussage „Alle Studenten der Gruppe haben an verschiedenen Tagen Geburstag“ entspricht, zu betrachten. Es ist* $\mathrm{card}\,\Omega = 365^{\mathrm{k}}$, *sowie* $\mathrm{card}\,(\Omega \setminus \mathrm{A}) = 365 \cdot 364 \cdots (365 - \mathrm{k} + 1)$ *Somit ist*

$$P(A) = 1 - P(\Omega \setminus A) = 1 - \frac{\mathrm{card}\,(\Omega \setminus \mathrm{A})}{\mathrm{card}\,\Omega} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdots (365 - (k-1))}{365^k}$$

Einige Zahlenwerte:

k	4	16	22	23	40	64
$P(A)$	0,016	0,284	0,467	0,507	0,891	0,997

Beispiel 1.2.3 (Grundmodelle der statistischen Physik). *Seien* $k, n \in \mathbb{N}, k \leq n$. *Vorgegeben sind n Fächer und k Teilchen, wobei jedes der k Teilchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit sich in einem der n Fächer befinden kann. Gesucht sind dann die Wahrscheinlichkeiten dann folgender Ereignisse A bzw. B, welche den Ereignisaussagen „In k ausgewählten Fächern befindet sich je ein Teilchen“, bzw. „In beliebigen k Fächer befindet sich je ein Teilchen“.*

Lösung. *Es liegt ein Grundproblem der statistischen Physik vor. Je nachdem wie die vollständige Gruppierung der als gleichwahrscheinlich angesehenen Ereignisse festgelegt wird, kommt man zu verschiedenen Statistiken.*

- *Maxwell-Boltzmann-Statistik*
  Zwei beliebige denkbare Verteilungen werden als gleichwahrscheinlich angesehen (Wird z.B. bei Gasmolekülen angenommen). Jedes der k Teilchen läßt sich dann

in eines der n Fächer legen. Es bestehen also für jedes Teilchen n Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten, die k Teilchen auf die n Fächer zu verteilen ist daher n^k. Wir erhalten dann $P(A) = \frac{k!}{n^k}$. Bezüglich der Berechnung von P(B) ist zu vermerken, daß wir hier noch die Möglichkeit besitzen, genau k der n Fächer auszuwählen. Dies kann auf $\binom{n}{k}$ Arten geschehen. Es ist dann

$$P(B) = \binom{n}{k} P(A) = \frac{n! \cdot k!}{k! \cdot (n-k)! \cdot n^k} = \frac{n!}{(n-k)! \cdot n^k}$$

- *Bose-Einstein-Statistik*
  Hierbei sollen zwei Verteilungen, bei denen die Anzahl der Teilchen in jedem Fach übereinstimmt, als gleich angesehen werden. Dies kann auch dadurch ausgedrückt werden, das die Teilchen ununterscheibar sind. Dies wird z.B. bei Photonen angenommen. Wir bestimmen nun die Anzahl der möglichen Verteilungen. Dies lässt sich durch vollgendes Gedankenexperiment realisieren.
  Wir repräsentieren die k Teilchen durch k Punkte auf einer Geraden. Zwischen den k Punkten ziehe man auf beliebige Weise n-1 Striche. Dabei symbolisieren die n-1 Striche gerade die n-1 Trennwände zwischen den n-1 Fächern. Die Anzahl der Punkte vor dem ersten, bzw. nach den n-1 Strich bedeutet die Anzahl der Teilchen im ersten, bzw. n-ten Fach. Die Anzahl der Punkte zwischen aufeinanderfolgenden Strichen bedeutet die Anzahl der Teilchen im Fach mit dem durch die Striche markierten Zwischenwänden.

  Die gesuchte Anzahl möglicher Verteilungen entspricht dann also der Anzahl der Verteilungen von k Dingen auf n+k-1 Plätze beträgt also $\binom{n+k-1}{k}$. Es ist dann $P(A) = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}}$ und änlich wie im Fall I auch $P(B) = \binom{n}{k} P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k-1}{k}}$

- *Fermi-Dirac-Statistik Die Teilchen werden als ununterscheidbar angesehen und überdies wird das Paulische Ausschliessungsprinzip zugrunde gelegt. Dieses besagt, daß jedes Fach mit höchstens einem Teilchen belegt sein kann (Dies ist z.B. bei Elektronen, Protonen und Neutronen der Fall). Die Anzahl der möglichen Verteilungen entspricht also der Anzahl der Verteilungen von k Dingen auf n Plätze, und dies sind genau $\binom{n}{k}$ Stück. Somit gelten $P(A) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$ und $P(B) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}} = 1$.*

Wir stellen ein wichtiges kombinatorisches Resultat bereit, welches eine ganze Klasse von Aufgaben zum Laplaschen W.-Modell löst. Dabei handelt es sich um Koinzidenzphänomene (auch Rencontreprobleme genannt). v3 14.4.2009

Satz 1.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Weiterhin bezeichne E_n die Menge aller derjenigen $f \in S_n$ welche für $j \in \{1, ..., n\}$ der Bedingung $f(j) \neq j$ genügen. Dann gilt

$$\mathrm{card}\,(\mathrm{E_n}) = \mathrm{n}! \left(\sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!} \right) \text{ und } \mathrm{card}\,(\mathrm{S_n} \setminus \mathrm{E_n}) = \mathrm{n}! \left(\sum_{\mathrm{k}=1}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{(\mathrm{k}+1)}}{\mathrm{k}!} \right).$$

Beweis. Wir berechnen zunächst $\mathrm{card}\,(\mathrm{S_n} \setminus \mathrm{E_n})$. Hierzu verwenden wir die Folgerung M.3.1 aus den Ergänzungen zur Maßtheorie.
Es bezeichne ν_n das Zählmaß auf $(S_n, \mathfrak{P}(S_n))$. Wegen $\nu_n(S_n) = n!$ ist ν_n dann ein endliches Maß auf $(S_n, \mathfrak{P}(S_n))$, also insbesondere ein endlicher Inhalt auf $\mathfrak{P}(S_n)$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ bezeichne A_j die Menge aller $f \in S_n$ mit $f(j) = j$. Nach Definition von E_n ist dann

$$(S_n \setminus E_n) = \bigcup_{j=1}^{n} A_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass die Folge (A_j) austauschbar bezüglich ν_n ist.
Sei hierzu $m \in \{1, \dots, n\}$ und es bezeichne

$$\tau_{n,m} := \ \{(i_1, \dots, i_m) \in \bigtimes_{j=1}^{m} \{1, \dots, n\} \ : \ 1 \le i_1 < i_2 < \dots < i_m \le n\}.$$

v4
20.4.2009

Sei $(k_1, \dots, k_m) \in \tau_{n,m}$. Dann gilt

$$\bigcap_{s=1}^{m} A_{k_s} = \{f \in S_n : \text{Für alle } s \in \{1, \cdots\} \text{ gilt } f(k_s) = k_s\}.$$

Hieraus folgt dann

$$\nu_n\left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{k_s}\right) = \mathrm{card}\left(\bigcap_{s=1}^{\mathrm{m}} \mathrm{A_{k_s}}\right) = (\mathrm{n} - \mathrm{m})! \tag{2}$$

Somit ist die Folge $(A_j)_{j=1}^{n}$ austauschbar bezüglich ν_n. Hieraus folgt, dass ν_n ein endlicher Inhalt auf $(S_n, \mathfrak{P}(S_n))$ ist. Mittels Folgerung M.3.1 bei zusätzlicher Beachtung von (1) und (2) folgt dann:

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}\,(\mathrm{S_n} \backslash \mathrm{E_n}) &= \nu_n(S_n \backslash E_n) \overset{(1)}{=} \nu_n(\textstyle\bigcup_{j=1}^{n} A_j) \\
&\overset{(2),FM3.1}{=} \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \binom{n}{m} (n-m)! \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{n!}{m!(n-m)!} (n-m)! \\
&= n! \left(\sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Aus (3) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{card}\,\mathrm{E_n} &= \mathrm{card}\,\mathrm{S_n} - \mathrm{card}\,(\mathrm{S_n} \backslash \mathrm{E_n}) \overset{(3)}{=} \mathrm{n}! - \mathrm{n}! \left(\sum_{\mathrm{m}=1}^{\mathrm{n}} \frac{(-1)^{\mathrm{m}+1}}{\mathrm{m}!}\right) \\
&= n! \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\right) = n! \left(\sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\right).
\end{aligned}$$

∎

Folgerung 1.2.1. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne S_n die Menge aller Permutationen von $\{1, \ldots, n\}$. Weiter sei $m \in \{1, \ldots, n\}$ und es bezeichne $E_{n,m}$ die Menge aller $f \in S_n$, für welche es genau m verschiedene Zahlen $i_1, \ldots, i_m \in \{1, \ldots, n\}$ gibt welche Fixpunkte von f sind. Dann gilt

$$\mathrm{card}\, \mathrm{E}_{\mathrm{n,m}} = \frac{\mathrm{n}!}{\mathrm{m}!} \sum_{\mathrm{k}=0}^{\mathrm{n-m}} \frac{(-1)^{\mathrm{k}}}{\mathrm{k}!}$$

Beweis. Die genau m verschiedenen Fixpunkte eines Elements von $E_{n,m}$ lassen sich auf genau $\binom{n}{m}$ Arten wählen. Haben wir uns dann jeweils für m konkrete Fixpunkte entschieden, so ist dann dafür zu sorgen, dass keiner der restlichen $n - m$ Punkte Fixpunkte ist. Hierfür gibt es mit der Vereinbaruung $\mathrm{card}\, \mathrm{E}_0 := 1$ dann genau $\mathrm{card}\, \mathrm{E}_{\mathrm{n-m}}$ Möglichkeiten. Unter Beachtung von Satz 1 folgt nun

$$\begin{aligned} \mathrm{card}\, \mathrm{E}_{\mathrm{n,m}} &= \tbinom{n}{m}(n-m)!(\textstyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}) \\ &= \tfrac{n!}{m!(n-m)!}(n-m)!(\textstyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}) \\ &= \tfrac{n!}{m!}(\textstyle\sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}). \end{aligned}$$

■

Beispiel 1.2.4. *Sei $n \in N$. Dann stelle man sich vor, dass n Briefe zufällig in n verschieden adresssierte Umschläge gesteckt werden. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass mindestens einer der Briefe in dem richtigen Umschlag kommt?*
***Lösung**. Wir nummerieren die Briefe und Umschläge durch. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gehöre hierbei der j-te Brief in den j-ten Umschlag. Dann lässt sich für unser zufälliges Experiment der Grundraum $\Omega = S_n$ wählen. Das zugehörige W-Maß ist dann die diskrete Gleichverteilung P_n auf $(S_n, \mathfrak{P}(S_n))$. Für jedes $f \in S_n$ bedeutet die zum Elementarereignis f gehörige Ereignisaussage dann also "Für jedes $j \in \{1, \ldots, n\}$ kommt der Brief mit Nummer j in den Umschlag mit Nummer $f(j)$". Mit den Bezeichnungnen von Satz 1.2.1 ist dann $S_n \backslash E_n$ das uns interessierende Ereignis. Wegen Satz 1.2.1 gilt dann*

$$\begin{aligned} P_n(S_n \backslash E_n) &= \tfrac{\mathrm{card}\,(\mathrm{S_n} \backslash \mathrm{E_n})}{\mathrm{card}\, \mathrm{S_n}} \overset{S1}{=} \tfrac{1}{n!} n!(\textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!}) \\ &= \textstyle\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \end{aligned}$$

In ÜA wird gezeigt, dass $\lim\limits_{n \to \infty} P_n(S_n \backslash E_n) = 1 - \frac{1}{e} \approx 0,63212$ gilt. Es gilt

n	2	3	4	5	6
$P_n(S_n \backslash E_n)$	$0,5$	$0,6667$	$0,6250$	$0,6333$	$0,6319$

Für $n \geq 7$ ergibt sich, dass $P_n(S_n \backslash E_n)$ praktisch nicht von n abhängt und bis auf die ersten drei Stellen nach dem Komma durch 0,632 gegeben ist.

Wir präsentieren nun einen alternativen Zugang zu solchen Aufgaben mittels Satz 1.2.1.

Definition 1.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls $n \in \mathbb{N}$ ist, bezeichne E_n die Menge aller fixpunktfreien Permutationen der Menge $\{1, \ldots, n\}$. Dann heißt die gemäß

$$D_n := \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 0 \\ \operatorname{card} \mathrm{E_n} & \text{falls } n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

definierte Zahl die n-te **Rencontre-Zahl**.

Satz 1.2.2 (Euler)**.** Es bezeichne $(D_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Rencontre-Zahlen. Dann gelten $D_0 = 1$, $D_1 = 0$ sowie für $n \in N$ zudem $D_{n+1} = n(D_n + D_{n+1})$.
Beweis. 1) möglich mit Satz 1.2.1
2) ohne Satz 1.2.1 als ÜA ■

Beispiel 1.2.5. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $m \geq n$ erfüllt ist. Dann stelle man sich folgende Situation vor: An einer Theaterkasse stehen $m + n$ Menschen einer zufällig enstandenen Reihe an. Hierbei haben m Leute nur Fünfeuroscheine und die restlichen n Leute nur Zehneuroscheine. Zu Beginn des Kartenverkaufs ist in der Kasse kein Geld vorhanden. Jeder Käufer nimmt eine Karte zu 5 Euro. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welche der Ereignisaussage „Die Käufer können hintereinander abgefertigt werden, ohne auf Wechselgeld warten zu müssen" entspricht?*
Lösung. *Alle möglichen Anordnungen der Käufer sind gleichwahrscheinlich. Uns interessieren aber nicht die Anordnungen der Käufer überhaupt, sondern nur die Käufer, die Fünfeuroscheine und die Käufer, die Zehneuroscheine haben. Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir das folgende geometrische Verfahren, welches wir für den Fall $n \leq m$ in einer Skizze veranschaulichen. Wir betrachten die $x - y$-Ebene und zeichnen auf der Abszissenachse die Punkte $1, 2, \ldots, m + n$ in dieser Reihenfolge ein. Im Koordinatenursprung liegt die Kasse. Jeder Person mit Zehneuroschein wird die Ordinate „+1", jeder Person mit Fünfeuroschein die Ordinate „-1" zugeordnet. Nun summieren wir von links nach rechts die so definierten Ordinaten in den Punkten „1,2,...,m+n" und zeichnen in jedem dieser Punkte die erhaltene Summe ein. Wegen $n(+1) + m(-1) = n - m$ hat diese Summe im Punkt $m + n$ den Wert $n - m$. Wir verbinden jetzt die so erhaltenen einander benachbarten Punkte durch Strecken und den Koordinatenurspung mit dem ersten dieser Punkte von links gerechnet. Den so gewonnenen Streckenzug nennen wir eine Trajektorie. Diese verbindet dannn den Punkt $(0, 0)$ mit dem Punkt $(m+n, n-m)$. Die Anzahl der verschiedenen möglichen Trajektorien ist gleich der Anzahl von Abwärtsbewegungen unter $m+n$ Ab- und Aufwärtsbewegungen und hat folglich den Wert $\binom{m+n}{m}$. Für das uns interessierende Ereignis sind genau jene Trajektorien günstig, die nirgends über der Abszisseenachse verlaufen (y=0), denn sonst kommt einmal ein Käufer mit einem Zehneuroschein, während in der Kasse kein Wechselgeld vorhanden ist. Folglich sind genau jene Trajektorien ungünstig, welche wenigstens einmal die Gerade $y = 1$ schneiden oder erreichen. Wir berechnen nun deren Anzahl. Falls eine ungünstige Trajektorie vorliegt, so konstruieren wir folgendermaßen eine Trajektorie. Bis zur ersten Berührung mit der Geraden $y = 1$ fällt die neue Trajektorie mit der alten zusammen, und vom ersten Berührungspunkt ab, ist die neue Trajektorie das Spiegelbild der alten an der Geraden $y = 1$. Die neue Trajektorie verbindet also den Punkt $(0, 0)$ mit dem Spiegelpunkt (u, v)*

von $(m+n, n-m)$ an der Geraden $y=1$. Für diesen gilt dann $u=m+n$ sowie $v-1=1-(n-m)$, also $v=m-n+2$. Betrachten wir nun eine Trajektorie, die $(0,0)$ mit $(m+n, m-n+2)$ verbindet. Wegen $m \geq n$, also $m-n+2>1$ berührt oder schneidet diese dann die Gerade $y=1$ mindestens einmal. Wir konstruieren nun aus dieser Trajektorie mit demselben Spiegelungsprozess wie oben eine neue Trajektorie. Diese verbindet dann $(0,0)$ mit $(m+n, n-m)$ und berührt oder schneidet die Gerad $y=1$ mindestens einmal, ist also eine ungünstige Trajektorie. Es gibt also genau soviel ungünstige Trajektorien, wie es Trajektorien gibt, die $(0,0)$ mit $(m+n, m-n+2)$ verbindet. Es bezeichne r bzw. s die Anzahl der Auf- bzw. Abwärtsbewegungen einer Trajektorie, die $(0,0)$ mit $(m+n, m-n+2)$ verbindet. Dann gilt also $r+s=m+n$ sowie $r-s=m-n+2$. Hieraus folgt dann $2r=2m+2$ bzw. $r=m+1$ und $s=m+n-r=m+n-(m+1)=n-1$. Eine solche Trajektorie ist also dadurch gekennzeichnet, dass sie genau $m+1$ Aufwärts- und genau $n-1$ Abwärtsbewegungen enthält. Somit gibt es genau $\binom{m+n}{m+1}$ derartiger Trajektorien. Die Anzahl der günstigen Fälle ist also $\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+1}$ und es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{m+n}{m}-\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} = 1-\frac{\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} \\ &= 1-\frac{\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}}{\frac{(m+n)!}{(m!n!)}} = 1-\frac{m!n!}{(m+1)!(n-1)!} = 1-\frac{n}{m+1} = \frac{m+1-n}{m+1}. \end{aligned}$$

v6
27.4.2009

1.3. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Schon am Anfang der W-Theorie bermerkte man, dass das Laplacesche W-Modell aus Abschnitt nur eine begrenzte Gültigkeit besitzt. Das folgende Phänomen wird z.B. nicht davon erfasst:
Gegeben: Seine in einer Ebene eine gewissens Gebiet G. In ihm sei ein anderes Gebiet g enthalten.
Auf das Gebiet G werde „auf gut Glück" ein Punkt geworfen und man fragt sich wie groß die W dafür ist, das der Punkt in das Gebiet g fällt. Dem Ausdruck „der Punkt wird auf gut Glück in das Gebiet G geworfen" kommt dabei folgender Sinn zu:
Der geworfene Punkt, kann auf einen beliebigen Punkt des Gebietes G fallen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er auf ein beliebiges Teilgebiet von G fällt, ist der Maßzahl dieses Teilgebietes (Länge bzw Flächeninhalt) proportional und hängt nicht von dessen Lage oder Form ab. Damit ist definitionsgemäß die Wahrscheinlichkeit P(g) dafür, dass eine auf gut Glück in das Gebiet G der Ebene geworfener Punkt in das Teilgebiet g von G fällt, gleich:

$$P(g) = \frac{\text{Flächeninhalt von g}}{\text{Flächeninhalt von G}}$$

Wir betrachten einige Beispiele.

Beispiel 1.3.1. *Ein ungeübter Fallschirmspringer S versucht auf einer Insel zu landen, die approximiert als Kreis K mit Radius r angenommen wird. Es gelte als sicher, dass S in dem den Kreis K umfassenden Quadrat Q mit Seitenlänge 2r landet. Es sei jeder*

Punkt des Quadrats als Landungspunkt gleichberechtigt.
Wie groß ist die W. dafür, das S im Wasser landet? Aus unserer Vorbetrachtung erkennt man, dass sich die gesuchte W. berechnet gemäß:

$$\frac{\textit{Flächeninhalt von } Q\backslash K}{\textit{Flächeninhalt von } Q} = \frac{(2r)^2 - \pi r^2}{(2r)^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21$$

Beispiel 1.3.2. *Die Koeffizienten p und q der Quadratischen Gleichung $x^2 + px + q$, werden auf gut Glück im Intervall $[0,1]$ gewählt.*
Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Wurzeln dieser Gleichung reell sind?
Lösung:
Die möglichen Versuchsausgänge sind hier die Punkte des Quadrats $[0,1] \times [0,1]$, wobei p bzw q die erste bzw die zweite Komponente repräsentiert. Günstig dafür, dass die betrachtete Gleichung reelle Wurzeln besitzt ist dann genau die Menge:

$$A = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in [0,1] \times [0,1] : p^2 - 4q \geq 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \in [0,1] \times [0,1] : \frac{p^2}{4} \geq q \right\}$$

Somit ergibt sich die gesucht W. gemäß der Formel

$$P(A) = \frac{\textit{Flächeninhalt von } A}{\textit{Flächeninhalt von } [0,1] \times [0,1]} = \frac{\int_0^1 \frac{1}{4} p^2 dp}{1} = \left[\frac{1}{12} p^3 \right]_0^1 = \frac{1}{12}.$$

Frage: Was sind die Ereignisse in den Experimenten der Beispiele 1.3.2 und 1.3.2? Diese Frage ist gleichbedeutend mit der Bestimmung derjenigen Mengen, denen sich eine Fläche zuordnen lässt. Hierfür bietet sich etwa die Borelsche σ-Algebra $\mathfrak{B}_m$ von $\mathbb{R}^m$ (also die Borelsche σ-Algebra des euklidischen metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$) an. Als Maßzahl für Länge, Fläche, Volumen... bietet sich für $B \in \mathfrak{B}_m$ das Lebesgue-Borel-Maß $\lambda^{(m)}(B)$ an. Hieran anschließend gelangen wir zu folgender geometrischer Definition der Wahrscheinlichkeit:
Sei $m \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathfrak{B}_m$ die Borelsche σ-Algebra von $(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$. Sei $\Omega \in \mathfrak{B}_m$ so gewählt, dass $\lambda^{(m)}(\Omega) \in (0, +\infty)$ erfüllt ist.
Es bezeichne $\mathfrak{B}_{m,\Omega}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{B}_m$ in Ω.
definieren wir das $P : \mathfrak{B}_{m,\Omega} \to [0, +\infty]$ für alle $A \in \mathfrak{B}_{m,\Omega}$ gemäß:

$$P(A) := \frac{\lambda^{(m)}(A)}{\lambda^{(m)}(\Omega)},$$

so ist P ein W-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{B}_{m,\Omega})$.

1.4. Kolmogorovsche Axiomatik der W-Theorie

In Auswertung der W-Modelle aus den Abschnitten 1.2 und 1.3 war man bestrebt ein umfassendes, allgemeines Modell zu konstruieren. Ein solches Modell wurde 1933 von A.N.Kolmogorov(1903-1987) als Grundlage für den Aufbau der W-Theorie vorgeschlagen.
Mit jedem Zufallsexperiment ist ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ assoziiert, welches folgenden Axiomen unterworfen ist:

Axiom 1 Gegeben seien eine nichtleere Menge Ω, der sogenannte Grundraum. Die Elemente von Ω heißen Elementarereignisse.

Axiom 2 Es ist eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von Ω ausgezeichnet, deren Elemente als zufällige Ereignisse bezeichnet werden.

Axiom 3 Auf dem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist ein Maß P ausgezeichnet, welches der Bedingung $P(\Omega) = 1$ genügt.

Beachte : Ein Elementarereignis ist nicht notwendig ein zufälliges Ereignis. v7 28.4.2009

Definition 1.4.1. Seien Ω eine nichtleere Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $P \in \mathcal{M}^1_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein **W-Raum**.

Wir präsentieren nun ein Grundbeispiel von W-Räumen, welche insbesondere die in Abschnitt 1.2 und 1.3 behandelte Situationen umfassen.

Beispiel 1.4.1. *Seien $N \in \mathbb{N}$ und Ω eine Menge bestehend aus den N Elementen $\omega_1, ..., \omega_N$. Es sei $(p_j)_{j=1}^N$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum\limits_{j=1}^{N} p_j = 1$. Weiter seien $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P := \sum\limits_{j=1}^{N} p_j \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}}$. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum.*

Interpretation von Beispiel 1.4.1.
Seien $r, s \in \mathbb{N}$ und es liege eine Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln vor. Aus dieser werden zufällig nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei die erste gezogene Kugel zurückgelegt wird. Wir wählen den Grundraum $\Omega := \{0,1\} \times \{0,1\}$ und die σ-Algebra $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist Ω eine vierelementige Menge mit den Elementen $\omega_1 := (1,1)$, $\omega_2 := (1,0)$, $\omega_3 := (0,1)$ und $\omega_4 := (0,0)$. Hierbei symbolisiert eine 1 bzw. 0 in der ersten Komponente, dass beim ersten Zug eine rote bzw. schwarze Kugel gezogen wurde. Weiterhin symbolisiert eine 1 bzw. 0 in der zweiten Komponente, dass beim zweiten Zug eine rote bzw. schwarze Kugel gezogen wurde. Bezeichnet P das zugehörige W-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$, so ist aufgrund der Versuchsbedingungen dann

$$\begin{aligned}
P(\{\omega_1\}) &= \frac{r}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} = \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \\
P(\{\omega_2\}) &= \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \\
P(\{\omega_3\}) &= \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} \\
P(\{\omega_4\}) &= \frac{s}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} = \left(\frac{s}{r+s}\right)^2
\end{aligned}$$

Es ist also

$$P = \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \epsilon_{\omega_1, \mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \epsilon_{\omega_2, \mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} \epsilon_{\omega_3, \mathfrak{P}(\Omega)} + \left(\frac{s}{r+s}\right)^2 \epsilon_{\omega_4, \mathfrak{P}(\Omega)}.$$

Beispiel 1.4.2. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein meßbarer Raum und* $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \backslash \{\boldsymbol{o}\}$. *Weiter sei* $P := \frac{1}{\mu(\Omega)} \cdot \mu$. *Dann ist* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein W-Raum.*

Beispiel 1.4.2 umfasst insbesondere die Situation von dem Abschnit 1.2. Die Wahl von $\mathfrak{P}(\Omega)$ als σ-Algebra des W-Raums ist besonders einfach, beinhaltet aber starke Einschränkungen an das W-Maß, z.B. hat jedes W-Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ eine ganz spezielle Struktur, welche in vielen Anwendungen nicht zutrifft. (Dies ist ein berühmter Satz von Stanislaw Ulan (1909-1981) erschienen in Fund. Math. 16(1930),141-150.)

Wir diskutieren nun einige Grundtypen von W-Räumen.

Satz 1.4.1. Seien $N \in \mathbb{N}$ und Ω eine N-elementige Menge mit den Elementen $\omega_1, ..., \omega_N$. Dann gilt

- Sei P ein Inhalt auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit $P(\Omega) = 1$. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ein W-Raum und es gilt $P = \sum\limits_{j=1}^{N} P(\{\omega_j\})\epsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$ sowie $\sum\limits_{j=1}^{N} P(\{\omega_j\}) = 1$.

- Sei $(p_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum\limits_{j=1}^{N} p_j = 1$ .Weiter sei $P := \sum\limits_{j=1}^{N} p_j \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$. Dann ist P ein W-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ und für $k \in \{1, ..., n\}$ gilt $P(\{\omega_k\}) = p_k$.

Satz 1.4.2. Sei Ω eine abzählbar unendliche Menge und sei $(\omega_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen von Ω, für welche $\Omega = \bigcup\limits_{j \in \mathbb{N}} \{\omega_j\}$ erfüllt ist. Dann gilt

- Sei $P \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. dann gelten $P = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} P(\{\omega_j\})\epsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$ sowie $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} P(\{\omega_j\}) = 1$.

- Sei $(p_j)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum\limits_{j \in \mathbb{N}} p_j = 1$. Weiter sei $P = \sum\limits_{j \in \mathbb{N}} p_j \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$. Dann ist $P \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $P(\{\omega_k\}) = p_k$.

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängikeit

2.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Untersuchung der wechselseitigen Beeinflussung von verschiedenen zufälligen Vorgängen gehört zu den bedeutendsten Aufgabenstellungen der W-Theorie. Den elementaren aber grundlegenden Ansatz zum Studium solcher Phänomene liefert die in diesem Abschnitt behandelte bedingte Wahrscheinlichkeit. Wir studieren in diesem Abschnitt, welchen Einfluss das Vorliegen von Zusatzinformationen auf den Ausgang von Zufallsexperimenten ausübt. Wir betrachten zwei motivierende Beispiele.

Beispiel 2.1.1 (Zweimaliges Würfeln mit homogenem Würfel). *Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage „Augensumme ist größer als 6“ entspricht. Wir wählen den Grundraum* $\Omega := \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\}$ *und die* σ*-Algebra* $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$. *Dann ist* $\operatorname{card} \Omega = 36$. *Wir legen P gemäß der klassischen Definition als die diskrete Gleichverteilung auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *fest. Es ist dann*

$$A = \{(1,6),(2,5),(2,6),(3,4),(3,5),(3,6),(4,3),(4,4),(4,5),(4,6),(5,2),$$
$$(5,3),(5,4),(5,5),(5,6),(6,1),(6,2),(6,3),(6,4),(6,5),(6,6)\}.$$

Somit ist $\operatorname{card} \mathrm{A} = 21$. *Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist als*

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} \mathrm{A}}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

berechenbar. Wir verändern das Experiment in dem Sinn, dass wir annehmen, schon zu wissen, dass beim ersten Wurf eine 1 erscheint. Die „bedingte“ Wahrscheinlichkeit von A unter der genannten Bedingung beträgt dann $\frac{1}{6}$, *da von den jetzt möglichen Paaren* $(1,1), ..., (1,6)$ *nur* $(1,6)$ *günstig ist.*

Beispiel 2.1.2. *Seien* $r, s \in \mathbb{N}$. *Es liege eine Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln vor. Aus dieser wird willkürlich eine Kugel gezogen. Für das Ereignis B, welches der Ereignisaussage „eine rote Kugel wird gezogen“ entspricht, gilt dann* $P(B) = \frac{r}{r+s}$. *Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, welches der Ereignisaussage „die zweite gezogene Kugel ist rot“ unter der Voraussetzung, dass die erste gezogen Kugel rot war und nicht zurückgelegt wurde, ist dann* $\frac{r-1}{r+s-1}$.

Wir sehen also, dass Zusatzinformationen die Wahrscheinlichkeit gewisser Ereignisse beeinflussen können. Diese Betrachtungen führen uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 2.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter sei $B \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Für $A \in \mathfrak{A}$ heißt dann

$$P(A|B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die **bedingte Wahrscheinlichkeit** von A unter der Bedingung B.

Bemerkung 2.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Dann gelten $A \cup B \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$ sowie $P(A \cap B|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$, $P(A \cap B|B) = P(A|B)$, $P(A \cap B|A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$ und $P(A \cap B|A \cup B) \leq P(A \cap B|B)$.

Beispiel 2.1.3. *Es möge eine Lotterie mit 100 Losen vorliegen, unter denen sich genau zwei Preise A und B befinden. Herr X kauft vier Lose. Er teilt seinem Freund Y den Kauf dieser vier Lose mit und verrät weiterhin, dass er den Preis B gewonnen hat. Herr Y stellt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Herr X beide Preise gewonnen hat. Es ergibt sich*

$$P(B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{99}{3}}{\binom{100}{4}} = \frac{1 \cdot \frac{99!}{3! \cdot 96!}}{\frac{100!}{4! \cdot 96!}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

und

$$P(A\cap B)=\frac{\binom{2}{2}\cdot\binom{98}{2}}{\binom{100}{4}}=\frac{1\cdot\frac{98!}{2!\cdot 96!}}{\frac{100!}{4!\cdot 96!}}=\frac{4\cdot 3}{100\cdot 96}=\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{33}.$$

Damit ergibt sich

$$P(A\cap B|B)=\frac{P(A\cap B)}{P(B)}=\frac{\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{33}}{\frac{1}{25}}=\frac{1}{33}$$

Etwas später trifft Herr X dann noch seinen Freund Z und informiert ihn darüber, dass er vier Lose gekauft hat und einen Gewinn erziehlt hat. Auch Herr Z stellt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Herr X beide Preise gewonnen hat. Aus Symmetriegründen gilt

$$P(A)=P(B)=\frac{1}{25}.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A\cup B) &= P(A)+P(B)-P(A\cap B)=\tfrac{1}{25}+\tfrac{1}{25}-\tfrac{1}{25\cdot 33}\\ &= \tfrac{2}{25}-\tfrac{1}{25\cdot 33}=\tfrac{66-1}{25\cdot 33}=\tfrac{65}{25\cdot 33}=\tfrac{13}{5\cdot 33}\end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P(A\cap B|A\cup B)=\frac{P(A\cap B)}{P(A\cup B)}=\frac{\frac{1}{25}\cdot\frac{1}{33}}{\frac{13}{5\cdot 33}}=\frac{1}{5\cdot 13}=\frac{1}{65}.$$

Beispiel 2.1.4 (Gestörter Nachrichtenkanal)**.** *Sei $n\in\{2,3,...\}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor. Eine Person I_0 überbringt einer Person I_1 eine Nachricht, deren Inhalt sich durch „0“ oder „1“ symbolisieren lässt. I_1 gibt eine Nachricht dergleichen Art an I_2, I_2 an I_3 usw bis schließlich I_n als letzter Empfänger eine Nachricht dieser Art erhält. Für $j\in\{1,...,n-1\}$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person I_j die von I_{j-1} emmpfangene Nachricht an I_{j+1} weiterleitet, eine Zahl $p\in(0,1)$. Für $n\in\mathbb{N}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit p_n dafür gesucht, dass I_n die richtige, d.h. die von I_0 an I_1 übermittelte Nachricht erhält.*

Lösung. *Ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment ist der meßbare Raum $(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega))$ mit $\Omega:=\bigtimes_{j=0}^{n-1}\{0,1\}$. Ist hierbei $(\omega_0,...,\omega_{n-1})\in\Omega$, so soll die j-te Komponente ω_j die von I_j an I_{j+1} übermittelte Nachricht repräsentieren. Für $j\in\{1,...,n\}$ stellt dann $E_j:=\{(\omega_0,...,\omega_{n-1}):\omega_0=\omega_{j-1}\}$ gerade das zur Ereignisaussage „I_j empfängt die richtige Nachricht“ gehörige Ereignis dar.* v8

Es bezeichne P das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega,\mathfrak{P}(\Omega))$ Dann ist also $p_n=P(E_n)$. Wir werden die gesuchte Wahrscheinlichkeit nun rekursiv bestimmen. Offensichtlich ist 04.5.2009

$$p_1=1 \tag{1}$$

sowie

$$p_2=p \tag{2}$$

Für $n \in \{2, 3, \dots\}$ gilt unter Beachtung dessen, daß 1-p die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass I_{n-1} das Gegenteil der von I_{n-2} epfangenen Nachricht an I_n weiterleitet, sowie von

$$E_n = (E_n \cap E_{n-1}) \cup (E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}]) \text{ und}$$

$$(E_n \cap E_{n-1}) \cap (E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}]) = \emptyset$$

dass:

$$\begin{aligned} p_n &= P(E_n) = P((E_n \cap E_{n-1}) \cup (E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}]) \\ &= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}]) \\ &= P(E_n|E_{n-1})P(E_{n-1}) + P(E_n|\Omega \backslash E_{n-1})P(\Omega \backslash E_{n-1}) \\ &= pP(E_{n-1}) + (1-p)[P(\Omega) - P(E_{n-1})] \\ &= pP(E_{n-1}) + (1-p)(1 - P(E_{n-1})) \\ &= (2p-1)P(E_{n-1}) + 1 - p \\ &= (2p-1)p_{n-1} + 1 - p \end{aligned} \tag{3}$$

Wir zeigen nun durch vollständige Iduktion über n, daß für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}. \tag{4}$$

Für n=1 gilt wegen (1) zunächst $\frac{1}{2}(2p-1)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = p_1$
Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und sei für $k \in \{1, \dots, n\}$ bereits gezeigt, daß

$$p_k = \frac{1}{2}(2p-1)^{k-1} + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) und (3) folgt nun

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (2p-1)p_n + 1 - p \\ &= (2p-1)(\tfrac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \tfrac{1}{2}) + 1 - p \\ &= \tfrac{1}{2}(2p-1)^n + \tfrac{1}{2}(2p-1) + 1 - p \\ &= \tfrac{1}{2}(2p-1)^{(n+1)-1} + \tfrac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist induktiv gezeigt, daß (4) für $n \in \mathbb{N}$ gilt. Im Fall $p = \frac{1}{2}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ insbesondere

$$p_n = \frac{1}{2}(2 \cdot \frac{1}{2} - 1)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $p \in (0,1)$ gilt $2p - 1 \in (-1, 1)$, also $\lim_{n\to\infty}(2p-1)^n = 0$. Hieraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \right) = \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet, der Empfänger einer Nachricht kann annehmen, daß diese nahezu mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ falsch ist, wenn er weiss, dass diese über eine große Anzahl von Zwischenträgern jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ richtig weitergegeben wurde, wobei p auch sehr nahe bei 1 sein kann.

Zusatz zu Beispiel 2.1.4. Es liege die Situation von Beispiel 2.1.4 vor und es sei $n \in \{2, 3, \dots\}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, daß I_1 die richtige Nachricht weitergeleitet hat, wenn die I_n die richtige Nachricht empfangen hat.

Lösung. *Mit den obigen Bezeichnungen ist dann $P(E_2|E_n)$ gesucht. Wegen (2) gilt*

$$p(E_2) = p_2 = p \tag{1}$$

Aufgrund der bisherigen Betrachtungen gilt:

$$P(E_n|E_2) = P(E_{n-1}) = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-2} + \frac{1}{2}. \tag{2}$$

Unter Beachtung von (1) und (2) und der obigen Formel für $P(E_n)$ folgt dann

$$P(E_2|E_n) = \frac{P(E_2 \cap E_n)}{P(E_n)} = \frac{P(E_n|E_2)P(E_2)}{P(E_n)} = \frac{(\frac{1}{2}(2p-1)^{n-2} + \frac{1}{2})p}{\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}} = \frac{((2p-1)^{n-2} + 1)p}{(2p-1)^{n-1} + 1}.$$

Satz 2.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_p$. Es sei $P_A : \mathfrak{A} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $B \to P(B|A)$. Dann gilt:

a) Es sei $P(A) \in (0, +\infty)$, dann ist P_A gerade die P-Gleichverteilung auf A.

b) Es gilt $P_A \in \mathcal{M}^1_+(\Omega, \mathfrak{A}), \Omega \backslash A \in \mathcal{N}_{P_A}$ und $\mathcal{N}_P \subseteq \mathcal{N}_{P_A}$.

c) Sei $B \in \mathfrak{A}$ Dann gilt $P_A(B) \geq 1 - \frac{P(\Omega \backslash B)}{P(A)}$.

Beweis. (c)
Wegen der Endlichkeit von P gilt:

$$1 - \frac{P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A) - [1 - P(B)]}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(A)} \tag{1}$$

Weiterhin ist $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1$ und somit also

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann: $1 - \frac{P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A)+P(B)-1}{P(A)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B|A) = P_A(B)$. ■

Folgerung 2.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$ Es sei P_{A_1} bzw. P_{A_2} wie im Satz 2.1.1 erklärt. Dann gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent.
   (i) Es ist $P_{A_1} = P_{A_2}$.
   (ii) Es ist $A_1 \triangle A_2 \in \mathcal{N}_P$.

b) Es gilt $\{A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2\} \in \mathfrak{A}$ und, falls a)(i) erfüllt ist, auch $P(A_1) = P(A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cap A_2)$ sowie $P_{A_1} = P_{A_2} = P_{A_1 \cup A_2} = P_{A_1 \cap A_2}$.

Mitunter ist es auch günstig, den Wahrscheinlichkeitsraum aus Folgerung 2.1.1 so zu verändern, dass A zum sicheren Ereignis wird.

Satz 2.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Es sei P_A wie in Satz 2.1.1 definiert. Weiter sei $\mathfrak{A}_A := \{B \cap A | B \in \mathfrak{A}\}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in A. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{A}_A$ eine σ-Algebra in $\mathfrak{A}$ mit $\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}$.

b) Sei $\tilde{P}_A := \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_A} P_A$. Dann gilt $\tilde{P}_A \in \mathcal{M}_+^1(A, \mathfrak{A}_A)$.

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Wegen Definition 2.1.1 gilt dann $P(B \cap A) = P(A) \cdot P(B|A)$ Wir wollen nun eine Verallgemeinerung dieser Formel für den Durchschnitt einer endlichen Folge von Ereignissen herleiten.

Satz 2.1.3 (Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=0}^{n-1}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Dann gilt:

a) Für $k \in \{0, \dots, n-1\}$ ist $\bigcap_{j=0}^{k} A_j \in \mathfrak{A}$ und zudem gilt

$$P(A_0) \geq P(A_0 \cap A_1) \geq \cdots \geq P(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j) > 0$$

b) Sei $A_n \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

$$P(\bigcap_{j=0}^{n} A_j) = P(A_0) P(A_1|A_0) P(A_2|A_0 \cap A_1) \cdots P(A_n|\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j). \tag{1}$$

Beweis.

a) folgt aus der Isotonie von P.

b) Wegen a) ist die rechte Seite von (1) wohldefiniert. Wir zeigen (1) durch vollständige Induktion über n. Für n=1 folgt (1) aus Definition 2.1.1. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und sei für $n \in \{1, \dots, k\}$ die Formel bereits gezeigt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} P(\textstyle\bigcap_{j=0}^{k+1} A_j) &= P((\textstyle\bigcap_{j=0}^{k} A_j \cap A_{k+1}) \\ &= P(A_{k+1}|\textstyle\bigcap_{j=0}^{k} A_j) P(\textstyle\bigcap_{j=0}^{k} A_j) \\ &= P(A_{k+1}|\textstyle\bigcap_{j=0}^{k} A_j) P(A_k|\textstyle\bigcap_{j=0}^{k-1} A_j) \cdots P(A_1|A_0) P(A_0). \end{aligned}$$

■

Beispiel 2.1.5. *Bei einem Lernversuch hat eine Versuchsperson eine Aufgabe zu lösen. Löst sie die Aufgabe nicht erhält sie eine Hilfestellung und versucht wiederholt die Aufgabe zu lösen. Die Erfahrungen besagen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Aufgabe beim 1. bzw. 2. bzw. 3. bzw. 4. Versuch gelöst wird beträgt 0,5 bzw 0,65 bzw 0,75 bzw 0,8. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit p des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage „Die Aufgabe wird nach höchstens 4 Vesuchen gelöst“ entspricht.*

Lösung (1). *Es bezeichne* $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ *einen hier nicht näher spezifierten Wahrscheinlichkeitsraum, der unserer Experiment adäquat beschreibt. Für* $j \in \{1,2,3,4\}$ *bezeichne* A_j *das zur Ereignisaussage „Die Aufgabe wird in j-ten Versuch gelöst" gehörige Ereignis. Es ist dann:* $A = \bigcup_{j=1}^{4} A_j$. *Wegen Satz 2.1.3 gilt dann*

$$\begin{aligned} P(A) &= P(\textstyle\bigcup_{j=1}^{4} A_j) = P(\Omega \backslash [\Omega \backslash \bigcup_{j=1}^{4} A_j]) = P(\Omega) - P(\Omega \backslash (\bigcup_{j=1}^{4} A_j)) \\ &= 1 - P(\textstyle\bigcap_{j=1}^{4} (\Omega \backslash A_j)) \\ &= 1 - P(\Omega \backslash A_1) \cdot P(\Omega \backslash A_2 | \Omega \backslash A_1) \cdot P(\Omega \backslash A_3 | \Omega \backslash A_1 \cap \Omega \backslash A_2 \cap \Omega \backslash A_3) \cdot \\ & P(\Omega \backslash A_4 | \Omega \backslash A_1 \cap \Omega \backslash A_2 \cap \Omega \backslash A_3 \cap \Omega \backslash A_4) \\ &= 1 - 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,2 = 0,9912 \end{aligned}$$

Lösung (2). *Wir präsentieren nun eine stärker formalisierte Behandlung von Beispiel 2.1.5, welche die explizite Angabe eines W-Raums beinhaltet, der das Experiment adäquat beschreibt. Wir wählen den Grundraum* $\Omega = \{1, (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1), (0,0,0,0)\}$ *sowie die* σ*-Algebra* $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$. *Für* $j \in \{1,2,3,4\}$ *bezeichnet hierbei eine 1 bzw. 0 in der j-ten Komponente der entsperchenden Tupel, das die Aufgabe im j-ten Versuch gelöst bzw. nicht gelöst wird. Man überlegt sich dann, daß durch* $P = 0,5\epsilon_{1,\mathfrak{A}} + 0,5 \cdot 0,65\epsilon_{(0,1),\mathfrak{A}} + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,75\epsilon_{(0,0,1),\mathfrak{A}} + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,8\epsilon_{(0,0,0,1),\mathfrak{A}} + 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,2\epsilon_{(0,0,0,0),\mathfrak{A}}$ *ein W-Maß auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *gegeben ist, welches unseren Versuch adäquat beschreibt. Es gilt dann* $A = \{1, (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1),\} = \Omega \backslash \{(0,0,0,0\}$. *Damit ergibt sich* $P(A) = P(\Omega \backslash \{0,0,0,0\}) = 1 - P(\{0,0,0,0\}) = 1 - 0,5 \cdot 0,35 \cdot 0,25 \cdot 0,2 = 0,9912$.

Unsere nächsten Überlegungen sind darauf gerichtet, eine Vorschrift anzugeben, mit welcher aus gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten gewöhnliche (also nicht bedingte W.) berechnet werden können. v9 05.5.2009

Definition 2.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeits-Raum und $\mathfrak{J}$ ein **Abschnitt** von $\mathbb{N}$ (d.h., es ist entweder $\mathfrak{J} = \mathbb{N}$ oder mit einem gewissen $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{J} = \{1, .., n\}$). Dann heißt $(H_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$ ein **vollständiges Ereignissystem** bzgl. $(\Omega, \mathfrak{A})$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

i) Es ist $\bigcup_{j \in \mathfrak{J}} H_j = \Omega$.

ii) Für alle $j, k \in \mathfrak{J}$ mit $j \neq k$ gilt $H_j \cap H_k = \emptyset$.

Satz 2.1.4 (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathfrak{J}$ ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(H_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ ein vollständiges Ereignissystem bezgl. $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $\mathfrak{J}' := \{j \in \mathfrak{J} : H_j \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_p\}$. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{J}' \neq \emptyset$.

b) Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $P(A) = \sum\limits_{j \in \mathfrak{J}'} P(A|H_j) P(H_j)$.

Beweis.

a) Es gilt auf Grund der Additivität bzw. σ-Additivität von P dass:

$$\sum_{j\in\mathfrak{J}} P(H_j) = P(\bigcup_{j\in\mathfrak{J}} H_j) = P(\Omega) = 1.$$

Somit ist $\mathfrak{J}' \neq \emptyset$.

b) Sei $H := \bigcup_{j\in\mathfrak{J}'} H_j$. Dann gilt $\Omega\backslash H = \begin{cases} \emptyset, & \text{falls } \mathfrak{J}\backslash\mathfrak{J}' = \emptyset \\ \bigcup\limits_{j\in\mathfrak{J}\backslash\mathfrak{J}'} H_j, & \text{falls } \mathfrak{J}\backslash\mathfrak{J}' \neq \emptyset. \end{cases}$

Hieraus folgt mittels Satz M.5.1 dann:

$$\Omega\backslash H \in \mathcal{N}_P \tag{1}$$

Wegen $A \in \mathfrak{A}$ und (1) gilt $A \cap (\Omega\backslash H) \in \mathfrak{A}$ und wegen Satz M.5.1 zudem

$$A \cap (\Omega\backslash H) \in \mathcal{N}_P. \tag{2}$$

Unter Beachtung von $A = (A \cap H) \cup (A \cap (\Omega\backslash H))$ und $(A \cap H) \cap [A \cap (\Omega\backslash H)] = \emptyset$ sowie von (2) folgt dann

$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap (\Omega\backslash H)) = P(A \cap H). \tag{3}$$

Weiterhin ist $A \cap H = A \cap (\bigcup_{j\in\mathfrak{J}'} H_j) = \bigcup_{j\in\mathfrak{J}'}(A \cap H_j)$, wobei $(A \cap H_j)_{j\in\mathfrak{J}'}$ eine paarweise disjunkte Folge aus $\mathfrak{A}$ ist.
Damit ergibt sich :

$$P(A \cap H) = P(\bigcup_{j\in\mathfrak{J}'}(A \cap H_j)) = \sum_{j\in\mathfrak{J}'} P(A \cap H_j) = \sum_{j\in\mathfrak{J}'} P(A|H_j) \cdot P(H_j)$$

Hieraus folgt wegen (3) nun $P(A) = \sum\limits_{j\in\mathfrak{J}'} P(A|H_j) \cdot P(H_j)$.

■

Beispiel 2.1.6 (Chemisches Analogon zu Satz 2.1.4). *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor. Es seien n Gefäße $H_1, .., H_n$. In denen verschiedenen Lösungen desselben Salzes in den Konzentrationen $P(A|H_1), ..., P(A|H_n)$ vorliegen mögen. Für $j \in \{1, ...n\}$ bezeichne $P(H_j)$ das Flüssigkeitsvolumen im j-ten Gefäß H_j. Es möge insgesamt ein Liter Flüssigkeit vorliegen, d.h. es sei $\sum\limits_{j=1}^{n} P(H_j) = 1$. Gießt man nun alle n Lösungen zusammen, so hat die entstehende Satzlösung die Konzentration:*

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A|H_j) \cdot P(H_j)$$

Beispiel 2.1.7. *In einem Betrieb arbeiten 3 Automaten an der Herstellung des gleichen Erzeugnisses. Hierbei stellt sich die Situation wie folgt dar:*
Automat 1 bzw. 2 bzw. 3 fertigt 40% bzw. 35% bzw. 25% der Gesamtproduktion, wovon 4% bzw. 5% bzw. 3% Ausschuß sind.
Wie groß ist die W. des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage „Ein willkührlich herrausgegriffenes Erzeugnis ist Ausschuß“ entspricht?
Lösung:
Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ einen hier nicht näher spezifizierten W.-Raum, welcher das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreibt. Für $j \in \{1, 2, 3\}$ bezeichne H_j das der Ereignisaussage „Das Erzeugnis wurde vom j-ten Automaten gefertigt“ entsprechende Ereignis. Dann ist $(H_j)_{j=1}^3$ ein vollständiges Ereignissystem bez. $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$.
Nach Satz 2.1.4 ergibt sich:

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A|H_1) \cdot P(H_2) + P(A|H_2) \cdot P(H_1) + P(A|H_3) \cdot P(H_3) \\ &= 0,04 \cdot 0,4 + 0,05 \cdot 0,35 + 0,03 \cdot 0,25 \\ &= 0,041. \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine gewisse inverse Problemstellung behandeln. Hierzu betrachten wir einen W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, einen Abschnitt von $\mathfrak{J}$ von $\mathbb{N}$ und ein vollständiges Ereignissystem $(H_j)_{j\in\mathfrak{J}}$ bzgl. $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es sei bekannt, dass ein Ereignis $A \in \mathfrak{A} \backslash N_p$ eingetreten ist. Dann stellt sich die Frage, wie groß für jedes $j \in \mathfrak{J}$ in dieser Situation dann die Wahrscheinlichkeit „Hypothese“ H_j ist, d.h. wir sind an der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(H_j|A)$ interessiert.
Thomas Bayes(1702-1761) gab eine Antwort darauf.

Satz 2.1.5 (Formel von Bayes)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathfrak{J}$ ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(H_j)_{j\in\mathfrak{J}}$ ein vollständiges Ereignissystem, bzgl. $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $A \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Weiterhin sei $\mathfrak{J}' = \{j \in \mathfrak{J} : H_j \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P\}$. Dann ist $\mathfrak{J}' \neq \emptyset$ und für $j \in \mathfrak{J}'$ bzw. $j \in \mathfrak{J} \backslash \mathfrak{J}'$ gilt:

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j) \cdot P(H_j)}{\sum\limits_{k\in\mathfrak{J}'} P(A|H_k) \cdot P(H_k)} \text{ bzw. } P(H_j|A) = 0$$

Beweis. Wegen Teil a) von Satz 2.1.4 gilt $\mathfrak{J}' \neq \emptyset$. Sei zunächst $j \in \mathfrak{J} \backslash \mathfrak{J}'$, es ein $H_j \in \mathcal{N}_P$. Es bezeichne P_A das in Satz 2.1.1 eingeführte W-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Wegen Teil b) 2.1.1 gelten dann $\mathcal{N}_P \subseteq \mathcal{N}_{P_A}$, also $H_j \in N_{P_A}$ und somit $P(H_j|A) = P_A(H_j) = 0$
Sei nun $j \in \mathfrak{J}$ unter Beachtung von Definition 2.1.1 und Satz 2.1.4 folgt nun.

$$P(H_j|A) \overset{Def2.1.1}{=} \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} \overset{S2.1.4}{=} \frac{P(A|H_j) \cdot P(H_j)}{\sum\limits_{k\in\mathfrak{J}'} P(A|H_k) \cdot P(H_k)}$$

■

Beispiel 2.1.8 (Chemisches Analogon von Satz 2.1.5)**.** *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann möge erneut die im chemischen Analogon von Beispiel 2.1.6 beschriebene Situation vorliegen. Für*

$j \in \{1,..,n\}$ ist dann derjenige Anteil $P(H_j|A)$ an der gesamten Salzmenge, der sich im j-ten Gefäß befindet gegeben durch:

$$P(H_j|A) = \frac{P(A|H_j) \cdot P(H_j)}{\sum\limits_{k=1}^{n} P(A|H_k) \cdot P(H_k)}$$

Beispiel 2.1.9. *Für ein Konzert, werden an drei verschiedenen Verkaufsstellen Karten angeboten. Sei $j \in \{1,2,3\}$ Die W. dafür, dass sich ein Interessent an die j-te Verkaufstelle wendet, hängt von der Lage ab und sei p_j, wobei $p_j \in (0,1)$. Die W. dafür, das nach 2 Stunden nach gleichzeitigem Verkaufsbeginn an der j-ten Kasse alle Karten verkauft sind, sei π_j, wobei $\pi_j \in (0,1)$.*
Ein Interessent kaufte 2 Stunden nach dem Verkaufsbeginn eine Karte. Wie groß ist die W. dafür, dass er an der ersten Kasse kaufte?

Lösung. *Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ einen nicht näher speziefierten W-Raum, der das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreibt. Es sei A das der Ereignisaussage „der Interessent erhält eine Karte“ entsprechende Ereignis. Für $j \in \{1,2,3\}$ sei H_j das der Ereignisaussage „Der Interessent wandte sich an die j-te Kasse“ entsprechende Ereignis. Für $j \in \{1,2,3\}$ ist dann $P(H_j) = p_j$ und $P(\Omega \backslash A|H_j) = \pi_j$. Hieraus folgt mittels Satz 2.1.1 dann:*

$$P(A|H_j) = P_{H_j}(A) = 1 - P_{H_j}(\Omega \backslash A) = 1 - P(\Omega \backslash A|H_j) = 1 - \pi_j$$

Da $(H_j)_{j=1}^{3}$ ein vollständiges Ereignissystem bzgl. $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ist folgt mittels Satz 2.1.5 dann:

$$P(H_1|A) = \frac{(1-\pi_1) \cdot p_1}{\sum\limits_{j=1}^{3} (1-\pi_j) \cdot p_j}$$

Beispiel 2.1.10 (Multiple Choice Verfahren)**.** *Einem Studenten wirde währed einer Prüfung eine Frage vorgelegt, zu der es n mögliche Antworten gibt, von denen genau eine richtig ist.*
Hat der Student sich auf die Prüfung vorbereitet (die Wahrscheinlichkeit hierfür sei $p \in (0,1)$), kann er die Frage richtig beantworten. Andernfalls wählt er eine der n Antworten willkürlich aus. Wie berechnet sich in Abhängigkeit von n und p die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Student sich auf die Prüfung vorbereitet hat, wenn die Frage von ihm richtig beantwortet wurde.

Lösung. *Wir wollen Satz 2.1.5 anwenden. Hierzu bezeichne $(\Omega, P(\Omega), P)$ einen nicht näher speziefierten W-Raum, der das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreibt. Es bezeichne A bzw. B aus der Ereignisaussage „der Student beantwortet die Frage richtig“ bzw. „der Student hat sich auf die Prüfung vorbereitet“ entsprechende Ereignis. Aufgrund der Versuchsbedingungen ist das $P(B) = p, P(A|B) = 1$ und $P(A|\Omega \backslash B) = \frac{1}{n}$ und wir können weiterhin $P(A) \neq 0$ annehemen. Unter Verwendung von Satz 2.1.5 folgt dann:*

$$P(B|A) = \frac{P(A|B) \cdot P(B)}{P(A|B) \cdot P(B) + P(A|\Omega \backslash B) \cdot P(\Omega \backslash B)} = \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{n}(1-p)} = \frac{p}{p + \frac{1}{n}(1-p)}$$

Mit wachsendem n wird dann $P(B|A)$ größer, was zu erwarten war.

2.2. Erste Betrachtungen zu stochastisch unabhängigen Ereignissen

Ein W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist auf Grund seiner Definition ein Objekt der Maßtheorie. Käme nun keine weitere spezifische Begriffsbildung hinzu, wäre die Stochastik ein Teilgebiet der Maßtheorie. Dass das nicht so ist, wird im vorliegendem Abschnitt verdeutlicht. Der nachfolgende Begriff der stochastischen Unabhängigkeit spielt eine zentrale Rolle in der W-Theorie. Er ist es nämlich, der diese aus dem allgemeinem Konzept der Maßtheorie heraus hebt und zu einem eigenständigen Zweig der Mathematik macht. v10

Wir betrachten einen W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie gewisse $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_P$. Dann 11.5.2009
ist es natürlich zu sagen, dass A in keiner Weise von B abhängt, falls

$$P(A|B) = P(A). \tag{1}$$

Aus (1) folgt sogleich

$$P(A \cap B) = P(A)P(B). \tag{2}$$

Falls auch $A \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_P$, so kann (1) auch als

$$P(B|A) = P(B) \tag{3}$$

geschrieben werden. Aus (3) folgt dann auch (2). Wir kommen somit zu folgender Begriffsbildung

Definition 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann heißen A und B **stochastisch unabhängig** bzgl. P, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Andernfalls heißen A und B **stochastisch abhängig** bzgl. P.

Satz 2.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $A \in \mathfrak{A}$ sowie $B \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_P$. dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.

b) Es ist $P(A|B) = P(A)$.

Beispiel 2.2.1 (Gleichzeitiges Würfeln mit rotem und gelbem Würfel)**.** *Wir wählen den Grundraum $\Omega := \{1, ..., 6\} \times \{1, ..., 6\}$. und die σ-Algebra $\mathfrak{A} := P(\Omega)$. Hierbei symbolisiert die erste bzw. zweite Komponente eines $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ das Ergebnis des roten bzw. gelben Würfels. Das W-Maß P sei die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es bezeichne A bzw. B bzw C das der Ereignisaussage „Roter Würfel liefert 2“ bzw „Augensumme beider Würfel ist gerade“ bzw „Augensumme beider Würfel ist höchstens 4“. Dann ist $A = \{(2,1), ..., (2,6)\}$ und es gilt $P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Weiter ist $\Omega\backslash B$ das der Ereignisaussage „Augensumme beider Würfel ist ungerade“ entsprechende Ereignis. Dies entsteht genau dadurch, dass einer der beiden Würfel eine gerade und der andere eine ungerade Zahl liefert. Hierfür gibt es genau $2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ Möglichkeiten. Folglich ist $P(\Omega\backslash B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$ also*

$P(B) = 1 - P(\Omega \backslash B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$. Wegen $C = \{(1,1),(1,2),(1,3),(2,1),(2,2),(3,1)\}$ gilt $P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}$. Es ist $A \cap B = \{(2,2),(2,4),(2,6)\}$, also $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Hieraus ergibt sich $P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A) \cdot P(B)$. Somit sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P. Es ist $A \cap C = \{(2,1),(2,2)\}$, also $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Hieraus ergibt sich $P(A \cap C) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A) \cdot P(C)$. Somit sind A und C stochastisch abhängig bezüglich P.

Stochastische Unabhängigkeit von A und B bezüglich P drückt aus, dass A und B w-theoretisch in dem Sinn keinen Einfluss aufeinander haben, dass die Informationen „A geschieht", wenn sie überhaupt positive P-Wahrscheinlichkeit hat, nichts an der Wahrscheinlichkeit von B ändert. Dies muss man genau von realer Beeinflussung unterscheiden. Stochastische Unabhähnigkeit ist ein in A und B symmetrischer Begriff. Bei realer Beeinflussung ist dies sicher nicht der Fall. Stochastische Unabhängigkeit von zwei Ereignissen A und B kann selbst dann vorliegen, wenn real das Eintreten von B davon abhängt, ob A geschieht. In Beispiel 2.2.1 etwa sind A und B stochastisch unabhängig, obwohl A mitbestimmt, ob B eintritt. Bei der Anwendung w-theoretischer Modelle wird die stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen vielfach im Modell postuliert, z.B. „Automat produziert Erzeugnis an einem Freitag" und „Erzeugnis ist normgerecht".

Satz 2.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P
   (ii) A und $\Omega \backslash B$ sind stochastisch unabhängig bezüglich P
   (iii) $\Omega \backslash A$ und $\Omega \backslash B$ sind stochastisch unabhängig bezüglich P
   (iv) $\Omega \backslash A$ und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P

b) Sei $P(B) = 0$. Dann sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P

c) Sei $P(B) = 1$. Dann sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P

Beweis.

a) 1.)"(i)⇒(ii)" Es gilt $A = (A \cap B) \cup [A \cap (\Omega \backslash B)]$ sowie $(A \cap B) \cap [A \cap (\Omega \backslash B)] = \emptyset$, also wegen $\{A \cap B, A \cap (\Omega \backslash B)\} \subseteq \mathfrak{A}$ dann $P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap (\Omega \backslash B))$. Hieraus sowie aus (i) folgt nun $P(A \cap (\Omega \backslash B)) = P(A) - P(A \cap B) \overset{(i)}{=} P(A) - P(A) \cdot P(B) = P(A)[1 - P(B)] = P(A) \cdot P(\Omega \backslash B)$, d.h es gilt (ii).
2.) „(ii)⇒(iii)" Aus (ii) und der schon bewiesenen Implikation „(i)⇒(ii)" ergibt sich, dass $\Omega \backslash A$ und $\Omega \backslash B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Es gilt also (iii).
3.) „(iii)⇒(iv)" Aus (iii) und der schon bewiesenen Implikation „(i)⇒(ii)" ergibt sich, dass $\Omega \backslash A$ und $\Omega \backslash (\Omega \backslash B) = B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Es gilt also (iv).
4.) „(iv)⇒(i)" Aus (iii) und der schon bewiesenen ergibt sich insbesondere die Implikation „(i)⇒(iv)" Hieraus sowie aus (iv) folgt dann, dass $\Omega \backslash (\Omega \backslash A) = A$ und B stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Es gilt also (i).

b) Wegen $A \cap B \in \mathfrak{A}$ und $A \cap B \subseteq B$ folgt aus $P(B) = 0$ und der Isotonie von P dann $P(A \cap B) = 0$, also $P(A \cap B) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) \cdot P(B)$. Somit sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.

c) Wegen $P(B) = 1$ ist $P(\Omega \backslash B) = 1 - P(B) = 0$. Hieraus und aus b) folgt, dass A und $\Omega \backslash B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus und aus $B = \Omega \backslash (\Omega \backslash B)$ folgt mittels (a), dass A und B stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

■

Satz 2.2.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $C \in \mathfrak{A}$ mit $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \backslash C \in \mathcal{N}_P$. Sei $B \in \mathfrak{A} \backslash \mathfrak{A}_{P,0}$. Dann gilt

a) Es gilt $\{B, \Omega \backslash B\} \subseteq \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$.

b) Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (i) Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.

   (ii) Es gilt $P(A|B) = P(A|(\Omega \backslash B))$.

Satz 2.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

a) Seien $A, C \in \mathfrak{A}$ derart gewählt, dass $C \subseteq A$ erfüllt ist und zudem jeweils stochastische Unabhängigkeit von A und B bzw. von B und C bezüglich P vorliegt. Dann gilt $A \backslash C \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $A \backslash C$ und B bezüglich P vor.

b) Seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in I}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $j \in I$ stochastische Unabhängigkeit von A_j und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcup\limits_{j \in I} A_j \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von $\bigcup\limits_{j \in I} A_j$ und B vor.

c) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ stochastische Unabhängigkeit von A_n und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und B bezüglich P vor.

d) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ stochastische Unabhängigkeit von A_n und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n$ und B bezüglich P vor.

Satz 2.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

a) Es seien $P(A) > 0$, $P(B) > 0$, und $A \cap B = \emptyset$. Dann sind A und B stochastisch abhängig bezüglich P.

b) Es seien $P(A) > 0$, $P(B) < 1$ und $A \subseteq B$. Dann sind A und B stochastisch abhängig bezüglich P.

Beweis.

a) Es gilt $P(A \cap B) = P(\emptyset) = 0 \neq P(A) \cdot P(B)$.

b) Es ist $P(\underbrace{A \cap B}_{=A}) = P(A) > P(A) \cdot P(B)$.

■

Folgerung 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und seien $A, B \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass $A \subseteq B$ erfüllt ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P

(ii) Es ist $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.

Beweis.

„$(i) \Rightarrow (ii)$" Wäre (ii) falsch, so ergibt sich aus der Tatsache, dass P Werte aus $[0, 1]$ annimmt, dass $P(A) > 0$ und $P(B) < 1$. Hieraus und aus Teil (b) von Satz 2.2.5 ergäbe sich dann, dass A und B stochastisch abhängig bezüglich P sind, was im Widerspruch zu (i) stünde.

„$(ii) \Rightarrow (i)$" Dies folgt sogleich aus den Teilen (b) und (c) von Satz 2.2.4.

■

Wir wenden uns nun jener Klasse von W-Räumen zu, in denen die stochastische Unabhängigkeit auf die minimal mögliche Variante reduziert ist.

Definition 2.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ **frei von stochastischer Unabhängigkeit**, falls jedes geordnete Paar $[A, B]$ von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen mindestens eines der Ereignisse $\emptyset$ oder Ω enthält.

Bemerkung 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, für den $\mathfrak{A} = \{\emptyset, \Omega\}$ erfüllt ist. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A})$ frei von stochastischer Unabhängigkeit.

Bemerkung 2.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \backslash A \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{P,0} = \{A \in \mathfrak{A} : \text{ Es ist } P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}$.

Bemerkung 2.2.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, welcher frei von stochastischer Unabhängigkeit ist und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \backslash A \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{P,0} = \{\emptyset, \Omega\}$.

v11
12.5.2009

Beispiel 2.2.2. *Sei $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}, \Omega_n := \{1, \ldots, n\}$ sowie ν_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$. Dann gilt:*

a) *Es ist* $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \nu_n)$ *ein W-Raum.*

b) *Sei* $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega_n)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent.*
   (i) *Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich* ν_n.
   (ii) *Es ist* $n \cdot \mathrm{card}\,(\mathrm{A} \cap \mathrm{B}) = \mathrm{card}\,\mathrm{A} \cdot \mathrm{card}\,\mathrm{B}$.

c) *Sei n keine Primzahl und seien k und l dann existierende Zahlen aus* $\{2, \ldots, n\}$ *mit* $k \cdot l = n$. *Weiterhin seien* $A := \{1, \ldots k\}$ *sowie* $B = \{r \cdot k | r \in \{1, \ldots, l\}$. *Dann gilt* $\{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_n) \backslash \{\emptyset, \Omega_n\}$ *und es liegt stochastische Unabhängigkeit von A und B bezüglich* ν_n *vor.*

d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   (i) $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \nu_n)$ *ist frei von stochastischer Unabhängigkeit.*
   (ii) *Es ist n eine Primzahl.*

Wir erweitern nun den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit auf beliebige Familien von Ereignissen.

Definition 2.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathfrak{J}$ eine nichtleere Indexmenge. Dann heißt eine Familie $(A_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$ **stochastisch unabhängig** bezüglich P, falls für jede nichtleere endliche Teilmenge $\mathfrak{J}' \subseteq \mathfrak{J}$ die Gleichung $P(\bigcap\limits_{j \in \mathfrak{J}'} A_j) = \prod\limits_{j \in \mathfrak{J}'} P(A_j)$ besteht. Andernfalls heißt $(A_j)_{j \in \mathfrak{J}}$ stochastisch abhängig bezüglich P.

Bemerkung 2.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathfrak{J}$ eine nichtleere Indexmenge und $(A_k)_{k \in \mathfrak{J}}$ eine Familie von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei τ eine Bijektion von $\mathfrak{J}$. Dann ist auch $(A_{\tau(j)})_{j \in \mathfrak{J}}$ eine Familie von stochastisch unabhängigen Ereignisen aus $\mathfrak{A}$.

Bemerkung 2.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $\mathfrak{J}$ eine nichtleere Indexmenge und $(A_k)_{k \in \mathfrak{J}}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $(A_k)_{k \in \mathfrak{J}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

b) Für jede nichtleere Teilmenge $\mathfrak{I} \subseteq \mathfrak{J}$ ist $(A_k)_{k \in \mathfrak{I}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

c) Für jede nichtleere endliche Teilmenge $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{J}$ ist die Folge $(A_k)_{k \in \mathfrak{H}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Satz 2.2.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter sei $(A_k)_{k=1}^3$ eine bezüglich P stochastisch unabhängig Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann sind $A_1 \cup A_2$ und A_3 stochastisch unabhängig bezüglich P.

Satz 2.2.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, sowie $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$ sowie $P(\bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} A_n) =$

$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n P(A_k)$.

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ ist, gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann wird definiert $B_n := \bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k$. Es ist dann $B_n \in \mathfrak{A}$ und es gilt $B_n \supseteq B_{n+1}$. Weiterhin gilt: $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Unter Beachtung der Oberhalbstetigkeit des <u>endlichen</u> Maßes P folgt dann $P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = P(\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(B_n) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcap\limits_{k=1}^{n} A_k) \overset{\text{stoch. unab.}}{=} \lim\limits_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n P(A_k)$. ∎

Wir demonstrieren nun anhand ausgewählter Beispiele verschiedene im Zusammenhang mit stochastisch unabhängig auftretende Phänomene. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Gemäß Definition 2.2.3 und der Tatsache, daß eine n-elementige Menge genau $2^n - 1$ nichtleere Teilmengen besitzt, besagt die stochastische Unabhängigkeit der Folge $(A_k)_{k=1}^n$ bezüglich P. dann das Bestehen von $2^n - 1$ Gleichungen. Berücksichtigt man hierbei, daß das Bestehen dieser Gleichungen für die 1-elementigen Teilmengen trivialerweise gegeben ist, so erkennt man, daß die stochastische Unabhängigkeit noch auf $2^n - (n+1)$ Gleichungen führt, von denen i.A. keine eine Konsequenz der anderen ist.

Bemerkung 2.2.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $\mathfrak{J}$ eine nichtleere Indexmenge. Ist dann $(A_j)_{j\in\mathfrak{J}}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$, welche paarweise stochastisch unabhängig bezüglich P sind (d.h. Für alle $j, k \in \mathfrak{J}$ mit $j \neq k$ gilt $P(A_j \cap A_k) = P(A_j)P(A_k)$), so ist $(A_j)_{j\in\mathfrak{J}}$, wie das folgende Beispiel zeigt, <u>nicht</u> notwendig stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beispiel 2.2.3. *Seien Ω eine vierelementige Menge mit den Elementen: $\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4$ und $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$, weiter sei P die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. (Etwa ein zeifacher fairer Münzwurf wird hier durch modelliert.) Es sei $A_1 := \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 := \{\omega_1, \omega_3\}$ sowie $A_3 := \{\omega_1, \omega_4\}$. Dann gilt $P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$. Weiter ergibt sich $A_1 \cap A_2 = A_3 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = \{\omega_1\}$, also $P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = P(A_3 \cap A_1) = \frac{1}{4}$. Somit sind A_1, A_2 und A_3 paarweise stochastisch unabhängig bezüglich P. Es gilt aber $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\}$, also $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = P(\{\omega_1\}) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$. Somit ist $(A_j)_{j=1}^3$ <u>nicht</u> stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Bemerkung 2.2.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $P\left(\bigcap\limits_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(A_j)$. Dann folgt hieraus, wie das folgende Beispiel zeigt, <u>nicht</u> notwendig die stochastische Unabhängigkeit der Folge $(A_j)_{j=1}^n$ bezüglich P.

Beispiel 2.2.4 (Fortsetzung von Beispiel 2.2.1)**.** *Seien $A_1 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 \in \{1, 2, 5\}\}$, $A_2 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 \in \{4, 5, 6\}\}$ sowie $A_3 := \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 + \omega_2 = 9\}$, d.h. es ist $A_3 = \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. Es gelten $P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2}$ und $P(A_3) = \frac{1}{9}$. Es ist $A_1 \cap A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega | \omega_1 = 5\}$, d.h. es ist $P(A_1 \cap A_2) =$*

$\frac{1}{6}$. *Es ist also* $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2}$. *Weiter ist* $A_1 \cap A_3 = \{(5,4)\}$, *also* $P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_1)P(A_3)$. *Es gilt* $A_2 \cap A_3 = \{(4,5),(5,4),(6,3)\}$, *also* $P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_2)P(A_3)$. *Somit ist keines aus den Ereignissen* A_1, A_2 *und* A_3 *gebildete Paar stochastisch unabhängig bezüglich P. Es ist aber* $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(5,4)\}$, *also* $P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_1)P(A_2)P(A_3)$.

Im nachfolgenden Beispiel bezeichne $\lambda^{(1)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$.

Beispiel 2.2.5. *Seien* $\Omega := [0,1), \mathfrak{A} := \mathcal{B}^1 \cap [0,1)$ *sowie* $P := Rstr._{\mathfrak{A}}\lambda^{(1)}$. *Für* $n \in \mathbb{N}$ *sei* $A_n := \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} [\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j-1}{2^n})$ *Dann gilt:*

a) *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann ist* $A_n \in \mathfrak{A}$.

b) *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt* $P(A_n) = \frac{1}{2}$.

c) *Die Folge* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ist stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Satz 2.2.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängig Ereignissen aus $\mathfrak{A}$.

a) Es ist $P(\bigcup\limits_{j=1}^n A_j) = 1 - \prod\limits_{j=1}^n [1 - P(A_j)]$.

b) Es ist $P(\bigcap\limits_{j=1}^n \Omega \backslash A_j) = \prod\limits_{j=1}^n [1 - P(A_j)]$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dann gilt

$$P(\bigcup_{j=1}^n [A_j \cap (\bigcap_{k\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{j\}} (\Omega\backslash A_k))]) = \sum_{j=1}^n P(A_j) \prod_{k\in\{1,\ldots,n\}\backslash\{j\}} (1 - P(A_k))$$

Folgerung 2.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen auf $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}$ sowie

$$P(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^n [1 - P(A_j)].$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Bemerkung 2.2.5 ist dann die Folge $(A_k)_{k=1}^n$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt mittels Teil a) von Satz 2.2.8 nun

$$P(\bigcup_{k=1}^n A_k) = 1 - \prod_{k=1}^n [1 - P(A_k)]. \tag{1}$$

Nach Konstruktion ist $(\bigcup\limits_{k=1}^n A_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=1}^n A_k) = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Hieraus sowie aus der Unterhalbstetigkeit von P folgt bei Beachtung von (1) dann $P(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k) = P(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{k=1}^n A_k)) = \lim\limits_{n\to\infty} P(\bigcup\limits_{k=1}^n A_k) = \lim\limits_{n\to\infty} [1 - \prod\limits_{k=1}^n (1 - P(A_k))]$. ■

Beispiel 2.2.6. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \{1, 2, \dots, \binom{49}{6}\}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Herr X gibt bei dem Wettspiel „6 aus 49“ bei n aufeinander folgenden Wochenziehungen jeweils k verschiedene Tippreihen ab. Wie groß ist dann die W. des Ereignisses $A_{n,k}$, welches der Ereignisaussage „Herr X erziehlt im Verlaufe dieser n Wochenziehungen mindestens einmal 6 richtige“ entspricht.*

Beweis. *Sei $j \in \{1, \dots, n\}$ und bezeichne A_j das der Ereignisaussage „Herr X erzielt bei der j-ten Wochenziehung 6 Richtige“ entsprechende Ereignis. Aufgrund der Versuchsbedingungen berechnet sich diese W. $P(A_j)$, wenn $p_k := \frac{k}{\binom{49}{6}}$ gesetzt wird, gemäß $P(A_j) = p_k$. Weiterhin gilt $A_{n,k} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Bei der Unterstellung der stochastisch unabhängig der Folge $(A_j)_{j=1}^n$ bezüglich P. ergibt sich mittels Teil a) von Satz 2.2.8 dann folgendes:*

$$P(A_{n,k}) = P(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - P(A_k)] = 1 - \prod_{k=1}^{n}[1 - p_k] = 1 - (1 - p_k)^n.$$

Ist z.B. $k = 10$ und $n = 2000$, was einem Zeitraum von ca. 38 Jahren entspricht, so ist $P(A_{2000,10}) = 0,00142$.

■

v12 18.5.2009

Es folgt nun eine zahlentheoretische Anwendung von Satz 2.2.8.

Beispiel 2.2.7. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es bezeichne k die Anzahl der verschiedenen Primzahlen in der Primzahlenzerlegung von n. Weiterhin sei $(p_j)_{j=1}^k$ eine Anordnung dieser k Primzahlen zu einer Folge. Es seien $\Omega_n := \{1, ..., n\}$, $\mathfrak{A}_n := \mathfrak{P}(\Omega_n)$ und P_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$. Dann gilt:*

(a) Sei $j \in \{1, ..., k\}$ und bezeichne $A_{j,n}$ die Menge aller $s \in \{1, .., n\}$, welche durch p_j teilbar sind. Dann gilt $P_n(A_{j,n}) = \frac{1}{p_j}$.

(b) Die Folge $(A_{j,n})_{j=1}^l$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P_n.

(c) Bezeichne B_n die Menge aller zu n teilerfremden Zahlen aus $\{1, .., n\}$. Dann gilt $B_n = \bigcap_{j=1}^{k} (\Omega \backslash A_{j,n})$ sowie

$$P_n(B_n) = \prod_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_j}).$$

Beweis ÜA.

Das Beispiel eröffnet uns einen Zugang zu einer der wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen.

Definition 2.2.4. Die Funktion $\phi \colon \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, welche jedem $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen aus $\{1, ..., n\}$ zuordnet, heißt die **Eulersche ϕ-Funktion**.

Satz 2.2.9. Es bezeichne ϕ die Eulersche ϕ-Funktion. Dann gilt:

(a) Es ist $\phi(1) = 1$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, bezeichne k die Anzahl der verschiedenen Primzahlen in der Primfaktorzerlegung von n und es seien $p_1, ..., p_k$ diese k Primzahlen. Dann gilt: $\phi(n) = n\left[\Pi_{j=1}^{k}(1 - \frac{1}{p_j})\right]$.

(c) Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass n_1 und n_2 teilerfremd sind. Dann gilt $\phi(n_1 \cdot n_2) = \phi(n_1) \cdot \phi(n_2)$.

Beweis: ÜA.

Wir betrachten nun einen W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen.
Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unendlich viele dieser Ereignisse eintreten, also für die W. $P(\overline{\lim_{n\to\infty}} A_n)$. Hierzu stellen wir zunächst einige Hilfsresultate bereit.

Lemma 2.2.1. Sei $x \in [0, 1)$. Dann gilt

$$\ln(1 - x) \leq -x.$$

Beweis.
Sei $x = 0$. Dann gilt

$$\ln(1 - 0) = \ln(1) = 0 \leq -0. \tag{1}$$

Sei nun $x \in (0, 1)$. Dann ist $1 - x \in (0, 1)$. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es dann ein $y \in (1 - x, 1)$ mit

$$-\ln(1-x) = \ln 1 - \ln(1-x) = (\ln)'(y)[1-(1-x)] = \frac{1}{y}x. \tag{2}$$

Abbildung 1: ln(1-x)

Wegen $y \in (1 - x, 1) \subseteq (0, 1)$ ist $\frac{1}{y} \in (1, +\infty)$, also

$$\frac{1}{y}x \geq x. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann $-\ln(1 - x) \geq x$ bzw.

$$\ln(1 - x) \leq -x. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann alles gezeigt. ■

Lemma 2.2.2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0,1]$. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k] \leq exp(-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k).$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein $s \in \{1,...,m\}$ mit $\alpha_s = 1$ existiert. Dann gilt

$$\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k] = 0 \leq exp\{-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\}. \tag{1}$$

Sei nun $(\alpha_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0,1)$. Wegen Lemma 2.2.1 gilt dann

$$\ln(\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_l]) = \sum_{k=1}^{n}\ln[1-\alpha_k] \leq -\sum_{k=1}^{n}\alpha_k \tag{2}$$

Aus (2) und dem monotonen Wachstums von $\exp(x)$ folgt nun

$$\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k] = exp\left\{\ln\left[\prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k]\right]\right\} \leq exp\left\{-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\right\} \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist alles gezeigt. ■

Lemma 2.2.3. Sei $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}}\alpha_k = +\infty$. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=0}^{n}[1-\alpha_k] = 0.$$

Beweis. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Lemma 2.2.2 gilt dann

$$0 \leq \prod_{k=1}^{n}[1-\alpha_k] \leq exp\{-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\}. \tag{1}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty}\sum\limits_{k=1}^{n}\alpha_k = +\infty$ und $\lim\limits_{n\to\infty} exp(-n) = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} exp\{-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\} = 0. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty}\prod\limits_{k=1}^{n}[1-\alpha_k] = 0$. ■

Satz 2.2.10 (Zweites Lemma von Borel-Cantelli)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$. Weiter sei $A := \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Dann gilt $A \in \mathfrak{A}$ sowie $P(A) = 1$.

Beweis. Es gilt $A = \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup\limits_{k=n}^{\infty} A_k)$, also

$$\Omega\backslash A = \Omega\backslash[\bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k)] = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\Omega\backslash[\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k]) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcap_{k=n}^{\infty} (\Omega\backslash A_k)). \tag{1}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $l \in \{n, n+1...\}$, dann wird gesetzt

$$C_{n,l} := \bigcap_{k=n}^{l} (\Omega\backslash A_k). \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ ist, folgt aus (2) dann

$$C_{n,l} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Aus (2) folgt weiterin

$$C_{n,l} \supseteq C_{n,l+1} \supseteq \cdots \tag{4}$$

sowie

$$\bigcap_{l=n}^{\infty} C_{n,l} = \bigcap_{l=n}^{\infty} [\bigcap_{k=n}^{l} (\Omega\backslash A_k)] = \bigcap_{l=n}^{\infty} (\Omega\backslash A_k). \tag{5}$$

Aus (3),(4) und (5) und der Oberhalbstetigkeit des endlichen Maßes P folgt dann:

$$P(\bigcap_{l=n}^{\infty} (\Omega\backslash A_k)) = P(\bigcap_{l=n}^{\infty} C_{n,l}) = \lim_{n\to\infty} P(C_{n,l}). \tag{6}$$

Sei $l \in \{n, n+1, ...\}$. Da die Folge $(A_k)_{k=n}^{l}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, liefert Teil (b) von Satz 2.2.8 dann:

$$P(C_{n,l}) \overset{(2)}{=} P(\bigcap_{l=n}^{\infty} (\Omega\backslash A_k)) = \prod_{k=n}^{l} [1 - P(A_k)]. \tag{7}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = +\infty. \tag{8}$$

Nach Wahl von P gilt für

$$s \in \mathbb{N} \text{ zudem } P(A_s) \in [0, 1]. \tag{9}$$

Wegen (7)–(9) liefert Lemma 2.2.3 dann

$$\lim_{l\to\infty} P(C_{n,l}) = \lim_{l\to\infty} \prod_{k=n}^{l} [1 - P(A_k)] = 0. \tag{10}$$

Aus (6) und (10) folgt nun

$$P(\bigcap_{l=n}^{\infty} (\Omega\backslash A_k)) = 0. \tag{11}$$

Wegen (1) und (11) liefert Teil (d) von Satz M.5.1 dann:
$P(\Omega \backslash A) = 0$. Somit ist

$$P(A) = 1 - P(\Omega \backslash A) = 1 - 0 = 1.$$

■

Folgerung 2.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$, welche eine bezüglich P stochastisch unabhängige Teilfolge $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ besitzt, für die $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}} P(A_{n_k}) = +\infty$ erfüllt ist. Es sei $A := \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$, dann gelten $A \in \mathfrak{A}$ und $P(A) = 1$

Beweis. Beweis: Sei $\tilde{A} := \limsup\limits_{n\to\infty} A_{n_k}$. Wegen Satz 2.2.10 gelten dann

$$\tilde{A} \in \mathfrak{A} \text{ und } P(\tilde{A}) = 1. \tag{1}$$

Aus der Definiton des oberen Limes einer Mengenfolge ergibt sich:

$$\tilde{A} = \limsup_{k\to\infty} A_{n_k} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_{n_k} \subseteq \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \limsup_{k\to\infty} A_n = A. \tag{2}$$

Aus (1),(2) und der Isotonie von P folgt dann $1 = P(\tilde{A}) \leq P(A) \leq 1$, also $P(A) = 1$. ■

Das folgende Beispiel zeigt, dass die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit in Satz 2.2.10 wesentlich ist.

Beispiel 2.2.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter sei $B \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass $P(B) \in (0,1)$ erfüllt ist. Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := B$ und es sei $A := \limsup\limits_{k\to\infty} A_k$. Wegen $P(B) \in (0,1)$ gilt $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(B) = +\infty$. Andererseits ist wegen*

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k=n}^{\infty} B) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} B = B$$

dann

$$P(A) = P(B) \in (0,1).$$

Die Kombination von Satz 2.2.10 und Satz M.5.2 erbringt dann

Satz 2.2.11. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei $A := \limsup\limits_{n\to\infty} A_n$. Dann gilt:

(a) Es ist $A \in \mathfrak{A}$ und es gilt $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) < +\infty$.

(ii) Es ist $P(A) = 0$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent

(iii) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} P(A_n) = +\infty$.

(iv) Es ist $P(A) = 1$.

Wir geben nun eine Verschäfung von Satz 2.2.1 an.

Satz 2.2.12. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und I eine nichtleeere Indexmenge. Weiterhin sei $(A_k)_{k\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$.
Es bezeichne $\mathcal{H}(I)$ das System der endlichen Teilmengen von I. Wir setzen weiterhin: $\bigcap\limits_{j\in I} A_j := \Omega$, $\bigcap\limits_{j\in I}(\Omega\backslash A_j) := \Omega$ sowie $\prod\limits_{j\in I} P(A_j) := 1$ und $\prod\limits_{j\in I} P(\Omega\backslash A_j) := 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivivalent:

(i) Die Familie $(A_k)_{k\in I}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

(ii) Für jedes geordnete Paar $[J, K] \in \mathcal{H}(I) \times \mathcal{H}(I)$, für das $J \cap K = \emptyset$ erfüllt ist, gilt:

$$P\left(\left[\bigcap_{j\in J}(\Omega\backslash A)\right] \cap \left[\bigcap_{k\in K} A_k\right]\right) = \left[\prod_{j\in J} P(\Omega\backslash A_j)\right] \cdot \left[\prod_{j\in J} P(A_k)\right].$$

(iii) Falls für $k \in I$ für B_k jeweils eine der Mengen A_k oder $\Omega\backslash A_k$ gewählt wird, so ist die Familie $(B_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis. Induktion über Anzahl der Elemente von J. ■

Mit Hilfe von Satz 2.2.12 lässt sich ein rascher alternativer Zugang zu 2.2.8 erreichen.
Beweis. (Alternativer Beweis von Satz 8). Wegen Satz 2.2.12 ist die Folge $(\Omega\backslash A_j)_{j=1}^n$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt dann:

$$P(\bigcap_{j=1}^{n}(\Omega\backslash A_j)) = \prod_{j=1}^{n} P(\Omega\backslash A_j) = \prod_{j=1}^{n}[1 - P(A_j)].$$

■

Satz 2.2.13. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $(A_k)_{k=1}^n$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(ii) Falls für $j \in \{1, ..., n\}$ für B_j jeweils eine der Mengen A_j oder $\Omega\backslash A_j$ gewählt wird, so ist $P(\bigcap\limits_{j=1}^{n} B_j) = \prod\limits_{j=1}^{n} P(B_j)$.

Beweis: Mittels vollständiger Induktion

v13
19.5.2009

3. Einige einführende Betrachtungen über Markovsche dynamische Ketten mit endlichem Zustandsraum

In vielen Fällen lässt sich die Evolution eines gewissen Phänomens durch die Veränderung der Zustände eines dynamischen Systems ausdrücken. Hierbei unterscheidet man zwischen deterministischen und stochastischen dynamischen Systemen (kurz DDS bzw SDS). Unter einem **deterministischen dynamischen System** verstehen wir ein geordnetes Paar (Ω, T) bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer Abbildung $T : \Omega \to \Omega$. Hierbei wird dann Ω als der Zustandsraum des deterministisches dynamisches System s (Ω, T) angesehen und die Elemente von Ω heißen die Zustände von (Ω, T). Die Abbildung T beschreibt die Bewegung von (Ω, T). Befindet sich das System zum Zeitpunkt t im Zustand ω, so wird es sich für $k \in \mathbb{N}$ zum Zeitpunkt $t+k$ im Zustand $T^k(\omega)$ befinden. Besonders einfach sind jene deterministischen dynamischen Systeme mit endlichem Zustandsraum Ω. Wir werden uns in diesem Abschnitt mit speziellen stochastischen dynamischen Systemen mit endlichem Zustandsraum Ω beschäftigen. Eine derartige stochastische Dynamik lässt sich durch spezielle Matrizen beschreiben.

3.1. Einige Aussagen über stochastische Matrizen

Es wird sich als vorteilhaft erweisen, die Übergangswahrscheinlichkeit, welche dem von uns betrachteten stochastischen dynamischen System zugrunde liegt, in geeigneter Weise in Matrizen zusammenzufasen. Dies führt uns auf eine spezielle Klasse von Matrizen, deren Untersuchung dieser Abschnitt gewidmet ist.

Beispiel 3.1.1 (Winterwetter in Israel)**.** *Gemäß längerer Beobachtungen wurde folgende Beschreibung des Wetters in Israel in den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar angegeben. Ist es an einem Tag dieses Zeitraums trocken, so ist es am nächsten Tag mit Wahrscheinlichkeit 3/4 trocken, während es mit Wahrscheinlichkeit 1/4 regnet. Regnet es hingegen an einem Tag dieses Zeitraums, so regnet es am nächsten Tag mit der Wahrscheinlichkeit 2/3, während es mit der Wahrscheinlichkeit 1/3 trocken ist.*

heute \ morgen	*trocken*	*Regen*
trocken	$\frac{3}{4}$	$\frac{1}{4}$
Regen	$\frac{1}{3}$	$\frac{2}{3}$

Wir erhalten also die Matrix

$$A := \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

deren Zeilensummen den Wert 1 haben. Wir werden somit auf folgende Begriffsbildung geführt.

Definition 3.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{jk})_{j,k=1}^n$ eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n \times n}$ mit nichtnegativen Elementen:

a) Es heißt A **stochastisch**, falls für alle $j \in \{1, ..., n\}$ gilt $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk} = 1$.

b) Es heißt A **doppelstochastisch**, falls A und A^T stochastisch sind. Es bezeichne dann $\mathbb{R}_{st}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{R}_{dst}^{n\times n}$ die Menge aller stochastisch bzw. doppeltstochastischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$.

Bemerkung 3.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und A eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Elementen. Weiterhin sei $1_n := (1, ..., 1)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist $A \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$.

   (ii) Es ist $A \cdot 1_n = 1_n$.

   (iii) Es ist 1 ein Eigenwert von A und 1_n ein zugehöriger Eigenvektor.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (iv) Es ist $A \in \mathbb{R}_{dst}^{n\times n}$.

   (v) Es gelten $A \cdot 1_n = 1_n$ und $A^T \cdot 1_n = 1_n$.

   (vi) Es ist 1 ein Eigenwert von A und A^T und 1_n jeweils ein zugehöriger Eigenvektor.

Beweis. Sei $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{n}$. Dann gilt

$$A \cdot 1_n = [(a_{jk})_{j,k=1}^{n}] \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^{n} a_{1k} \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^{n} a_{nk} \end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt sogleich die Äquivalenz von a)(i) und a)(ii), während die von a)(ii) und a)(iii) sogleich aus den Begriffsbildungen von Eigenwert und Eigenvektor folgt. b) folgt unmittelbar aus a). ■

Satz 3.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$, dann ist $A \cdot B \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$.

b) Seien $A, B \in \mathbb{R}_{dst}^{n\times n}$, dann ist $A \cdot B \in \mathbb{R}_{dst}^{n\times n}$.

Beweis.

a) Wegen $A, B \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$ haben A und B nichtnegative Elemente. Damit hat auch $A \cdot B$ nichtnegative Elemente. Wegen $A, B \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$ gelten nach Teil (a) von Bemerkung 3.1.1 dann $A \cdot 1_n = 1_n$ und $B \cdot 1_n = 1_n$. Hieraus folgt $(AB)1_n = A(B1_n) = A1_n = 1_n$, also erneut mittels Teil (a) von Bemerkung 3.1.1 dann $AB \in \mathbb{R}_{st}^{n\times n}$.

b) Wegen $A, B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$ gelten $A^T, B^T \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Hieraus folgt mittels (a) dann $B^T \cdot A^T \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$, also wegen $B^T \cdot A^T = (AB)^T$ dann $(AB)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Es ist also $AB \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$.

■

Folgerung 3.1.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $(\mathbb{R}^{n\times n}_{st}, \cdot)$ sowie $(\mathbb{R}^{n\times n}_{dst}, \cdot)$ jeweils Halbgruppen mit Einselement I_n.

Folgerung 3.1.2. Seien $n \in \mathbb{N}, k \in \mathbb{N}_0(:= \{0, 1, 2, ...\})$ sowie A eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ bzw. $\mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$. Dann gilt $A^k \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ bzw. $A^k \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$.

Satz 3.1.2. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ bzw. $\mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$ mit Grenzwert A. Dann gehört auch A zu $\mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ bzw. $\mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$.

Beweis.

a) Da $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Matrizen mit nichtnegativen Elementen ist, gilt dies auch für deren Grenzwert A und folglich auch für A^T. Sei $k \in \mathbb{N}$. Wegen $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ ist nach Teil (a) von Bemerkung 3.1.1 dann $A_k \cdot 1_n = 1_n$ und falls $A_k \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$ zudem $(A_k)^T \cdot 1_n = 1_n$. Damit ergibt sich

$$1_n = \lim_{k\to\infty} (A_k 1_n) = (\lim_{k\to\infty} A_k) \cdot 1_n = A \cdot 1_n$$

bzw.

$$1_n = \lim_{k\to\infty} [(A_k)^T 1_n] = (\lim_{k\to\infty} A_k)^T 1_n = A^T 1_n.$$

Hieraus folgt erneut mittels Teil (a) von Bemerkung 3.1.1 dann $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$ bzw. $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$.

■

3.2. Definition und erste Beispiele von Markovschen dynamischen Systemen mit endlichem Zustandsraum

Wir studieren in diesem Abschnitt das Konzept der Markovschen Dynamik auf einer endlichen Menge. Hierbei werden wir erkennen, dass die Untersuchung derartiger dynamischer Systeme mit der Untersuchung verschiedener Eigenschaften stochastischer Matrizen hinausläuft.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien Ω eine n-elementige Menge, deren Elemente $\omega_1, ..., \omega_n$ als Zustände interpretiert werden. Es sei $A = (a_{jk})^n_{j,k=1} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Dann beschreibt A jenen stochastischen Vorgang auf Ω, welcher dadurch charakterisiert ist, dass für alle $(j, k) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von Zustand j in den Zustand k gerade durch a_{jk} gegeben ist. Sei nun auch $B \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Wir nehmen an, dass die durch A bzw B beschriebenen stochastischen Vorgänge auf Ω unabhängig voneinander verlaufen. Seien $j, k, l \in \{1, ..., n\}$. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand ω_j des Systems zunächst unter Einwirkung des von A beschriebenen stochastischen Vorgangs in ω_k und dann unter Einwirkung des von B beschriebenen stochastischen Vorgangs in ω_l übergeht, also gerade $a_{jk}b_{kl}$. Aufgrund der Additivität der Wahrscheinlichkeit ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System unter der zusammengesetzten, aber unabhängig voneinander ablaufenden Einwirkungen der von A und B beschriebenen stochastischen Vorgänge von Zustand ω_j in den Zustand ω_l überführt wird, gerade $\sum\limits_{k=1}^{n} a_{jk}b_{kl}$, d.h., diese Wirkung wird durch die stochastische Matrix $A \cdot B$ beschrieben.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine n-elementige Menge mit den Elementen $\omega_1, ..., \omega_n$. Weiterhin sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}_{st}^{n\times n}$. Dann beschreibt die Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Folge von in diskreten Zeitpunkten ablaufenden stochastischen Zustandänderungen, welche unabhängig voneinander erfolgen. Für $s \in \mathbb{N}$ beschreibt hierbei die Matrix A_s die Änderung des Zustandes zwischen den Zeitpunkten $s-1$ und s. Sind dann $s_1, s_2 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $s_1 < s_2$ erfüllt ist, so wird nach den obigen Ausführungen die Änderung des Systemzustandes zwischen den Zeitpunkten s_1 und s_2 gerade durch die Matrix

$$\prod_{r=1}^{\overrightarrow{s_2-s_1}} A_{s_1+r}$$

beschrieben. Charackteristisch für das eben beschriebene Modell ist, dass bei beliebigen $s \in \mathbb{N}$ die Änderung des Zustandes zwischen den Zeitpunkten $s-1$ und s nur vom Zustand zum Zeitpunkt $s-1$ selbst und nicht von der Vorgeschichte, d.h. der Trajektorie auf der der Zustand zum Zeitpunkt $s-1$ erreicht wurde, abhängt. Man spricht dann davon, dass ein stochastisches Modell mit **Markov-Eigenschaft** vorliegt. Wir sind nun insbesondere an solchen Situationen interessiert, in denen die stochastische Zustandsänderungen zeitunabhängig verlaufen. Dies bedeutet, dass die obige Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}_{st}^{n\times n}$ eine konstante Folge ist. Es bezeichne A den konstanten Wert dieser Folge. Aufgrund der obigen Betrachtungen wird bei beliebigem Zeitpunkt $s \in \mathbb{N}$ die Zustandsänderung des Systems zwischen den Zeitpunkten 0 und s durch die Matrix A^s beschrieben.

Beispiel 3.2.1 (Fortsetzung von Beispiel 3.1.1). *Die dortige Zustandsmenge Ω ist zweielementig und besteht aus den Elementen ω_1 und ω_2, welche Trockenheit bzw. Regen symbolisieren. Gemäß dieser Numerierung wird die Markovsche Dynamik auf Ω durch die Matrix*

$$A = \begin{pmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{4} \\ \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \end{pmatrix}$$

beschrieben. Wir stellen uns vor, wir währen im betrachteten Zeitraum an einem regnerischen Freitag in Israel angekommen und fragen uns nach der Wahrscheinlichkeit für einen trockenen Sonntag. Nach den obigen Ausführungen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dann gerade das Element der linken unteren Ecke der Matrix A^2, also

$$\frac{1}{3} \cdot \frac{3}{4} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{9+8}{36} = \frac{17}{36}.$$

Zahlreiche der hier betrachtteten Markovschen dynamischen Systeme mit endlichen Zustandsraum haben die Eigenschaft, daß man vom Zustand j in Elementarprozeß nur in die Zustände j-1, j, oder j+1 gelangen kann. Die zugehörigen Übergangsmatrizen haben dann Triagonalgestalt, also die Form:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \cdots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & a_{n,n-1} & a_{nn} \end{pmatrix}$$

Beispiel 3.2.2. *Sei $n \in \{2,3,\dots\}$. Es seien n weiße und n schwarze Kugeln auf zwei Urnen U_1 und U_2 verteilt und zwar n Kugeln in jeder Urne. Für $j \in \{0,1,\dots,n\}$ liege der Zustand j vor, falls genau j weiße Kugeln in der Urne U_1 sind. Der Elementarprozeß verlaufe wie folgt: Wir ziehen blind je eine Kugel aus U_1 und U_2, wobei jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$ gezogen werde, und vertauschen die beiden Kugeln. Es bezeichne $A=(a_{j,k})_{j,k=0}^{n}$ die zugehörige Übergangsmatrix. Aufgrund der Versuchsbedinungen hat A die Triagonalgestalt. Wir bestimmen nun die Elemente von A. Zunächst ist klar, daß für alle $(j,k) \in \{0,1,\dots,n\} \times \{0,1,\dots,n\}$ mit $|j-k| \geq 2$ gilt $a_{jk} = 0$. Sei $j \in \{0,1,\dots,n\}$. Falls sich das System im Zustand j befindet, sind also j weiße und $n-j$ schwarze Kugel in U_1 und dementsprechend $n-j$ weiße und j schwarze Kugeln in U_2. Dann ist also a_{jj} die Wahrscheinlichkeit des ziehens eines Kugelpaars „weiß aus U_1, weiß aus U_2“, bzw. „schwarz aus U_1, schwarz aus U_2“. Folglich ist $a_{jj} = \frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{2j(n-j)}{n^2}$. Sei nun $j \in \{1,\dots,n\}$. Dann ist $a_{j,j-1}$ die Wahrscheinlichkeit für das ziehen eines Kugelpaars „weiß aus U_1, schwarz aus U_2“. Folglich ist $a_{j,j-1} = \frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{j^2}{n^2}$. Sei nun $j \in \{0,\dots,n-1\}$. Dann ist $a_{j,j+1}$ die Wahrscheinlichkeit für das ziehen des Paares „schwarz aus U_1, weiß aus U_2“. Folglich ist: $a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} = \frac{(n-j)^2}{n^2}$.*

Wir wenden uns jetzt einem Diffusinonsmodell zu, welches von den theoretischen Physikern Tatjana Ehrenfest (1876-1964) und Paul Ehrenfest (1880-1933) entwickelt wurde.

Beispiel 3.2.3 (Ehrenfestsches Diffusionsmodell). *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Ein Gefäß sei durch eine durchlässige Membran in zwei Kammern T_1 und T_2 zerlegt. Im Gefäß seien n Moleküle derselben Art. Für $j \in \{0,1,\dots,n\}$ liege der Zustand j vor, falls genau j Moleküle in der Kammer T_1 sind. Im Elementarprozeß wechsele genau eines der Moleküle die Kammer, jedes mit der Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{n}$. Wir bestimmen nun die Übergansgsmatrix $A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{n}$. Zunächst ist klar, daß für alle $(j,k) \in \{0,1,\dots,n\} \times \{0,1,\dots,n\}$ mit $|j-k| \geq 2$ gilt $a_{jk} = 0$. Weiterhin ist klar, daß für alle $j \in \{0,1,\dots,n\}$ gilt $a_{jj} = 0$. Sei $j \in \{0,1,\dots,n\}$. Falls sich das System im Zustand j befindet, so sind j Moleküle in T_1 und n-j in T_2. Sei $j \in \{0,1,\dots,n-1\}$. Dann ist also $a_{j,j+1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül aus T_2 nach T_1 diffundiert.*

Folglich ist $a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n}$. Sei nun $j \in \{1, \dots, n\}$. Dann ist $a_{j,j-1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, daß ein Molekül aus T_1 nach T_2 diffundiert. Somit ist $a_{j,j-1} = \frac{j}{n}$.

Beispiel 3.2.4 (Ruinproblem eines Spielers)**.** *Zwei Spieler S_1 und S_2 spielen gegeneinander. In jeder Zeiteinheit wird ein Spiel gespielt, das mit einem Sieg eines der beiden Spieler oder Remis endet. Hierbei gewinne bzw. verliere der Spieler S_1 stets mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. q, während $r := 1-p-q$ die Wahrscheinlichkeit für ein Remis ist. Weiter gebe die Zahl $m \in \{2, 3, \dots\}$ das vorhandene Gesamtkapital beider Spieler an. Nach jedem Spiel zahlt der unterlegene Spieler dem Sieger eine Geldeinheit aus. Endet ein Spiel Remis, so wird kein Geld ausgezahlt. Es wird vereinbart, daß das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler S_1 oder S_2 ruiniert ist, d.h., kein Geld mehr besitzt. Wir modellieren nun das vorliegende Spiel als Markovsches dynamisches System. Für $j \in \{0, 1, \dots, m\}$ liege der Zustand j vor, falls das Kapital des Spielers S_1 genau j Geldeinheiten beträgt. Wir bestimmen nun die Übergangsmatrix $A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{m}$. Zunächst ist klar, daß für alle $(j,k) \in \{0, 1, \dots, m\} \times \{0, 1, \dots, m\}$ mit $|j-k| \geq 2$ gilt $a_{jk} = 0$. Für $j \in \{0, \dots, m\}$ gilt weiterhin*

$$a_{jj} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \{0, m\} \\ r, & \text{falls } j \in \{1, \dots, m-1\} \end{cases}$$

Für $j \in \{1, \dots, m-1\}$ gilt $a_{j,j-1} = q$ bzw. $a_{j,j+1} = p$.

M. Eigen und R. Winkler beschreiben in ihrem Buch „Das Spiel—Naturgesetze steuern den Zufall“ so genannte Kugelspiele, die dazu dienen sollen, Mechanismen der Evolution zahlenmäßig zu erfassen. Eines dieses Kugelspiele ist das sogenante Selektionsspiel welches wir hier in einer vereinfachten Version beschreiben.

Beispiel 3.2.5. *Seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $n = r + s$. Dann stelle man sich die folgende Situation vor. Zwei Populationen, welche Nachfolgend als rote bzw. schwarze Kugeln angesprochen werden, teilen sich einen „Lebensraum“ mit den Plätzen $1, \dots, n$. Zu Beginn der Beobachtung seien r rote und s schwarze Kugeln auf dem Lebensraum verteilt. Es werde weiterhin angenommen, daß Kugeln „sterben“ können und „geboren“ werden nach dem folgenden Vefahren.*

1) *Eines der Plätze $1, \dots, n$ wird „zufällig“ ausgewählt, die dort befindliche Kugel „stirbt“.*

2) *Aus den restlichen n-1 Plätzen wird einer „zufällig“ ausgewählt. Ist die dort befindliche Kugel rot bzw. schwarz, so wird die im vorangegangenen Schritt entstandene Leerstelle mit einer „neugeborenen“ roten bzw. swhwarzen Kugel aufgefüllt.*

Wir modellieren nun diesen Vorgang als Markovsches dynamisches System. Wir wählen den Zustandsraum $\Omega = \{0, 1, \dots, n\}$. Für $j \in \{0, 1, \dots, n\}$ bedeute der Zustand j hierbei, daß genau j rote Kugeln vorhanden sind. Wir bestimmen die Übergangsmatrix $A = (a_{j,k})_{j,k=0}^{n}$. Zunächst ist klar, daß die Zustände $j = 0$ und $j = n$ durch den Elementarprozeß in sich selbst überführt werden. Es ist also $a_{00} = 1$ und $a_{nn} = 1$. Sei nun $j \in \{1, \dots, n-1\}$ und es möge der Zustand j vorliegen. Dann kann nach dem Elementarprozeß nur ein Übergang in genau einen der Zustände $j-1, j$ oder $j+1$ vollzogen werden.

Folglich gilt für alle $(j,k) \in \{0,1,\dots,n\} \times \{0,1,\dots,n\}$ mit $|j-k| \geq 2$ dann $a_{jk} = 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, daß ein Übergang vom Zustand j in den Zustand j-1 vollzogen wird. Dann stirbt also eine rote Kugel und es wird eine schwarze Kugel geboren. Hieraus folgt dann $a_{j,j-1} = \frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n-1}$. Es möge nun ein Übergang von Zustand j in den Zustand j vollzogen werden. Dann stirbt entweder eine rote Kugel und es wird eine rote Kugel geboren, oder es stirbt eine schwarze Kugel und es wird eine schwarze geboren. Folglich gilt $a_{jj} = \frac{j}{n} \cdot \frac{j-1}{n-1} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j-1}{n-1}$. Es möge nun schließlich der Übergang vom Zustand j in den Zustand j+1 vollzogen werden. Dann stirbt eine schwarze Kugel und es wird eine rote geboren. Hieraus folgt dann $a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n-1}$. Insbesondere gilt also $a_{j,j+1} = a_{j,j-1}$.
Die zufallsgesteurete Entwicklung der roten Population kann als Überlagerung zweier Zufallsmechanismen gedeutet werden, nähmlich einer symmetrischer Irrfahrt startend im Punkt $(0,r)$ und eines „Dehnungsmechanismus“, welcher, wenn das System zum Zeitpunkt j sich im Zustand k befindet, sich mit Wahrscheinlichkeit a_{kk} dazu entschließt, die Population unverändert zu lassen und mit Wahrscheinlichkeit $1-a_{kk}$ dazu, einen Schritt einer Symmetrischer Irrfahrt durchzuführen.

3.3. Einige Beispiele zur Untersuchung des Langzeitverhaltens von Markovschen dynamischen Systemen mit endlichen Zustandsraum

Wir wollen in diesem Abschnitt anhand einiger examplarischer Beispiele erste Eindrücke über das Langzeitverhalten spezieller Markovscher dynamischer Systeme mit endlichen Zustandsraum vermitteln.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine n-elementige Zustandsmenge. Weiter sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Dann wird die durch A induzierte Markovsche Dynamik auf Ω durch die Folge $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ bestimmt. Ist die Folge $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ konvergent so ist deren Grenzwert nach Satz 3.1.2 eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Die Untersuchung des Langzeitverhaltens von n-elementigen Systemen mit Markovscher Dynamik führt also auf das Studium des Grenzverhaltens der Folge $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ für Matrizen $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{st}$. Wir wollen diese Frage hier nicht systematisch aufgreifen. Wir betrachten hier einige Beispiele, die sich mit Hilfe geeigneter „Rechentricks“ behandeln lassen.

v15
26.5.2009

Beispiel 3.3.1. *Seien $p,q \in [0,1]$, sowie $A := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$*
Dann gilt:

(a) *Es ist $A \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{st}$.*

(b) *Sei $p=0$ und $q=0$. Dann gilt $A = I_2$ und $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = I_2$*

(c) *Sei $p=1$ und $q=1$. Dann gilt $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ und für $r \in \mathbb{N}$ gilt $A^{2r} = I_2$ und $A^{2r-1} = A$.*
Somit ist die Folge $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ nicht konvergent.

(d) *Sei* $1-p-q \in (-1,1)$*. Dann gilt* $p+q \neq 0$ *sowie* $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$.

Beweis. *ÜA.* ∎

Interpretation von Beispiel 3.3.1.

Eine Nachricht der Form „Ja" oder „Nein" (etwa „x lebt noch" oder „x ist tot") werde mündlich weitergegeben. Bei der Weitergabe werde sie möglicherweise verfälscht, und zwar wie folgt: Mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ wird „ja" als „ja" weitergegeben, mit der Wahrscheinlichkeit p wird „ja" als „nein" weitergegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit q wird „nein" zu „ja" verfälscht und mit Wahrscheinlichkeit $1-q$ wird „nein" unverfälscht weitergegeben. Die Zustände des zugrunde liegenden Markovschen Dynamisches System (DS) seien das Vorliegen der Nachricht „ja" oder „nein". Die Übergangsmatix ist dann also $A = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}$. Die Übergangswahrscheinlichkeit für eine Kette von s Personen sind dann also die Elemente von A^s. Im Fall $1-p-q \in (-1,1)$ ist dann also $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \frac{1}{p+q}\begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}$. Ist $p = q \in (0,1)$ (d.h. es liegt eine unparteiische Verfälschung der Nachricht vor) so gilt: $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$. Nach einer langen Kette von Zwischenträgern haben wir also mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ die Ankunft der unverfälschten Ausgangsnachricht zu erwarten.

Beispiel 3.3.2. *Seien* $n \in \{2,3,...\}, a \in [0,1]$ *und* $b := \frac{1-a}{n-1}$.

Weiter sei $A = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}$.

Dann gilt:

(a) *Es ist* $A \in \mathbb{R}^{n\times n}_{dst}$ *(dst:= doppelt stochastisch).*

(b) *Sei* F_n *jene Matrix aus* $\mathbb{R}^{n\times n}$*, deren Elemente sämtlich den Wert 1 besitzen. Weiter sein* $a-b \in (-1,1)$*. Dann gilt* $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \frac{1}{n}F_n$.

(c) *Sei* $a-b \in [1,+\infty)$*. Dann ist* $A = I_n$*, also insbesondere* $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = I_n$.

(d) *Sei* $a-b \in (-\infty,-1]$*. Dann gilt* $a=0, b=1$ *für* $n=2$*, d.h. es ist* $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ *und die Folge* $(A^s)_{s\in\mathbb{N}}$ *konvergiert nicht.*

Interpretation von Beispiel 3.3.2

Es sei $n \in \{2, 3, ...\}$ und es sein eine Situation gegeben, in der n Firmen je ein Produkt gleicher Art (z.B. Tafelwerke) anbieten. Für $j \in \{1, .., n\}$ befinde sich unser Konsument im Zustand j, wenn er beim letzten Kauf das Produkt der j-ten Firma gewählt hat. Er verhält sich nun so: Mit Wahrscheinlichkeit a bleibt er beim Produkt des letzten Kaufes, mit Wahrscheinlichkeit $b := \frac{1-a}{n-1}$ wählt er irgendeines der $n - 1$ anderen Produkte. Die Übergangsmatrix ist dann A aus Beispiel 3.3.2. Im Fall $a - b \in (-1, 1)$ ist dann also $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \frac{1}{n} F_n$. Alle Firmen haben schließlich denselben Anteil am Konsum des Käufers.

Weitere Interpretation von Beispiel 3.3.2

für den Fall $n = 4$. Vorgegeben sei ein Labyrinth mit vier Kammern, in welchem je zwei Kammern durch eine Tür verbunden sind. In diesem Labyrinth sitze eine Maus. Für jedes $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ befinde sich das zugehörige System im Zustand j, falls sich die Maus in der Kammer j befindet. Im Elementarprozess verhalte sich die Maus wie folgt: Mit der Wahrscheinlichkeit a bleibe sie in der Kammer j mit der Wahrscheinlichkeit $b = \frac{1}{3}(1-a)$ wechsele sie in eine der restlichen Kammern. Im Fall $a-b \in (-1, 1)$ ist dann also $\lim\limits_{s\to\infty} A^s = \frac{1}{4} F_n$. Nach langer Zeit ist für $j \in \{1, 2, 3, 4\}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, die Maus in der Kammer j zu finden, gerade $\frac{1}{4}$ und zwar unabhängig davon, wo sich die Maus am Anfang des Prozesses befand.

v25
6.7.2009

4. Zufallsvariable und ihre Verteilung

4.1. Definitionen und erste Eigenschaften

Bei einem Zufallsexperiment interessiert man sich häufig nicht direkt für den vom Zufallsgesteuerten Ausgang dieses Experiments sondern für gewisse mathematische Größen, die durch den zufälligen Ausgang des Experiments bestimmt werden. Man denke dabei etwa an die Summe der gewürfelten Augenzahlen beim dreimaligen Werfen eines Würfels oder an den Abstand des Treffers vom Mittelpunkt einer Schießscheibe beim Schießen auf diese. Wird das Zufallsexperiment durch den W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{P})$ beschrieben, so ist in den obigen Beispielen also jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugeordnet. Wir sind nun daran interessiert, für gewisse Teilmengen B von $\mathbb{R}^1$ die Wahrscheinlichkeit des Hineinfallens der Werte von X in B zu bestimmen. Um dies zu realisieren müssen wir absichern, dass die Menge $X^{-1}(B) := \{\omega \in \Omega : X(\omega) \in B\}$ ein Ereignis ist, also zur σ-Algebra $\mathfrak{A}$ gehört. Wir haben also zu gewährleisten, dass für die uns interessierenden Mengen $B \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^1)$ die Beziehung $X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist. Die konsequente Weiterführung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $X \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Dann heißt X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-**Zufallsvariable** (ZV) auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Wir weisen darauf hin, dass die Definition einer $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ nicht durch das W-Maß P auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ beeinflusst wird. Der obige Sprachgebrauch soll lediglich die Vorstellung verstärken, das die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung X hier im Zusammenhang mit einem Zufallsexperiment beschrieben wird, welches durch den W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ modelliert wird. In den von uns betrachteten Anwendungen werden zumeist $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ im Vordergrund stehen, d.h. es ist also $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ mit einem gewissen $m \in \mathbb{N}$. In der Theorie stochastischer Prozesse stößt man jedoch oft auf Situationen, in denen ein metrischer Raum (Ω', ρ') auftritt und $\mathfrak{A}'$ gerade die Borelsche σ-Algebra von (Ω', ρ') ist. So wird im Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung etwa Ω' als der lineare Raum aller auf einem kompakten Intervall von $\mathbb{R}$ definierten stetigen reellwertigen Funktionen angesehen und ρ' ist die durch die Supremumsnorm auf Ω' induzierte Metrik.

Beispiel 4.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist 1_A eine $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. *Dies folgt sogleich aus Definition 4.1.1 und Teil (b) von Beispiel M.15.3.* ■

Satz 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale messbare Räume. Weiter seien X eine $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $Y \in A(\Omega_1, \Omega_2)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$-messbare Abbildung. Dann ist $Y \circ X$ eine $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Beweis. Kombiniere Definition 4.1.1 mit Satz M.15.3. ■

Bemerkung 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $s \in \mathbb{N}$, $(m_j)_{j=1}^s$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum\limits_{j=1}^{s} m_j$. Für $j \in \{1, \cdots, s\}$ sei $X_j \in A(\Omega, \mathbb{R}^{m_j})$. Weiter sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $w \to \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_s(\omega) \end{pmatrix}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist X eine $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(ii) Für jedes $j \in \{1, \cdots, s\}$ ist X_j eine $(\mathbb{R}^{m_j}, \mathcal{B}_{m_j})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Satz 4.1.2. Seien l,m $\in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und a $\in \mathbb{R}^l$. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und X eine $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei $Y := AX + a$. Dann ist Y eine $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}_l)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.
Beweis. Sei $T_{A,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $u \to Au + a$. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt dann sogleich $Y = AX + a = T_{A,a} \circ X$. Kombiniert man dies mit der nach Satz M.15.9 vorliegenden $\mathcal{B}_m$-$\mathcal{B}_l$-Messbarkeit von $T_{A,a}$, so liefert Satz 4.1.1 dann die Behauptung. ■

v26
7.7.2009

Satz 4.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, l und $s \in \mathbb{N}$ und $(m_j)_{j=1}^s$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Für $j \in \{1, \ldots, s\}$ sei X_j eine $(\mathbb{R}^{m_j}, \mathcal{B}_{m_j})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $A_j \in \mathbb{R}^{l \times m_j}$. Weiter sei $Y := \sum\limits_{j=1}^{s} A_j X_j$. Dann ist Y eine $(\mathbb{R}^l, \mathcal{B}_l)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Beweis. Sei $A := (A_1, \dots, A_s)$ und sei $m := \sum m_j$. Dann ist $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Weiter sei $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix}$. Aus der Definition der beteiligten Größen folgt dann:

$$Y = \sum_{j=1}^{s} A_j X_j = (A_1, \dots, A_s) \cdot \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_s \end{pmatrix} = AX.$$

Kombiniert man dies mit der Tatsache, daß X wegen Bemerkung 4.1.1 eine $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, so liefert Satz 4.1.2 die Behauptung. ∎

Folgerung 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ eine W-Raum, $m, n \in \mathbb{N}$, sowie $(X_j)_{j=1}^{n}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $Y := \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$, sowie $Z := \frac{1}{n} \sum\limits_{j=1}^{n} X_j$. Dann sind Y und Z jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.
Beweis. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $A_j := I_m$ bzw. $B_j := \frac{1}{n} I_m$. Aus Definition der beteiligten Größen folgt dann $Y = \sum\limits_{j=1}^{n} A_j X_j$ bzw. $Z = \sum\limits_{j=1}^{n} B_j X_j$. Hieraus folgt, mittels Satz 4.1.3 die Behauptung. ∎

Folgerung 4.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $m \in \mathbb{N}$ sowie X_1 und X_2 jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $Y = X_1 - X_2$. Dann ist Y eine $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Beweis. Sei $A_1 := I_m$ und $A_2 := -I_m$. Dann gilt $Y = \sum\limits_{i=1}^{2} A_i X_j$. Somit liefert Satz 4.1.3 die Behauptung. ∎

Zur Beschreibung von Vorgängen in Natur und Technik, welche sich über gewissen Zeitraum erstrecken und deren Verlauf von Zufall abhängt ist es notwendig spezielle Familien von Zufallsvariablen zu betrachten. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung, welche eine zentrale Rolle im Gebäude der Stochastik einnimmt.

Definition 4.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, T eine nichtleere Indexmenge und $(X_t)_{t \in T}$ eine Familie von $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $(X_t)_{t \in T}$ ein **stochastischer Prozeß** auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und Parameterraum T.

Der Parameterraum T eines stochastischen Prozeßes wird oftmals als Zeitbereich interpretiert.

Definition 4.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, T eine nichtleere Indexmenge und $(X_t)_{t \in T}$ ein stochastischer Prozeß auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und Parameterraum T. Weiterhin sei $\omega \in \Omega$. Dann heißt die Abbildung $Y_\omega \colon T \to \Omega'$, welche gemäß $t \mapsto X_t(\omega)$ erklärt ist, die zu ω gehörige **Trajektorie** (oder auch der zu ω gehörige Pfad) von $(X_t)_{t \in T}$.

Hat ein Experimentator mit einer Zufallsvariable X zu tun, die bestimmte Merkmale beschreibt, so interessiert ihn hauptsächlich die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Zufallsvariable bestimmte Werte annimmt. Von diesen Standpunkt aus gesehen ist nicht das W-Maß P auf dem Grundraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ von Bedeutung sondern viel mehr, daß von X und P auf dem Bildraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ induzierte W-Maß von Bedeutung. Die Vollendung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 4.1.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt das Bildmaß $X(P)$ von P unter X die **Verteilung** von X bezüglich P. Statt $X(P)$ wird hierbei oft die Symbolik P_X verwendet.

Bemerkung 4.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien X_1 und X_2 jeweils $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für die es ein $N \in \mathcal{N}_P$ gibt, für das $\{\omega \in \Omega : X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\} \subseteq N$ erfüllt ist. Dann gilt $P_{X_1} = P_{X_2}$.

Bemerkung 4.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es bezeichne P_X die Verteilung von X bezüglich P. Dann ist $(\Omega', \mathfrak{A}', P_x)$ ein W-Raum.

Beweis. Dies folgt aus Satz M.15.10. ∎

Bemerkung 4.1.4. Seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbare Raum und $\mu \in \mathcal{M}^1_+(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann ist $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu)$ ein W-Raum und $X := Id_{\Omega'}$ eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu)$, welche $P_X = \mu$ erfüllt.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.15.4. ∎

Bemerkung 4.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei N' eine Teilmenge von Ω', für welche $X^{-1}(\Omega' \backslash N') \neq \emptyset$ erfüllt ist und η ein dann existierendes Element von $X^{-1}(\Omega' \backslash N')$ ist. Die Abbildung $X_\eta \colon \Omega \to \Omega'$ sei definiert gemäß

$$X_\eta(\omega) := \begin{cases} X(\omega) & \text{, falls } \omega \in X^{-1}(\Omega' \backslash N') \\ X(\eta) & \text{, falls } \omega \in X^{-1}(N') \end{cases} .$$

Dann gilt:

a) Es gelten $X_\eta(\Omega) \subseteq \Omega' \backslash N'$ sowie $\{X \neq X_\eta\} = X^{-1}(N')$.

b) Sei $N' \in \mathfrak{A}'$. Dann ist X_η eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

c) Sei $N' \in \mathcal{N}_{P_X}$. Dann gilt $\{X \neq X_\eta\} \in \mathcal{N}_P$ sowie $P_X = P_{X_\eta}$.

Wir erläutern nun, in welcher Weise die Wahl des Bildraumes die Verteilung eier Zufallsvariable beeinflußt.

Bemerkung 4.1.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiterhin sei $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein meßbarer Raum derart, daß $\Omega' \subseteq \Omega''$ und $\mathfrak{A}'' \cap \Omega' \subseteq \mathfrak{A}'$ erfüllt ist. Es bezeichne $\tilde{X}$ die durch X festgelegte Abbildung von Ω in Ω'', d.h. ,für $\omega \in \Omega$ sei $\tilde{X}(\omega) := X(\omega)$. Dann gilt:

a) Es ist $\tilde{X}^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq X^{-1}(\mathfrak{A}')$.

b) Es ist $\tilde{X}$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

c) Sei $A'' \subseteq \mathfrak{A}''$. Dann gilt $A'' \cap \Omega' \in \mathfrak{A}'$ sowie $P_{\tilde{X}}(A'') = P_X(A'' \cap \Omega')$.

d) Es gelte $\mathfrak{A}'' \cap \Omega' = \mathfrak{A}'$. Dann gilt $\tilde{X}^{-1}(\mathfrak{A}'') = X^{-1}(\mathfrak{A}')$.

e) Sei $\omega' \in \Omega'$. Dann gilt
   (e1) Sei $P_X = \epsilon_{\omega', \mathfrak{A}'}$. Dann gilt $P_{\tilde{X}} = \epsilon_{\omega', \mathfrak{A}''}$.
   (e2) Es gelte $\mathfrak{A}'' \cap \Omega' = \mathfrak{A}'$. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:
      (i) Es ist $P_X = \epsilon_{\omega', \mathfrak{A}'}$.
      (ii) Es ist $P_{\tilde{X}} = \epsilon_{\omega', \mathfrak{A}''}$.

Lemma 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, Ω' eine höchstens abzählbare nichtleere Menge und X eine $(\Omega', \mathfrak{P}(\Omega'))$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein meßbarer Raum mit $\Omega' \subseteq \Omega''$. Es bezeichne $\tilde{X}$ die durch X festgelegte Abbildung von Ω in Ω''. Dann gilt:

a) Es ist $\tilde{X}$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

b) Seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(\omega'_k)_{k \in I}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen von Ω', für welche $\Omega' = \bigcup \{\omega'_k\}$ erfüllt ist. Dann gilt:
   (b1) Es ist $P_X = \sum\limits_{k \in I} P(X^{-1}(\{\omega'_k\}))\epsilon_{\omega'_k, \mathfrak{P}(\Omega')}$.
   (b2) Es ist $P_{\tilde{X}} = \sum\limits_{k \in I} P(\tilde{X}^{-1}(\{\omega'_k\}))\epsilon_{\omega'_k, \mathfrak{A}''}$.

Bemerkung 4.1.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ nichttriviale meßbare Räume. Weiter seien X_1 und X_2 jeweils $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $P_{X_1} = P_{X_2}$ erfüllt ist, sowie $Y \in A(\Omega', \Omega'')$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$"-meßbare Abbildung. Dann sind $Y \circ X_1$ und $Y \circ X_2$ jeweils $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für die $P_{Y \circ X_1} = P_{Y \circ X_2}$ erfüllt ist.
Beweis. Wegen Satz 4.1.1 sind $Y \circ X_1$ und $Y \circ X_2$ jeweils $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable und $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen der nach Voraussetzung geltender Beziehung $X_1(P) = P_{X_1} = P_{X_2} = X_2(P)$ ergibt sich unter der Betrachtung von Satz M.15.11 dann $P_{Y \circ X_1} = (Y \circ X_1)(P) = Y[X_1(P)] = Y[X_2(P)] = (Y \circ X_2)(P) = P_{Y \circ X_2}$. ■

Lemma 4.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist 1_A eine $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt:

$$P_{1_A} = [1 - P(A)]\epsilon_{0, \mathcal{B}_1} + P(A) \cdot \epsilon_{1, \mathcal{B}_1}.$$

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist hinsichtlich X vor allem die Verteiung P_X von besonderem Interesse. Der das zufällige Geschehen steuernde W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$

ist in vielen Fällen nicht explizit zugänglich. Eine solche Situation liegt in weiten Teilen der mathematischen Statistik vor. Die w-theoretische Struktur einer Zufallsvariablen kommt am prägnantesten durch ihre Verteilung zum Vorschein. Dementsprechend spielen in der W-Theorie vor allem solche aus Zufallsvariablen abgeleitete Begriffe und solche Eigenschaften von Zufallsvariablen eine Rolle, welche sich im Hilfe ihrer Veretilungen formulieren lassen. Deshalb bezeichnet man solche Begriffe und Eigenschaften oft als w-theoretische Begriffe und sieht deren Studium als Hauptziel der W-Theorie an. v49 12.01.2010

4.2. Einige Aussagen über degenerierte und P-fast sicher konstante Zufallsvariablen

Wir studieren eine Klasse von Zufallsvariablen, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass die ihnen innewohnende Zufälligkeit äußerst minimal ist.

Definition 4.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nicht-trivialer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt X **degeneriert**, falls mit einem gewissen $\omega'_0 \in \Omega'$ die Beziehung

$$P_X = \epsilon_{\omega'_0, \mathfrak{A}'}$$

besteht.

Bemerkung 4.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nicht-trivialer meßbarer Raum und X eine degenerierte $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei

$$\mathfrak{A}_{P,0} := \{A \in \mathfrak{A} : A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega \backslash A \in \mathcal{N}_P\}.$$

Dann gilt $X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$.

Definition 4.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt X **P-fast sicher konstant** auf Ω, falls ein $\omega'_0 \in \Omega'$ mit

$$X^{-1}(\Omega' \backslash \{\omega'_0\}) \in \mathcal{N}_P$$

existiert.

Bemerkung 4.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) X ist P-fast sicher konstant
   (ii) Es gibt ein $\omega'_1 \in \Omega'$ mit $P(X^{-1}(\{\omega'_1\})) = 1$.

(b) Sei (i) erfüllt. Dann gibt es genau ein $\omega'_0 \in \Omega'$ mit $X^{-1}(\Omega' \backslash \{\omega'_0\}) \in \mathcal{N}_P$ und es gibt genau ein $\omega'_1 \in \Omega'$ mit $P(X^{-1}(\{\omega'_1\})) = 1$. Hierbei gilt noch $\omega'_0 = \omega'_1$.

Satz 4.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent

   (i) X ist P-fast sicher konstant.

   (ii) X ist degeneriert.

(b) Sei (i) erfüllt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmes $\omega'_0 \in \Omega'$ mit $P_X = \epsilon_{\omega'_0, \mathfrak{A}'}$ und zwar ist dies das eindeutig bestimmte $\omega'_0 \in \Omega'$ mit $X^{-1}(\Omega' \backslash \{\omega'_0\}) \in \mathcal{N}_P$.

Satz 4.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ eine W-Raum und X eine $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) X ist P-fast sicher konstant auf Ω.

b) Für jedes $A \in X^{-1}(\mathcal{B}_1)$ gilt $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.

c) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $P(\{X \leq \alpha\}) = 1$ oder $P(\{X \leq \alpha\}) = 0$.

d) Für jedes $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $P(\{X < \alpha\}) = 1$ oder $P(\{X < \alpha\}) = 0$.

e) X ist degeneriert.

4.3. Einige einführende Betrachtungen über diskrete Zufallsvariablen

Vom historischen Standpunkt aus betrachtet standen zunächst W-Räume mit endlicher oder abzählbar unendlicher Grundmenge im Vordergrund. Diese Struktur bedingt, dass jede Zufallsvariable auf einem solchen W-Raum einen höchstens abzählbaren Wertevorrat besitzt.
Betrachten wir spezielle $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariablen, so zeigt sich, dass deren Verteilung ein diskretes W-Maß auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ ist.

Definition 4.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Dann heißt X **diskret**, falls $P_X \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega', \mathfrak{A}')$ ist.

Bemerkung 4.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit höchstens abzählbaren Wertebereich. Dann ist X diskret.

Bemerkung 4.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und X eine P-fast sicher konstante $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist X diskret.

Beispiel 4.3.1. *Eine Fluggesellschaft hat beobachtet, dass 5% aller Personen, die einen Flug reservieren nicht zu diesem erscheinen. Aus diesem Grund verkauft die Gesellschaft 100 Tickets für eine Flugzeug mit 95 Plätzen. Wir groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen, die zum Flug erscheinen einen Platz bekommen, wenn angenommen wird,*

dass die Personen unabhängig voneinander handeln?
Die $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable X auf einem nicht näher spezifizierten, im Hintergrund stehenden W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, beschreibe die Anzahl der Personen, die gebucht haben und zum Flug erscheinen. Es ist dann

$$P_X = \beta_{n,p} \text{ mit } n = 100 \text{ und } p = 0,95$$

Also

$$\begin{aligned} P(\{X \in \{0,...,95\}\}) &= P_X(\{0,...,95\}) = \beta_{100;0,95}(\{0,...,95\}) \\ &= 1 - \sum_{k=96}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,95^k \cdot 0,05^{100-k} \approx 0,564 \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung.

Satz 4.3.1. (a) Sei $p \in [0,1]$ und es bezeichne G_p die geometrische Verteilung zum Parameter p. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$G_p((n-1, \infty)) = (1-p)^n$$

(Im Fall $p \in (0,1)$ ist also $G_p((n-1,\infty)) \in (0,1)$.)

(b) Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum un X eine $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für die mit einem gewissen $p \in (0,1)$ die Beziehung $P_X = G_p$ gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

$$P(\{X > n-1\}) = (1-p)^n \in (0,1)$$

sowie

$$P(\{X = n\} | \{X > n-1\}) = p.$$

Beweis.

(a) Es gilt

$$\begin{aligned} G_p((n-1,\infty)) &= \sum_{n \in \mathbb{N}_0} (1-p)^k p \cdot \epsilon_{k,\mathcal{B}_1}((n-1,\infty)) = \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k p \\ &= (1-p)^n p \sum_{s \in \mathbb{N}_0} (1-p)^s = (1-p)^n \end{aligned}$$

(b)

$$P(\{X > n-1\}) = P(X^{-1}((n-1,\infty))) = P_X((n-1,\infty)) = G_p((n-1,\infty)) \overset{(a)}{=} (1-p)^n, \tag{1}$$

also wegen $p \in (0,1)$ insbesondere

$$P(\{X > n-1\}) \in (0,1) \tag{2}$$

Weiter ist

$$P(\{X=n\}) = P_X(\{n\}) = G_p(\{n\}) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} (1-p)^k p \cdot \epsilon_{k,\mathcal{B}_1}(\{n\}) = (1-p)^n p \quad (3)$$

und es ist

$$\{X=n\} \cap \{X > n-1\} = \{X=n\}. \quad (4)$$

Aus (1) bis (4) folgt

$$P(\{X=n\}|\{X>n-1\}) = \frac{P(\{X=n\}\cap\{X>n-1\})}{P(\{X>n-1\})} \overset{(1)-(4)}{=} p.$$

■

Es folgt nun eine gewisse Umkehrung.

Satz 4.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum un X eine $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, deren Verteilung die Gestalt $P_X = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} p_k \epsilon_{k,\mathcal{B}_1}$ besitzt und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte

$$P(\{X > n-1\}) \neq 0 \text{ und } P(\{X=n\}|\{X>n-1\}) = p_0.$$

Dann gelten $p_0 \in (0,1)$ und $P_X = G_{p_0}$.

Beispiel 4.3.2 (Zahlenlotto „ 6 aus 49 “). *Als Grundraum Ω wählen wir die Menge aller Kombinationen von 49 Elementen zur 6. Klasse. Es bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Die $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ gebe die Anzahl der richtig getippten Zahlen an. Dann nimmt X genau die Werte $\{0, 1, ..., 6\}$ an. Es bezeichne $H_{49,6,6}$ die hypergeometrische Verteilung mit Parametern $49, 6, 6$. Für $k \in \{0, ..., 6\}$ gilt dann:*

$$P_X(\{k\}) = P(X^{-1}(\{k\})) = P(\{X=k\}) = \frac{\binom{6}{k}\binom{43}{6-k}}{\binom{49}{k}} = H_{49,6,6}(\{k\})$$

Also

$$P_X = \sum_{k=0}^{6} P_X(\{k\})\epsilon_{k,\mathcal{B}_1} = \sum_{k=0}^{6} H_{49,6,6}(\{k\})\epsilon_{k,\mathcal{B}_1}.$$

Insbesondere ist:
$P_X(\{0\}) = 0,4359; P_X(\{1\}) = 0,4130; P_X(\{2\}) = 0,1323; P_X(\{3\}) = 0,01765; P_X(\{4\}) = 0,9866\cdot 10^{-3}; P_X(\{5\}) = 0,1845\cdot 10^{-4}; P_X(\{6\}) = 0,7150\cdot 10^{-7}$

v50
18.01.2010

4.4. Einige Betrachtungen über $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable mit $\lambda^{(m)}$-stetigen Verteilungen

Vom w-theoretischen Standpunkt aus ist die Verteilung das wesentliche Objekt zur Behandlung einer Zufallsvariable .

Definition 4.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Ram, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum, X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Dann heißt X **stetig**, falls $P_X \in \mathcal{M}_+^{1;c}(\Omega', \mathfrak{A}')$ ist.

Im folgenden beschreiben wir unsere Betrachtungen auf dem Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. In diesem Fall werden wir eine besonders interessante Teilklasse von stetigen $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable betrachten.

Definition 4.4.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $m \in \mathbb{N}$, X eine $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt X $\lambda^{(m)}$**-stetig**, falls P_X eine $\lambda^{(m)}$-stetiges Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ ist.

Bemerkung 4.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $m \in \mathbb{N}$, X eine $\lambda^{(m)}$-stetige Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist X stetig.
Beweis. Beispiel M.21.6.1 ■

Wir wenden uns nun nochmals einigen den in M.21.14 und M.21.15 eingeführten $\lambda^{(1)}$-stetigen W-Maße zu.

Satz 4.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, X eine $\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $A, a \in \mathbb{R}$, $Y := AX + a$. Dann gilt

a) Y ist eine $\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

b) Sei $A \in (0, \infty)$. Dann:

   (b1) Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,A^2}$ die Normalverteilung mit Parametern a und A^2. Sei $P_X = \mathcal{N}_{0,1}$. Dann $P_Y = \mathcal{N}_{a,A^2}$.

   (b2) Es bezeichne $\gamma_{a,A}$ die Cauchy-Verteilung mit Parametern a, A,. Sei $P_X = \gamma_{0,1}$. Dann $P_Y = \gamma_{a,A}$.

   (b3) Es bezeichne $L_{a,A}$ die Laplace-Verteilung mit Parametern a, A. Sei $P_X = L_{0,1}$. Dann $P_Y = L_{a,\frac{1}{A}}$.

Beweis.

a) Satz 4.1.2.

b) Wegen $Y = T_{A,a} \circ X$ folgt aus Satz M.15.11 $P_Y = Y(P) = (T_{A,a} \circ X)(P) = T_{A,a}(X(P)) = T_{A,a}(P_X)$. Hieraus folgt mit Satz M.21.14.2 (b) bzw. Satz M.21.15.2 (b) bzw. Satz M.21.15.4 (b) die Behauptung von (b1) bzw. (b2) bzw. (b3).

■

Abschnitt 4.3 haben wir gesehen, dass die geometrische Verteilung durch eine Bemerkenswerte stochastische Eigenschaft charakterisiert werden kann, nämlich die sogenannte Gedächtnislosigkeit. Wir greifen dies nochmals auf und zeigen, dass auch die Exponentialverteilung in gewissem Sinn durch diese Eigenschaft charackerisiert ist.

Lemma 4.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, X eine $\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-ZZufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei $s \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $P(\{X < s\}) \neq 0$ ist. Sei $t \in (0, \infty)$. Dann gilt

$$P(\{X > s+t\}|\{X > s\}) = \frac{P(\{X > s+t\})}{P(\{X > s\})}$$

Beweis. Wegen $t \in (0, \infty)$ ist $\{X > s+t\} \subseteq \{X > s\}$, also $\{X > s+t\} \cap \{X > s\} = \{X > s+t\}$. ■

Satz 4.4.2. Sei $\eta \in (0, \infty)$ und bezeichne E_η due Exponentialverteilung zum Parameter η. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, X eine $\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = E_\eta$.Dann gilt

a) Sei $s \in (0, \infty)$. Dann $P(\{X > s\}) = exp\{-\eta s\}$ und $P(\{X > s\}) \neq 0$.

b) Seien $s, t \in (0, \infty)$. Dann $P(\{X > s+t\}|\{X > s\}) = P(\{X > t\})$.

Beweis.

a) $P(\{X > s\}) = P_X((s, \infty)) = E_\eta((s, \infty)) = 1 - F_{E_\eta, r}(s) \overset{\text{Satz M.21.15.3}}{=} 1 - [1 - exp\{-\eta s\}] = exp\{-\eta s\} \neq 0$

b) Unter Verwendung von Lemma 4.4.1 und (a) folgt $P(\{X > s+t\}|\{X > s\}) = \frac{P(\{X > S+t\})}{P(\{X > s\})} = \frac{exp\{-\eta(s+t)\}}{exp\{-\eta s\}} = \exp\{-\eta t\} = P(\{X > t\})$.

■

Wir zeigen nun, dass die Exponentialverteilung im gewissen Sinne durch die Gedächtnislosigkeit charackterisiert ist.

Lemma 4.4.2. Sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ derart gewählt, dass $\forall s, t \in (0, \infty)$ die Funktionalgleichung $h(s+t) = h(s)H(t)$ besteht. Dann:

a) Es existiere ein $s_0 \in (0, \infty)$ mit $h(s_0) = 0$. dann ist h die Nullfunktion auf $(0, \infty)$.

b) Sei h nicht die Nullfunktion auf $(0, \infty)$ und zudem monoton auf $(0, \infty)$. dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\eta \in \mathbb{R}$, so dass $\forall s \in (0, \infty)$ gilt $h(s) = exp\{-\eta s\}$.

Beweis. Übungsaufgabe. ■

Satz 4.4.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, X eine $\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $P(\{X > 0\}) = 1$.

(ii) Falls $s \in (0, \infty)$ so beschaffen ist, dass $P(\{X > s\}) \neq 0$ erfüllt ist, so besteht $\forall t \in (0, \infty)$ die Beziehung $P(\{X > s+t\}|\{X > s\}) P(\{X > t\})$. Dann gibt es eindeutig bestimmtes $\eta \in (0, \infty)$ mit $P_X = \mathbb{E}_\eta$.

Beweis. Sei $h : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \mapsto P(\{X > u\}). \tag{1}$$

Seien $s, t \in (0, \infty)$. Sei zunächst

$$\{X > s\} \in \mathcal{N}_P. \tag{2}$$

Wegen $\{X > s + t\} \subseteq \{X > s\}$ und $\{X > s + t\} \in \mathfrak{A}$ liefert Satz M.5.1 (b) dann

$$\{X > s + t\} \in \mathcal{N}_P. \tag{3}$$

Es gilt dann

$$h(s + t) \overset{(1)}{=} P(\{X > s + t\}) \overset{(3)}{=} 0 \overset{(2)}{=} P(\{X > s\}) \cdot P(\{X > t\}) \overset{(1)}{=} h(s) \cdot h(t). \tag{4}$$

Sei nun

$$P(\{X > s\}) \neq 0. \tag{5}$$

Dann folgt aus

$$P(\{X > t\}) \overset{(ii)}{=} P(\{X > s + t\}|\{X > s\}) \overset{\text{Lemma 4.4.1}}{=} \frac{P(\{X > s + t\})}{P(\{X > s\})}$$

mit (1)

$$h(s + t) = h(s)h(t) \tag{6}$$

Wir zeigen nun, dass h nicht die Nullfunktion auf $(0, \infty)$ ist. Aufgrund der Wahl von X ist $(\{X > \frac{1}{n}\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$, welche zudem isoton ist und der Beziehung

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X > \frac{1}{n}n\} = \{X > 0\}$$

genügt. Daraus folgt

$$\lim_{n\to\infty} h(\frac{1}{n}) \overset{(1)}{=} \lim_{n\to\infty} P(\{X > \frac{1}{n}\}) \overset{\text{Unterhalbstetigkeit von } P}{=} P(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{X > \frac{1}{n}\}) = P(\{X > 0\}) \overset{(i)}{=} 1. \tag{7}$$

Aus (7) folgt
(I) Es ist h nicht die Nullfunktion in $(0, \infty)$.
Für $s \in (0, \infty)$ gilt

$$H(s) = P(\{X > s\}) = P(\Omega) - P(\{X \leq s\} = 1 - F_{P_X,r}. \tag{8}$$

Da $F_{P_X,r}$ nach Satz M.14.5 monoton wachsend ist, gilt somit:
(II) Es ist h monoton fallend auf $(0, \infty)$.
Wegen (2), (4)-(6), (I), (II) gibt es nach Lemma 4.4.2 (b) eindeutig bestimmtes $\eta \in \mathbb{R}$ so, dass $\forall s \in (0, \infty)$

$$h(s) = exp\{-\eta s\} \tag{9}$$

gilt. Wir zeigen nund $\eta \in (0,\infty)$. Es ist $(\{X > n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine antitone Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $\bigcap\{X > n\} = \emptyset$. Wegen

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} P(\{X > n\}) \overset{\text{Oberhalbstetigkeit von } P}{=} P(\bigcap_{n\in\mathbb{N}}\{X > n\}) = P(\emptyset) = 0 \quad (10)$$

gilt dann mit (9) und (10)

$$\eta \in (0,\infty). \quad (11)$$

Unter Beachtung von (11) bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Wegen Satz M.21.15.3 (d) gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$F_{E_\eta,r}(s) = \begin{cases} 0 & , s \in (-\infty, 0] \\ 1 - exp\{-\eta s\} & , s \in (0,\infty). \end{cases} \quad (12)$$

Wir zeigen, dass $F_{P_X,r} = F_{E_\eta,r}$. Sei $s \in (0,\infty)$. Dann gilt

$$F_{P_X,r}(s) \overset{(8)}{=} 1 - h(s) \overset{(9)}{=} 1 - exp\{-\eta s\} \overset{(12)}{=} F_{E_\eta,r}(s). \quad (13)$$

Sei nun $s \in (-\infty, 0]$. Dann gilt

$$\{X \leq s\} \subseteq \{X \leq 0\} = \Omega \backslash \{X > 0\}. \quad (14)$$

Wegen $P(\Omega) = 1$ und (i) gilt

$$\Omega \backslash \{X > 0\} \in \mathcal{N}_P. \quad (15)$$

Wegen $\{X \leq s\} \subseteq \mathfrak{A}$, (14), (15) liefert Satz M.5.1 (b)

$$\{X \leq s\} \in \mathcal{N}_P. \quad (16)$$

Es gilt dann

$$F_{P_X,r}(s) = P_X((-\infty, s]) \overset{(16)}{=} 0 \overset{(12)}{=} F_{E_\eta,r}(s). \quad (17)$$

Wegen (13), (17) folgt

$$F_{P_X,r} = F_{E_\eta,r}.$$

Satz M.14.4 liefert dann

$$P_X = E_\eta.$$

■

4.5. Einige einführende Betrachtungen über Lebensdauerverteilungen

Dieser Abschnitt stellt eine erste Einführung in ein Teilgebiet der Stochastik dar, welcher Zuverlässigkeitstheorie genannt wird. Gegenstand der Zuverlässigkeitstheorie ist die stochastische Modellierung und Behandlung der Lebensdauer von Vorgängen und Prozessen in Natur und Technik. Maße aus $\mathcal{M}^1_+\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$, welche keine Masse auf $(-\infty, 0)$ besitzen, lassen sich zur Modellierung von Lebensdauerverteilungen heranziehen. v51 18.01.2010

Definition 4.5.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so beschaffen, daß $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_\mu$. Dann heißt μ eine **Lebensdauerverteilung**. Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die Menge aller Lebensdauerverteilungen.

Definition 4.5.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und sei $U_\mu\colon (0, +\infty) \to [0, 1]$ definiert gemäß $v \mapsto \mu((v, +\infty))$. Dann heißt U_μ, die zu μ gehörige Überlebengunswahrscheinlichkeit.

Bemerkung 4.5.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und bezeichne U_μ die zu μ gegebene Überlebungswahrscheinlichkeit, sowie $F_{\mu,r}$ die rechte Verteilungsfunktion von μ. Dann gilt:

a) $U_\mu = 1 - \mathrm{Rstr.}_{(0,+\infty)} F_{\mu,r}$.

b) $\lim\limits_{v\to\infty} U_\mu(v) = 0$.

Beweis.

a) Sei $v \in [0, +\infty)$. Dann gilt $U_\mu(v) = \mu((v, +\infty)) = 1 - \mu((-\infty, v]) = 1 - F_{\mu,r}(v)$.

b) Wegen Satz M.14.6 gilt $\lim\limits_{v} \infty F_{\mu,r}(v) = 1$. Mit (a) folgt die Behauptung.

■

4.6. Stochastische Interpretation einer Lebensdauerverteilung

Seien $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}$, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, $X\colon \Omega \to [0, +\infty)$ eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = \mu$. Dann wird Ω interpretiert als eine Gesamtheit homogener Individuen *) und für jedes $\omega \in \Omega$ wird $X(\omega)$ als Lebensdauer von ω gedeutet. Insbesondere beschreibt die Zahl $\mu(\{0\})$ die W. dafür, daß ein Individuum der Gesamtheit tot geboren wird, bzw. nicht einsatzfähig ist. Für $v \in (0, \infty)$ gibt der Wert $U_\mu(v)$ dann gerade die W. dafür an, daß ein Individuum aus Ω eine Lebensdauer größer als v besitzt. Sei $t \in (0, +\infty)$ so gewählt, daß $U_\mu(t) \neq 0$. Wgen Lemma 4.4.1 gilt für $s \in (0, +\infty)$ dann $\frac{U_\mu(t+s)}{U_\mu(t)} = \frac{\mu((t+s,+\infty))}{\mu((t,+\infty))} = \frac{P_X((t+s,+\infty))}{P_X((t,\infty))} = \frac{P(\{X>t+s\})}{P(\{X>t\})} = P(\{X > t + s\} | \{X > t\})$. Somit ist der Quotient $\frac{U_\mu(t+s)}{U_\mu(t)}$ die bedingte W. dafür, daß ein Individuum aus Ω, welches ein Lebensalter größer als t erreicht hat, auch ein Lebensalter größer als $s + t$ erreicht, bzw. im Intervall $(t, t + s]$ nicht ausfällt.

Definition 4.6.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, so daß U_μ nirgends verschwindet, dann heißt μ eine <u>IFR-, bzw. DFR-Verteilung</u>, falls für alle $s \in (0, +\infty)$, $t_1 \in (0, +\infty)$ und $t_2 \in (t_1, +\infty)$ stets die Ungleichung $\frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \geq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)}$, bzw. $\frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \leq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)}$ besteht. Hierbei steht IFR bzw. DFR für „Increasing Failure Rate“ bzw. „Decreasing Failure Rate“.

Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,\mathrm{IFR}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, bzw. $\mathcal{M}^1_{+,\mathrm{DFR}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die Menge aller IFR-, bzw. DFR-Verteilungen. Eine IFR-Verteilung berücksichtigt natürliche Alterungsvorgänge. Sei

*) etwa Lebewesen einer Population

nähmlich $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{IFR}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ W.-Raum, $X\colon \Omega \to [0, +\infty)$ eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $t_1 \in (0, +\infty), t_2 \in (t_1, +\infty)$. Ist dann $s \in (0, +\infty)$, so besagt die Defintion 3 in Verbindung mit unserer frühren Interpretation $P(\{X > t_1 + s\}|\{X > t_1\}) = \frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \geq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)} = P(\{X > t_2 + s\}|\{X > t_2\})$. In Zusammenhang von Lebensdauerverteilungen spielt die Exponentialverteilung eine bedeutende Rolle. Diese ist geeignet zur Modellierung von Lebensdauer von Objekten welche keinem Alterungsprozeß unterliegen.

Beispiel 4.6.1. *Sei $\eta \in (0, +\infty)$ und bezeichen E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt:*

a) $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und für alle $t \in (0, +\infty)$ gilt $U_{E_\eta}(t) = \exp\{-\eta t\} \neq 0$.

b) $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,IFR}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \cap \mathcal{M}^1_{+,DFR}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Beispiel 4.6.2. *Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ und bezeichne $W_{\alpha,\beta}$ die Weiboll-Verteilung mit Parametern α und β. Dann $W_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, und für alle $t \in (0, +\infty)$ $U_{W_{\alpha,\beta}}(t) = \exp\{-\beta t^\alpha\}$.*

Wir wenden uns einer wichtigen Teilklasse von $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ zu. Jedem Maß der genannten Klasse ordnen wir eine auf $(0, +\infty)$ definierte Funktion r_μ mit Wreten im $[0, +\infty)$ derart zu, daß für jedes $t \in (0, +\infty)$ die Zahl $r_\mu(t)$ gerade die in μ ennhaltende Ausfallrisiko zum Zeitpunkt t zum Ausdruck bringt.

Definition 4.6.2. Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die Menge aller $\nu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, deren rechte Verteilungsfunktion $F_{\nu,r}$ in $(0, +\infty)$. differenzierbar ist und für welche die Überlebenswahrscheinlichkei U_ν niergends verschwindet.

Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Weiter sei $t \in (0, +\infty)$ und es bezeichne $F'_{\mu,r}(t)$ der Wert der rechtseitigen Ableitung von $F_{\mu,r}$ auf der Stelle t. Dann heißt die Zahl $r_\mu(t) := \frac{F'_{\mu,r}(t)}{U_\mu(t)}$ die Ausfallrate von μ zum Zeitpunkt t.

Interpretation: Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Sei $t \in (0, +\infty)$. Dann: $P(\{X \in (t, +\infty)\}) = P_X((t, +\infty)) = U_{P_X}(t)$, also insbesondere $P(\{X \in (t, +\infty)\}) \neq 0$. Sei nun $\epsilon \in (0, +\infty)$. Dann ist $\{X \in (t, t+\epsilon\} \cap \{X \in (t, +\infty)\} = \{X \in (t, t+\epsilon)\}$. Weiterhin ist $P(\{X \in (t, t+\epsilon)\}) = P_X((t, t+\epsilon)) = F_{P_X,r}(t+\epsilon) - F_{P_X,r}(t)$. Damit ergibt sich dann $P(\{X \in (t, t+\epsilon)\}|\{X \in (t, \infty)\}) = \frac{P(\{X \in (t,t+\epsilon)\})}{P(\{X \in (t, infty)\})} = \frac{F_{P_X,r}(t+\epsilon) - F_{P_X,r}(t)}{U_{P_X}(t)}$. Damit erhält man $r_p(t) = \frac{F'_{P_X}(t)}{U_{P_X}(t)} = \frac{1}{U_{P_X}(t)} \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon}(F_{P_x,r}(t+\epsilon) - F_{P_X,r}(t) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} \frac{F_{P_x,r}(t+\epsilon) - F_{P_X,r}(t)}{U_{P_x}(t)} = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{1}{\epsilon} P(\{X \in (t, t+\epsilon)\}|\{X \in (t, \infty)\})$. Hieraus wird deutlich, daß die Zahl $r_{P_X}(t)$ als das momentane Ausfallsrate des Maßes P_X zum Zeitpunkt t angesehen werden kann.

Satz 4.6.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ mit:

(i) Für alle $t \in (0, +\infty)$ gilt $U_\mu(t) \neq 0$.

(ii) μ ist $\lambda^{(1)}$ stetig und besitzt eine in $(0,+\infty)$ stetige Dichteversion f bezüglich $\lambda^{(1)}$.

Dann ist $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$, und für $t \in (0,+\infty)$ gilt $r_\mu(t) = \frac{f(t)}{U_\mu(t)}$.
Beweis. Sei $t \in (0,+\infty)$. Aufgrund von (ii) folgt aus Satz M.21.12.1 (b)(c), daß $F_{\mu,r}$ in t differenzierbar ist und $F'_{\mu,r} = f(t)$. Mit (i) folgt $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ und $r_\mu(t) = \frac{F'_{\mu,r}}{U_\mu(t)} = \frac{f(t)}{U_\mu(t)}$. ■

Beispiel 4.6.3. *Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann ist $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ und für $t \in [0,+\infty)$ ist $r_{E_\eta} = \eta$.*

Die Konstanz der Ausfallrate der Exponentialverteilung ist der Grund dafür, daß diese Verteilung zur Modellierung von Lebensdauer von Objekten ohne Alterungsprozeß herangezogen wird.

Beispiel 4.6.4. *Seien $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$ und bezeichne $W_{\alpha,\beta}$ die Weibold Verteilung mit Parametern α und β. Dann gilt $W_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}$ und für $t \in (0,+\infty)$ ist $r_{W_{\alpha,\beta}}(t) = \alpha\beta t^{\alpha-1}$. Das Monotonieverhalten von $r_{W_{\alpha,\beta}}$ wird allein durch den Parameter α bestimmt ist. Ist $\alpha > 1 \Rightarrow r_{W_{\alpha,\beta}}$ monoton wachsend, d.h. es liegt ein Alterungsprozeß vor. Ist $\alpha = 1 \Rightarrow W_{\alpha,\beta} = E_\beta$, also $r_{W_{\alpha,\beta}}$ konstant. Ist $\alpha < 1 \Rightarrow r_{W_{\alpha,\beta}}$ monoton fallend. D.h. das durch $W_{\alpha,\beta}$ modellierte Objekt ist durch „Kinderkrankheiten“ gekennzeichnet.*

v53
26.01.10

5. Numerische Charakteristika von Zufallsvariablen

In dem Kapitel 4 wurde herausgearbeitet, dass eine Zufallsvariable am vollständigsten durch ihre Verteilung beschrieben wird. in einer ganzen Reihe von Fällen, in denen nicht die vollständige Information über die Verteilung vorhanden ist, sondern man nur gewisse Kenntnisse über verschiedene aus der zugrunde liegenden Verteilung abgeleitete numerische Größen besitzt.
Das Ziel dieses Abschnitts besteht darin, derartige numerische Charakteristika von Zufallsvariablen vorzustellen. Mit der Einführung der ins Auge gefassten numerischen Charakteristika verbindet sich die Zielstellung, sich eine gewisse summarischen Vorstellung von der Zufallsvariable zu verschaffen.
Mathematisch bedeutet dies, dass wir mit Hilfe gewisser Integrationsprozeduren reellen Zufallsvariablen Zahlenwerte zuordnen, die eine gewisse Grobinformation über deren Werte ausdrücken.

v54
01.02.10

5.1. Erwartungswert

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen W-Raum $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, sowie $(\overline{\mathbb{R}},\overline{\mathfrak{B}_1})$-ZV X auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ entspricht der Wert $X(\omega)$. Es legt in der Natur von Ereginissen mit zufälligem Ausgang, dass sich die Frage nach dem "mittleren"bzw. ßu erwartetemÄusgang aufdrängt. Die Weiterführung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiterhin lige eine der beiden folgenden Situationen vor.

(I) Es sei $X \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(II) Es sei X eine quasi-P-integrierbare Funkition aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{\mathbb{R}})$.

Dann heißt die Größe

$$E_P(X) := \int_\Omega X \, dP$$

der Erwartungswert von X bezüglich P.

Bemerkung 5.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Es liege eine der beiden nachfolgenden Situationen vor:

(I) Es seine $X, Y \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(II) Es seien X, Y quasi-P-integrierbare Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

Weiterhin sei $\{X \neq Y\} \in \mathbb{N}_P$. Dann gilt $E_P(X) = E_P(Y)$.
Beweis. Dies folgt aus Satz M.21.6.3. ■

Bemerkung 5.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum und X eine $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}_1})$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Es gehören X^+, X^- und $|X|$ jeweils zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$
und es gilt $E_P(|X|) = E_P(X^+) + E_P(X^-)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) X ist quasi-P-integrierbar.

  (ii) Es ist $\inf\{E_P(X^*), E_P(X^-)\} < \infty$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (iii) X ist P-integrierbar.

  (iv) Es ist $\sup\{E_P(X^*), E_P(X^-)\} < \infty$.

(d) Sei (i) erfüllt, dann ist $E_P(X) = E_P(X^+) - E_P(X^-)$.

Bemerkung 5.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $s \in (0, \infty)$, $A \in \mathfrak{A}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha 1_A \in \mathcal{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und es gilt $E_P(\alpha 1_A) = \alpha P(A)$.

Wir zeigen nun, dass der Erwartungswert einee w-theoretische Größe ist, also durch die Verteilung der entsprechenden ZV bestimmt ist.

Satz 5.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt

(a) Es ist $|X| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt $\mathbb{E}_P(|X|) = \mathcal{M}_1(P_X)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) X ist P-integrierbar.
   (ii) Es ist $\mathcal{M}_1(P_X) \in [0, \infty)$.

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $E_P(X) = M_1(P_X)$.

(d) Sein X nichtnegativ. Dann gelten $1_{[0,\infty)} Id_R \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $E_P(X) = \int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[0,\infty)} Id_{\mathbb{R}} \, dP_X$.

Beweis. Beweisskizze:

(a) Verwende Satz M.21.10.1.

(b) Folgt aus (a).

(c) Verwende Satz M.21.10.2.

(d) Verwende (c) und Satz M.21.6.3.

■

Folgerung 5.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie X, Y zwei $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = P_Y$. Dann gilt

(a) Es ist $\{|X|, |Y|\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt $E_P(|X|) = E_P(|Y|)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) X ist P-integrierbar.
   (ii) Y ist P-integrierbar.

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt auch (ii) und es ist $E_P(X) = E_P(Y)$.

Folgerung 5.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie X und Y zwei $(\Omega', \mathfrak{A}')$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = P_Y$. Weiter sei $g \in \mathcal{M}(\Omega', \mathfrak{A}'; \mathbb{R})$ Dann gilt:

(a) Es sind $g \circ X$ und $g \circ Y$ jeweils $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{g \circ X} = P_{g \circ Y}$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent.
   (i) Es ist $g \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.
   (ii) Es ist $g \circ Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gelten (ii) und $E_P(g \circ X) = E_P(g \circ Y)$.

Satz 5.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $g \in \mathcal{M}(\Omega', \mathfrak{A}'; K)$. Dann gilt:

(a) Es ist $g \circ X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$.

(b) Es ist $E_P(|g \circ X|) = E_{P_X}(|g|)$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $g \circ X$ ist quasi-P-integrierbar.

(ii) g ist quasi-P_X-integrierbar.

d Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) $g \circ X$ ist P-integrierbar.

(iv) g ist P_X-integrierbar.

(e) Sei (i) erfüllt. Dann gelten (iii) und $E_P(g \circ X) = E_{P_X}(g)$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Satz M.15.3.

(b) Wegen Bemerkung M.18.9 gilt $|g| \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Hieraus ergibt sich mittels Satz M.21.10.1 dann $|g \circ X| \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $E_{P_X}(|g|) = \int\limits_{\Omega'} |g| dP_X = \int\limits_{\Omega'} |g| d[X(P)] \overset{Satz M.21.10.1}{=} \int\limits_{\Omega} (|g| \circ X) dP = \int\limits_{\Omega} |g \circ X| dP = E_P(|g \circ X|)$.

(c)-(e) Die Behauptungen sind unmittelbare Konsequenz analog aus Satz M.21.10.2. Der Beweis von (e) erfolgt analog zum Beweis von (b)

■

Wir geben nun eine Interessante Formel für die Berechnung des Erwartungswertes einer $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV mit Werten in $\mathbb{N}$ an.

Satz 5.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV, welche nur Werte in $\mathbb{N}$ annimmt. Dann ist $X \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $E_P(X) = \sum\limits_{k \in \mathbb{N}} P(\{X \geq k\})$

Beweis. Aus der Wahl von X ergibt sich alles aus Satz M.21.4.3 Teil (b4). ■

Beispiel 5.1.1. *Der zufällige Versuch bestehe im einmaligen Werfens eines homogenen Würfels.Dei ZV X möge die dabei erziehlte Augenzahl beschreiben. Wir wollen deren Erwartungswert bestimmen. Der zugehörige W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist hierbei durch $\Omega = \{1,2,3,4,5,6\}, \mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie die diskrete Gleichverteilung $P := \frac{1}{6} \sum\limits_{k=1}^{6} \epsilon_{k,\mathfrak{A}}$ gegeben. Es ist dann $X : \Omega \to \mathbb{R}$ die gemäß $k \mapsto k$ definierte Abbildung. Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist X dann trivialerweise $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-meßbar, also ein $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-ZV auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Unter Beachtung von Definition 5.1.1 sowie Besipiel M.21.3.4 folgt dann:*

$$E_P(X) = \int\limits_{\Omega} X dP = \int\limits_{\Omega} X d(\frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} \epsilon_{k,\mathfrak{A}})$$

$$\overset{Bsp M.21.3.4}{=} \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} X(k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} X(k) = \frac{1}{6} \sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$

Wir wenden uns nun der Linearität der Erwartungswertbildung zu.

Satz 5.1.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $n \in \mathbb{N} sowie (\alpha_k)_{k=1}^n$ bzw. $(X_k)_{k=1}^n$ Folgen aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$. Dann gelten $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ sowie $E_P(\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{E}_P(X_k)$.

Beweis. Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Teil (d) von Satz M.21.5.5 ■

Satz 5.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_k)_{k=1}^n$ bzw. $(X_k)_{k=1}^n$ Folgen aus $[0, \infty]$ bzw. $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $E_P(\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \mathbb{E}_P(X_k)$.

Beweis. Dies folgt aus Definition 5.1.1 sowie aus den Teilen (a) und (b) von Satz M.21.3.2. ■

Satz 5.1.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Dann gilt:

(a) Seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \overline{\mathbb{R}})$ so gewählt, dass $X+Y$ definiert ist. Dann ist $X+Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \overline{\mathbb{R}})$ und es gilt $E_P(X+Y) = E_P(X) + E_P(Y)$.

(b) Seien $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \overline{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \overline{\mathbb{R}})$ und es gilt $E_P(\alpha X) = \alpha E_P(X)$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Satz M.21.5.2.

(b) Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Satz M.21.5.3 Teil (b).

■

Definition 5.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann heißt X zentriert, falls $E_P(X) = 0$ erfüllt ist. Es bezeichne $\mathcal{L}_0^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$ die Menge aller zentrierten Elemente aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$.

Bemerkung 5.1.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Dann ist $\mathcal{L}_0^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ein im seminormierten Raum $(\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), N_{1,P,\mathbb{R}})$ abgeschlossener linearer Teilraum von $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Bemerkung 5.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann gilt $X - E_P(X) \in \mathcal{L}_0^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$.

5.2. Varianz und Kovarianz

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, sowie P-integrierbare numerische ZV X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Deren Erwartungswert in $E_P(X)$ bezüglich P läßt sich dann als eine charakteristische Zahl auffassen um die die ZV X schwankt. Über die größe dieser Schwankungungen gibt die Zahl $E_P(X)$ jedoch keine Auskunft. Das Ziel des vorliegenden Abschnitts besteht darin, eine solche Maßzahl für die mittlere Abweichung von X von der Zahl $E_P(X)$ anzubieten. Die genannte Fragestellung führt in Kombination mit der nachfolgenden Bemerkung zu einer ersten Naheliegenden Version einer solchen Maßzahl.

Bemerkung 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann ist $|X - E_P(X)| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$.

Bemerkung 5.2.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann heißt die Zahl $E_P(|X - E_P(X)|)$ die **mittlere Abweichung** von X bezüglich P.

Das eben eingeführte Streuungsmaß erwies sich jedoch für das praktische Rechnen zu unhandlich. Aus diesem Grund wenden wir uns nun einem anderem Streuungsmaß zu, welches auf Carl Friedrich Gauß(1777-1855) zurückgeht.

Bemerkung 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann gelten $|X - E_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, sowie $E_P(|X - E_P|^2) \in [0, \infty]$.

Bemerkung 5.2.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann heißt die in $[0, \infty]$ gelegene Größe $V_P(X) := E_P(|X - E_P(X)|^2)$ die **Varianz** von X bezüglich P. Weiterhin wird die größe $\sqrt{(V_P(X))}$ auch als **Streuung** von X bezüglich P bezeichnet.

v55
02.02.10

Bemerkung 5.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^e(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann gilt $\mathrm{Var}_P(X) = [N_{2,P}(X - E_p(X)]^2$, wobei die Größe $N_{2,P}(\cdot)$ in Bemerkung M.21.7.1 eingeführt wurde.

Bemerkung 5.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$. Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:

a) Es ist $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$.

b) Es ist $|X - E_P(X)| \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$

Bemerkung 5.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum und $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Weiterhin seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$ so gewählt, daß $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}_P$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(Y)$.
Beweis. Wegen der Bemerkung 5.2.2 ergibt sich

$$\{|X - E_P(X)|^2, |Y - E_P(Y)|^2\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{1}$$

Aus (1) folgt sogleich $\{|X - E_P(X)|^2, |Y - E_P(Y)|^2\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt mittels Satz M.17.5 dann

$$\{|X - E_p(X)|^2 \neq |Y - E_P(Y)|^2\} \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von X und Y liefert Bemerkung 5.1.1 dann $E_P(X) = E_P(Y)$. Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\{|X - E_P(X)|^2 \neq |Y - E_P(Y)|^2\} &= \{|X - E_P(X)|^2 \neq |Y - E_P(X)|^2\} \\ &\subseteq \{X - E_P(X) \neq Y - E_P(X)\} = \{X \neq Y\} \qquad (3)\end{aligned}$$

Wegen (2), (3) und $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}_P$ liefert Teil (b) von Satz M.5.1 nun

$$\{|X - E_P(X)|^2 \neq |Y - E_P(Y)|^2\} \in \mathcal{N}_P \qquad (4)$$

Unter Beachtung von Definition 5.2.2 folgt wegen (1) und (4) mittels Teil (a) von Satz M.21.6.3 dann $\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(Y)$. ■

Satz 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$.
   (ii) Es ist $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

b) Es ist $\mathrm{Var}_P(X) = E_P(X^2) - [E_P(X)]^2$.

c) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (iii) Es ist $\mathrm{Var}_P(X) = 0$.
   (iv) Es ist $\{X \neq E_P(X)\} \in \mathcal{N}_P$.

Beweis. Es gilt

$$|X - E_P(X)|^2 = [X - E_P(X)]^2 = X^2 - 2[E_P(X)]X + [E_P(X)]^2 1_\Omega \qquad (1)$$

Wegen $\Omega \in \mathfrak{A}$ gilt nach Bemerkung 5.1.3 dann

$$[E_P(X)]^2 1_\Omega \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \qquad (2)$$

und

$$E_P([E_P(X)]^2 1_\Omega) = [E_P(X)]^2 P(\Omega) = [E_P(X)]^2 \qquad (3)$$

Sei

$$f := -2[E_P(X)]X + [E_P(X)]^2 1_\Omega \qquad (4)$$

Wegen $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, (2) und (4) folgt mittels Satz 5.1.4 dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \qquad (5)$$

sowie unter Zusätzlicher Beachtung von (3) dann

$$\begin{aligned}E_P(f) = E_P(-2([E_P(X)]X + [E_P(X)]^2 1_\Omega) &= E_P(-2[E_P(X)]X) + E_P([E_P(X)]^2 1_\Omega) \\ = -2[E_P(X)][E_P(X)] + [E_P(X)]^2 &= -[E_P(X)]^2 \qquad (6)\end{aligned}$$

Wegen (1) und (4) gilt

$$|X - E_P(X)|^2 = X^2 + f \qquad (7)$$

a) Dies folgt wegen (5) und (7) sogleich mittels Teil (d) von Satz M.21.5.5.

b) Sei zunächst $\mathrm{Var}_P(X) = +\infty$. Wegen (a) gilt dann $E_P(X^2) = +\infty$. Somit ist $\mathrm{Var}_P(X) = +\infty = +\infty - [E_P(X)]^2 = E_P(X^2) - [E_P(X)]^2$.
Sei nun $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$. Wegen (a) ist dann $X \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, also

$$X^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{8}$$

Unter Verwendung von Definition 5.2.2, (7),(8) und (5) ergibt sich mittels Satz 5.1.4 bei zusätzlicher Beachtung von (6) $\mathrm{Var}_P(X) = E_P(|X - E_P(X)|^2) = E_P(X^2 + f) = E_P(X^2) + E_P(f) = E_P(X^2) - [E_P(X)]^2$.

c) Wegen Bemerkung 5.2.2 gilt

$$|X - E_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{9}$$

Wegen Definition 5.2.2 und Definition 5.1.2 gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = E_P(|X - E_P(X)|^2) = \int_\Omega |X - E_P(X)|^2 \,\mathrm{d}P \tag{10}$$

Wegen (9) und (10) liefert Teil (b) von Satz M.21.6.1 dann, daß (iii) äquivalent ist zu:

(iii') Es ist $\{|X - E_P(X)|^2 \neq 0\} \in \mathcal{N}_P\}$

Hieraus sowie aus $\{|X - E_P(X)|^2 \neq 0\} = \{X \neq E_P(X)\}$ folgt dann die Äquivalenz von (iii) und (iv).

■

Bemerkung 5.2.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gelten $1_A \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und $\mathrm{Var}_P(1_A) = P(A) - [P(A)]^2$.
Beweis. Wegen Bemerkung 5.1.4 gelten

$$1_A \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$E_P(1_A) = P(A). \tag{2}$$

Wegen $(1_A)^2 = 1_A$ folgt aus (2) dann

$$E_P((1_A)^2) = E_P(1_A) = P(A). \tag{3}$$

Unter Beachtung von Teil (b) von Satz 5.2.1 sowie (2) und (3) folgt dann

$$\mathrm{Var}_P(1_A) = E_P((1_A)^2) - [E_P(1_A)]^2 = P(A) - [P(A)]^2. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann alles gezeigt. ■

Wir zeigen unn, daß die Varianz eines $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ eine w.-theoretische Größe ist.

Satz 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) Es ist $P_X \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt $\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{var}(P_X)$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent

  (i) Es ist $Var_P(X) = 0$.

  (ii) Es ist $P_X = \epsilon_{E_P(X), \mathfrak{B}_1}$.

Beweis.

a) Wegen $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gelten nach Satz 5.1.1 dann

$$P_X \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{1}$$

sowie

$$E_P(X) = M_1(P_X) \tag{2}$$

Unter Beachtung von (1), Teil (a) von Satz M.23.4.2 sowie $|X - E_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und Satz M.21.10.1 folgt dann

$$\mathrm{var}(P_X) = \int_{\mathbb{R}} [u - M_1(P_X)]^2 P_X(\,\mathrm{d}u) = \int_{\mathbb{R}} [u - E_P(X)]^2 P_X(\,\mathrm{d}u)$$

$$= \int_{\mathbb{R}} [u - E_P(X)]^2 [X(P)](\,\mathrm{d}u) = \int\limits_{\Omega} |X - E_P(X)|^2 \,\mathrm{d}P = \mathrm{Var}_P(X) \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist dann (a) bewiesen.

b) Wegen (3) ist (i) äquivalent zu: (i') Es ist $\mathrm{var}(P_X) = 0$. Wegen Teil (b) von Satz M.23.4.4 ist (i') äquivalent zu: (ii') Es ist $P_X = \epsilon_{M_1(P_X), \mathfrak{B}_1}$. Wegen (2) sind (ii') und (ii) äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von (i) und (ii).

■

Folgerung 5.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, daß $P_X = P_Y$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(Y)$.
Beweis. Dies folgt aus Teil (a) von Satz 5.2.2. ■

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen der in Definition 5.2.1 eingeführten mittleren Abweichung und der Varianz.

Satz 5.2.3. Seie $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$, dann gelten $|X - E_P(X)| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K)$ sowie $E_P(|X - E_p(X)|) \leq \sqrt{\mathrm{Var}_P(X)}$.
Beweis. Wegen Bemerkung 5.2.1 gilt

$$|X - E_P(X)| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; K) \tag{1}$$

Wegen Definition 5.1.1 und Bemerkung M.21.7.1 gilt

$$E_P(|X - E_P(X)|) = \int\limits_{\Omega} |X - E_P(X)| \,\mathrm{d}P \tag{2}$$

Wegen Definition 5.2.2 gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = [N_{2,P}(X - E_P(X))]^2 \tag{3}$$

Da $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum ist, gilt nach Teil (a) von Folgerung M.21.8.1 dann

$$N_{1,P}(X - E_P(X)) \leq N_{2,P}(X - E_P(X)). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (2),(4) und (3) folgt nun

$$E_P(|X - E_P(X)) = N_{1,P}(X - E_P(X)) \leq N_{2,P}(X - E_p(X)) = \sqrt{\mathrm{Var}_P(X)} \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ist alles gezeigt. ■

Satz 5.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum, $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $\sigma, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\sigma X + a \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $\mathrm{Var}_P(\sigma X + a) = \sigma^2 \mathrm{Var}_P(X)$.
Beweis. Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt $a1_\Omega \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Hieraus sowie aus der Wahl von X folgt mittels Teil (d) von Satz M.21.5.5 dann

$$\sigma X + a = \sigma X + a1_\Omega \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wegen (1) bzw. $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ folgt mittels Teil (a) von Satz 5.2.2 dann, daß $P_{\sigma X + a}$ bzw. P_X jeweils zu $\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ gehört und daß die Beziehungen

$$\mathrm{Var}_P(\sigma X + a) = \mathrm{var}(P_{\sigma X + a}) \tag{2}$$

bzw.

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{var}(P_X). \tag{3}$$

bestehen. Sei $T_{\sigma,a} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $u \mapsto \sigma u + a$. Dann gilt

$$\sigma X + a = T_{\sigma,a} \circ X \tag{4}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{\sigma,a}$ dann $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-meßbar. Kombiniert man dies mit (4), so ergibt sich mittels Satz M.15.11 dann

$$P_{\sigma X + a} = (\sigma X + a)(P) = (T_{\sigma,a} \circ X)(P) = T_{\sigma,a}[X(P)] = T_{\sigma,a}(P_X) \tag{5}$$

Wegen Satz M.23.4.5 gilt

$$\operatorname{var}(T_{\sigma,a}(P_X)) = |\sigma|^2 \operatorname{var}(P_X) = \sigma^2 \operatorname{var}(P_X) \tag{6}$$

Unter Verwendung von (2),(5),(6) und (3) folgt nun

$$\operatorname{Var}_P(\sigma X + a) = \operatorname{var}(P_{\sigma X + a} = \operatorname{var}(T_{\sigma,a}(P_X)) = \sigma^2 \operatorname{var}(P_X) = \sigma^2 \operatorname{Var}_P(X) \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) ist dann alles gezeigt. ■

Folgerung 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum sowie $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ dann gelten $X - E_P(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $\operatorname{Var}_P(X - E_P(X)) = \operatorname{Var}_P(X)$.
Beweis. Wähle $\sigma = 1$ und $a = E_P(x)$ im Satz 5.2.4. ■

Satz 5.2.4 legt es nahe, eine Unterklasse der in Definition 5.1.2 eingeführeten Klasse der zentrierten Elemente $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ zu betrachten.
Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum und $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann heißt X standardisiert, falls $E_P(X) = 0$ und $\operatorname{Var}_P(X) = 1$ erfüllt sind.

Bemerkung 5.2.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W.-Raum und sei $X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ derart beschaffen, daß $\operatorname{Var}_P(X) \in (0, +\infty)$ erfüllt ist. Seien $\sigma := \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}}$ und $a := \frac{-E_P(X)}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}}$. Dann ist $\sigma X + a$ ein standadisierter Element von $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und $P_{\sigma X + a}$ ist die Standadiesierung von P_X.

v68
26.05.2010

Unser nächstes Ziel besteht nun darin die Varianz einer Summe von integrierbaren Zufallsvariablen zu berechnen. Diese Zielstellung führt uns auf eine Begriffsbildung, welche om gewisser Weose wechselseitige Zusammenhänge zwischen integrierbaren Zufallsvariablen beschreibt. Zur Einführung der gewünschten Größe benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Lemma 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$. Dann gilt:

(a) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:
  (i) Es ist $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$.
  (ii) Es ist $(X - a)(Y - b) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$.

(b) Sei (i) erfüllt. Dann gilt: $E_P([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) = E_P(XY) - [E_P(X)][E_P(Y)]$.

Beweis.

(a) Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{P}, \mathbb{R}) \tag{1}$$

(i)⇒ (ii) Es gilt

$$(X - a)(Y - b) = XY - bX - aY + ab1_\Omega \tag{2}$$

Wegen (2) (i) und (1) liefert Folgerung M.21.7.2 dann $(X-a)(Y-b) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$. Es gilt also (ii).
(ii)$\Rightarrow$ (i) Wegen (2) gilt

$$XY = (X-a)(Y-b) + bX + aY - ab1_\Omega \tag{3}$$

Wegen (3), (ii) und (1) liefert Folgerung M.21.7.2 dann $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$. Es gilt also (i).

(b) Unter Beachtung von (2), Satz 5.1.4 und Bemerkung 5.1.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} & E_P([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) \\ &= E_P(XY - [E_P(Y)]X - [E_P(X)]Y + [E_P(X)][E_P(Y)]1_\Omega) \\ &= E_P(XY) - [E_P(Y)][E_P(X)] - [E_P(X)][E_P(Y)] + [E_P(X)][E_P(Y)][P(\Omega)] \\ &= E_P(XY) - [E_p(X)][E_P(Y)] \end{aligned}$$

■

Lemma 5.2.1 führt nun auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann wird die Zahl

$$\mathrm{Cov}_P(X, Y) := \mathrm{E}_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)])$$

als **Kovarianz** von X und Y bezüglich P bezeichnet.

Bemerkung 5.2.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ erfüllt ist. Weiter seien $U, V \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})$ so gewählt, dass die Mengen $\{X \neq U\}$ und $\{Y \neq V\}$ jeweils zu $\mathcal{N}_P$ gehören. Dann gelten $\{U, V, UV\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ sowie $Cov_P(X, Y) = Cov_P(U, V)$.

Satz 5.2.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann gilt:

(a) Es ist $Cov_p(X, Y) = E_P(XY) - [E_P(X)][E_P(Y)]$.

(b) Es ist $Cov_P(X, Y) = Cov_p(Y, X)$.

(c) Es gelten $\{X - E_P(X), Y - E_P(Y), [X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ sowie $Cov_P(X - E_P(X), Y - E_P(Y)) = Cov_P(X, Y)$.

(d) Es ist $|Cov_P(X, Y)| \leq \sqrt{Var_P(X)}\sqrt{Var_P(Y)}$.

Beweis.

(a) Dies folgt sogleich aus Definition 5.2.3 und Teil (b) von Lemma 5.2.1.

(b) Dies folgt sogleich aus Definition 5.2.3.

(c) Aufgrund der Wahl von X und Y ergibt sich mittels Bemerkung 5.1.5 dann

$$X - E_P(X) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$E_P(X - E_P(X)) = 0 \tag{2}$$

bzw.

$$Y - E_P(Y) \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R}) \tag{3}$$

und

$$E_P(Y - E_P(Y)) = 0. \tag{4}$$

Wegen $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ liefert Teil (a) von Lemma 5.2.1 dann

$$[X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (1), (3) und (5) folgt mittels (a) sowie zusätzlicher Beachtung von (2) und (4) dann

$$\begin{aligned} &Cov_P(X - E_P(X), Y - E_P(Y)) \\ &\overset{(a)}{=} E_P([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) - [E_p(X - E_P(X))][E_P(Y - E_P(Y))] \\ &\overset{(2)(4)}{=} E_P([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) \overset{Def 5.2.3}{=} Cov(X, Y). \end{aligned} \tag{6}$$

(d) Wegen (5) liefert Teil (b) von Satz M.21.5.4 dann

$$|\int_\Omega [X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]dP| \leq \int\limits_\Omega |[X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]|dP \tag{7}$$

Nach Definition gilt:

$$N_{1,P}([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) = \int\limits_\Omega |[X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]|dP \tag{8}$$

Aufgrund der Hölderschen Ungleichung (vgl Teil (a) von Satz M.21.8.1) gilt:

$$N_{1,P}([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) \leq [N_{2,P}(X - E_P(X))][N_{2,P}(Y - E_P(Y))] \tag{9}$$

Wegen Bemerkung 5.2.3 gelten:

$$N_{2,P}(X - E_P(X)) = \sqrt{Var_p(X)} \tag{10}$$

und

$$N_{2,P}(Y - E_P(Y)) = \sqrt{Var_p(Y)} \tag{11}$$

Unter Verwendung von (7)-(11) folgt nun

$$|Cov_P(X,Y)| = |E_P([X - E_p(X)][Y - E_P(Y)])|$$

$$= \int_\Omega |[X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]| dP = N_{1,P}([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)])$$

$$\leq [N_{2,P}(X - E_P(X))][N_{2,P}(Y - E_P(Y))] = \sqrt{Var_p(X)}\sqrt{Var_P(Y)}$$

■

Wir führen nun eine weitere Begriffsbildung ein, welche auf die Wechselbeziehungen zwischen zwei integrierbaren Zufallsvariablen bezug nimmt.

Definition 5.2.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann heißen X und Y **unkorreliert** bezüglich P, falls $E_P(XY) = [E_P(X)][E_P(Y)]$ erfüllt ist.

Es folgen nun einige Charakterisierungen der Unkorreliertheit.

Lemma 5.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es sind X und Y unkorreliert bzgl. P.

(ii) Es sind Y und X unkorreliert bzgl. P.

(iii) Es ist $Cov_P(X,Y) = 0$.

(iv) Es sind $X - E_P(X)$ und $Y - E_P(Y)$ unkorreliert bzgl. P.

Beweis.

(i)⇒ (ii) Dies folgt aus Definition 5.2.4.

(i)⇒ (iii) Wegen Teil (a) von Satz 5.2.5 gilt $Cov_P(X,Y) = E_P(XY) - [E_P(X)][E_P(Y)]$. Hieraus folgt sogleich die Äquivalenz von (i) und (iii).

(iii)⇒ (iv) Wegen Teil (c) von Satz 5.2.5 gelten

$$\{X - E_P(X), Y - E_P(Y), [X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R}) \tag{1}$$

sowie

$$Cov_P(X - E_P(X), Y - E_P(Y)) = Cov_P(X,Y). \tag{2}$$

Wegen (2) ist (iii) äquivalent zu:
(iii') Es ist $Cov_P((X - E_P(X)), Y - E_P(Y)) = 0$.
Wegen (1) und der schon gezeigten Äquivalenz von (i) und (iii) sind dann (iii') und (iv) äquivalent. Hieraus folgt ausgrund der schon gezeigten Äquivalenz von (iii) und (iii') die Äquivalenz von (iii) und (iv).

■

Bemerkung 5.2.9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Es seien $X, Y \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ so gewählt, dass X und Y unkorreliert bzgl. P sind. Weiter seien $U, V \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass die Mengen $\{X \neq U\}$ und $\{Y \neq V\}$ jeweils zu $\mathcal{N}_P$ gehören. Dann gehören U sowie V jeweils zu $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ und sind unkorreliert bzgl. P.

Wir wenden uns nun einer wichtigen Identität für die Varianz einer Summe von paarweise unkorrelierten Zufallsvariablen zu, welche auf Irenee-Jules Bienayme (1796-1878) zurückgeht.

Satz 5.2.6. (Identität von Bienayme) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ und $(X_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ derart, dass für alle $k, l \in \{1, ..., n\}$ mit $n \neq l$ dann X_k und X_l unkorreliert bzgl. P sind. Dann gelten $\sum\limits_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R})$ sowie

$$Var(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} Var_P(X_k).$$

Beweis. Wegen Satz 5.1.4 gelten

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P, \mathbb{R}) \tag{1}$$

sowie

$$E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} E_P(X_k) \tag{2}$$

Aus (2) folgt nun

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n}) = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} E_P(X_k) = \sum_{k=1}^{n} [X_k - E_P(X_k)]. \tag{3}$$

Sei

$$I_n := \{(k, l) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}\}. \tag{4}$$

Wegen $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ folgt aus (4) dann

$$I_n \neq \emptyset. \tag{5}$$

Aus (4) folgen weiterhin

$$\{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} = \{(ij) : j \in \{1, ..., n\}\} \cup I_n \tag{6}$$

und

$$\{(i, j) : j \in \{1, ..., n\}\} \cap I_n = \emptyset \tag{7}$$

Unter Beachtung von (3)(7) folgt nun

$$|\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2 = [\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)]^2 = [\sum_{k=1}^{n}[X_k - E_P(X_k)]]^2$$

$$= \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n}[X_k - E_P(X_k)][X_l - E_P(X_l)] = \sum_{k=1}^{n}[X_k - E_P(X_k)] + \sum_{k,l \in I_n}^{n}[X_k - E_P(X_k)][X_l - E_P(X_l)] \tag{8}$$

Seien

$$(k, l) \in I_n. \tag{9}$$

Wegen (9) und (4) sind dann X_k und X_l unkorreliert bzgl. P. Somit gilt nach Lemma 5.2.2 dann

$$Cov_P(X_k, X_l) = 0 \tag{10}$$

Sowie wegen Definition 5.2.4 weiterhin

$$X_k X_l \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{11}$$

Wegen (11) folgt mittels Teil (a) von Lemma 5.2.1 dann

$$[X_k - E_P(X)][X_l - E_P(X_l)] \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{12}$$

Wegen Definition 5.2.3 und (10) gilt

$$E_P([X_k - E_P(X_k)][X_l - E_P(X_l)]) = Cov_P(X_k, X_l) = 0. \tag{13}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{14}$$

Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{15}$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k) = \sum_{k=1}^{n} X_k - [E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)]1_\Omega. \tag{16}$$

Da $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.21.7.1 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (14)-(16) dann

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k) \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{17}$$

Aus (17) folgt nun:

$$|\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{18}$$

Aus (8) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X)|^2 = \sum_{k=1}^{n} [X_k - E_P(X)]^2$$

$$= |\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2 - \sum_{j,k \in I_n} [X_K - E - P(X_k)][X_l - E_P(X_l)]. \tag{19}$$

Wegen (19), (18), (9) und (12) folgen mittels Satz 5.1.4 dann $\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X_k)|^2 \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. sowie zusätzlicher Beachtung von (13) dann

$$E_P(\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X_k)|^2) = E_P(|\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2) - \sum_{k,l \in I_n} E_P([X_k - E_P(X_k)][X_l - E_P(X_l)])$$

$$= E_P(|\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2) \tag{20}$$

Da $(|[X_k - E_P(X_k)]|^2)_{k=1}^n$ nach Bemerkung 5.2.2 eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, liefert Satz 5.1.5 dann $\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X_k)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$E_P(\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X_k)|^2) = \sum_{k=1}^{n} E_P(|X_k - E_P(X_k)|^2). \tag{21}$$

Unter Beachtung von (1), Definition 5.2.2, (20), (21) und nochmals Definition 5.2.2 folgt dann

$$Var_P(\sum_{k=1}^{n} X_k) = E_P(|\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P(\sum_{k=1}^{n} X_k)|^2)$$

$$= E_P(\sum_{k=1}^{n} |X_k - E_P(X_k)|^2) = \sum_{k=1}^{n} E_P(|X_k - E_P(X_k)|^2) = \sum_{k=1}^{n} Var_P(X_k). \tag{22}$$

Unter Beachtung von (1) sei nun

v69
26.05.2010

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \setminus \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{23}$$

Wegen (23) folgt mittels Teil (a) von Satz 5.2.1 dann

$$Var_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = +\infty \tag{24}$$

Wegen Bemerkung 5.2.3 gilt

$$Var_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \left[N_{2,p}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right)\right]^2 \tag{25}$$

Aus (24) und (25) folgt nun

$$N_{2,p}\left(\sum_{k=1}^{n} X_k - E_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right) = +\infty \tag{26}$$

Aus (26) und (2) folgt dann

$$N_{2,p}\left(\sum_{k=1}^{n}[X_k - E_P(X_k)]\right) = +\infty \tag{27}$$

Wegen der Minkowskischen Ungleichung (vgl. Satz M.21.8.4) gilt

$$N_{2,p}\left(\sum_{k=1}^{n}[X_k - E_P(X_k)]\right) \leq \sum_{k=1}^{n} N_{2,p}\left(X_k - E_P(X_k)\right) \tag{28}$$

Wegen (27) und (28) gibt es dann ein $s \in \{1, ..., n\}$ mit $N_{2,p}\left(X_s - E_P(X_k)\right) = +\infty$ und somit wegen der nach Bemerkung 5.2.3 gültigen Beziehung $Var_P(X_s) = [N_{2,p}\left(X_s - E_P(X_k)\right)]^2$, also mit

$$Var_P(X_s) = +\infty \tag{29}$$

Aus (24) und (29) folgt dann

$$Var_P(\sum_{k=1}^{n} X_k) \overset{(24)}{=} +\infty \overset{(29)}{=} \sum_{k=1}^{n} Var_P(X_k) \tag{30}$$

Wegen (1), (14), (22), (23) und (30) ist dann alles gezeigt. ∎

Im restlichen Teil des Abschnitts betrachten wir nun jene Situation, in der die vorliegenden $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen quadratisch P-integrierbar sind. Damit sind unsere Betrachtungen automatisch im Semiprähilbertraum $(\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{P,\mathbb{R}})$ über $\mathbb{R}$ angesiedelt. Dies bedeutet insbesondere, dass wir nun im verstärkten Maße auf Methoden der Funktionalanalysis zurückgreifen können.

Lemma 5.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt

(a) Es gilt $\{X, Y, XY\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$

(b) Es gelten $\{X - E_P(X), Y - E_P(Y)\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $Cov_P(X, Y) = [X - E_P(X), Y - E_P(Y)]_{P,\mathbb{R}}$.

(c) Es gilt $Cov_P(X, X) = Var_P(X)$.

(d) Folgende Aussagen sind äquivalent

  (i) Es sind X und Y unkorreliert bezüglich P.

  (ii) Es ist $Cov_P(X, Y) = 0$.

  (iii) Es sind $x - E_P(X)$ und $Y - e_P(Y)$ orthogonal in $(\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{P,\mathbb{R}})$.

Beweis.

(a) Da P endlich ist, gilt nach Teil (b) von Satz M.21.8.3 dann $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Somit gilt $\{X, Y\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Wegen Teil (a) von Satz M.21.8.6 gilt zudem $XY \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(b) Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Da $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.21.7.1 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt wegen (1) sowie $X - E_P(X) = X - [E_P(X)]1_\Omega$ und $Y - E_P(Y) = Y - [E_P(Y)]1_\Omega$ dann

$$\{X - E_P(X), Y - E_P(Y)\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{2}$$

Unter Beachtung von Definition 5.2.4, Definition 5.1.1, (2) und der Definition von $[\cdot, \cdot]_{P,\mathbb{R}}$ folgt nun

$$\begin{aligned} Cov_P(X, Y) &\overset{D5.2.4}{=} E_P([X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]) \\ &\overset{D5.1.1}{=} \int_\Omega [X - E_P(X)][Y - E_P(Y)]\, dP = [X - E_P(X), -E_P(Y)]_{P,\mathbb{R}} \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) ist dann (b) gezeigt.

(c) Unter Beachtung von Definition 5.2.4 und Definition 5.2.2 ergibt sich

$$Cov_P(X, X) = E_P([X - E_P(X)]^2) = E_P(|X - E_P(X)|^2) = Var_P(X)$$

(d) Es gilt

„(i)⇔(ii)“ Dies folgt aus Lemma 5.2.2

„(ii)⇔(iii)“ Dies folgt aus (2) und (3).

■

Lemma 5.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum sowie $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

(a) Es gehören 1_A und 1_B zu $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und es gilt

$$Cov(1_A, 1_B) = P(A \cap B) - [P(A)][P(B)]$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent

 (i) Es sind 1_A und 1_B unkorreliert bezüglich P.

 (ii) Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis.

(a) Wgen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$\{1_A, 1_B\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil (a) von Lemma 5.2.3 nun

$$\{1_A, 1_B, 1_A 1_B\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil (a) von Satz 5.2.5 nun

$$Cov_P(1_A, 1_B) = E_P(1_A 1_B) - [E_P(1_A)][E_P(1_B)] \tag{3}$$

Wegen $A, B \in \mathfrak{A}$ liefert Bemerkung 5.1.3 dann

$$E_P(A) = P(A) \tag{4}$$

$$E_P(B) = P(B) \tag{5}$$

Wgen Teil (b) von Bemerkung M.18.2 gilt

$$1_A 1_B = 1_{A \cap B} \tag{6}$$

Wegen $A, B \in \mathfrak{A}$ und der Wahl von $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra in Ω gilt nach teil (b) von Satz M.4.1 dann $A \cap B \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgen mittel Bemerkung 5.2.1 dann $1_{A \cap B} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und

$$E_P(1_{A \cap B}) = P(A \cap B) \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt nun

$$E_P(1_A 1_B) = P(A \cap B) \tag{8}$$

Unter Beachtung von (3), (8), (4) und (5) folgt dann

$$Cov_P(1_A, 1_B) \overset{(3)}{=} E_P(1_A 1_B) - [E_P(1_A)][E_P(1_B)] \overset{(8),(4),(5)}{=} P(A \cap B) - [P(A)][P(B)] \tag{9}$$

Wegen (1) und (9) ist dann (a) bewiesen.

(b) Wegen (9) ist aber (i') äquivalent zu (ii). Somit sind (i) und (ii) äqivalent.

■

Wir zeigen nun eine Möglichkeit auf, wie man unter gewissen Umständen aus zwei gegebenen Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ zwei neue Zufallsvariablen aus $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ konstruieren kann, welche unkorreliert bezüglich P sind.

Satz 5.2.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $X, Y \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $E_P(X^2) = E_P(Y^2)$ und $E_P(X) = E_P(Y)$ erfüllt sind. Dann gelten $\{X+Y, X-Y\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und $Cov_P(X+Y, X-Y) = 0$. **Beweis.** Da $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.21.7.1 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, gilt

$$\{X + Y, X - Y\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wegen (1) gilt nach Teil (a) von Lemma 5.2.3 dann

$$\{X+Y, X-Y, (X+Y)(X-Y)\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil (a) von Satz 5.2.5 dann

$$Cov_P(X+Y, X-Y) = E_P([X+Y][X-Y]) - [E_P(X+Y)][E_P(X-Y)] \tag{3}$$

Unter Beachtung von Satz 5.1.4 ergibt sich

$$E_P([X+Y][X-Y]) = E_P(X^2 - Y^2) \overset{S5.1.4}{=} E_P(X^2) - E(Y^2) = 0 \tag{4}$$

und

$$E_P(X-Y) \overset{S5.1.4}{=} E_P(X) - E_P(Y) = 0 \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3)-(5) folgt nun $Cov_P(X+Y, X-Y) = 0$ ∎

Satz 5.2.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum. Weiter seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j=1}^r$ und $(\beta_k)_{k=1}^s$ bzw. $(X_j)_{j=1}^r$ und $(Y_k)_{k=1}^s$ Folgen aus $\mathbb{R}$ bzw. $L^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gelten

$$\left\{\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_k Y_k\right\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

sowie

$$Cov_P\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_k Y_k\right) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s \alpha_j \beta_k [Cov_P(X_j, Y_k)]$$

und

$$Var_P\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_j \beta_k [Cov_P(X_j, X_k)]$$

Beweis. Wegen Folgerung M.21.7.1 gilt

$$\left\{\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_k Y_k\right\} \subset \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Aufgrund der Wahl von $(X_j)_{j=1}^r$ und $(Y_k)_{k=1}^s$ folgt mittels Teil (a) von Lemma 5.2.3, dass diese folgen aus $L^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sind. Hieraus ergeben sich mittels satz 5.1.4 nun

$$\left\{\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_k Y_k\right\} \subset \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

sowie

$$E_P\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^r \alpha_j [E_P(X_j)] \tag{2}$$

und
$$E_P\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_s\right)=\sum_{k=1}^{s}\beta_k[E_P(Y_k)] \tag{3}$$
Wegen (2) und (3) gilt dann
$$\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j - E_P\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j\right)=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j\sum_{j=1}^{r}\alpha_j[E_P(X_j)]=\sum_{j=1}^{r}\alpha_j[X_j-E_P(X_j)] \tag{4}$$
bzw.
$$\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k - E_P\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k\right)=\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k\sum_{k=1}^{s}\beta_k[E_P(Y_k)]=\sum_{k=1}^{s}\beta_k[Y_k-E_P(Y_k)] \tag{5}$$
Unter Beachtung von (1), Teil (b) von Lemma 5.2.3, (4), (5), der Bilinearität des Semiskalarprodukts $[\cdot,\cdot]_{P,\mathbb{R}}$ sowie nochmeals Teil (b) von Lemma 5.2.3 folgt dann
$$\begin{aligned}
&Cov_P\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j,\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k\right)\\
&\overset{L5.2.3(b)}{=}\left[\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j - E_P\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j\right),\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k - E_P\left(\sum_{k=1}^{s}\beta_k Y_k\right)\right]_{P,\mathbb{R}}\\
&\overset{(4),(5)}{=}\left[\sum_{j=1}^{r}\alpha_j[X_j-E_P(X_j)],\sum_{k=1}^{s}\beta_k[Y_k-E_P(Y_k)\right]_{P,\mathbb{R}}\\
&=\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\alpha_j\beta_k\,[[X_j-E_P(X_j)],[Y_k-E_P(Y_k)]]_{P,\mathbb{R}}\\
&\overset{L5.2.3(b)}{=}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\alpha_j\beta_k[Cov_P(X_j,Y_k)]
\end{aligned} \tag{6}$$
Unter Beachtung von Teil (c) von Lemma 5.2.3 und (6) folgt nun
$$Var_P\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j\right)=Cov_P\left(\sum_{j=1}^{r}\alpha_j X_j,\sum_{k=1}^{r}\alpha_k X_k\right)\overset{(6)}{=}\sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{r}\alpha_j\alpha_k[Cov_P(X_j,X_k)] \tag{7}$$
Wegen (1), (6) und (7) ist dann alles gezeigt. ■

Folgerung 5.2.3. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein W-Raum. Weiter seien $n\in\mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^{n}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann ist $(1_{A_k})_{k=1}^{n}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ und es gelten
$$\sum_{k=1}^{n}1_{A_k}\in\mathcal{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$$

sowie

$$Var_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(P(A_j \cap A_k) - [P(A_j)][P(A_k)])$$

. **Beweis.** Wegen bemerkung 5.1.3 ist $(1_{A_k})_{K=1}^{n}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Hieraus folgen mittels Satz 5.2.8 dann

$$\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$Var_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} Cov_P(1_{A_j}, 1_{A_k}) \tag{2}$$

Sei

$$(j, k) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\} \tag{3}$$

Wegen Teil (a) von Lemma 5.2.4 gilt dann

$$Cov_P(1_{A_j}, 1_{A_k}) = P(A_j \cap A_k) - [P(A_j)][P(A_k)] \tag{4}$$

Aus (2)-(4) folgt dann

$$Var_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(P(A_j \cap A_k) - [P(A_j)][P(A_k)]) \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ist dann alles gezeigt. ■

Beispiel 5.2.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne γ_n die Menge aller Permutationen der Menge $\{1, ..., n\}$. Es sei $\mathfrak{A}_n := \mathcal{P}(\gamma_n)$ und bezeichne P_n die diskrete Gleichverteilung auf γ_n. Weiter sei $X : \gamma_n \to \mathbb{R}$ diejenige Abbildung, welche jedem $f \in \gamma_n$ die Anzahl seiner Fixpunkte zuordnet. Dann gelten*

$$X \in \mathcal{L}^2(\gamma_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R})$$

sowie

$$E_{P_n}(X) = 1$$

und

$$Var_{P_n}(X) = \begin{cases} 0 & , falls\ n = 1 \\ 1 & , falls\ n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} \end{cases}$$

. ***Beweis.*** *Sei*

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{1}$$

Es sei

$$A_{n,j} := \{f \in \gamma_n :\ f(j) = j\} \tag{2}$$

Aus (2) *und der wahl von* $\mathfrak{A}_n$ *folgt dann*

$$A_{n,j} \in \mathfrak{A}_n \tag{3}$$

Aus (2) *folgt sogleich*

$$card\, A_{n,j} = (n-1)! \tag{4}$$

Aus (4) *folgt nun*

$$P_n(A_{n,j}) = \frac{card\, A_{n,j}}{card\, \gamma_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n} \tag{5}$$

Wegen (3) *liefert Bemerkung* 5.1.3 *weiterhin*

$$1_{A_{n,j}} \in \mathcal{L}^1(\gamma_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R}) \tag{6}$$

und unter Beachtung von (5) *zudem*

$$E_{P_n}(1_{A_{n,j}}) = P(A_{n,j}) \overset{(5)}{=} \frac{1}{n} \tag{7}$$

Aus (1), (2) *und der Definition von* X *folgt*

$$X = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,j}} \tag{8}$$

Wegen (8), (1) *und* (6) *folgt mittels Satz* 5.1.4 *nun* $X \in \mathcal{L}^1(\gamma_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R})$ *sowie unter zusätzlicher Betrachtung von* (1) *und* (7) *weiterhin*

$$E_{P_n}(X) \overset{(8)}{=} E_{P_n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,j}}\right) \overset{S5.1.4}{=} \sum_{j=1}^{n} E_{P_n}(1_{A_{n,j}}) \overset{(1),(7)}{=} \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = n\frac{1}{n} = 1 \tag{9}$$

Wegen (8), (1) *und* (3) *gelten nach Folgerung* 5.2.3 *zu dem* v70 01.06.2010

$$x \in \mathcal{L}^2(\gamma_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R}) \tag{10}$$

$$var_{P_n}(x) \overset{(8)}{=} var_{P_n}(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_j}) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n}(P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{n,j})][P_n(A_{n,k})]) \tag{11}$$

Sei zunächst

$$n = 1 \tag{12}$$

Unter Beachtung von (12),(11),(1) *und*(5) *folgt dann*

$$\begin{aligned} var_{p_n} &= \sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{1}(P_1(A_{1,j} \cap A_{1,k}) - [P_1(A_{1,j})][P_1(A_{1,k})]) \\ &= P_1(A_{1,1} \cap A_{1,1}) - [P_1(A_{1,1})][P_1(A_{1,1})]) \end{aligned}$$

$$= P_1(A_{1,1} \cap A_{1,1}) - [P_1(A_{1,1})]^2 \overset{(5)}{=} 1 - 1^2 = 0 \tag{13}$$

Sei nun

$$n \in \{2, 3, ...\} \tag{14}$$

Es seien jetzt

$$I'_n := \{(j;k) \in \{1,..,n\} \times \{1,..,n\} : j = k\} \tag{15}$$

$$I''_n := \{(j;k) \in \{1,..,n\} \times \{1,..,n\} : j \neq k\} \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt dann

$$card I'_n = n \tag{17}$$

$$card I''_n = n(n-1) \tag{18}$$

Aus (15) und (16) folgen weiterhin

$$I'_n \cup I''_n = \{1,..,n\} \times \{1,..,n\} \tag{19}$$

$$I'_n \cap I''_n = \varnothing \tag{20}$$

Sei

$$(j,k) \in I'_n \tag{21}$$

Aus (21), (15),(1) und (5)

$$P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{n,j})][P_n(A_{n,k})] = P_n(A_{n,j} \cap A_{n,j}) - [P_n(A_{n,j})]^2$$

$$= P_n(A_{n,j}) - [P_n(A_{n,j})]^2 = \frac{1}{n} - (\frac{1}{n})^2 = \frac{n-1}{n^2} \tag{22}$$

Sei nun

$$(j,k) \in I''_n \tag{23}$$

Aus (23) und (16) folgt dann $j \neq k$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (2) dann auch $card(A_{n,j} \cap A_{n,k}) = (n-2)!$ Hieraus folgt nun $P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) = \frac{card(A_{n,j} \cap A_{n,k})}{card S_n} \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1)n}$ Also wegen (1) und (5) dann

$$P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{n,j})][P_n(A_{n,k})]$$

$$= \frac{1}{(n-1)n} - \frac{1}{n^2} = \frac{n-(n-1)}{(n-1)n^2} = \frac{1}{(n-1)n^2} \tag{24}$$

Unter Beachtung von (11) und (17) bis (24) folgt nun

$$var_{p_n} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} (P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{1,n})][P_n(A_{n,k})])$$

$$\overset{(19),(20)}{=} \sum_{(j,k) \in I'_n} (P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{n,j})][P_n(A_{n,k})]) + \sum_{(j,k) \in I''_n} (P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - [P_n(A_{n,j})][P_n(A_{n,k})])$$

$$\overset{(21),(24)}{=} \sum_{(j,k)\in I'_n} \frac{n-1}{n^2} + \sum_{(j,k)\in I''_n} \frac{1}{(n-1)n^2} \overset{(17),(18)}{=} (card I'_n) \cdot \frac{n-1}{n} + (card I''_n) \cdot \frac{1}{(n-1)n^2}$$

$$\overset{(17),(18)}{=} n \cdot \overset{n-1}{n^2} + n(n-1) \cdot \frac{1}{(n-1)n^2} = \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1 \tag{25}$$

Wegen (9), (10), (12), (13), (14) und (25) ist dann alles gezeigt ■

Interpretation von Beispiel 5.2.1

Sei $n \in \{1, 2, ...\}$. Wir betrachten eine Urne die n Kugeln enthält welche mit den Nummern $1, 2, ..., n$ versehen sind. Der zufällige Versuch enstehe im m-maligen willkürlichen Ziehen einer Kugel ohne Zurücklegen. Dann liefert der W-Raum $(\Gamma_1, \mathfrak{A}_n, P_n)$ aus Bsp 3 ein äquidistantes Modell zu dessen Modellierung. Die Zufallsvariable X beschreibt dann gerade die Anzahl derjenigen Kugeln deren Nummer mit der Nummer des Zuges, bei dem sie gezogen wurden, übereinstimmt. Wir modifizieren nun das soeben betrachtete Zufallsexperiment.

Beispiel 5.2.2. *Sei $n \in \{2, 3, ...\}$. Es liege eine Urne vor, welche n Kugeln enthält, die mit den Nummern $1, 2, ..., n$ versehen sind. Der zufällige Versuch bestehe im m-maligen willkürlichen Zielen einer Kugel mit Zurücklegen. Die Zufallsvariable X beschreibe die Anzahl der Kugeln, deren Nummer mit der Nummer des Zuges, bei dem sie gezogen wurden übereinstimmen. Setze wir nun $\Omega := X_{j=1}^{m}\{1, ..., n\}$ sowie $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ und bezeichnen mit P die diskrete Gleichverteilung auf Ω, so stellt der W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ ein adäquates Modell zur Beschreibung des Experiments dar. Die $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ Zufallsvariablen X und $(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{P})$ mit dem Wert aus $\{0, 1, ..., n\}$ an. Somit ist als $\mathbb{R} \setminus \{0, 1, ..., n\} \in \mathcal{N}_{p_x}$. Hier aus folgt mittels Lemma M.7.3 dann*

$$P_x = \sum_{k=0}^{n} [P_x(\{k\})] \cdot \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{1}$$

Sei

$$k \in \{0, ..., n\} \tag{2}$$

Dann ist also $X^{-1}(\{k\})$ die Menge alljener Tupel $(w_1, ..., w_n) \in$, für welche es genau k paarweise verschiedene Zahlen $l_1, ..., l_k \in \{1, ..., n\}$ derart gibt, dass für alle $s \in \{1, ..., k\}$ gilt $w_{l_s} = l_s$. Wir wollen nun $card[X^{-1}(\{k\})]$ bestimmen. Zunächst gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Position der k Züge festzulegen, wo die Übereinstimmung der Nummern der Kugel mit der Nummer des Zuges, bei dem sie gezogen wurde, vorliegt. Wir fxieren nun eine solche Konstellation. Dann ist in jedem der restlichen $n-k$ Züge die Wahl der Kugel so zu realisieren, daß deren Nummer verschieden von der Nummer des Zuges ist. m-m Hierzu gibt es für jeden der restlichen $n-k$ Züge genau $n-1$ Möglichkeiten. Somit gilt $card[X^{-1}(\{k\})] = \binom{n}{k}(n-1)^{n-k}$ Hieraus folgt

$$P_x(\{k\}) = P(X^{-1}(\{k\})) = \frac{card[X^{-1}(\{k\})]}{card\Omega} = \frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^n}$$

$$= \frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^k \cdot n^{n-k}} = \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{n})^k \cdot (\frac{n-1}{n})^{n-k}$$

$$= \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{n})^k \cdot (1 - \frac{1}{n})^{n-k} \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann

$$P_x = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot (\frac{1}{n})^k \cdot (1 - \frac{1}{n})^{n-k} \cdot \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{4}$$

Wegen $n \in \{2, 3, ...\}$ ist $\frac{1}{n} \in (0, 1)$. Beachtet man dies, so folgt wenn $B_{n,\frac{1}{n}}$ die Binomialverteilung mit den Paramteren n und $\frac{1}{n}$ bezeichnet, (vgl. Definition M.22.0.1), aus (4) dann

$$P_x = \beta_{n,\frac{1}{n}} \tag{5}$$

Wegen Satz M.23.6.1 gelten

$$\beta_{n,\frac{1}{n}} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{6}$$

$$M_1(\beta_{n,\frac{1}{n}}) = n \cdot \frac{1}{n} = 1 \tag{7}$$

$$var(\beta_{n,\frac{1}{n}}) = n \cdot \frac{1}{n}(1 - \frac{1}{n}) = 1 - \frac{1}{n} \tag{8}$$

Wegen (5) und (6) folgt mittels Teil (b) von Satz 5.1.1 dann

$$X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{9}$$

Wegen (9) folgt mittels Teil (c) von Satz 5.1.1 sowie (5) und (7) dann

$$E_p(X) = M_1(P_x) \overset{(5)}{=} M_1(\beta_{n,\frac{1}{n}}) \overset{(7)}{=} 1 \tag{10}$$

Wegen (9) folgt mittels Teil (a) von Satz 5.2.2 sowie (5) und (8) denn

$$var_p(x) = var(P_x) \overset{(5)}{=} var(\beta_{n,\frac{1}{n}}) \overset{(8)}{=} 1 - \frac{1}{n} \tag{11}$$

Vergleichen wir (10) und (11) mit den Ergebnissen von Beispiel 5.2.1, welches dem Ziehen ohne zurücklegen entspricht, so stellen wir fest, daß die entsprechende Zufallsvariable denselben Erwartungswert besitzt, während die Varianz beim Ziehen mit zurücklegen kleiner ist

5.3. Momente von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen

Der vorliegende Abschnitt ist dem Studium der Potenzmomente von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Zufallsvariablen gewidmet. Die Maßtheoretische Grundlage hierfür wurde in Abschnitt M.23.2 bereitgestellt

Bemerkung 5.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $x : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m$- meßbare Abbildung. Hierbei sei $x = (x_1, ..., x_n)^T$ Außerdem sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ Dann gelten $\prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $(\prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j}) \in \mathbb{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$

Beweis. Sei $P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ def. gemäß $(n_1, ..., n_m)^T \mapsto \prod_{j=1}^{m} (n_j)^{k_j}$ Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt dann

$$P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen folgen sogleich

$$\prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j} = P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}^m} \circ X \tag{2}$$

Wegen (1), (2) und der $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m$ Meßbarkeit von X folgt mit Satz M.15.3 nun $\prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt in Verbindung mit Bermerkung M.17.4 und Bemerkung M.18.9 dann $| \prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j} | \in \mathbb{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ■

Bemerkung 5.3.1 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung

Definition 5.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $m \in \mathbb{N}$ und $x = (x_1, ..., x_n)^T$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Außerdem sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann heißt

$$M_{(k_1,...,k_m);P}(x) := E_p(| \prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j} |)$$

das $(k_1, ..., k_m)$-te **absolute Moment** von X bezüglich P und $\sum_{j=1}^{m} k_j$ heißt dessen Ordnung. Falls $M_{(k_1,...,k_m);P}(X) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist, so heißt

$$M_{(k_1,...,k_m);P}(x) := E_p(\prod_{j=1}^{m} (x_j)^{k_j})$$

das $(k_1, ..., k_m)$ -te **Moment** von X bezüglich P und $\sum_{j=1}^{m} k_j$ heißt dessen Ordnung.

Wir zeigen nun, daß die in Definition 5.3.1 ein geführten Größen von w-theoretischer Natur sind

Satz 5.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein W-Raum, $m \in \mathbb{N}$ und $X = (X_1, ..., X_m)^T$ ein $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Außerdem sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ Dann gilt:

(a) Es ist $M_{(k_1,...k_m);P}(X) = M_{(k_1,...k_m)}(P_x)$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es ist $M_{(k_1,...k_m);P}(X) \in [0,+\infty)$

(ii) Es ist $\prod_{j=1}^{m}(x_j)^{k_j} \in \mathcal{L}(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $M_{(k_1,...k_m);P}(X) = M_{(k_1,...k_m)}(P_x)$

(d) Sei (i) erfüllt und sei für $j \in \{1,...m\}$ zudem $x_j(\Omega) \subseteq [0,+\infty)$

(e) Sei $X \in [\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})]^{m\times 1}$ Dann gelten $\prod_{j=1}^{m}(x_j)^{k_j} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$ sowie $M_{(k_1,...,k_m);P}(X) \in [0,+\infty)$

Beweis.

(a)-(d) Dies folgt sogleich aus den Teilen (a)-(d) von Satz M.23.2.2

(e) Da $(x_j)_{j=1}^m$ eine Folge aus $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$ ist, liefert Teil (b) von Lemma M.20.3 dann $\prod_{j=1}^{m}(x_j)^{k_j} \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$ Hieraus ergibt sich mittels Teil (b1) von Folgerung M.21.7.3 dann $\prod_{j=1}^{m}(x_j)^{k_j} \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$ Hieraus folgt mittels (b) dann $M_{(k_1,...k_m);P}(X) \in [0,+\infty)$

■

Folgerung 5.3.1. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein W-Raum $m \in \mathbb{N}$ sowie X und Y jeweils $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und $P_x = P_y$ Weiter sei $(k_1,...,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ Dann gilt

(a) Es ist $M_{(k_1,...k_m);P}(X) = M_{(k_1,...k_m);P}(Y)$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\prod_{j=1}^{m}(x_j)^{k_j} \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$

(ii) Es ist $\prod_{j=1}^{m}(y_j)^{k_j} \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},p;\mathbb{R})$

(c) Sei $M_{(k_1,...k_m);P}(X) \in [0,+\infty)$ Dann gelten $M_{(k_1,...k_m);P}(Y) \in [0,+\infty)$ sowie $M_{(k_1,...k_m);P}(X) = M_{(k_1,...k_m);P}(Y)$

M. Ergänzungen zur Maß- und Integrationstheorie.

Empfohlene Literatur: J. Elstrodt „Maß- und Integrationstheorie“

M.1. Ringe und Halbringe von Mengen.

Hauptgegenstand der Maßtheorie ist die Untersuchung, $[0, +\infty]$-wertiger Abbildungen, deren Definitonsbereich eine gewisse Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ einer Grundmenge Ω ist. Es ist hierbei abzusichern, daß diese Mengensysteme, welche als Definitionbereich in Erscheinung treten, gewisse Stabilitätseigenschaften gegenüber mengentheoretischen Operationen besitzen.

Definition M.1.1. Seien Ω eine Menge und $R \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt R ein **Ring** in Ω falls er folgende Eigenschaften besitzt:

- $\emptyset \in R$.
- Für alle $A, B \in R$ gilt $A \setminus B \in R$.
- Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cup B \in R$.

Beispiel M.1.1. *Sei Ω eine Menge. Dann sind $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $\{\emptyset\}$ jeweils Ringe in Ω*

Satz M.1.1. Seien Ω und $R \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist R ein Ring in Ω

b) R hat folgende Eigenschaften:
   (i) $\emptyset \in R$.
   (ii) Für alle $A, B \in R$ gilt $A \triangle B \in R$ (wobei $A \triangle B := (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$).
   (iii) Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cap B \in R$.

c) R besitzt die Eigenschaften b)(i) und b)(ii) sowie Für alle $A, B \in R$ gilt $A \cup B \in R$.

Satz M.1.2. Seien Ω eine Menge und $(R_k)_{k \in I}$ eine Familie von Ringen in Ω. Dann ist auch $\bigcap\limits_{k \in I} R_k$ ein Ring in Ω

Satz M.1.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ Es sei $R_\Omega(\mathcal{E})$ die Menge aller Ringe R in Ω mit $\mathcal{E} \subseteq R$. Dann gilt

a) Es ist $\mathfrak{P}(\Omega) \in R_\Omega(\mathcal{E})$, also insbesondere $R_\Omega(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

b) Sei $\rho_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap\limits_{R \in R_\Omega(\mathcal{E})} R$. Dann ist $\rho_\Omega(\mathcal{E}) \in R_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $R \in R_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\rho_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq R$.

c) Sei $R_0 \in R_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, daß für jedes $R \in R_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $R_0 \subseteq R$ besteht. Dann gilt $R_0 = \rho_\Omega(\mathcal{E})$.

d) Sei $\mathcal{E}$ selbst ein Ring in Ω. Dann gilt $\rho_\Omega(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

e) Es gilt $\rho_\Omega(\rho_\Omega(\mathcal{E})) = \rho_\Omega(\mathcal{E})$.

Definition M.1.2. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $\rho_\Omega(\mathcal{E})$ wie in Satz M.1.3 erklärt. Dann heißt $\rho_\Omega(\mathcal{E})$ der von $\mathcal{E}$ **erzeugte Ring** in Ω. $\rho_\Omega(\mathcal{E})$

Definition M.1.3. Seien Ω und R ein Ring in Ω. Weiter sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ ein **Erzeuger** von R, falls $\rho_\Omega(\mathcal{E}) = R$ erfüllt ist.

Wir wenden uns Halbringen zu.

Definition M.1.4. Seien Ω eine Menge und A eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann bezeichne A^+ das System aller $a \in \mathfrak{P}(\Omega)$, für welche es ein $n \in N$ und eine Folge $(\alpha_k)_{k=1}^n$ von paarweise disjunkten Mengen aus A gibt, sodaß $a = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \alpha_k$ erfüllt ist.

Bemerkung M.1.1. $A^+ = \{\bigcup\limits_{j=1}^{n} \alpha_k : n \in \mathbb{N}, \alpha_1, ...\alpha_n \in A \text{ paarweise disjunkt}\}$.

Bemerkung M.1.2. Unter der Bedinungen von Definition M.1.4 gilt $A \subseteq A^+$.

Definition M.1.5. seien Ω eine Menge und $H \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt H ein **Halbring** in Ω, falls H folgende Eigenschaften besitzt.

a) Es ist $\emptyset \in H$.

b) $\forall A, B \in H$ gilt $A \cap B \in H$.

c) $\forall A, B \in H$ gilt $A \setminus B \in H^+$.

Bemerkung M.1.3. Seien Ω eine Menge und $H \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System mit den Eigenschaften 1 und 2 aus Definition M.1.5 sowie der Eigenschaft: Für alle $A, B \in H$ gilt $A \setminus B \in H$. Dann ist H ein Halbring in Ω.

Bemerkung M.1.4. Seien Ω eine Menge und R ein Ring in Ω, dann ist R auch ein Halbring in Ω.

Definition M.1.6. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Mengen für $j \in \{1, ..., n\}$ sei δ_j eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega_j)$. Ist für $j \in \{1, ..., n\}$ dann $A_j \in \delta_j$, so heißt $\mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} A_j$ eine zur Folge $(\delta_j)_{j=1}^n$ gehörige **Rechteckmenge**. Gibt es hierbei ein

$j_0 \in \{1, ..., n\}$ mit $A_{j_0} = \emptyset$, so sei $\overset{n}{\underset{j=1}{\times}} A_j := \emptyset$. Es bezeichne zudem $\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} \delta_j$ dass zur Folge $(\delta_j)_{j=1}^n$ gehörige System von Rechteckmengen. Es ist also $\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} \delta_j$

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} \delta_j := \{ \overset{n}{\underset{j=1}{\times}} A_j | \ \forall j \in \{1, ..., n\} \text{ gilt } A_j \in \delta_j \}.$$

v3m 14.04.2009

Satz M.1.4. Seien $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Mengen. Für $j \in \{1, .., n\}$ sei H_j ein Halbring in Ω_j. Es bezeichne $\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} H_j$ das zur Folge $(H_j)_{j=1}^n$ gehörige System von Rechteckmengen. Dann ist $\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} H_j$ ein Halbring in $\overset{n}{\underset{j=1}{\times}} \Omega_j$. Es folgen nun generische Bsp. von Halbringen im $\mathbb{R}^m$.

Definition M.1.7. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $a = (a_1, ..., a_m)^T$ und $b = (b_1, .., b_m)^T$ aus $\mathbb{R}^m$. Dann sagen wir, dass $a < b$ erfüllt ist, falls $\forall j \in \{1, ..., m\}$ gilt $a_j < b_j$. In diesem Fall setzen wir $[a, b] := \overset{m}{\underset{j=1}{\times}} [a_j, b_j]$, $(a, b) := \overset{m}{\underset{j=1}{\times}} (a_j, b_j)$, $[a, b) := \overset{m}{\underset{j=1}{\times}} [a_j, b_j)$ und $(a, b] = \overset{m}{\underset{j=1}{\times}} (a_j, b_j]$. Es bezeichne $I_{m,a}$ bzw. $I_{m,o}$ bzw. $I_{m,l}$ bzw. $I_{m,r}$ das System aller m-dimensionalen **Intervalle** des entsprechenden Typs, jeweils ergänzt durch die leere Menge.

Beispiel M.1.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind $I_{m,l}$ und $I_{m,r}$ Halbringe in $\mathbb{R}^m$.*

Satz M.1.5. Seien Ω eine Menge und H ein Halbring in Ω. Dann gilt

$$\rho_\Omega(H) = H^+.$$

Folgerung M.1.1. Seien $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Mengen. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sein H_j ein Halbring in Ω_j. Dann gilt $\rho_{\times_{j=1}^n \Omega_j}(\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} H_j) = (\overset{n}{\underset{j=1}{\boxtimes}} H_j)^+$.

M.2. Inhalte und Prämaße auf Halbringen

Wir stellen zunächste einige Begriffsbildungen bereit.

Definition M.2.1. Seien Ω eine Menge und $\mathbf{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $\mu : A \to [0, +\infty]$.

a) μ heißt **isoton**, falls für alle $A, B \in \mathbf{A}$, mit $A \subseteq B$ stets $\mu(A) \leq \mu(B)$ gilt.

b) μ heißt **additiv** falls für alle disjunkten $A, B \in \mathbf{A}$ mit $A \cup B \in \mathbf{A}$ stets $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ gilt.

c) μ heißt **endlich additiv**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Folgen $(A_k)_{k=1}^n$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathbf{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathbf{A}$ stets $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum\limits_{k=1}^n \mu(A_k)$ gilt.

d) μ heißt **σ-additiv**, falls für alle paarweise disjunkten Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbf{A}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathbf{A}$ stets $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ gilt.

e) μ heißt **subadditiv**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle Folgen $(A_k)_{k=1}^n$ aus $\mathbf{A}$ mit $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathbf{A}$ stets $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^{n} \mu(A_k)$ gilt.

f) μ heißt **σ-subadditiv**, falls für alle Folgen $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbf{A}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathbf{A}$ stets $\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$ gilt.

Es folgen zentrale Begriffe dieses Abschnitts.

Definition M.2.2. Seien Ω eine Menge, H ein Halbring in Ω und $\mu : H \to [0, +\infty]$

a) Es heißt μ ein **Inhalt** auf H, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ zudem endlich additiv ist.

b) Es heißt μ ein **Prämaß** auf H, falls $\mu(\emptyset) = 0$ und μ zudem σ-additiv ist.

Bemerkung M.2.1. Seien Ω eine Menge H ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf H so ist μ ein Inhalt auf H.

Definition M.2.3. Seien Ω eine Menge, H ein Halbring in Ω sowie μ ein Inhalt oder Prämaß auf H. Dann heißt das μ **endlich**, falls für alle $A \in H$ stets $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

Satz M.2.1. Seien Ω eine Menge, H ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf H. Es bezeichne $\rho_\Omega(H)$ den auf H in Ω erzeugeten Ring. Dann gilt:

a) Es gibt genau einen Inhalt ν auf $\rho_\Omega(H)$ mit $\text{Rstr.}_H\nu = \mu$(Restriction=Einschränkung).

b) Sei $A \in \rho_\Omega(H)$. Dann gilt:

(i) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(A_j)_{j=1}^n$ von paarweise disjunkten Mengen aus H mit $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$.

(ii) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus H mit $A = \bigcup\limits_{j=1}^{n} A_j$. Dann gilt $\nu(A) = \sum\limits_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.

c) Folgende Aussagen sind äquvalent.

- μ ist endlich.
- ν ist endlich.

d) Folgende Aussagen sind äquivalent

- Es ist μ ein Prämaß auf H.
- Es ist ν ein Prämaß auf $\rho_\Omega(H)$.

e) Es bezeichne $\mathcal{N}_\mu$ bzw. $\mathcal{N}_\nu$das System der Nullmengen von μ bzw ν. Dann gilt $N_\nu = N_\mu^+$.

f) Seien $H_{\mu,e} := \{E \in H : \mu(E) \in [0,+\infty)\}$ und $[\rho_\Omega(H)]_{\nu,e} := \{F \in H : \nu(F) \in [0,+\infty)\}$. Dann gilt $[\rho_\Omega(H)]_{\nu,e} = (H_{\mu,e})^+$.

M.3. Inhalte und Prämaße auf Ringen

Wir spezifizieren die Situation von Abschnitt 2 für Ringe von Mengen.

Satz M.3.1. Seien Ω eine Menge R ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf R. Dann gilt:

a) Seien $A, B \in R$. Dann gelten $\{A \cup B, A \cap B\} \subseteq R$, sowie $\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B)$.

b) μ ist isoton.

c) Seien $A, B \in R$ so gewählt, dass $A \subseteq B$ und $\mu(A) \in [0, +\infty)$ erfüllt sind. Dann gelten $B \backslash A \in R$, sowie $\mu(B \backslash A) = \mu(B) - \mu(A)$.

d) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen auf R. Dann gelten $\bigcup_{k=1}^n A_k \in R$, sowie $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) = \sum\limits_{k=1}^n \mu(A_k)$.

e) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus R. Dann gelten $\bigcup_{k=1}^n A_k \in R$, sowie $\mu(\bigcup_{k=1}^n A_k) \leq \sum\limits_{k=1}^n \mu(A_k)$.

f) μ ist σ-subadditiv.

Unsere nächste Überlegung ist einer Verallgemeinerung von Teil a) von Satz M.3.1 auf beliebige endliche Folgen $(A_k)_{k=1}^n$ aus $R_{\mu,e}$ gewidmet.

Satz M.3.2 (Sylvester - Poincaresche Siebformel)**.** Seien Ω eine Menge, R ein Ring in Ω,sowie μ ein Inhalt auf R, sowie $R_{\mu,e} := \{A \in R : \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $R_{\mu,e}$. Für $m \in \{1, ...n\}$ bezeichne $\tau_{n,m}$ die Menge aller m-Tupel $(i_1, ..., i_m) \in \bigtimes\limits_{j=1}^n \{1, ..., n\}$, für welche $1 \leq i_1 < ... < i_m \leq n$ erfüllt ist.
Dann gilt: $\bigcup_{m=1}^n A_m \in R_{\mu,e}$, für jedes $m \in \{1, ..., n\}$ und jedes $(i_1, ..., i_m) \in \tau_{n,m}$ ist $\bigcap_{k=1}^m A_{i_k} \in R_{\mu,e}$ und es gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^n A_m\right) = \sum_{m=1}^n (-1)^{m+1} \left[\sum_{(i_1,...,i_m)\in\tau_{n,m}} \mu(\bigcap_{k=1}^m A_{i_k})\right].$$

Spezialfälle:

a) n=2: $\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2)$

b) n=3: $\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) = \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3)$
$- \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \mu(A_3 \cap A_2) + \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3)$.

Wir wenden unds nun einer Situation zu, in der sich die Formel aus Satz M.3.2 wesentlich verschärft.

Definition M.3.1. Seien Ω eine Menge, R ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf R. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge von Mengen aus R. Dann heißt $(A_j)_{j=1}^n$ **austauschbar** bzgl. μ, falls für jedes $m \in \{1, ..., n\}$ die Funktion

$$f_{m,n} : \tau_{n,m} \to [0, +\infty),\ (i_1, ..., i_m) \longmapsto \mu(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k})$$

konstant ist.

Bemerkung M.3.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \{1, ..., n\}$. Es seien $\tau_{n,m}$ wie in Satz M.3.1 erklärt. Dann ist $\tau_{n,m}$ eine endliche Menge und es gilt $\operatorname{card} \tau_{\mathrm{n,m}} = \binom{\mathrm{n}}{\mathrm{m}}$.

Folgerung M.3.1. Seien Ω eine Menge, R ein Ring in Ω, sowie μ ein Inhalt auf R und $R_{\mu,e} := \{A \in R : \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine bzgl. μ austauschbare Folge aus $R_{\mu,e}$.
Für $m \in \{1, ..., n\}$ bezeichne $c_{m,n}$ den Wert der (wie in Definition M.3.1 erklärten) dann konstanten Funtkionen $f_{m,n}$. Dann ist $(c_{m,n})_{m=1}^n$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und es gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \binom{n}{m} c_{m,\mu}.$$

v5m
21.04.2009

M.4. Sigma-Algebren

Wir wenden uns in diesem Abschnitt den wichtigen Mengensystemen zu.

Definition M.4.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine **σ-Algebra** in Ω, falls $\mathfrak{A}$ folgende Eigenschaften besitzt: $\mathfrak{A}$

a) Es ist $\Omega \in \mathfrak{A}$.

b) $\forall A \in \mathfrak{A}$ ist $\Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$.

c) $\forall$ Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n \in \mathfrak{A}$.

Satz M.4.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann gilt:

a) $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann gehören $\bigcup_{j=1}^{n} A_j$ und $\bigcap_{j=1}^{n} A_j$ zu $\mathfrak{A}$.

c) Seien $A, B \in \mathfrak{A}$ Dann gehören $A \backslash B$ und $A \triangle B$ zu $\mathfrak{A}$.

d) Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ Dann gehören $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$ zu $\mathfrak{A}$.

Beispiel M.4.1. *Sei Ω eine Menge. Dann sind $\mathfrak{P}(\Omega)$ sowie $\{\emptyset, \Omega\}$ σ-Algebren in Ω.*

Satz M.4.2. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\Omega' \subseteq \Omega$. Es sei $\mathfrak{A}_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : A \in \mathfrak{A}\}$. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{A}_{\Omega'}$ eine σ-Algebra in Ω'.

b) Sei $\Omega' \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{\Omega'} = [\mathfrak{P}(\Omega')] \cap \mathfrak{A}$.

Satz M.4.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.4.2. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\Omega' \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Es sei $\mathfrak{A}_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' : A \in \mathfrak{A}\}$. Dann heißt $\mathfrak{A}_{\Omega'}$ die **Spur-σ-Algebra** von $\mathfrak{A}$ in Ω'. $\mathfrak{A}_{\Omega'}$

Definition M.4.3. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen. Dann bezeichne $A(\Omega, \Omega')$ die Menge aller Abbildungen von Ω in Ω'. Seien $T \in A(\Omega, \Omega')$ und $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{P}(\Omega')$. Dann wird definiert: $A(\Omega, \Omega')$

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') := \begin{cases} \{T^{-1}(A') : A' \in \mathfrak{A}'\}, & \text{falls } \mathfrak{A}' \neq \emptyset \\ \emptyset & \text{falls } \mathfrak{A}' = \emptyset. \end{cases}$$

$T^{-1}(\mathfrak{A}')$ heißt dann das **volle Urbild** von $\mathfrak{A}'$ unter T. $T^{-1}(\mathfrak{A}')$

Satz M.4.3. Seien Ω und Ω' nicht leere Mengen, sowie $T \in A(\Omega, \Omega')$. Weiter sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω.

Satz M.4.4. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, sowie $T \in A(\Omega, \Omega')$. Weiterhin seien $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω, sowie $\mathfrak{A}_T := \{A' \in \mathfrak{P}(\Omega') : T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$. Dann ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra in Ω'. $\mathfrak{A}_T$

Satz M.4.5. Seien Ω eine Menge sowie $(\mathfrak{A}_k)_{k\in I}$ eine Familie von σ-Algebren in Ω. Dann ist auch der Durchschnitt $\bigcap\limits_{k\in I} \mathfrak{A}_k$ eine σ-Algebra in Ω.

Satz M.4.6. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Es bezeichne $\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ das System aller σ-Algebren $\mathfrak{A}$ in Ω, für welche $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{A}$ erfüllt ist. Dann gilt: $\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$

a) Es ist $\mathfrak{P}(\Omega) \in \Sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

b) $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap\limits_{\mathfrak{A}\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})} \mathfrak{A}$. Dann ist $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \in \Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $\mathfrak{A} \in \Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}$. $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$

c) Sei $\mathfrak{A}_0 \in \Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, daß für jedes $\mathfrak{A} \in \Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathfrak{A}_0 \subseteq \mathfrak{A}$ besteht, dann ist $\mathfrak{A}_0 = \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

d) Sei $\mathcal{E}$ selbst eine σ-Algebra in Ω. Dann gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

e) $\sigma_\Omega(\sigma_\Omega(\mathcal{E})) = \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

Satz M.4.6 führt uns auf folgende Begriffsbildungen:

Definition M.4.4. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt das in Satz M.4.6 eingeführte Mengensystem $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$, die **von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra in** Ω.

Definition M.4.5. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ ein **Erzeuger von** $\mathfrak{A}$, falls $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}$ erfüllt ist.

Definition M.4.6. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum. Dann bezeichne $O(\Omega, \rho)$ das System der in Ω offenen Mengen. Dann heißt $\sigma_\Omega(O(\Omega, \rho))$ die **Borelsche σ-Algebra von** (Ω, ρ).

Bemerkung M.4.1. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum. Es bezeichen $O(\Omega, \rho)$, bzw. $A(\Omega, \rho)$ das System in Ω offenen, bzw. abgeschlossenen Mengen. Dann gilt:

$$\sigma_\Omega(O(\Omega, \rho)) = \sigma_\Omega(A(\Omega, \rho)).$$

Satz M.4.7. Seien Ω und Ω' nicht leere Mengen. $T \in A(\Omega, \Omega')$ sowie $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{P}(\Omega')$. Dann gilt

$$\sigma_\Omega(T^{-1}(\mathcal{E}')) = T^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}')).$$

Beweis. ÜA 13. ∎

M.5. Einige Aussagen über Maße

Wir wenden uns in diesem Abschnitt der wichtigsten Klasse von Mengenfunktionen zu.

Definition M.5.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann heißt das geordnete Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein **meßbarer Raum**. $(\Omega, \mathfrak{A})$

Definition M.5.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A})$ **nicht trivial** falls $\Omega \neq \emptyset$ ist.

Definition M.5.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu : \mathfrak{A} \to [0, \infty]$. Dann heißt μ ein **Maß** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, falls μ folgende Eigenschaften besitzt: μ

a) $\mu(\emptyset) = 0$.

b) Für jede Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ gilt $\mu(\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

c) ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ **Maßraum**. Ein Maßraum heißt nicht trivial, falls der meßbare Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ nicht trivial ist. Die Menge aller Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet. $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$

Bemerkung M.5.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist μ sowohl ein Prämaß als auch ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$.

Definition M.5.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

a) Es heißt μ **endlich**, falls für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu(A) \in [0, +\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller endlicher Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Es heißt μ ein **Wahrscheinlichkeitmaß**, falls $\mu(\Omega) = 1$. Es bezeichen $\mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beispiel M.5.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Weiter sei $\boldsymbol{o} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $A \mapsto 0$. Dann gilt $\boldsymbol{o} \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ (man nennt $\boldsymbol{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$)*

Beispiel M.5.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nicht trivialer meßbarer Raum und $\omega \in \Omega$.*
Es sei $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ gemäß $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}(A) = \begin{cases} 1 & \omega \in A \\ 0 & \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}$ definiert.
Dann gilt:

a) *Es ist $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$.*

b) *Die folgenden Aussagen sind äquivalent:*

   (i) *Es ist $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \neq \epsilon_{\tilde{\omega},\mathfrak{A}}$.*

   (ii) *Es gibt ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $\omega \in A$ und $\tilde{\omega} \in \Omega \setminus A$.*

   (iii) *Es gibt disjunkte Mengen A und $\tilde{A}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\omega \in A$ und $\tilde{\omega} \in \tilde{A}$.*

c) *Es sei $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$. Dann sind äquivalent:*

   (i) *es ist $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \neq \epsilon_{\tilde{\omega},\mathfrak{A}}$.*

   (ii) *es ist $\omega \neq \tilde{\omega}$.*

d) *Sei $\mathfrak{A} := \{\emptyset, \Omega\}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und es gilt $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = \epsilon_{\tilde{\omega},\mathfrak{A}}$.*

Definition M.5.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ eine nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter sei $\omega \in \Omega$ und es sei ϵ wie in Beispiel M.5.2 erklärt. Dann heißt ϵ ein **Diracmaß** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω.

Satz M.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) = 0\}$ Dann gilt:

a) Es ist $\mathcal{N}_\mu \neq \emptyset$.

b) Sei $B \in \mathcal{N}_\mu$. Dann gilt $\mathfrak{A} \cap [\mathfrak{P}(B)] \subseteq \mathcal{N}_\mu$.

c) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{N}_\mu$. Dann gilt $\bigcup_{k=1}^n A_k \in \mathcal{N}_\mu$.

d) Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{N}_\mu$. Dann gilt $\bigcup_{k \in \mathbb{N}} A_k \in \mathcal{N}_\mu$.

Beweis. ÜA 14. ■

Satz M.5.2 (Erstes Lemma von Borel-Cantelli)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \in [0, +\infty)$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

Beweis. Sei $\epsilon \in [0, +\infty)$. Wegen $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \in [0, +\infty)$ gibt es dann ein $k \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=k}^{\infty} \mu(A_n) < \epsilon \tag{1}$$

Wegen Teil d) von Satz M.4.1 gilt

$$\limsup A_n \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

Weiterhin ist

$$\limsup A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{m=n}^{\infty} A_m) \subseteq \bigcup_{m=k}^{\infty} A_m \tag{3}$$

Da $(A_m)_{m=k}^{\infty}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, gilt

$$\bigcup_{m=k}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A} \tag{4}$$

Aus (2),(3) und (4), der Isotonie und σ-Subadditivität von μ, sowie (1) folgt dann:

$$0 \leq \mu(\limsup_{n\to\infty} A_n) \overset{(3)}{\leq} \mu(\bigcup_{m=k}^{\infty} A_m) \leq \sum_{m=k}^{\infty} \mu(A_m) \overset{(1)}{<} \epsilon.$$

Durch Grenzübergang $\epsilon \to 0 + 0$ folgt dann $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{N}_\mu$. ■

Satz M.5.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein endlicher Maßraum mit endlichem Maß μ und $(A_k)_{k\in I}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$, $I_0 = \{k \in I : \mu(A_k) \in (0, +\infty)\}$. Dann ist I_0 höchstens abzählbar.

v6m
27.04.2009

Satz M.5.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin seien $X_{\mathfrak{A}} := \{\omega \in \Omega : \{\omega\} \in \mathfrak{A}\}$, sowie $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in X_{\mathfrak{A}} : \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann gilt $X_{\mathfrak{A},\mu} = \{\omega \in X_{\mathfrak{A}} : \mu(\{\omega\}) \in (0, +\infty)\}$ und zudem ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ höchstens abzählbar.

M.6. Operationen mit Maßen

Wir studieren nun einige Operationen, mit deren Hilfe aus Maßen auf einem meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ wieder Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ erzeugt werden.

Satz M.6.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Weiterhin seinen $(\alpha_n), n \in \mathbb{N}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ sowie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. dann gilt:

a) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$. Beachte $(0\cdot +\infty = 0)$.

b) Es sei π eine Bijektion von $\mathbb{N}$. Dann gilt:

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\mu_n = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_{\pi(n)}\mu_{\pi(n)}$$

c) Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gilt:

   c_1) Es ist $(\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\mu_n)(\Omega) = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n$.

   c_2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

      (i) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n\mu_n \in \mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathfrak{A})$.

      (ii) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = 1$.

Satz M.6.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Weiterhin seien $n\in\mathbb{N}$, $(\alpha_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0,+\infty]$ sowie $(\mu_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gilt:

a) Falls $\alpha_k \in [0,+\infty)$ und $\mu_k \in M_+^b(\Omega,\mathfrak{A})$: Dann ist $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\mu_k \in \mathcal{M}_+^b(\Omega,\mathfrak{A})$.

b) Sei $(\mu_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gilt:

   b1) Es ist $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\mu_k(\Omega) = \sum\limits_{k=1}^n \alpha_k$.

   b2) Folgende Aussagen sind äquiv.

      (i) Es ist $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k\mu_k \in \mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathfrak{A})$.

      (ii) Es ist $\sum\limits_{k=1}^n \alpha_k = 1$.

Folgerung M.6.1. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega,\mathfrak{A})\backslash\{\mathbf{o}\}$. Dann ist $\mu(\Omega) \in (0,+\infty)$ und $\nu = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu$ gehört zu $\mathcal{M}_+^1(\Omega,\mathfrak{A})$.

Wir wenden uns nun der Vererbung von Maßeigenschaften auf Teil σ-Algebren zu.

Satz M.6.3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\tilde{\Omega}\in\mathfrak{A}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\tilde{\Omega}$. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\tilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$.

b) Sei $\mu \in M_+(\Omega,\mathfrak{A})$ und sei $\tilde{\mu} := \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}}\mu$. Dann ist $\tilde{\mu} \in M_+(\tilde{\Omega},\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$ und es gilt $\tilde{\mu}(\tilde{\Omega}) = \mu(\tilde{\Omega})$.

c) Sei $\tilde{\mu} \in M_+(\tilde{\Omega},\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$. Weiterhin sei $\mu : \mathfrak{A} \to [0,+\infty]$ definiert gemäß $A \longmapsto \tilde{\mu}(A\cap\tilde{\Omega})$. Dann ist μ ein Maß auf $(\Omega,\mathfrak{A})$, für das $\mu(\Omega) = \tilde{\mu}(\tilde{\Omega})$ sowie $\mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}}\mu = \tilde{\mu}$ erfüllt sind.

Satz M.6.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$. Es sei $\mu_{[A]} : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $B \longmapsto \mu(B \cap A)$. Dann gilt:

a) Es ist $\mu_{[A]}$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, für das $\mu_{[A]} \leq \mu$, sowie $\Omega \backslash A \in \mathcal{N}_{\mu_{[A]}}$ und $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_{\mu_{[A]}}$ erfüllt sind.

b) Es gilt $\mu_{[A]}(\Omega) = \mu(A)$.

c) Es bezeichne $\mathfrak{A}_A$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in A dann ist $\mathfrak{A}_A$ eine σ-Algebra in $\mathfrak{A}$, für welche $\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}$ erfüllt ist, und es gilt $\mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_A}\mu = \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_A}\mu_{[A]}$.

Bemerkung M.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und A eine Menge aus $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Mit den Bezeichnungen von Satz M.6.4 sei $\nu_A = \frac{1}{\mu(A)}\mu_{[A]}$. Dann gelten $\nu_A \in \mathcal{M}^1_+(\Omega, \mathfrak{A})$, $\Omega \backslash A \in \mathcal{N}_{\nu_A}$ und $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_{\nu_A}$.

Diese Bemerkung führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und A ein Menge aus $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Es seien ν_A wie in Bemerkung M.6.1 erklärt, dann heißt ν_A die **μ-Gleichverteilung** auf A.

Satz M.6.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$, so gewählt, dass $\{\mu(B_1), \mu(B_2)\} \subseteq (0, +\infty)$ erfüllt ist. Es bezeichne ν_{B_1} bzw. ν_{B_2} die μ-Gleichverteilung auf B_1 und B_2, dann gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent.

  (i) Es ist $\nu_{B_1} = \nu_{B_2}$.

  (ii) Es ist $B_1 \Delta B_2 \in \mathcal{N}_\mu$.

b) Es gilt $\{B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2\} \subseteq \mathfrak{A}$ und falls (i) erfüllt ist, auch $\mu(B_1) = \mu(B_2) = \mu(B_1 \cup B_2) = \mu(B_1 \cap B_2)$, sowie $\nu_{B_1} = \nu_{B_2} = \nu_{B_1 \cup B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2}$.

Folgerung M.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und seien $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$, so gewählt, dass $\{\mu(B_1 \cap B_2), \mu(B_1)\mu(B_2)\} \in (0, +\infty)$ erfüllt ist. Dann gilt:

a) Es ist $\mu(B_1 \cup B_2) \in (0, +\infty)$.

b) Sei $\nu_{B_1 \cup B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2}$. Dann gilt $\nu_{B_1} = \nu_{B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2}$.

v15m
26.5.2009

M.7. Maße auf total atomaren meßbaren Räumen

Im Zentrum dieses Abschnitts stehen Maße aus meßbaren Räumen von spezieller Struktur.

Definition M.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A})$ **total atomar**, falls für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$.

Beispiel M.7.1. *Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ total atomar.*

Beispiel M.7.2. *Sei $(\Omega, \mathcal{B})$ ein metrischer Raum mit zugehöriger Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$. Dann ist $(\Omega, \mathcal{B})$ total atomar.*
Beweis. *Sei $\omega \in \Omega$. Dann ist $\{\omega\} \in \mathcal{A}(\Omega, \rho)$, also $\{\omega\} \in \mathcal{B}$.* ■

Bemerkung M.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum (TAMR). Weiter sei A eine höchstens abzählbare Teilmenge von Ω
Dann gilt:

(a) Es ist $A \in \mathfrak{A}$.

(b) Es gilt $\mathfrak{A} \cap A = \mathfrak{P}(A)$.

Wir wenden uns nun speziellen Klassen von Maßen auf TAMR zu.

Definition M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR. Weiter sein $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ **diskret**, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge N von Ω mit $\Omega \backslash N \in \mathcal{N}_\mu$ gibt. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller diskreten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $\mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Lemma M.7.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$.
Dann gilt:

(a) Seien $(\alpha_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\sum\limits_{k \in I} \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Seien $(\alpha_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $(0, +\infty]$ und $(\mu_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sum\limits_{k \in I} \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $(\mu_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

Wir analysieren nun die Struktur von diskreten Maßen auf TAMR.

Lemma M.7.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\alpha_k)_{k \in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$, $(\omega_k)_{k \in I}$ eine Folge aus Ω und $\mu := \sum\limits_{k \in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}$.
Dann gilt:

(a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und es sei $I' := \{k \in I : \alpha_k \in (0, +\infty]\}$. Weiter sei $X_{\mathfrak{A}, \mu} := \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$.
Dann gilt:
$$\mu = \begin{cases} \mathfrak{o} & \text{, falls} \quad I' = \emptyset \\ \sum\limits_{k \in I'} \alpha_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}} & \text{, falls} \quad I' \neq \emptyset \end{cases} .$$
Sowie
$$X_{\mathfrak{A}, \mu} \begin{cases} \emptyset & \text{, falls} \quad I' = \emptyset \\ \bigcup\limits_{k \in I'} \{\omega_k\} & \text{, falls} \quad I' \neq \emptyset \end{cases} .$$

(c) Für alle $k, l \in I$ mit $k \neq l$ gelte $\omega_k \neq \omega_l$. Weiter sei $j \in I$. Dann gilt: $\mu(\{\omega_j\}) = \alpha_j$.

Lemma M.7.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, für das eine höchstens abzählbare Teilmenge X von Ω und $\Omega \backslash X \in \mathcal{N}_\mu$ existiert. Dann gelten: $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$, sowie $\mu = \sum\limits_{\omega \in X} \mu(\{\omega\})\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$.

Satz M.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR. Weiter seien $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$.
Dann gilt:

(a) Es ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ höchstens abzählbar und es gilt $X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$.

(b) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.
Dann sind folgende Aussagen Äquivalent:

 (i) Es ist $\mu = \mathfrak{o}$.

 (ii) Es ist $X_{\mathfrak{A},\mu} = \emptyset$.

(c) Es gilt:

$$\mu = \begin{cases} \mathfrak{o} & \text{, falls} \quad X_{\mathfrak{A},\mu} = \emptyset \\ \sum\limits_{\omega \in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\})\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} & \text{, falls} \quad X_{\mathfrak{A},\mu} \neq \emptyset \end{cases} .$$

Folgerung M.7.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.
Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind Äquivivalent:

 (i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A})$.

 (ii) Es gibt einen Abschnitt I aus $\mathbb{N}$ sowie Folgen $(\alpha_k)_{k \in I}$ aus $[0, +\infty)$ und $(\omega_k)_{k \in I}$ aus Ω derart, dass $\mu = \sum\limits_{k \in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}}$ und $\sum\limits_{k \in I} \alpha_k = 1$ erfüllt sind.

(b) Sei (i) erfüllt. Sei $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in \Omega : \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ eine nichtleere höchstens abzählbare Teilmenge von Ω und es gilt:

$$\mu = \sum_{\omega \in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\})\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}, \text{ sowie } \sum_{\omega \in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\}) = 1.$$

Folgerung M.7.2. Seien Ω eine nichtleere höchstens abzählbare Menge und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.
Dann gilt:

(a) Es ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ ein TAMR.

(b) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.

(c) Seien I eine Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(\omega_k)_{k \in I}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus Ω mit $\Omega = \bigcup_{k \in I} \{\omega_k\}$.
Dann gilt:

(c1) Es ist $\mu = \sum\limits_{k \in I} \mu(\{\omega_k\})\epsilon_{\omega_k, \mathfrak{P}(\Omega)}$.

(c2) Sei μ das Zählmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann gilt $\mu = \sum\limits_{k \in I} \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{P}(\Omega)}$.

Wir wenden uns nun einer markanten Teilklasse von diskreten Maßen auf TAMR zu.

Definition M.7.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ **molekular**, falls es eine endliche Teilmenge N von Ω mit $\Omega \backslash N \in \mathcal{N}_\mu$ gibt. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller molekularen Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $\mathcal{M}_+^{b,mol}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\mathcal{M}_+^{1,mol}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.7.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b,mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Lemma M.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein TAMR. Weiter seien $n \in \mathbb{N}, (\alpha_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.
Dann gilt:

$$\sum_{k=1}^n \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Lemma M.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$, $(a_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0, +\infty]$, $(\omega_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus Ω und $\mu = \sum\limits_{k=1}^n a_k \varepsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}$. Dann gilt:

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Für alle $k, l \in \{1, \ldots n\}$ mit $k \neq l$ gelte $\omega_k \neq \omega_l$. Weiter sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Dann gilt $\mu(\{\omega_j\}) = a_j$.

Lemma M.7.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum. Weiter seien $\mu \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ eine endliche Folge.

v16m
02.6.2009

Lemma M.7.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sowie Folgen $(\alpha_k)_{k=1}^n$ aus $[0, +\infty)$ und $(\omega_k)_{k=1}^n$ aus Ω mit $\mu = \sum\limits_{k=1}^n a_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}$ und $\sum\limits_{k=1}^n a_k = 1$.

Lemma M.7.8. Seien Ω eine nichtleere endliche Menge und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

a) $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ ist ein total atomarer meßbarer Raum.

b) Sei $n := \operatorname{card}\Omega$ und sei $(\omega_k)_{k=1}^n$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen von Ω mit $\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \{\omega_k\}$. Dann gilt:

b$_1$) Es ist $\mu = \sum_{k=1}^{n} \mu(\{\omega\})\epsilon_{\omega_k,\mathfrak{P}(\Omega)}$.

b$_2$) Sei μ das Zählmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann gilt $\mu = \sum_{k=1}^{n} \epsilon_{\omega_k,\mathfrak{P}(\Omega)}$.

Wir betrachten nun eine Klasse von Maßen auf TAMR $(\Omega, \mathfrak{A})$, welche in gewissem Sinne, als das Gegentück der Klasse $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ anzusehen sind.

Definition M.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ **stetig**, falls für alle $\omega \in \Omega$ die Beziehung $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\mu$ besteht. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller stetigen Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin sei $\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$, sowie $\mathcal{M}_+^{1,c}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b;c}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei A eine höchstens abzählbare Teilmenge von Ω. Dann gilt $A \in \mathcal{N}_\mu$.

Bemerkung M.7.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Dann gilt:

a) Seien $(\alpha_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\sum_{k\in I} \alpha_k\mu_k \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Seien $(\alpha_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(\mu_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Für welche $\sum_{k\in I} \alpha_k\mu_k \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ erfüllt ist. Dann ist $(\mu_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.7.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A}) = \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}) = \{\mathfrak{o}\}$.

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

a) Sei $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in \Omega \ : \ \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ höchstens abzählbar und es gilt $X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$.

b) Bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, und es sei

$$\mu_d := \begin{cases} \mathfrak{o}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} = \emptyset \\ \sum\limits_{\omega\in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\})\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} \neq \emptyset \end{cases} .$$

Dann gilt:

b$_1$) Mit den Bezeichnungen von Satz M.6.4 gilt $\mu_d = \mu_{[X_{\mathfrak{A},\mu}]}$.

b$_2$) Es gilt $\mu_d \leq \mu$.

b$_3$) Es ist $\mu_d \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\mu_d(\Omega) = \mu(X_{\mathfrak{A},\mu})$.

c) Sei $\mu_c := \mu - \mu_d$. Dann gilt:

c$_1$) Es ist $\mu_c \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\mu = \mu_c + \mu_d$.

c$_2$) Es ist $\Omega \backslash X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$ und mit den Bezeichnungen von Satz M.6.4 gilt $\mu_c = \mu_{[\Omega \backslash X_{\mathfrak{A},\mu}]}$ sowie $\mu_c(\Omega) = \mu(\Omega \backslash X_{\mathfrak{A},\mu})$.

d) Es gibt genau ein $\tilde{\mu}_c \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ und genau ein $\tilde{\mu}_d \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu = \tilde{\mu}_c + \tilde{\mu}_d$, nämlich $\tilde{\mu}_c = \mu_c$ und $\tilde{\mu}_d = \mu_d$.

e) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) Es ist $\mu = \mu_d$.

(iii) Es ist $\mu_c = \mathfrak{o}$.

f) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) Es ist $\mu = \mu_c$.

(iii) Es ist $\mu_d = \mathfrak{o}$.

Satz M.7.2 führt uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißen die in Satz M.7.2 eingeführten Maße $\mu_c \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $\mu_d \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ der stetige bzw. diskrete **Anteil** von μ.

M.8. Erste Aussagen zur Absolutstetigkeit und Singularität von Maßen

Das Hauptziel dieses Abschnitts besteht im Studium von Wechselbeziehungen zwischen zwei Maßen μ und ν auf einem Meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Insbesondere interessiert uns die gegenseitige Konstellation der Systeme $\mathcal{N}_\mu$ und $\mathcal{N}_\nu$.

Definition M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

a) Es heißt ν **absolutstetig** bezüglich μ, falls $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ erfüllt ist. In diesem Fall schreibt man $\nu \ll \mu$.

b) Es heißen μ und ν **äquivalent**, falls $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$. In diesem Fall schreibt man $\mu \sim \nu$.

Bemerkung M.8.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum. Dann gilt:

a) Die Relation $\ll$ aus Definition M.8.1 ist reflexiv und transitiv.

b) Die Relation $\sim$ aus Definition M.8.1 ist eine Äquivalenzrelation.

Beispiel M.8.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Ma"raum und $\tilde{\Omega}$ eine Menge aus $\mathfrak{A}$ mit $\mu(\tilde{\Omega}) \in (0, +\infty)$. Es bezeichne $\nu_{\tilde{\Omega}}$ die μ-Gleichverteilung auf $\tilde{\Omega}$. Dann gilt:*

a) Es ist $\nu_{\tilde{\Omega}} \ll \mu$.

b) Die folgenden Aussagen sind Äquivalent:

(i) Es ist $\mu \sim \nu_{\tilde{\Omega}}$.

(ii) Es ist $\Omega \backslash \tilde{\Omega} \in \mathcal{N}_\mu$.

c) Sei (ii) erfüllt. Dann gelten $\mu(\Omega) \in (0, +\infty)$ sowie $\nu_{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu$.

Bemerkung M.8.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin sei ν ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, welches absolutstetig bezüglich μ ist. Dann gilt $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$. Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt dann $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\mu$. Wegen $\nu \ll \mu$ ist $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ und folglich $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\nu$. Es ist also $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. ■

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Wir wenden uns nun einer Klasse von Maßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ zu, welche im gewissen Sinn diamentral entgegengesetz zu der Klasse der bezüglich μ absolut stetigen Maßen anzusehen sind.

Definition M.8.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt ν **singulär** bezüglich μ (Symbolisiert durch $\nu \perp \mu$), falls ein $N \in \mathfrak{A}$ existiert, für das $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $\Omega \backslash N \in \mathcal{N}_\nu$ erfüllt ist.

Definition M.8.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann heißt A ein **Träger** von μ, falls $\Omega \backslash A \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist.

Lemma M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $\nu \perp \mu$.

b) Es ist $\mu \perp \nu$.

c) Es gibt einen Träger C von μ und einen Träger D von ν mit $C \cap D = \emptyset$.

d) Es gibt ein $N \in \mathcal{N}_\mu$ derart, daß für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\nu(A) = \nu(A \cap N)$.

e) Es gibt ein $N' \in \mathcal{N}_\nu$ derart, daß für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu(A) = \mu(A \cap N')$.

Bemerkung M.8.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum weiter seien $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\nu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\nu \perp \mu$.

Beweis. Aufgrund der Wahl von ν gibt es eine höchstens abzählbare Teilmenge N von Ω mit $\Omega \backslash N \in \mathcal{N}_\nu$. Da N höchstens abzählbar ist und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ gewählt wurde, liefert Bemerkung M.7.5. dann $N \in \mathcal{N}_\mu$. Somit ist $\nu \perp \mu$. ■

Bemerkung M.8.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer meßbarer Raum, weiterhin seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\alpha_k)_{k\in I}$ aus $[0, +\infty]$, $(\omega_k)_{k\in I}$ eine Folge aus Ω und $\nu := \sum\limits_{k\in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}$. Dann gilt:

a) Es ist $\nu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\nu \perp \mu$.

Beweis.

a) Dies folgt aus Teil (a) von Lemma M.7.2.

b) Dies folgt wegen (a) und aus Bemerkung M.8.3.

■

Das folgende Resultat zeigt, daß sich die Begriffe „absolutstetig bezüglich μ" und „singulär bezüglich μ" diametral gegenüber stehen.

Satz M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Ma"raum und $\nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Es gelten $\nu \ll \mu$ und $\nu \perp \mu$.

(ii) Es ist $\nu = \mathfrak{o}$.

Beweis.

„$(i) \Rightarrow (ii)$" Wegen $\nu \perp \mu$ gibt es ein $N \in \mathfrak{A}$ mit $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $\Omega \setminus N \in \mathcal{N}_\nu$. Wegen $\nu \ll \mu$ gilt $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ und somit also $N \in \mathcal{N}_\nu$. Wegen $\{N, \Omega \setminus N\} \subseteq \mathcal{N}_\nu$ und $\Omega = N \cup (\Omega \setminus N)$ liefert Teil (c) von Satz M.5.1 dann $\Omega \in \mathcal{N}_\nu$. Damit ist aber $\nu = \mathfrak{o}$ und es gilt (ii).

„$(ii) \Rightarrow (i)$" Wegen $\mathcal{N}_\mu \in \mathfrak{A} = \mathcal{N}_{\mathfrak{o}}$ gilt $\mathfrak{o} \ll \mu$ und wegen $\emptyset \in \mathcal{N}_\mu$, sowie $\Omega \setminus \emptyset = \Omega \in \mathcal{N}_{\mathfrak{o}}$ ist $\mathfrak{o} \perp \mu$. Hieraus folgt wegen (ii) dann (i).

■

Folgerung M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussage äquivalent:

a) Es ist $\mu \perp \mu$.

b) Es ist $\mu = \mathfrak{o}$.

M.9. Dynkin-Systeme (E.B.Dynkin geb. 1924)

Oftmals kommt es darauf an, von einem Mengensystem festzustellen ob es eine σ-Algebra ist. Dies ist mitunter nicht auf dem direkten Wege möglich. Ein hilfreicher Umweg ist hierbei der über den in diesem Abschnitt definierten Begriff des Dynkin-Systems.

Definition M.9.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{D}$ ein **Dynkin-System** in Ω, falls $\mathcal{D}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(i) Es ist $\Omega \in \mathcal{D}$.

(ii) Für alle $D \in \mathcal{D}$ ist auch $\Omega \backslash D \in \mathcal{D}$.

(iii) Für alle Folgen $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjukten Mengen aus $\mathcal{D}$ gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

Bemerkung M.9.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System in Ω. Dann gilt:

a) Es ist $\emptyset \in \mathcal{D}$.

b) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(D_k)_{k=1}^n$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{D}$. Dann gilt $\bigcup\limits_{k=1}^{n} D_k \in \mathcal{D}$.

v17m
08.6.2009

Beispiel M.9.1. *Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System in Ω.*

Wir wollen nun verschiedene Charakterisierungen von Dynkin-Systemen herleiten. Hierzu benötigen wir eine Begriffsbildung.

Definition M.9.2. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

a) Es heißt $\mathcal{A}$ **komplementiert**, falls für alle $A \in \mathcal{A}$ auch $\Omega \backslash A \in \mathcal{A}$ erfüllt ist.

b) Es heißt $\mathcal{A}$ **relativ komplementiert**, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \subseteq B$ auch $B \backslash A \in \mathcal{A}$ erfüllt ist.

Bemerkung M.9.2. Seienn Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ ein relativ komplementiertes Mengensystem auf Ω mit $\Omega \in \mathcal{A}$. Dann ist $\mathcal{A}$ komplementiert.

Lemma M.9.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ ein komplemtiertes Mengensystem auf Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $\mathcal{A}$ relativ komplementiert.

b) Für alle $A, B \in \mathcal{A}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$.

Satz M.9.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω.

b) $\mathcal{D}$ hat die Eigenschaften (i) und (iii) in Definition M.9.1 und ist relativ komplementiert.

Satz M.9.2. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω.

b) $\mathcal{D}$ hat folgende Eigenschaften:

   (i) Es ist $\Omega \in \mathcal{D}$.

   (ii) $\mathcal{D}$ ist komplementiert.

   (iii) Für alle $A, B \in \mathcal{D}$ mit $A \cap B = \emptyset$ gilt $A \cup B \in \mathcal{D}$.

   (iv) Für jede isotone Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}$ gilt $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$.

c) $\mathcal{D}$ erfüllt (i) bis (iii) sowie:

   (v) Für jede antitone Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{D}$ gilt $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n \in \mathcal{D}$.

d) $\mathcal{D}$ erfüllt (i) und (iv) und ist relativ komplementiert.

e) $\mathcal{D}$ erfüllt (i) und (v) und ist relativ komplementiert.

Ein zentrales Thema dieses Abschnitts ist die Diskussion des Verhältnisses zwischen Dynkin-Systemen und σ-Algebren.

Beispiel M.9.2. *Sei $\Omega := \{1,2,3,4\}$ und sei $\mathcal{D} := \{\emptyset, \{1,2\}, \{3,4\}, \{1,3\}, \{2,4\}, \Omega\}$. Dann ist $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System in Ω, aber keine σ-Algebra in Ω.*

Definition M.9.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{A}$ **$\cup$-stabil** bzw. **$\cap$-stabil**, falls für alle $A, B \in \mathcal{A}$ gilt $A \cup B \in \mathcal{A}$ bzw. $A \cap B \in \mathcal{A}$.

Es folgt nun das erste Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz M.9.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra in Ω.

(ii) $\mathcal{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω und für alle $A, B \in \mathcal{D}$ gilt $A \backslash B \in \mathcal{D}$.

(iii) $\mathcal{D}$ ist ein $\cap$-stabiles Dynkin-System in Ω.

Beweis.

„$(i) \Rightarrow (ii)$" Wegen (i) folgt aus Definiton M.4.1 und Definition M.9.1 sogleich, dass $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wegen (i) folgt aus Teil (c) von Satz M.4.1 für $A, B \in \mathcal{D}$ weiterhin $A \backslash B \in \mathcal{D}$. Es gilt also (ii).

„$(ii) \Rightarrow (iii)$" Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ nach (ii) ein Dynkin-System in Ω ist, gilt wegen $B \in \mathcal{D}$ dann $\Omega \backslash B \in \mathcal{D}$. Wegen $A \in \mathcal{D}$ und $\Omega \backslash B \in \mathcal{D}$ folgt aus (ii) dann $A \backslash (\Omega \backslash B) \in \mathcal{D}$. Hieraus und aus $A \cap B = A \cap [\Omega \backslash (\Omega \backslash B)] = A \backslash (\Omega \backslash B)$ folgt dann $A \cap B \in \mathcal{D}$. Somit liegt $\cap$-Stabilität von $\mathcal{D}$ vor. Es gilt also (iii).

„$(iii) \Rightarrow (i)$" Da $\mathcal{D}$ nach (iii) ein Dynkin-System in Ω ist, folgt aus Teil (i) von Definition M.9.1 dann $\Omega \in \mathcal{D}$ sowie aus Teil (ii) von Definition M.9.1 für $A \in \mathcal{D}$ weitherin $\Omega \backslash A \in \mathcal{D}$.
Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}$ abgeschlossen gegenüber endlicher Vereinigungsbildung ist. Seien $A, B \in \mathcal{D}$. Da $\mathcal{D}$ nach (iii) $\cap$-stabil ist, gilt dann $A \cap B \in \mathcal{D}$. Wegen $A \backslash B = A \backslash (A \cap B)$, $\{A, A \cap B\} \subseteq \mathcal{D}$ und $A \cap B \subseteq A$ folgt, da $\mathcal{D}$ nach (iii) ein Dynkin-System in Ω ist, mittels Satz M.9.1 dann $A \backslash B \in \mathcal{D}$. Wegen $\{B, A \backslash B\} \subseteq \mathcal{D}$, $A \cup B = B \cup (A \backslash B)$ und $B \cap (A \backslash B) = \emptyset$ folgt, da $\mathcal{D}$ nach (iii) ein Dynkin-System in Ω ist, mittels Teil b) von Bemerkung M.9.1 dann $A \cup B \in \mathcal{D}$. Somit ist $\mathcal{D}$ dann abgeschlossen gegenüber endlicher Vereinigungsbildung.
Sei nun $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{D}$. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $D_n := \bigcup_{k=1}^{n} A_k$. Aufgrund des schon Gezeigten ist dann $D_n \in \mathcal{D}$ und außerdem gilt $D_n \subseteq D_{n+1}$. Hieraus folgt, da $\mathcal{D}$ nach (iii) ein Dynkin-System in Ω ist, mittels Satz M.9.1 dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n \in \mathcal{D}$. Hieraus folgt, da aus der Konstruktion der Folge $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ sogleich $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$ folgt, dann $\bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{D}$. Somit ist $\mathcal{D}$ eine σ-Algebra in Ω. Es gilt also (i).

■

Satz M.9.4. Seien Ω eine Menge, $(\mathcal{D}_k)_{k \in I}$ eine Familie von Dynkin-Systemen in Ω. Dann ist auch $\bigcap_{k \in I} \mathcal{D}_k$ ein Dynkin-System in Ω.

Satz M.9.5. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Es bezeichne $\Delta_\Omega(\mathcal{E})$ die Menge aller Dynkin-Systeme in Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}$. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{P}(\Omega) \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$, also insbesondere $\Delta_\Omega(\mathcal{E}) \neq \emptyset$.

b) Sei $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) := \bigcap_{\mathcal{D} \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})} \mathcal{D}$. Dann ist $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $\mathcal{D} \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}$.

c) Sei $\mathcal{D}_0 \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, dass für jedes $\mathcal{D} \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathcal{D}_0 \subseteq \mathcal{D}$ besteht. Dann gilt $\mathcal{D}_0 = \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$.

d) Sei $\mathcal{E}$ selbst ein Dynkin-System in Ω. Dann gilt $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.

e) Es ist $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})) = \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$.

Satz M.9.5 führt uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.9.4. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subset \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt das in Satz M.9.5 definiertes Dynkin-System $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ in $\mathcal{E}$, ein von $\mathcal{E}$ in Ω **erzeugte Dynkin-System**.

Definition M.9.5. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D}$ ein Dynkin-System in Ω. Weiter sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ ein **Erzeuger** von $\mathcal{D}$, falls $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) = \mathcal{D}$ erfüllt ist.

Wir verwenden nun erneut die Bezeichnung von Satz M.4.6.

Bemerkung M.9.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten $\Sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ sowie $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E})$ und $\sigma_\Omega(\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})) = \sigma_\Omega(\mathcal{E})$.

Es folgt nun das zentrale Resultat dieses Abschnitts.

Satz M.9.6. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E}$ eine $\cap$-stabile Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) = \sigma_\Omega(\mathcal{E}).$$

Beweis. Wegen Bemerkung M.9.3 gilt

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{E}). \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra in $\mathcal{E}$ ist. Hierfür genügt es, da $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ nach Teil (b) von Satz M.9.5 ein Dynkin-System in Ω ist, nach Satz M.9.3 die $\cap$-Stabilität von $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ nachzuweisen. Dies soll nun geschehen. Sei

$$D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{2}$$

dann wird definiert

$$\mathcal{D}_D := \{Q \in \mathfrak{P}(\Omega) : Q \cap D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})\}. \tag{3}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wegen (2) und $\Omega \cap D = D$ folgt aus (3) dann

$$\Omega \in \mathcal{D}_D. \tag{4}$$

Sei nun

$$Q \in \mathcal{D}_D. \tag{5}$$

Wegen (5) und (3) ist dann

$$Q \cap D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{6}$$

Da $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (2) und $Q \cap D \subseteq D$ mittels Satz M.9.1 dann $D \backslash (Q \cap D) \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$, also wegen $(\Omega \backslash Q) \cap D = D \backslash (Q \cap D)$ dann $(\Omega \backslash Q) \cap D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$. Hieraus folgt wegen (3) dann

$$\Omega \backslash Q \in \mathcal{D}_D. \tag{7}$$

Sei nun $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathcal{D}_D$. Dann ist auch $(Q_n \cap D)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen, welche wegen (3) aus $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ ist. Hieraus folgt, da $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, dann $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (Q_n \cap D) \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$, also wegen $\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} (Q_n \cap D) = (\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n) \cap D$ dann $(\bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} Q_n) \cap D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$. Dies impliziert wegen (3) dann

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \mathcal{D}_D.$$

Kombiniert man dies mit (4), (5) und (6), so erkennt man, dass $\mathcal{D}_D$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D$ erfüllt ist. Sei also

$$E \in \mathcal{E}. \tag{8}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.9.5 gilt

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$E \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{10}$$

Wegen (10) folgt aus dem schon gezeigten, dass $\mathcal{D}_E$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wir zeigen nun, die Inklusion $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E$. Sei

$$F \in \mathcal{E}. \tag{11}$$

Da $\mathcal{E}$ $\cap$-stabil ist, folgt aus (8) und (11) dann

$$F \cap E \in \mathcal{E}. \tag{12}$$

Aus (9) und (12) folgt dann

$$F \cap E \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{13}$$

Wegen (10), (13), (2) und (3) folgt dann

$$F \in \mathcal{D}_E. \tag{14}$$

Aus (11) und (14) folgt dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_E. \tag{15}$$

Da $\mathcal{D}_E$ bereits als Dynkin-System in Ω erkannt wurde, folgt wegen (15) mittels Teil (b) von Satz M.9.5 dann

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_E. \tag{16}$$

Sei

$$D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{17}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D$ erfüllt ist. Wegen (16) und (17) gilt dann

$$D \in \mathcal{D}_E. \tag{18}$$

Aus (18) und (3) folgt dann

$$D \cap E \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{19}$$

Aus (19) und (3) folgt dann

$$E \in \mathcal{D}_D. \tag{20}$$

Wegen (8) und (20) gilt dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_D. \tag{21}$$

Da $\mathcal{D}_D$ bereits als Dynkin-System in Ω erkannt wurde, folgt wegen (21) mittels Teil (b) von Satz M.9.5 dann

$$\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_D. \tag{22}$$

Seien

$$C \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) \tag{23}$$

und

$$D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{24}$$

Wegen (22) und (23) ist dann $C \in \mathcal{D}_D$. Hieraus folgt wegen (3) nun

$$C \cap D \in \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{25}$$

Da $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (23)–(25) mittels Satz M.9.3, dass $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra in Ω ist. Hieraus folgt bei Beachtung von (9) mittels Teil (b) von Satz M.4.5 dann

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}). \tag{26}$$

Aus (1) und (26) folgt dann $\mathcal{D}_\Omega(\mathcal{E}) = \sigma_\Omega(\mathcal{E})$. ■

M.10. Eindeutigkeitssätze für Maße

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind wir daran interessiert, Situationen zu beschreiben, in denen aus der Übereinstiummung von μ_1 und μ_2 mit gewissen Teilsystemen von $\mathfrak{A}$ auf die Gleichheit $\mu_1 = \mu_2$ geschlossen werden kann. Unser Vorgehen basiert maßgeblich auf der Technik der Dynkin-Systeme. v18m 09.6.2009

Lemma M.10.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin sei $E \in \mathfrak{A}$ so beschaffen, dass $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ und $\mu_1(E) \in [0, +\infty)$ erfüllt sind. Unter Beachtung der $\cap$-Stabilität von $\mathfrak{A}$ werde die Setzung $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E} := \{\mathcal{D} \in \mathfrak{A} : \mu_1(E \cap \mathcal{D}) = \mu_2(E \cap \mathcal{D})\}$ vorgenommen. Dann ist $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}$ ein Dynkin-System in Ω.

Bemerkung M.10.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ derart beschaffen, dass $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ erfüllt ist. Es sei $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2} := \{A \in \mathfrak{A} : \mu_1(A) = \mu_2(A)\}$. Dann ist $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2}$ ein Dynkin-System in Ω.

Lemma M.10.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}$. Weiterhin seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ so beschaffen, dass $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{E}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_\mathcal{E}\mu_2$ erfüllt ist und es sei $E \in \mathcal{E}$ so gewählt, dass $\mu_1(E) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Es sei $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}$ wie in Lemma M.10.1 erklärt. Dann gilt

$$\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E} = \mathfrak{A}.$$

Beweis.

$$\text{Sei } D \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Wegen $E \in \mathcal{E}$ und (1) folgt aus der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}$ dann $E \cap D \in \mathcal{E}$. Hieraus folgt wegen $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_2$ dann $\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)$, also nach Definition von $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}$ dann

$$D \in \mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) gilt dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}. \tag{3}$$

Da $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}$ nach Lemma M.10.1 ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (3) mittels Teil (b) von Satz M.9.5 dann

$$\mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{E}) \subseteq \mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}. \tag{4}$$

Da $\mathcal{E}$ nun $\cap$-stabil ist liefert Satz M.9.6 dann

$$\mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{E}) = \sigma_{\Omega}(\mathcal{E}). \tag{5}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sigma_{\Omega}(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Aus (4)–(6) und der Definition von $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E}$ folgt nun

$$\mathfrak{A} \overset{(6)}{=} \sigma_{\Omega}(\mathcal{E}) \overset{(5)}{=} \mathcal{D}_{\Omega}(\mathcal{E}) \overset{(4)}{\subseteq} \mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E} \subseteq \mathfrak{A}$$

und somit also $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,E} = \mathfrak{A}$. ■

Satz M.10.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}$ mit $\Omega \in \mathcal{E}$. Weiterhin seien $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ so beschaffen, dass $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_2$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Wegen Lemma M.10.2 gilt mit den dortigen Bezeichnungen $\mathcal{D}_{\mu_1,\mu_2,\Omega} = \mathfrak{A}$. Dies impliziert aber das $\mu_1 = \mu_2$. ■

Folgerung M.10.1. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit zugehöriger Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$. Weiter seien $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathcal{B})$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$. Dann sind folgende Aussagen äquivivalent:

(i) Es ist $\mu_1 = \mu_2$.

(ii) Es ist $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{O}(\Omega,\rho)}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{O}(\Omega,\rho)}\mu_2$.

(iii) Es ist $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{A}(\Omega,\rho)}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{A}(\Omega,\rho)}\mu_2$.

Beweis. Da $\mathcal{O}(\Omega, \rho)$ und $\mathcal{A}(\Omega, \rho)$ jeweils $\cap$-stabile Erzeuger von $\mathcal{B}$ sind, welche Ω enthalten, liefert Satz M.10.1 die Äquivalenz von (i) bis (iii). ■

Bezeichnungen:
Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter seien $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann bezeichne $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$ mit $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$.

Satz M.10.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}$. Weiter seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ so beschaffen, dass $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_2$ erfüllt ist. Ferner sei $A \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}}(A)$ existiert, welche für alle $n \in \mathbb{N}$ der Bedingung $\mu_1(E_n) \in [0, +\infty)$ genügt. Dann gilt

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Satz M.10.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}$, welcher eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$ enthält. Weiterhin seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ derart beschaffen, dass die Beziehung $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{E}}\mu_2$ besteht und zudem für alle $n \in \mathbb{N}$ die Bedingung $\mu_1(E_n) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Satz M.10.3 ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz M.10.2. Man wähle $A = \Omega$. ■

M.11. Einige Aussagen über äußere Maße

Wir formulieren zunächst eine grundlegende Aufgabenstellung der Maßtheorie. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Dann stellt sich die Frage nach der Existenz eines Maßes μ_0 auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist. Im Fall einer positiven Antwort ist hieran anschließend noch die Eindeutigkeit einer derartigen Fortsetzung zu diskutieren. Im ersten Schritt unserer Konstruktion eines solchen Maßes μ_0 werden wir zunächst ausgehend von μ eine Mengenfunktion μ^* auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ konstruieren, welche mit μ geeignet harmoniert. Hierzu führen wir folgende Begriffsbildung ein:

Definition M.11.1. Seien Ω eine Menge, dann heißt eine Abbildung
$\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ ein **äußeres Maß** auf Ω, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(i) Es ist $\mu^*(\emptyset) = 0$.

(ii) Für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $A_1 \subseteq A_2$ gilt $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$.

(iii) Für jede Folge $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k) \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(B_k)$.

In den meisten Lehrbüchern wird Aussage (ii) des folgenden Lemmas als Definition des äußeren Maßes verwendet.

Lemma M.11.1. Seien Ω eine Menge und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) μ^* ist ein äußeres Maß auf Ω.

(ii) μ^* hat Eigenschaften (i) und (ii) aus Definition M.11.1 und ist σ-subadditiv.

(iii) μ^* besitzt die Eigenschaften (i) aus Definition M.11.1. und für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{P}(\Omega)$, für welche $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ erfüllt ist, gilt $\mu^*(A) \leq \sum\limits_{n\in N} \mu^*(A_n)$.

Wir wenden uns nun dem Carathéodoryschen Konzept der Messbarkeit von Mengen zu. Seien Ω eine Menge und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$. Da μ^* nicht notwendig additiv ist erscheint es sinnvoll, jenen Teilmengen von Ω besondere Aufmerksamkeit zu schenken, welche jedes $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ in einer solchen Weise zerlegen, dass sich μ^* additiv verhält. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung, welche eine zentrale Rolle in der Maßtheorie einnimmt.

Definition M.11.2. Seien Ω eine Menge und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$. Weiter sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt A eine **μ^*-meßbare** Menge, falls für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ die Beziehung, $\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \backslash A)$ besteht. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^*-meßbare Teilmengen von Ω.

Bemerkung M.11.1. Seien Ω eine Menge und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0, +\infty]$ eine subadditive Abbildung. Weiter sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

(ii) Für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \backslash A)$.

Bemerkung M.11.2. Seien Ω eine Menge und μ^* eine äußeres Maß auf Ω. Dann gilt:

(a) μ^* ist subadditiv.

(b) Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

  (i) Es ist $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

  (ii) Für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \backslash A)$.

Beweis.

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Für $k \in \{n+1, n+2, ...\}$ sei $A_k := \emptyset$. Wegen Definition M.11.1 ist für $k \in \{n+1, n+2, ...\}$ dann $\mu^*(A_k) = 0$. Weiterhin ist $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k = \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k$. Unter Beachtung der nach Lemma M.11.1 vorliegenden σ-subadditivität von μ^* folgt dann:

$$\mu^*(\bigcup_{k=1}^{n} A_k) = \mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k)$$

somit ist μ^* subadditiv.

(b) Dies folgt sogleich aus (a) und Bemerkung M.11.1.

■

Unser nächstes Ziel lautet wie folgt: Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$. Im Fall $\mathfrak{A}_{\mu^*} \neq \emptyset$. Sei $\mu := \text{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\mu^*}} \mu^*$. Dann gilt unsere Aufmerksamkeit der Untersuchung der Struktur von $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ sowie der Eigenschaften von μ. Hierzu ist noch eine kleine Vorbereitung nötig.

Definition M.11.3. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine **Algebra** in Ω, falls folgende Eigenschaften besitzt.

(i) Es ist $\Omega \in \mathfrak{A}$.

(ii) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\Omega \backslash A \in \mathfrak{A}$.

(iii) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$, gilt $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Beispiel M.11.1. *Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine Algebra in Ω.*

Lemma M.11.2. Seien Ω eien Menge und $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω. Dann gilt

(a) Es ist $\emptyset \in \mathfrak{A}$.

(b) Seien $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gehören auch $A \cap B, A \backslash B$ und $A \Delta B$ zu $\mathfrak{A}$.

Bemerkung M.11.3. Sei Ω eine Menge. Dann gilt:

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Ring in Ω.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω.

Lemma M.11.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) $\mathcal{D}$ ist eine σ-Algebra in Ω.

(ii) $\mathcal{D}$ ist eine Dynkin-System in Ω und eine Algebra in Ω.

Beweis.

a) „$(i) \Rightarrow (ii)$“ Dies folgt aus Satz M.9.3 und Teil (b) von Bemerkung M.11.3.

b) „$(ii) \Rightarrow (i)$“ Aus (ii) und Teil (b) von Lemma M.11.2 folgt, dass D ein $\cap$-stabiles Dynkin-System in Ω ist. Hieraus folgt mittels Satz M.9.3 dann (i).

■

Satz M.11.1 (C.Carathéodory)**.** Seien Ω eine Menge und $\mu^* : \mathfrak{P}(\Omega) \to [0,+\infty]$ eine Abbildung, für welche $\mu^*(\emptyset) = 0$ erfüllt ist. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System aller μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine Algebra in Ω.

(b) Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k=1}^n$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann gilt: $\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ sowie $\mu^*(Q \cap [\bigcup\limits_{k=1}^{n} A_k]) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k)$.

(c) Sei $\mu := \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}\mu^*$. Dann ist μ ein Inhalt auf $\mathfrak{A}_{\mu^*}$.

(d) Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(B_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$, für die es eine Folge $(A_k)_{k=1}^n$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ gibt, für jedes $k \in \{1,..,n\}$ der Bedingung $B_k \subseteq A_k$ genügt. Dann gilt $\mu^*(\bigcup\limits_{k=1}^{n} B_k) = \sum\limits_{k=1}^{n} \mu^*(B_k)$.

Es folgt nun eines der zentralen Theoreme der Masstheorie. Bei dessen Beweis werden wir wesentlichen Gebrauch von der Technik der Dynkin-Systeme machen. v19m 15.6.2009

Satz M.11.2. Seien Ω eine Menge und μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^*-messbaren Teilmengen von Ω. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω.

b) Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und es gilt

$$\mu^*(Q \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k)) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k).$$

c) Sei $\mu := \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}\mu^*$. Dann ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$.

d) Sei $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge auf $\mathfrak{P}(\Omega)$, für die es eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ gibt, welche für jedes $k \in \mathbb{N}$ der Bedingung $B_k \subseteq A_k$ genügt. Dann gilt $\mu^*(\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} B_k) = \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(B_k)$.

Beweis.

a) Aufgrund der Wahl von μ^* gilt

$$\mu^*(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil (a) von Satz M.11.1 dann:

$$\text{Es ist } \mathfrak{A}_{\mu^*} \text{ eine Algebra in } \Omega. \tag{2}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ein Dynkin-System in Ω ist. Aus (2) folgt sogleich $\Omega \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ sowie für $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Weiter sei $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ist, gilt nach Teil (b) von Satz M.11.1 dann

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*} \tag{3}$$

sowie

$$\mu^*(Q \cap (\bigcup_{k=1}^{m} A_k)) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{4}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{m} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ gilt $Q\backslash(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \subseteq Q\backslash(\bigcup_{k=1}^{m} A_k)$. Hieraus folgt aufgrund der Isotonie des äußeren Maßes μ^* dann

$$\mu^*(Q\backslash \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) \leq \mu^*(Q\backslash(\bigcup_{k=1}^{m} A_k)). \tag{5}$$

Unter Verwendung von (3)-(5) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mu^*(Q) &= \mu^*(Q \cap [\bigcup_{k=1}^{m} A_k]) + \mu^*(Q\backslash[\bigcup_{k=1}^{m} A_k]) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*(Q\backslash[\bigcup_{k=1}^{m} A_k]) \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*(Q\backslash[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k])
\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $m \to \infty$ nun

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*(Q\backslash[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]). \tag{6}$$

Aufgrund der nach Lemma M.11.1 vorliegenden σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^* gilt weiterhin

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) = \mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (Q \cap A_k)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) + \mu^*(Q\backslash[\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_k]). \tag{8}$$

Wegen (8) ergibt sich mittels Teil (b) von Bemerkung M.11.2 dann $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Somit ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ein Dynkin-System in Ω. Hieraus folgt wegen (2) mittels Lemma M.11.2, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω ist.

b) Aus (a) folgt sogleich $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_k)_{k=1}^{n}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Wegen (1) liefert Teil (b) von Satz M.11.1 dann

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k=1}^{n} A_k]) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{9}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k$ gilt $Q\cap[\bigcup_{k=1}^{n} A_k] \subseteq Q\cap[\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]$. Hieraus folgt aufgrund der Isotonie des äußeren Maßes μ^* sowie wegen (9) dann

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) \geq \mu^*(Q \cap [\bigcup_{k=1}^{n} A_k]) \overset{(9)}{=} \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k).$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ nun

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) \geq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{10}$$

Da μ^* nach Lemma M.11.1 nun σ-subadditiv ist, gilt

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) = \mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}}(Q \cap A_k)) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$\mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{12}$$

Damit ist (b) bewiesen.

c) Da $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ nach (a) ein σ-Algebra in Ω ist, gilt nach Teil (a) von Bemerkung M.4.1 dann $\emptyset \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Unter Beachtung von (1) folgt dann $\mu(\emptyset) = \mu^*(\emptyset) \overset{(1)}{=} 0$. Sei nun $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Wählen wir in (12) dann speziell $Q = \Omega$, so ergibt sich

$$\mu(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \mu^*(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \mu^*(Q \cap [\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k]) \overset{(+0)}{=} \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(Q \cap A_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} \mu^*(A_k)$$

Somit ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$.

d) Aufgrund der Wahl der Folgen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \cap (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_k \cap A_k) = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k \tag{13}$$

sowie für $l \in \mathbb{N}$ weiterhin

$$(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} B_k) \cap A_l = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (B_k \cap A_l) = B_l \cap A_l = B_l. \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) folgt (d) nun durch die spezielle Wahl $Q = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_k$ aus (12).

■

M.12. Ein Prinzip zur Konstruktion äußerer Maße

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Bereitstellung eines weitreichenden Prinzips zur Konstruktion äußerer Maße. Dieses Prinzip wird uns bei der Behandlung der Fortsetzung eines Prämaßes auf einem Halbring zu einem Maß auf der von ihm erzeugten σ-Algebra wesentliche Dienste leisten.

Satz M.12.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω, welches $\emptyset$ enthält. Weiter sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ so beschaffen, dass $\mu(\emptyset) = 0$. Dann gilt:

a) Es gibt genau ein äußeres Maß μ^* auf Ω, welches folgende Eigenschaften besitzt:

   (i) Für alle $A \in \mathcal{A}$ gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

   (ii) Falls ν ein äußeres Maß auf Ω ist, welches für alle $A \in \mathcal{A}$ der Bedingung $\nu(A) \leq \mu(A)$ genügt, so ist für alle $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ dann $\nu(B) \leq \mu^*(B)$.

b) Für $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ bezeichne $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}$, für welche $B \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$ erfüllt ist. Für $A \in \mathcal{A}$ ist dann $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A) \neq \emptyset$ und für $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt

$$\mu^*(B) = \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) & , \text{falls } \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B) \neq \emptyset \\ +\infty & , \text{falls } \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B) = \emptyset. \end{cases}$$

Satz M.12.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.12.1. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω, welches $\emptyset$ enthält. Weiter sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ so gewählt, dass $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt ist. Dann heißt das in Satz M.12.1 eingeführte äußere Maß μ^* auf Ω das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω vom **Typ I**.

Wir wollen nun jene Situation charackterisieren, in der unter den Voraussetzungen von Satz M.12.1 die Bezeichnung $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{A}}\mu^* = \mu$ besteht.

Satz M.12.2. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{A}$ ein System von Teilmengen von Ω, welches $\emptyset$ enthält. Weiter sei $\mu : \mathcal{A} \to [0, +\infty]$ so gewählt, dass $\mu(\emptyset) = 0$ erfüllt ist. Es bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt:

a) Sei $A \in \mathcal{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (i) Es ist $\mu^*(A) = \mu(A)$.

   (ii) Für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A)$ gilt $\mu(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (iii) Es ist $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{A}}\mu^* = \mu$.

   (iv) Für alle $A \in \mathcal{A}$ und alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A)$ gilt $\mu(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$.

c) Sei (iii) erfüllt. Weiter sei η ein äußeres Maß auf Ω, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{A}}\eta = \mu$ erfüllt ist. Dann gilt $\eta \leq \mu^*$.

Beweis.

a) Wegen $A \in \mathcal{A}$ folgt aus Teil (a) von Satz M.12.1 dann $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A) \neq \emptyset$. Hieraus folgt aufgrund der Definition von μ^* dann

$$\mu^*(A) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{1}$$

"$(i) \Rightarrow (ii)$" . Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A)$. Wegen (i) und (1) gilt nun $\mu(A) \overset{(i)}{=} \mu^*(A) \overset{(1)}{\leq} \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Es gilt also (ii).

"$(ii) \Rightarrow (i)$" . Wegen $A \in \mathcal{A}$ gilt nach Teil (b) von Satz M.12.1 dann

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \tag{2}$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(A)$. Wegen (ii) folgt dann $\mu(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Hieraus und aus (1) folgt dann

$$\mu(A) \leq \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) \overset{(1)}{=} \mu^*(A). \tag{3}$$

Aus (3) folgt dann $\mu(A) = \mu^*(A)$. Es gilt also (i).

b) Dies folgt sogleich aus (a).

c) Sie $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Falls $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B) = \emptyset$ erfüllt ist gilt nach Definition von μ^* dann $\mu^*(B) = +\infty$ und somit als $\eta(B) \leq +\infty = \mu^*(B)$. Sei nun $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B) \neq \emptyset$. Weiter sei

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B). \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann: (I) Es ist $B \subset \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$.
(II) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \in \mathcal{A}$. Da η ein äußeres Maß auf Ω ist, folgt wegen (I) mittels Lemma M.11.1 dann

$$\eta(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \eta(A_n). \tag{5}$$

Wegen $\text{Rstr.}_{\mathcal{A}}\eta = \mu$ und (II) gilt für $n \in \mathbb{N}$ dann $\eta(A_n) = \mu(A_n)$. Hieraus und aus (5) folgt dann

$$\eta(B) \leq \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n). \tag{6}$$

Aus (4), (6) und $\mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B) \neq \emptyset$ folgt dann

$$\eta(B) \leq \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{A}}(B)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n) = \mu^*(B).$$

Damit ist (c) bewiesen.

■

M.13. Über die Fortsetzung von Prämaßen auf Halbringen zu Maßen

Wir wenden uns nun der folgenden zentralen Aufgabe der Maßtheorie zu. Gegeben seien eine Menge Ω, ein Halbring $\mathcal{H}$ in Ω und ein Prämaß μ auf $\mathcal{H}$. Dann ist die Frage der Existenz von Maßen μ_0 auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$, für welche $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist, zu klären. Im Falle einer positiven Antwort ist die Eindeutigkeit derartiger Fortsetzungen zu diskutieren. Wir wenden uns zunächst dem Nachweis der Existenz einer gewünschter Fortsetzung zu. Unsere Strategie lässt sich wie folgt beschreiben. Zunächst bilden wir dass zu μ gehörige äußere Maß μ^* auf Ω von Typ I. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^* meßbarer Teilmengen von Ω. Da μ^* ein äußerer Maß auf Ω ist, ist $\mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}\mu^*$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$. Falls es nun gelingt die Beziehungen $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$ nachzuweisen, so ist der Existenzteil uneres Fortsetzungsproblem gelöst.
Wir wenden uns zunächst der Herleitung der Beziehung $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$ zu.

v20m
16.6.2009

Lemma M.13.1. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und $\mu\colon \mathcal{H} \to [0, +\infty]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

a) Es ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$.

b) Es besitzt μ folgende Eigenschaften:
   (i) Es ist $\mu(\emptyset) = 0$.
   (ii) Sind $A \in \mathcal{H}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{H}$, für welche $\bigcup\limits_{j=1}^n A_j \subseteq A$ erfüllt ist, so gilt $\sum\limits_{j=1}^n \mu(A_j) \leq \mu(A)$.
   (iii) Sind $A \in \mathcal{H}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}$ mit $A \subseteq \bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_n$, so gilt $\mu(A) \leq \sum\limits_{k\in\mathbb{N}} \mu(A_k)$.

c) Es besitzt μ neben den Eigenschaften (i) und (iii) aus (b) noch die folgende Eigenschaft:
   (iv) Sind $A \in \mathcal{H}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathcal{H}$, für welche $\bigcup\limits_{j\in\mathbb{N}} A_j \subseteq A$ erfüllt ist, so gilt $\sum\limits_{j\in\mathbb{N}} \mu(A_j) \leq \mu(A)$.

Satz M.13.1. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zugehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt

$$\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\, \mu^* = \mu.$$

Beweis. Sei $A \in \mathcal{H}$ und sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{H}}(A)$. Dann ist also $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{H}$ und es gilt $A \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Hieraus folgt, da μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$ ist mittels Lemma M.13.1 dann $\mu(A) \leq \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n)$. Hieraus ergibt sich mittels teil (b) von Satz M.12.2 dann $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$. ■

Das nächste Resultat zeigt, daß die Aussage von Satz M.13.1 für Inhalte, die keine Prämaße sind, falsch ist.

Satz M.13.2. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$. Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt:

a) Sei $A \in \mathcal{H}$. Dann gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.

b) Sei μ kein Prämaß. Dann gibt es ein $E \in \mathcal{H}$ mit $\mu^*(E) < \mu(E)$.

c) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) Es ist μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$.
   (ii) Es gilt $\text{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$.

Unsere nächste Aufgabe besteht im Nachweis der Inklusion $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Hierbei werden wir zeigen, daß diese Aussage sogar im Falle eines Inhalts μ auf $\mathcal{H}$ wahr ist. Dieser Nachweis verläuft in mehreren Schritten. Im ersten Schritt zeigen wir die gewünschte Aussage zunächst für einen Inhalt μ auf einen Ring $\mathcal{R}$ in Ω.

Lemma M.13.2. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{R}$. Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{R}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Dann gilt $\mathcal{R} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

Bei der angestrebten Verallgemeinerung der Aussage von Lemma M.13.2 auf Halbringe werden wir sicherlich von dem in Satz M.2.1 enthaltenen grundlegenden Zusammenhang über die eindeutige Fortsetzbarkeit eines Inhalts μ auf einem Halbring $\mathcal{H}$ in einer Menge Ω zu einem Inhalt ν auf dem von $\mathcal{H}$ in Ω erzeugten Ring $\rho_\Omega(\mathcal{H})$ gebrauch machen. Darüber hinaus benötigen wir aber noch Kenntnisse uber dem Zusammenhang zwischen den zu μ bzw. ν gehörigen äußeren Maßen μ^* bzw. ν^* auf Ω von Typ I.

Satz M.13.3. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$. Es bezeichne $\rho_\Omega(\mathcal{H})$ den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring in Ω, sowie ν den nach Satz M.2.1 existierenden und eindeutig bestimmten Inhalt auf $\rho_\Omega(\mathcal{H})$ für den $\text{Rstr.}_{\mathcal{H}}\nu = \mu$ erfüllt ist. Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bzw. $\emptyset \in \rho_\Omega(\mathcal{H})$ und $\nu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* bzw. ν^* das zu μ bzw. ν gehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt:

a) Es ist $\mu^* = \nu^*$.

b) Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ so gewählt, daß $\mathcal{U}_{\mathcal{H}}(A) \neq \emptyset$ erfüllt ist. Es bezeichne $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(A)$ die Menge aller $(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{H}}(A)$, für welche $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen ist. Dann gelten $\tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(A) \neq \emptyset$ sowie

$$\mu^*(A) = \inf_{(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{\mathcal{U}}_{\mathcal{H}}(A)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(C_n).$$

Satz M.13.4. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$. Unter Beachtung $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Weiterhin bezeichen $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω sowie $\sigma_\Omega(\mathcal{H})$ die von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra in Ω. Dann gilt

$$\mathcal{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Beweis. Es bezeichne $\rho_\Omega(\mathcal{H})$ den von $\mathcal{H}$ erzeugten Ring in Ω. Nach Teil (b) von Satz M.1.3 gilt dann

$$\mathcal{H} \subseteq \rho_\Omega(\mathcal{H}). \tag{1}$$

Weiterhin bezeichne ν den nach Satz M.2.1 existierenden und eindeutig bestimmten Inhalt auf $\rho_\Omega(\mathcal{H})$, für den $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\nu = \mu$ erfüllt ist. Unter Beachtung von $\emptyset \in \rho_\Omega(\mathcal{H})$ und $\nu(\emptyset) = 0$ bezeichne ν^* das zu ν gehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{A}_{\nu^*}$ das System der ν^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Da $\rho_\Omega(\mathcal{H})$ ein Ring in Ω ist, gilt nach Lemma M.13.2 dann $\rho_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\nu^*}$, während nach Teil (a) Satz M.13.3 weiterhin $\mu^* = \nu^*$ erfüllt ist. Hieraus folgt im Verbindung mit (1) dann

$$\mathcal{H} \overset{(1)}{\subseteq} \rho_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\nu^*} = \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Kombiniert man dies mit der Tatsache, daß $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ nach Teil (a) von Satz M.11.2 eine σ-Algebra in Ω ist, so folgt mittels Teil (b) von Satz M.4.6 dann $\mathcal{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$. ■

Satz M.13.5 (M. Frechét, H. Hahn)**.** Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ das System der μ^*-meßbaren Teilmengen von Ω. Dann gilt:

a) Es ist $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$.

b) Sei $\tilde{\mu} := \mathrm{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\mu^*}}\mu^*$. Dann ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω, $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$ und es gilt $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\tilde{\mu} = \mu$.

c) Es bezeichne $\sigma_\Omega(\mathcal{H})$ die von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra in Ω und weiterhin sei $\mu_0 := \mathrm{Rstr.}_{\sigma_\Omega(\mathcal{H})}\mu^*$. Dann gilt $\mathcal{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und es ist μ_0 ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist.

Beweis.

a) Wegen Satz M.13.1 gilt $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu^* = \mu$. Da μ als Prämaß auf $\mathcal{H}$ nach Bemerkung M.2.1 auch ein Inhalt auf $\mathcal{H}$ ist, folgt aus Satz M.13.4 weiterhin $\mathcal{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

b) Da μ^* ein äußeres Maß auf Ω ist, ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ nach Teil (a) von Satz M.11.2 eine σ-Algebra in Ω sowie $\tilde{\mu}$ nach Teil (c) von Satz M.11.2 ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$. Aus (a) und der Definition von $\tilde{\mu}$ folgt dann $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\tilde{\mu} = \mu$.

c) Wegen Satz M.13.4 gilt

$$\mathcal{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathcal{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}. \tag{1}$$

Aus (1) sowie den Definitionen von $\tilde{\mu}$ und μ_0 folgt dann

$$\mu_0 = \mathrm{Rstr.}_{\sigma_\Omega(\mathcal{H})}\tilde{\mu}. \tag{2}$$

Da $\tilde{\mu}$ nach (b) ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$ ist, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\tilde{\mu} = \mu$ erfüllt ist, folgt aus (1) und (2) dann, daß μ_0 ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$ ist, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist.

■

Satz M.13.5 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.13.1. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Weiterhin bezeichne $\sigma_\Omega(\mathcal{H})$ die von $\mathcal{H}$ erzeugte σ-Algebra in Ω sowie μ_0 das im Teil (c) von Satz M.13.5 eingeführte Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$. Dann heißt μ_0 die **Carathéodory-Fortsetzung** von μ.

Das nachfolgende Resultat beschreibt eine wichtige Extremaleigenschaft der Carathéodory-Fortsetzung eines Prämaßes.

Satz M.13.6. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{H}$. Es bezeichne μ_0 die Carathédory-Fortsetzung von μ. Weiter sei ν ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$, für das $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\nu = \mu$ erfüllt ist. Dann ist $\nu \leq \mu_0$.

Wir wenden uns nun dem Eindeutigkeitsaspekt unseres Fortsetzungsproblem zu. Hierbei wird folgende Begriffsbildung eine zentrale Rolle spielen.

Definition M.13.2. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathcal{H}$. Weiter sei $\mathcal{H}_{\mu,e} := \{A \in \mathcal{H} : \ \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Dann heißt μ **σ-endlich**, falls es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}_{\mu,e}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ gibt.

Bemerkung M.13.1. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathcal{H}$. Weiterhin seien $\mathcal{S}$ ein Halbring in Ω, für den $\mathcal{H} \subseteq \mathcal{S}$ erfüllt ist, und ν ein Inhalt auf $\mathcal{S}$, für den $\mathrm{Rstr.}_{\mathcal{H}}\nu = \mu$ erfüllt ist. Dann ist ν ebenfalls σ-endlich.

Bemerkung M.13.2. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein endlicher Inhalt auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent

   (i) μ ist σ-endlich.

   (ii) Es existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

b) Sei $\mathcal{H}$ sogar eine Algebra in Ω. Dann ist μ σ-endlich.

Bemerkung M.13.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein meßbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist μ σ-endlich.

Wir erkennen nun, daß die σ-Endlichkeit eines Prämaßes auf einem Halbring eine hinreichende Bedinung für die Eindeutigkeit der Fortsetzung zu einem Maß liefert.

Satz M.13.7. Seien Ω eine Menge, $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathcal{H}$. Dann gilt:

a) Es gibt genau ein Maß μ_0 auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$, für das $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{H}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist.

b) Unter Beachtung von $\emptyset \in \mathcal{H}$ und $\mu(\emptyset) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt $\mu_0 = \mathrm{Rstr.}_{\sigma_\Omega(\mathcal{H})}\mu^*$.

c) μ_0 ist σ-endlich.

d) Sei $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Es bezeichne $\mathcal{U}_\mathcal{H}(B)$ die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}$ mit $B \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Dann ist $\mathcal{U}_\mathcal{H}(B) \neq \emptyset$ und es gilt

$$\mu^*(B) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\mathcal{H}(B)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A).$$

v21m 22.6.2009

Beweis. Als Halbring in Ω ist $\mathcal{H}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\sigma_\Omega(\mathcal{H})$ (vgl. Definition M.1.5). Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass aufgrund der σ-Endlichkeit von μ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}_{\mu,e}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ existiert, so liefert Satz M.10.3, dass höchstens ein Maß $\mu_0 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$ existiert, für das $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{H}\mu_0 = \mu$ erfüllt ist. Hieraus folgt in Verbindung mit Teil (c) von Satz M.13.5, dass genau ein Maß μ_0 mit $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{H}))$ und $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{H}\mu_0 = \mu$ existiert, und zwar ist dies genau $\mu_0 = \mathrm{Rstr.}_\mathcal{H}\mu^*$. Wegen $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{H}\mu_0 = \mu$ und der σ-Endlichkeit von μ folgt mittels Bemerkung M.2.1 und Bemerkung M.13.1 die σ-Endlichkeit von μ_0. Damit sind (a)–(c) gezeigt. Wir zeigen nun (d). Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ gibt es eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}_{\mu,e}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$. Hieraus folgt $B \subseteq \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} E_n$. Somit ist $\mathcal{U}_\mathcal{H}(B) \neq \emptyset$ und nach Definition von μ^* gilt also

$$\mu^*(B) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_\mathcal{H}(B)} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(A_n).$$

■

Folgerung M.13.1. Seien Ω eine Menge sowie $\mathcal{H}$ ein Halbring in Ω, derart, dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{H}$ mit $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$ existiert. Weiter sei μ ein endliches Prämaß auf $\mathcal{H}$. Dann ist μ σ-endlich und es gelten die Aussagen (a)–(d) von Satz M.13.7.

Folgerung M.13.2. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω und μ ein endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Dann ist μ σ-endlich und es gelten die Behauptungen (a),(b) und (d) von Satz M.13.7. Außerdem ist μ_0 endlich.

Beweis. Kombiniere Teil (b) von Bemerkung M.13.2 mit Satz M.13.7 ■

Wir beschreiben nun eine Situation in der eine Menge Ω ein Ring $\mathcal{R}$ in Ω und ein endliches Prämaß auf $\mathcal{R}$ gegeben sind, für das es überabzählbar unendlich viele Maßfortsetzungen auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{R}))$ gibt.

Beispiel M.13.1. *Seien Ω eine nichtleere Menge und $\mathcal{R} := \{\emptyset\}$. Weiter sei $\mu : \mathcal{R} \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $\mu(\emptyset) := 0$. Dann gilt:*

a) *Es ist $\mathcal{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathcal{R}$.*

b) *Sei $\omega \in \Omega$. Weiter seien $\alpha \in [0, +\infty]$ sowie $\mu_\alpha := \alpha \cdot \epsilon_{\omega, \sigma_\Omega(\mathcal{R})}$. Dann ist μ_α ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathcal{R}))$, für dass $\mu_\alpha(\Omega) = \alpha$ und $\mathrm{Rstr.}_\mathcal{R}\mu_\alpha = \mu$ erfüllt sind.*

M.14. Einige Aussagen über Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$

Die in den Anwenungen am häufigsten vertretenen Maße sind solche, die auf der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_m$ des euklidischen metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$ definiert sind. Wegen Beispiel M.7.2 ist der meßbare Raum $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ total atomar. Somit stehen uns insbesondere die Resultate von Abschnitt M.7 zur Verfügung. Besonderes Augenmerk werden wir auf die Klasse $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ legen. Wir wenden uns nun interessanten Erzeugern von $\mathcal{B}_m$ zu. Hierbei kommen wir zunächst auf die in Definition M.1.7 eingeführten Systeme von m-dimensionalen Intervallen zurück.

Satz M.14.1. Sei $m \in \mathbb{N}$. dann sind $I_{m,a}, I_{m,o}, I_{m,l}$ und $I_{m,r}$ jeweils $\cap$-stabile Erzeuger von $\mathcal{B}_m$.

Bemerkung M.14.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbf{1}_m := (1, \cdots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $([-n \cdot \mathbf{1}_m, n \cdot \mathbf{1}_m])_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $((-n\cdot\mathbf{1}_m, n\cdot\mathbf{1}_m))_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $([-n\cdot\mathbf{1}_m, n\cdot\mathbf{1}_m))_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $((-n\cdot\mathbf{1}_m, n\cdot\mathbf{1}_m])_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $I_{m,a}$ bzw. $I_{m,o}$ bzw. $I_{m,l}$ bzw. $I_{m,r}$, deren Vereinigung jeweils $\mathbb{R}^m$ ergibt.

Satz M.14.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es seien $\tilde{I}_{m,a} := \{\bigtimes_{j=1}^m (-\infty, a_j] : (a_1, ..., a_m)^T \in \mathbb{R}^m\}$ und $\tilde{I}_{m,o} := \{\bigtimes_{j=1}^m (-\infty, a_j) : (a_1, ..., a_m)^T \in \mathbb{R}^m\}$. Dann sind $\tilde{I}_{m,a}$ und $\tilde{I}_{m,o}$ jeweils $\cap$-stabile Erzeuger von $\mathcal{B}_m$.

Bemerkung M.14.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $(\bigtimes_{j=1}^m (-\infty, n])_{n\in\mathbb{N}}$ bzw $(\bigtimes_{j=1}^m (-\infty, n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\tilde{I}_{m,a}$ bzw $\tilde{I}_{m,o}$, deren Vereinigung jeweils $\mathbb{R}^m$ ergibt.

Satz M.14.3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien μ_1 und μ_2 Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$, für welche eine der beiden Situationen vorliegt.

(I) Es ist $\mathrm{Rstr.}_{\tilde{I}_{m,a}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\tilde{I}_{m,a}}\mu_2$ und für alle $A \in \tilde{I}_{m,a}$ gilt $\mu_1(A) \in [0, +\infty)$.

(II) Es ist $\mathrm{Rstr.}_{\tilde{I}_{m,o}}\mu_1 = \mathrm{Rstr.}_{\tilde{I}_{m,o}}\mu_2$ und für alle $A \in \tilde{I}_{m,o}$ gilt $\mu_1(A) \in [0, +\infty)$.

Dann gilt $\mu_1 = \mu_2$.

Beweis. Wegen Satz M.14.2 und Bemerkung M.14.2 liefert Satz M.10.3 die Behauptung. ■

Satz M.14.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.14.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann heißt die Funktion

$$F_{\mu,l} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty), \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \mu(\mathop{\times}_{j=1}^{m} (-\infty, x_j))$$

bzw.

$$F_{\mu,r} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty), \qquad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \mu(\mathop{\times}_{j=1}^{m} (-\infty, x_j])$$

die linke bzw rechte **Verteilungsfunktion** von μ.

Satz M.14.4. Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $\mu_1 = \mu_2$.

b) Es ist $F_{\mu_1,l} = F_{\mu_2,l}$.

c) Es ist $F_{\mu_1,r} = F_{\mu_2,r}$.

Bemerkung M.14.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $0 \leq F_{\mu,l}(x) \leq F_{\mu,r}(x) \leq \mu(\mathbb{R}^m)$.

Beweis. Sei $x = (x_1, \cdots, x_m)^T$. Wegen $\mathop{\times}_{j=1}^{m} (-\infty, x_j) \subseteq \mathop{\times}_{j=1}^{m} (-\infty, x_j]$ folgt alles aus der Isotonie von μ. ■

Beispiel M.14.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\boldsymbol{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann ist $\boldsymbol{o}_m \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und es ist sowohl $F_{\boldsymbol{o}_m,l}$ also auch $F_{\boldsymbol{o}_m,r}$ jeweils die Nullfunktion auf $\mathbb{R}^m$.*

Definition M.14.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $a = (a_1, \cdots, a_m)^T$ und $b = (b_1, \cdots, b_m)^T$ aus $\mathbb{R}^m$. Dann schreiben wir $a \leq b$ bzw. $a < b$, falls für alle $j \in \{1, \cdots, m\}$ die Ungleichung $a_j \leq b_j$ bzw $a_j < b_j$ gilt.

Beispiel M.14.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. und $a \in \mathbb{R}^m$. dann ist $\epsilon_{a,\mathcal{B}_m} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt*

$$F_{\epsilon_{a,\mathcal{B}_m},l}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a < x \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$$

sowie

$$F_{\epsilon_{a,\mathcal{B}_m},r}(x) = \begin{cases} 1 & \text{, falls } a \leq x \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases} .$$

Beispiel M.14.3. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(a_j)_{j=1}^n$ eine streng monoton wachsende Folge auf $\mathbb{R}$. Es sei $\mu := \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_{a_k, \mathcal{B}_1}$. Dann gilt:*

a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ sowie $X_{\mathcal{B}_1,\mu} = \bigcup\limits_{k=1}^{n} \{a_k\}$ und für $k \in \{1, \cdots, n\}$ gilt $\mu(\{a_k\}) = \frac{1}{n}$.*

b) *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

$$F_{\mu,l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, a_1] \\ \frac{j}{n} & \text{, falls } j \in \{1, \cdots, n-1\} \text{ und } x \in (a_j, a_{j+1}] \\ 1 & \text{, falls } x \in (a_n, +\infty) \end{cases}$$

sowie

$$F_{\mu,r}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, a_1) \\ \frac{j}{n} & \text{, falls } j \in \{1, \cdots, n-1\} \text{ und } x \in [a_j, a_{j+1}) \\ 1 & \text{, falls } x \in [a_n, +\infty) \end{cases}$$

Lemma M.14.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_k)_{k=1}^n$ bzw $(\mu_k)_{k=1}^n$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Weiter sei $\mu := \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \mu_k$. Dann ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und es gelten $F_{\mu,l} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k F_{\mu_k,l}$ sowie $F_{\mu,r} = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k F_{\mu_k,r}$.

Im Fall $m > 1$ ist bei vorgegebenem Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ die Handhabung der Funktionen $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ recht schwerfällig. Wir betrachten deshalb den Fall $m = 1$. In diesem Fall spielen $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ eine auf Satz M.14.4 basierende traditionell starke Rolle. Einerseits enthalten sie nämlich alle Informationen über das Maß, andererseits sind sie leichter zu handhaben als das Maß selbst.

Lemma M.14.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Dann gilt:

a) Sei $x \in \mathbb{R}$. dann gilt $F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\})$.

b) Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Dann gilt:
   (b1) Es ist $\mu([a,b)) = \mathbb{F}_{\mu,l}(b) - \mathbb{F}_{\mu,l}(a)$.
   (b2) Es ist $\mu((a,b]) = \mathbb{F}_{\mu,r}(b) - \mathbb{F}_{\mu,r}(a)$.
   (b3) Es ist $\mu((a,b)) = \mathbb{F}_{\mu,l}(b) - \mathbb{F}_{\mu,r}(a)$.
   (b4) Es ist $\mu([a,b]) = \mathbb{F}_{\mu,r}(b) - \mathbb{F}_{\mu,l}(a)$.

Es folgt nun ein spezielles Resultat über monotone Funktionen.

Satz M.14.5. Seien $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ sowie $b \in (a, +\infty)$ und sei $f : (a,b) \to \mathbb{R}$ eine monoton wachsende oder monoton fallende Funktion. Weiter sei $x \in (a,b)$. Dann gilt:

a) Sei $u \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es gilt $\lim\limits_{y\to x-0} f(y) = u$.

(ii) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(iii) Für alle monoton wachsenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(iv) Es gibt eine monoton wachsende Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = u$.

b) Sei $u \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(v) Es gilt $\lim\limits_{y\to x+0} f(x) = u$.

(vi) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(vii) Es gibt eine monoton fallende Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = u$.

c) Folgende Aussagen äquivalent:

(ix) f ist linksseitig stetig in x.

(x) Für alle Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xi) Für alle monoton wachsenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xii) Es gibt eine monoton wachsende Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (a,x) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(x)$.

d) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(xii) f ist rechsseitig stetig in x.

(xiv) Für alle folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xv) Für alle monoton fallende Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xvi) Es gibt eine monoton fallende Folge $(\tilde{x}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim\limits_{n\to\infty} \tilde{x}_n = x$ und $\lim\limits_{n\to\infty} f(\tilde{x}_n) = f(x)$.

Der folgende Satz wird später als Ausgangspunkt für eine Charakterisierung von linken und rechten Verteilungsfunktionen von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ dienen. v22m 23.6.2009

Satz M.14.6. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Dann gilt:

(a) Es sind $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ monoton wachsend.

(b) Es ist $F_{\mu,l}$ bzw. $F_{\mu,r}$ linksseitig bzw. rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$.

(c) Es gelten $\lim_{x \to -\infty} F_{\mu,l}(x) = 0$ und $\lim_{x \to +\infty} F_{\mu,l}(x) = \mu(\mathbb{R})$ sowie $\lim_{x \to -\infty} F_{\mu,l}(x) = 0$ und $\lim_{x \to +\infty} F_{\mu,l}(x) = \mu(\mathbb{R})$.

Satz M.14.7. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\lim_{x \to x+0} F_{\mu,l}(x) = \lim_{x \to x+0} F_{\mu,r}(x)$.

(b) Es ist $\lim_{x \to x-0} F_{\mu,r}(x) = \lim_{x \to x-0} F_{\mu,l}(x)$.

Satz M.14.8. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Dann gilt:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

 (i) $F_{\mu,l}$ ist stetig in x.

 (ii) $F_{\mu,r}$ ist stetig in x.

 (iii) Es ist $x \in \mathcal{N}_\mu$.

 (iv) Es ist $F_{\mu,l}(x) = F_{\mu,r}(x)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

 (v) $F_{\mu,l}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

 (vi) $F_{\mu,r}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.

 (vii) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$.

 (viii) Es ist $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$.

(c) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Dann gilt $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$ und zudem ist $F_{\mu,l}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

Beweis.

a) "*(i)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*" Wegen Teil (b) von Satz M.14.6 gilt

$$\lim_{y \to x-0} F_{\mu,l}(y) = F_{\mu,l}(x). \tag{1}$$

Aus Teil (a) von Satz M.14.7 und Teil (a) von Lemma M.14.2 ergeben sich:

$$\lim_{y \to x+0} F_{\mu,l}(y) = F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\}) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erkennt man sogleich die Äquivalenz von (i) und (iii).

"*(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*" Aus Teil (b) von Satz M.14.6 sowie Teil (a) von Lemma M.14.2 ergibt sich:

$$\lim_{y \to x+0} F_{\mu,r}(y) = F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\}) \tag{3}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.14.7 gilt:

$$\lim_{y \to x-0} F_{\mu,r}(y) = F_{\mu,l}(x) \tag{4}$$

Aus (3) und (4) erkennt man sogleich die Äquvalenz von (i) und (iii).

"$(iii) \Leftrightarrow (iv)$" Dies folgt sogleich aus Teil (a) von Lemma M.14.1.

b) Dies folgt sogleich aus (a).

c) Aufgrund der Wahl von μ ergibt sich aus (b) dann $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$, sowie die Stetigkeit von $F_{\mu,l}$. Nach Teil (c) von Satz M.14.6 gelten weiterhin:

$$\lim_{x \to -\infty} F_{\mu,l}(x) = 0 \tag{5}$$

und

$$\lim_{x \to +\infty} F_{\mu,l}(x) = \mu(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Sei $\epsilon \in (0, +\infty)$. Wegen (5) gibt es dann ein $a \in \mathbb{R}$, sodass für alle $x \in (-\infty, a)$ unter Beachtung von $F_{\mu,l}(x) \in [0, +\infty)$ die Ungleichung

$$0 \leq F_{\mu,l}(x) < \epsilon \tag{7}$$

besteht. Wegen (6) gibt es ein $b \in (a, +\infty)$, sodass für alle $x \in (b, \infty)$ unter Beachtung von $F_{\mu,l} \in [0, \mu(\mathbb{R}))$ die Umgebung

$$0 \leq \mu(\mathbb{R}) - F_{\mu,l}(x) < \epsilon \tag{8}$$

besteht. Da $F_{\mu,l}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $F_{\mu,l}$ nach einem Satz von Cantor dann auf $[a - \epsilon, b + \epsilon]$ gleichmäßig stetig. Somit gibt es ein

$$\delta \in (0, \epsilon) \tag{9}$$

derart, dass für alle

$$x_1, x_2 \in [a - \epsilon, b + \epsilon] \tag{10}$$

mit

$$|x_1 - x_2| < \delta \tag{11}$$

die Ungleichung

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \epsilon \tag{12}$$

besteht. Seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$x_1 \leq x_2 \tag{13}$$

und

$$|x_1 - x_2| < \delta \tag{14}$$

erfüllt sind. Aus (13), (14) und (9) folgt dann

$$x_2 - x_1 = |x_1 - x_2| < \delta < \epsilon. \tag{15}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $x_2 \in (-\infty, a)$. Aus (13) und Teil (a) von Satz M.14.6 und (7) folgt dann: $0 \leq F_{\mu,l}(x_2) - F_{\mu,l}(x_1) \leq F_{\mu,l}(x_2) < \epsilon$, also

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \epsilon \tag{16}$$

Sei nun $x_2 \in [a, b+\epsilon]$, wegen (15) gilt nun $x_1 > x_2 - \epsilon \geq a - \epsilon$, also wegen (13) und $x_2 \leq b + \epsilon$ ist dann

$$x_1 \in [a-\epsilon, b+\epsilon]. \tag{17}$$

Wegen $x_2 \in [a, b+\epsilon] \subseteq [a-\epsilon, b+\epsilon]$, (17),(14),(10),(11) und (12) folgt dann

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \epsilon. \tag{18}$$

Sei nun $x_2 \in (b+\epsilon, +\infty)$ aus (15) folgt dann

$$x_1 > x_2 - \epsilon > (b+\epsilon) - \epsilon = b. \tag{19}$$

Aus (13), Teil (b) von Satz M.14.6, der nach der Bemerkung M.14.3 gültigen Ungleichung $F_{\mu,l}(x) \leq \mu(\mathbb{R})$, (19) und (8) folgt dann $0 \leq F_{\mu,l}(x_2) - F_{\mu,l}(x_1) \leq \mu(\mathbb{R}) - F_{\mu,l}(x_1) < \epsilon$, also

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \epsilon. \tag{20}$$

Wegen (16),(18) und (20) gilt in jedem Fall also $|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \epsilon$. Somit ist $F_{\mu,l}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$.

■

Folgerung M.14.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$. Weiterhin seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$ so gewählt, dass $\{a\}$ und $\{b\}$ zu $\mathcal{N}_\mu$ gehören. Dann gilt

$$\mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu((a,b)) = \mu([a,b]) = F_{\mu,l}(b) - F_{\mu,l}(a) = F_{\mu,r}(b) - F_{\mu,r}(a).$$

M.15. Meßbare Abbildungen und Bildmaße

Oftmals steht man vor Situationen, in denen ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sowie ein nichttrivialer meßb. Raum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ vorliegen und mittels eines geeigneten Mechanismus das Maß μ auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ verpflanzt werden soll. Eine solche Situation ist zum Beispiel in weiten Teilen der Stochastik anzutreffen. Das vorliegende Kapitel wird sich mit der Untersuchung dieser Mechanismen beschäftigen. Vor diesem Hintergund treffen wir folgende Begriffsbildung

Definition M.15.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume sowie $T \in Abb(\Omega, \Omega')$. Dann heißt T eine **$\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare** Abbildung, falls für jedes $A' \in \mathfrak{A}'$ die Beziehung $T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist.

Beispiel M.15.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume sowie $T : \Omega \to \Omega'$ eine konstante Abbildung. Dann gilt $T^{-1}(\mathfrak{A}') = \{\emptyset, \Omega\}$ und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.*

Beispiel M.15.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und bezeichne Id_Ω die Identität auf Ω. Dann ist Id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbare Abbildung.*

Das nachfolgende Resultat sollte im Zusammenhang mit Satz M.4.3 und Satz M.4.4 betrachtet werden.

Satz M.15.1. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen $T \in Abb(\Omega, \Omega')$.

(a) Sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann gilt:

  (a1) Es ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in $\mathfrak{A}$ und T ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

  (a2) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivivalent:

    (i) T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

    (ii) Es ist $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$.

  (a3) T ist in $\mathfrak{P}(\Omega)$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und sei $\mathfrak{A}_T := \{A' \in \mathcal{P}(\Omega') : T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$. Dann gilt:

  (b1) Es ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra in Ω' und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_T$-meßbar.

  (b2) Sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann sind folg. Auss. äquiv.:

    (iii) T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

    (iv) Es ist $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_T$

  (b3) Sei $\mathfrak{A}'_0 := \{\emptyset, \Omega'\}$. Dann ist $\mathfrak{A}'_0$ eine σ-Algebra in Ω' und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'_0$-meßbar.

Folgerung M.15.1. Seine $(\Omega, \mathfrak{C})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume und $T \in Abb(\Omega, \Omega')$ sei $\mathfrak{C}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar. Weiter sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω mit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ist T auch $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

Satz M.15.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Weiter sei $T \in Abb(\Omega, \Omega')$. Dann sind folgende Aussagen äquivivalent:

(i) T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar.

(ii) Es ist $T^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathfrak{A}$.

Beweis.

„$(i) \Rightarrow (ii)$“ Dies folgt wegen $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{A}'$ sogleich auch Definition M.15.1.

„$(ii) \Rightarrow (i)$“ Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen (ii) mittels Teil (b) von Satz M.4.6 dann

$$\sigma_\Omega(T^{-1}(\mathcal{E}')) \subseteq \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Nach Satz M.4.7 gilt:

$$\sigma_\Omega(T^{-1}(\mathcal{E}')) = T^{-1}(\sigma_\Omega(\mathcal{E}')). \tag{2}$$

Nach Wahl von $\mathcal{E}'$ gilt:

$$\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}') = \mathfrak{A}'. \tag{3}$$

Aus (1),(2),(3) folgt dann $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$. Somit ist T dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar. Es gilt also (i).

■

Bemerkung M.15.1. Seien Ω_1, Ω_2 und Ω_3 nichtleere Mengen sowie $T_1 \in Abb(\Omega_1, \Omega_2)$ und $T_2 \in Abb(\Omega_2, \Omega_3)$. Weiter sei $A \in \mathcal{P}(\Omega_3)$. Dann gilt: $(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}[T_2^{-1}(A)]$.

Satz M.15.3. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $(\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ nichttriviale messbare Räume. Weiter seien $T_1 \in Abb(\Omega_1, \Omega_2)$ bzw. $T_2 \in Abb(\Omega_2, \Omega_3)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$– bzw. $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung. Dann ist $T_2 \circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung.

Beweis. Nach Vorraussetzung gelten

$$T_1^{-1}(\mathfrak{A}_2) \subseteq \mathfrak{A}_1 \tag{1}$$

und

$$T_2^{-1}(\mathfrak{A}_3) \subseteq \mathfrak{A}_2. \tag{2}$$

Unter Verwendung von Bemerkung M.15.1 sowie (1) und (2) folgt dann:

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(\mathfrak{A}_3) \overset{\text{Bem } M.15.1}{=} T_1^{-1}[T_2^{-1}(\mathfrak{A}_3)] \overset{(2)}{\subseteq} T_1^{-1}(\mathfrak{A}_2) \overset{(1)}{\subseteq} \mathfrak{A}_1$$

Somit ist $T_2 \circ T_2$ dann eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung. ■

Folgerung M.15.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ eine nicht trivialer meßbarer Raum und $T \in Abb(\Omega, \Omega)$ sei $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbar. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist T^k eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbarer Abbildung.

v23m
29.6.2009

Satz M.15.4. Sei Ω eine nicht leere Menge und sei $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in I}$ eine Familie von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $k \in I$ sei $T_k \in A(\Omega, \Omega_k)$. Es sei $\mathfrak{A} := \sigma_\Omega(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))$.

Dann gilt:

a) Sei $k \in I$. Dann ist T_k $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-meßbar.

b) Sei $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra in Ω derart, daß für jedes $k \in I$ die $\tilde{\mathfrak{A}}$-$\mathfrak{A}_k$-Meßbarkeit von T_k vorliegt. Dann gilt $\mathfrak{A} \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$.

Beweis.

a) Es gilt $T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \bigcup\limits_{j \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_j) \subseteq \sigma_\Omega(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)) = \mathfrak{A}$. Somit ist T_k also $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-meßbar.

b) Sei $k \in I$. Nach Voraussetzung ist T_k dann $\tilde{\mathfrak{A}}$-$\mathfrak{A}_k$-meßbar. Es gilt also $T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$. Hieraus folgt dann $\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$. Hieraus ergibt sich, da $\tilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra in Ω ist, mittels teil (b) von Satz M.4.6 dann $\mathfrak{A} = \sigma_\Omega(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)) \subseteq \tilde{\mathfrak{A}}$.

■

Satz M.15.4 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.15.2. Es liege die Situation von Satz M.15.4 vor. Dann heißt σ-Algebra $\mathfrak{A} := \sigma_\Omega(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))$ die von der Familie $(T_k)_{k \in I}$ von Abbildungen sowie der Familie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in I}$ von nichttrivialen meßbaren Räumen **erzeugte σ-Algebra** in Ω.

Wir zeigen nun, daß die Konstruktion aus Definition M.15.2, verträglich mit der Komposition von Abbildungen ist.

Lemma M.15.1. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen sowie $T \in A(\Omega, \Omega')$. Weiter sei $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in I}$ eine Familie von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $k \in I$ sei $T_k \in A(\Omega', \Omega_k)$. Es sei $\mathfrak{A}' := \sigma_{\Omega'}(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))$ sowie $\mathfrak{A} := T^{-1}(\mathfrak{A}')$. Dann gilt

$$\mathfrak{A} = \sigma_\Omega(\bigcup_{k \in I} (T_k \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_k)).$$

Beweis. Für $k \in I$ gilt wegen Bemerkung M.15.1 nun $(T_k \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_k) = T^{-1}[T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)]$. Hieraus folgt $\bigcup\limits_{k \in I} (T_k \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_k) = \bigcup_{k \in I} T^{-1}[T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)] = T^{-1}(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))$. Hieraus folgt im Verbindung mit Satz M.4.7 dann $\sigma_\Omega(\bigcup\limits_{k \in I} (T_k \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_k)) = \sigma_\Omega(T^{-1}(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))) = T^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\bigcup\limits_{k \in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))) = T^{-1}(\mathfrak{A}') = \mathfrak{A}$. ■

Beispiel M.15.3. *Seien Ω eine nichtleere Menge und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Es sei $1_A \colon \Omega \to \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & , \text{ falls } \omega \in A \\ 0 & , \text{ falls } \omega \in \Omega \setminus A \end{cases}.$$

Dann gilt

a) *Es ist $1_A^{-1}(\mathcal{B}_1) = \{\Omega, A, \Omega\setminus A, \emptyset\}$.*

b) *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

   (i) *1_A ist $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_1$-meßbar.*

   (ii) *Es ist $A \in \mathfrak{A}$.*

Satz M.15.5. Seien Ω und Ω_0 nichtleere Mengen sowie $\mathfrak{A}_0$ eine σ-Algebra in Ω_0 und $S \in A(\Omega_0, \Omega)$. Weiter sei $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in I}$ eine Familie von nichttrivalen meßbaren Räumen. Für $k \in I$ sei $T_k \in A(\Omega, \Omega_k)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) S ist $\mathfrak{A}_0$-$[\sigma_\Omega(\bigcup T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k))]$-meßbar.

(ii) Für jedes $k \in I$ ist $T_k \circ S$ eine $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_k$-meßbare Abbildung.

Beweis.

„$(i) \Rightarrow (ii)$“ Sei $k \in I$. Nach Teil (a) von Satz M.15.4 ist T_k dann $[\sigma_\Omega(\bigcup\limits_{j \in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))]$-$\mathfrak{A}_k$-meßbar. Hieraus folgt bei Beachtung von (i) mittels Satz M.15.3 dann die $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_k$-Meßbarkeit von $T_k \circ S$. Es gilt also (ii).

„$(ii) \Rightarrow (i)$" Sei $\mathcal{E} := \bigcup_{k\in I} T_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)$. Nach Konstruktion ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\sigma_\Omega(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))$.

Sei $E \in \mathcal{E}$. Dann gibt es also ein $k \in I$ und ein $A_k \in \mathfrak{A}_k$ mit $E = T_k^{-1}(A_k)$. Hieraus folgt bei Bemerkung M.15.1 dann

$$S^{-1}(E) = S^{-1}(T_k^{-1}(A_k)) \overset{\text{Bem } M.15.1}{=} (T_k \circ S)^{-1}(A_k). \tag{1}$$

Wegen (ii) und $A_k \in \mathfrak{A}_k$ gilt

$$(T_k \circ S)^{-1}(A_k) \in \mathfrak{A}_0. \tag{2}$$

Damit ist aber wegen (1) und (2) nun $S^{-1}(E) \in \mathfrak{A}_0$. Somit ist

$$S^{-1}(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{A}_0. \tag{3}$$

Da $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\sigma_\Omega(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))$ ist, folgt wegen (3) mittels Satz M.15.2 dann die $\mathfrak{A}_0$-$[\sigma_\Omega(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))]$-Meßbarkeit von S. Es gilt also (i).

■

Satz M.15.6. Seien Ω eine Menge sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in I}$ eine Familie von nichtrivialen meßbaren Räumen. Für $j \in I$ sei $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ und $T_j \in A(\Omega, \Omega_j)$. Dann gilt

$$\sigma_\Omega(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathcal{E}_j)) = \sigma_\Omega(\bigcup_{j\in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)).$$

Wir zeigen nun die Borel-Meßbarkeit stetiger Abbildungen metrischer Räume.

Definition M.15.3. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum. Weiter seien $\omega_0 \in \Omega$ und $r \in (0, +\infty)$. Dann heißt $K_\rho(\omega_0, r) := \{\omega \in \Omega : \rho(\omega_0, \omega) < r\}$, bzw. $K'_\rho(\omega_0, r) := \{\omega \in \Omega : \rho(\omega_0, \omega) \leq r\}$. die offene bzw. abgeschlossene **Kugel** in (Ω, ρ) mit Mittelpunkt ω_0 und Radius r.

Bemerkung M.15.2. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum sowie $\omega_0 \in \Omega$ und $r \in (0, +\infty)$. Dann gelten $K_\rho(\omega_0, r) \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$ sowie $K'_\rho(\omega_0, r) \in \mathcal{A}(\Omega, \rho)$.

Definition M.15.4. Seien (Ω, ρ) und (Ω', ρ') metrische Räume swie $f \in A(\Omega, \Omega')$.

a) Sei $\omega_0 \in \Omega$. Dann heißt f ρ-ρ'-**stetig in** ω_0, falls zu jedem $\epsilon \in (0, +\infty)$ ein $\delta \in (0, +\infty)$ derart existiert, daß für $\omega \in K_\rho(\omega_0, \delta)$ gilt $f(\omega) \in K_{\rho'}(f(\omega_0), \epsilon)$.

b) f heißt ρ-ρ'-**stetig**, falls ρ-ρ'-Stetigkeit von f in jedem $\omega_0 \in \Omega$ vorliegt. Es bezeichne $\mathcal{C}((\Omega, \rho), (\Omega', \rho'))$ die Menge aller ρ-ρ'-stetigen Abbildungen $f \in A(\Omega, \Omega')$.

Definition M.15.5. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

a) Sei $x \in \Omega$. Dann heißt x ein **Berührungspunkt** von A in (Ω, ρ), falls für jedes $r \in (0, +\infty)$ gilt $K_\rho(x, r) \cap A \neq 0$.

b) Die Menge $\overline{A}$ aller Berührungspukte von A in (Ω, ρ) heißt der **Abschluss** von A in (Ω, ρ).

Satz M.15.7. Seien (Ω, ρ) und (Ω', ρ') metrische Räume sowie $f \in A(\Omega, \Omega')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\Omega', \rho'))$.

b) Für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.

c) Für jedes $A' \in \mathcal{A}(\Omega', \rho')$ gilt $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}(\Omega, \rho)$.

d) Für jedes $B' \in \mathcal{O}(\Omega', \rho')$ gilt $f^{-1}(B') \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$.

Satz M.15.8. Seien (Ω, ρ) und (Ω', ρ') metrische Räume mit Borelschen σ-Algebren $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$. Weiter sei $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\Omega', \rho'))$. Dann ist f eine $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-meßbare Abbildung.
Beweis. Nach Definition von $\mathcal{B}$ bzw. $\mathcal{B}'$ gelten

$$\mathcal{O}(\Omega, \rho) \subseteq \mathcal{B} \tag{1}$$

bzw.

$$\sigma_{\Omega'}(\mathcal{O}(\Omega', \rho')) = \mathcal{B}'. \tag{2}$$

Wegen $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\Omega', \rho'))$ gilt nach Satz M.15.7 nun

$$f^{-1}(\mathcal{O}(\Omega', \rho')) \subseteq \mathcal{O}(\Omega, \rho). \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$f^{-1}(\mathcal{O}(\Omega', \rho')) \subseteq \mathcal{B}. \tag{4}$$

Wegen (2) und (4) liefert Satz M.15.2 die $\mathcal{B}$-$\mathcal{B}'$-Meßbarkeit von f. ■

Satz M.15.9. Seien $l, m \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $a \in \mathbb{R}^l$. Es sei $T_{A,a} \colon \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $x \mapsto Ax + a$. Dann gilt:

a) Es ist $T_{A,a} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}^l, \rho_{E,\mathbb{R}^l}))$.

b) Es ist $T_{A,a}$ eine $\mathcal{B}_m$-$\mathcal{B}_l$-meßbare Abbildung.

Die nachfolgende Konstruktion nimmt eine herausragende Position in der Stochastik ein.

Satz M.15.10. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter sei $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Es sei $T(\mu) \colon \mathfrak{A}' \to [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$A' \mapsto \mu(T^{-1}(A')).$$

Dann gelten $T(\mu) \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $[T(\mu)](\Omega') = \mu(\Omega)$.

Beweis. Aufgrund der Wahl von T, ist $T(\mu)$ wohldefiniert. Wegen $T^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ und $\mu(\emptyset) = 0$ ergibt sich

$$[T(\mu)](\emptyset) = \mu(T^{-1}(\emptyset)) = \mu(\emptyset) = 0. \tag{1}$$

Sei nun $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunten Mengen aus $\mathfrak{A}'$. Dann ist $(T^{-1}(A'_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ und es gilt

$$T^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_n). \tag{2}$$

Aufgrund der σ-Additivität von μ gilt

$$\mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(A'_n)). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt dann

$$[T(\mu)](\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n) = \mu(T^{-1}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A'_n)) \overset{(2)}{=} \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} T^{-1}(A'_n)) \overset{(3)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu(T^{-1}(A'_n)) = \sum_{n\in\mathbb{N}} [T(\mu)](A'_n).$$

Somit ist $T(\mu)$ also σ-additiv. Hieraus und aus (1) folgt nun $T(\mu) \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$. Wegen $T^{-1}(\Omega') = \Omega$ gilt zudem $[T(\mu)](\Omega') = \mu(T^{-1}(\Omega')) = \mu(\Omega)$. ∎

Satz M.15.10 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.15.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter sei $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Dann heißt das in Satz M.15.10 eingeführte Maß $T(\mu)$ auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ das **Bildmaß** von μ bei der Abbildung T.

Beispiel M.15.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und bezeichne $\mathtt{Id}_\Omega$ die identische Abbildung von Ω. Dann ist $\mathtt{Id}_\Omega$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbare Abbildung und es gilt $(\mathtt{Id}_\Omega)(\mu) = \mu$.*

Beispiel M.15.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Dann gilt:*

a) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}'$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gilt $T(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}'$.

b) Sei $\omega_0 \in \Omega$. Dann gilt $T(\epsilon_{\omega_0, \mathfrak{A}}) = \epsilon_{T(\omega_0), \mathfrak{A}'}$.

Bemerkung M.15.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$'-meßbare Abbildung. Weiterhin seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\mu_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty]$. Dann ist $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $T(\sum\limits_{k\in I} \alpha_k \mu_k) = \sum\limits_{k\in I} \alpha_k [T(\mu_k)]$.

Beispiel M.15.6. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $T \in A(\Omega,\Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$'-meßbare Abbildung. Weiterhin seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ swie $(\omega_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ Folgen aus Ω bzw. $[0,+\infty]$. Dann ist $\sum \alpha_k \epsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$ und es gilt*

$$T(\sum_{k\in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}}) = \sum_{k\in I} \alpha_k \epsilon_{T(\omega_k),\mathfrak{A}'}.$$

Beweis. *Kombiniere Bemerkung M.15.3 mit Teil (b) von Beispiel M.15.5.* ■

Wir zeigen nun die Transitivität der Bildung von Bildmaßen. v24m 30.6.2009

Satz M.15.11. Seien $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1),(\Omega_2,\mathfrak{A}_2)$ und $(\Omega_3,\mathfrak{A}_3)$ nichttriviale meßbare Räume. Es sei $T_1 \in Abb(\Omega_1,\Omega_2)$ bzw. $T_2 \in Abb(\Omega_2,\Omega_3)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$- bzw. $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$. Dann ist $T_2\circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung und es gilt

$$(T_2\circ T_1)(\mu) = T_2[T_1(\mu)].$$

Beweis. Wegen Satz M.15.3 ist $T_2\circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-meßbare Abbildung. Sei $A \in \mathfrak{A}_3$. Unter Beachtung der nach Bemerkung M.15.1 gültigen Identität $(T_2\circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}[T_2^{-1}(A)]$ folgt dann: $[(T_2\circ T_1)(\mu)](A) = \mu((T_2\circ T_1)^{-1}(A)) = \mu(T_1^{-1}[T_2^{-1}(A)]) = [T_1(\mu)](T_2^{-1}(A)) = (T_2[T_1(\mu)])(A)$, somit gilt $(T_2\circ T_1)(\mu) = T_2[T_1(\mu)])$. ■

Folgerung M.15.3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega',\mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $T \in Abb(\Omega,\Omega')$ eine bijektive $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung mit $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-meßbarer Umkehrabbildung U. Dann gilt $U[T(\mu)] = \mu$.
Beweis. Nach Vorraussetzung gilt $U\circ T = Id_\Omega$. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.15.11 und Beispiel M.15.4 dann: $U[T(\mu)] \overset{\text{Satz } M.15.11}{=} (U\circ T)(\mu) = (Id_\Omega)(\mu) \overset{\text{Bsp } M.15.4}{=} \mu$. ■

Beispiel M.15.7. *Seien $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times n}$ sei regulär. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann sind $T_{A,a}$ sowie auch $T_{A^{-1},-A^{-1}a}$ jeweils $\mathcal{B}_m$-$\mathcal{B}_m$-meßbar und es gelten $T_{A^{-1},-A^{-1}a}[T_{A,a}(\mu)] = \mu$, sowie $T_{A,a}[T_{A^{-1},-A^{-1}a}(\mu)] = \mu$.*
Beweis. *Wegen Satz M.15.9 sind $T_{A,a}$ und $T_{A^{-1},-A^{-1}a}$ jeweils $\mathcal{B}_m$-$\mathcal{B}_m$-meßbar. Weiterhin ist $T_{A,a}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}^m$ mit Umkehrabbildung $T_{A^{-1},-A^{-1}a}$. Somit liefert Folgerung M.15.3 alle Behauptungen.* ■

M.16. Produkte von σ-Algebren

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine endliche Folge $(\Omega_j,\mathfrak{A}_j)_{j=1}^n$ von nichttrivialen meßbaren Räumen. Unser Ziel besteht darin, in $\underset{j=1}{\overset{n}{\times}} \Omega_j$ eine solche σ-Algebra zu konstruieren, welche in natürlicher Weise mit der Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^n$ harmoniert.

Definition M.16.1. Seien $n \in \{2,3,\dots\}$ und $((\Omega_k,\mathfrak{A}_k))_{k=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $j \in \{1,\dots,n\}$ bezeichne $p_j : \underset{k=1}{\overset{n}{\times}} \Omega_k \to \Omega_j$ die gemäß $(\omega_1,\dots,\omega_n) \mapsto \omega_j$ definierte j-te Projektionsabbildung. p_j

Weiter sei $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j := \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}(\bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))$ die von der Folge $(p_j)_{j=1}^{n}$ von nichttrivialen meßbaren Räumen erzeugte σ-Algebra in $\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k$. Dann heißt $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ das **Produkt** oder auch die **Produkt-σ-Algebra** der Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^{n}$. Statt $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ schreibt man auch $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$. $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$

Satz M.16.1. Seien $n \in \{2, 3, ..\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^{n}$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sein $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ und es sei $p_j : \bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k \to \Omega_j$ definiert gemäß $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \omega_j$. Dann gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}(\bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\mathcal{E})).$$

Beweis. Dies folgt sogleich aus Definition M.16.1. ■

Wir wollen nun geeignete Erzeuger einer Produkt-σ-Algebra bestimmen. Hierbei verwenden wir die in Definition M.1.6 eingeführte Konstruktion von Rechteckmengen.

Lemma M.16.1. Seien $n \in \{2, 3, \ldots\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^{n}$ eine Folge nichttrivialer meßbarer Räume. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $\mathcal{C}_j$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{A}_j$. Es bezeichne $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j$ das zu $(\mathcal{C}_j)_{j=1}$ gehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt:

$$\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}(\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j) \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Für $j \in \{1, \ldots, n\}$ sei $p_j : \bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k \to \Omega_j$ definiert gemäß $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \omega_j$. Wegen Definition M.16.1 gilt dann:

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k = \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}(\bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)). \tag{1}$$

Sei

$$\bigtimes_{j=1}^{n} C_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j. \tag{2}$$

Unter Beachtung der für $j \in \{1, \ldots, n\}$ gültigen Identität:
$p_j^{-1}(C_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times C_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n$, folgt dann:

$$\bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(C_j) = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times C_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n = \bigtimes_{j=1}^{n} C_j. \tag{3}$$

Sei

$$j \in \{1, \cdots, n\}. \tag{4}$$

Wegen $\mathcal{C}_j \subseteq \mathfrak{A}_j$ sowie (1) gilt dann

$$p_j^{-1}(\mathcal{C}_j) \subseteq p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} p_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\bigcup_{k=1}^{n} p_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)) \overset{(1)}{=} \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{5}$$

Wegen (2),(4) und (5) gilt dann

$$p_j^{-1}(C_j) \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{6}$$

Aus (4),(6) und der $\cap$-Stabilität der σ-Algebra $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ folgt dann $\bigcap_{j=1}^n p_j^{-1}(C_j) \in \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$. Hieraus folgt wegen (3) dann

$$\mathop{\times}_{j=1}^{n} C_j \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{7}$$

Aus (2) und (7) folgt dann

$$\mathop{\boxtimes}_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{8}$$

Da $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ eine σ-Algebra in $\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$ ist, folgt wegen (8) mittels Teil(b) von Satz M.4.6 nun $\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}\limits_{j=1}^{n} \mathcal{C}_j) \subseteq \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$. ■

Lemma M.16.2. Seien $n \in \{2, 3, \cdots\}$ und $(\Omega_k)_{k=1}^n$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $k \in \{1, \cdots, n\}$ seien $(E_{ks})_{s\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_k)$ und $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} E_{ks} = \Omega_k$ und $E_j \in \mathfrak{P}(\Omega_j)$. Für $s \in \mathbb{N}$ sei weiterhin $F_{js} := E_{1s} \times \cdots \times E_{j-1,s} \times E_j \times E_{j+1,s} \times \cdots \times E_{ns}$. Dann gilt

$$\bigcup_{s\in\mathbb{N}} F_{js} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n.$$

Das nachfolgene Resultat beschreibt nun eine für unsere weiteren Ziele wichtige Klasse von Erzeugern einer Produkt-σ-Algebra.

Satz M.16.2. Seien $n \in \{2, 3, \dots\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $j \in \{1, \dots, n\}$ sei $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ in welchem eine isotone Folge $(E_{js})_{s\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} E_{js} = \Omega_j$ existiert. Es bezeichne $\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k$ das zu $(\mathcal{E}_k)_{k=1}^n$ gehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k) = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k.$$

Beweis. Aus Lemma M.16.1 folgt sogleich:

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k) \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Sei hierzu $j \in \{1, .., n\}$ und sei $p_j : \bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k \to \Omega_j$ definiert gemäß $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \mapsto \omega_j$. Wir zeigen nun die $[\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k)]$-$\mathfrak{A}_j$-Meßbarkeit von p_j. Sei $E_j \in \mathcal{E}_j$. Weiter seien $s \in \mathbb{N}$, sowie

$$F_{js} := E_{1s} \times \cdots \times E_{j-1,s} \times E_j \times E_{j+1,s} \times \cdots \times E_{ns}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann $F_{js} \in \boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k)$. Hieraus folgt, da $\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k)$ eine σ-Algebra in $\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k$ ist, dann

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_{js} \in \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k). \tag{3}$$

Nach Voraussetzung gilt für $j \in \{1, \ldots, n\}$ nun $\bigcup_{s \in \mathbb{N}} E_{js} = \Omega_j$. Kombiniert man dies mit (2) und der Isotonievoraussetzung, so ergibt sich mittels Lemma M.16.2 dann,

$$\bigcup_{s \in \mathbb{N}} F_{js} = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n. \tag{4}$$

Aus der Definition von p_j folgt sogleich, dass

$$p_j^{-1}(E_j) = \Omega_1 \times \cdots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \cdots \times \Omega_n. \tag{5}$$

Aus (3),(4) und (5) folgt dann $p_j^{-1}(E_j) \in \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k)$. Hieraus folgt wegen $E_j \in \mathcal{E}_j$ dann

$$p_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k). \tag{6}$$

Da $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ ist, folgt wegen (6) mittels Satz M.15.2 die $[\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k)]$-$\mathfrak{A}_j$-Meßbarkeit von p_j. Hieraus folgt bei Beachtung von Definition M.16.1 mittels Teil(b) von Satz M.15.4 dann

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k = \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}\Big(\bigcup_{k=1}^{n} p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)\Big) \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathcal{E}_k). \tag{7}$$

Aus (1) und (7) folgt dann die Behauptung. ■

Folgerung M.16.1. Seine $n \in \{2, 3, \ldots\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Es bezeichne $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ das zu $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^n$ gehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k) = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k.$$

Beweis. Sei $j \in \{1, \ldots, n\}$. Weiter sei $\mathcal{E}_j := \mathfrak{A}_j$. Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω ist, ist $\mathcal{E}_j$ dann eine Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$. Sei $s \in \mathbb{N}$. Wir setzen dann $E_{js} := \Omega_j$. Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, gilt dann $\Omega_j \in \mathfrak{A}_j$. Insbesondere ist also $E_{js} \in \mathcal{E}_j$. Als konstante Folge ist $(E_{js})_{s\in\mathbb{N}}$ dann isoton und zudem gilt: $\bigcup_{s\in\mathbb{N}} E_{js} = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} \Omega_j = \Omega_j$. Somit liefert Satz M.16.2 dann $\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k) = \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$. ■

Folgerung M.16.2. Sei $n \in \{2,3,\dots\}$ sowie $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ und $((\Omega'_j,\mathfrak{A}'_j))_{j=1}^n$ Folgen von nichttrivialen meßbaren Räumen. Für $j \in \{1,\dots,n\}$ sei $T_j \in A(\Omega_j,\Omega'_j)$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'_j$-meßbare Abbildung. Weiterhin sei $T : \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} \Omega_j \to \mathop{\times}\limits_{j=1}^{n} \Omega'_j$ definiert gemäß $(\omega_1,\dots,\omega_n) \mapsto (T_1(\omega_1),\dots,T_n(\omega_n))$. Dann ist T eine $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$-$\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k$-meßbare Abbildung.

Beweis. Es bezeichne $\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ bzw. $\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k$ das zu $(\mathfrak{A}_k)_{k=1}^n$ bzw. $(\mathfrak{A}'_k)_{k=1}^n$ gehörige System von Rechteckmengen. Wegen Folgerung M.16.1 gilt dann

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k) = \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k \tag{1}$$

bzw.

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k) = \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k. \tag{2}$$

Sei also

$$\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} A'_k \in \mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k. \tag{3}$$

Aus der Definition von T folgt dann

$$T^{-1}(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} A'_k) = \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} T_k^{-1}(A'_k). \tag{4}$$

Für $j \in \{1,\dots,n\}$ folgt aus $A'_j \in \mathfrak{A}'_j$ und der Wahl von T_j dann $T_j^{-1}(A'_j) \in \mathfrak{A}_j$. Hieraus folgt in Verbindung mit (4) dann

$$T^{-1}(\mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} A'_k) \in \mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt dann

$$T^{-1}(\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k) \subseteq \mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{6}$$

Wegen (1) und (6) folgt nun

$$T^{-1}(\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k) \subseteq \bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{7}$$

Wegen (2) und (7) liefert Satz M.15.2 dann die $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$-$\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k$-Meßbarkeit von T. ■

v25m
6.7.2009

Beispiel M.16.1. *Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen, von denen mindestens eine höchstens abzählbar ist. Dann gilt*

$$\bigotimes\limits_{j=1}^{2} \mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}(\mathop{\times}\limits_{j=1}^{2} \Omega_j).$$

Satz M.16.3. Seien $n \in \{2,3,...\}$ und $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j))_{j=0}^n$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \{1,...,n\}$ sei $p_j : \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \Omega_k \to \Omega_j$ gemäß $(\omega_1,...,\omega_n) \mapsto \omega_j$ definiert. Weiter sei $f \in A(\Omega_0, \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \Omega_k)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist $\mathfrak{A}_0$-$\bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$-messbar.

(ii) Für jedes $j \in \{1,...,n\}$ liegt $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_j$-Messbarkeit von $p_j \circ f$ vor.

Beweis. Wegen Definition M.16.1 gilt $\bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\bigcup\limits_{j=1}^{n} p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))$. Hieraus folgt mittels Satz M.15.5 die Äquivalenz von (i) und (ii). ■

Definition M.16.2. Seien Ω eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_k)_{k=1}^n$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $k \in \{1,...,n\}$ sei $X_k \in A(\Omega,\Omega_k)$. Dann heißt die Abbildung $Y : \Omega \to \mathop{\times}\limits_{k=1}^{n} \Omega_k$, welche gemäß $\omega(X_1(\omega),...,X_n(\omega))$ definiert ist, die **Produktabbildung** der Folge $(X_j)_{j=1}^n$. Diese wird symbolisiert durch $\bigotimes\limits_{j=1}^{n} X_j$ oder auch $X_1 \otimes ... \otimes X_n$. $\bigotimes\limits_{j=1}^{n} X_j$

Bemerkung M.16.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $k \in \{1,...,n\}$ seien $X_k \in A(\Omega,\Omega_k)$ sowie $A_k \in \mathfrak{P}(\Omega_k)$. Dann gilt

$$(\bigotimes_{j=1}^{n} X_j)^{-1}(\mathop{\times}_{j=1}^{n} A_j) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(A_j).$$

Satz M.16.4. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $n \in \{2,3,...\}$ und $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in \{1,...,n\}$ sei $X_k \in A(\Omega,\Omega_k)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-messbare Abbildung. Dann ist $\bigotimes\limits_{k=1}^{n} X_k$ eine $\mathfrak{A}$-$\bigotimes\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$-messbare Abbildung.

Beweis. Es bezeichne $\mathop{\boxtimes}\limits_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ das System der zu $(\mathfrak{A}_k)_{k=1}^n$ gehörigen Rechteckmengen. Wegen Folgerung M.16.1 gilt dann

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\mathop{\boxtimes}_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k) = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{1}$$

Sei

$$\mathop{\times}_{k=1}^{n} A_k \in \mathop{\boxtimes}_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{2}$$

Für $k \in \{1,...,n\}$ gilt wegen (2) dann $A_k \in \mathfrak{A}_k$ und die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-Messbarkeit von X_k liefert also $X_k^{-1}(A_k) \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt aufgrund der $\cap$-Stabilität der σ-Algebra $\mathfrak{A}$ dann

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k) \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Wegen Bemerkung M.16.1 gilt

$$(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k)^{-1}(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k) = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt nun

$$(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k)^{-1}(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k) \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) gilt dann also

$$(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k)^{-1}(\boxtimes_{k=1}^{n} A_k) \subseteq \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Wegen (1) und (6) liefert Satz M.15.2 dann die $\mathfrak{A}$-$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$-Messbarkeit von $\bigotimes_{k=1}^{n} X_k$. ■

Wir wollen nun unter Heranziehung von Satz M.16.2 wesentliche Aspekte der Struktur der Borelschen σ-Algebra $\mathcal{B}_m$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$ herausarbeiten.

Bemerkung M.16.2. Sei $s \in \mathbb{N}$ und sei $(m_j)_{j=1}^{s}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Weiter sei $m := \sum_{j=1}^{s} m_j$. Die Abbildung $T_{m_1,...,m_s} : \bigtimes_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j} \to \mathbb{R}^m$ sei gemäß $[x_1, ..., x_s] \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_s \end{pmatrix}$ definiert. Dann ist $T_{m_1,...,m_s}$ eine Bijektion zwischen $\bigtimes_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j}$ und $\mathbb{R}^m$.

Vereinbarung. Seien $s \in \mathbb{N}$ sowie $(m_j)_{j=1}^{s}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Weiter sei $m := \sum_{j=1}^{s} m_j$ und es sei $T_{m_1,...,m_s}$ wie in Bemerkung M.16.2 erklärt. Dann vereinbaren wir, künftig via $T_{m_1,...,m_s}$ eine Identifikation von $\bigtimes_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j}$ und $\mathbb{R}^m$ vorzunehmen.

Satz M.16.5. Seien $s \in \{2, 3, ...\}$ und $(m_j)_{j=1}^{s}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Weiter sei $m := \sum_{j=1}^{s} m_j$. Dann gilt

$$\mathcal{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{m_j}.$$

Beweis. Im Sinne obiger Vereinbarung gilt mit den Bezeichnungen von Definition M.1.7 dann

$$I_{m,r} = \boxtimes_{j=1}^{s} I_{m_j,r}. \tag{1}$$

Wegen Satz M.14.1 gilt

$$\sigma_{\mathbb{R}^m}(I_{m,r}) = \mathcal{B}_m \tag{2}$$

sowie für $j \in \{1, ..., s\}$ weiterhin

$$\sigma_{\mathbb{R}^{m_j}}(I_{m_j,r}) = \mathcal{B}_{m_j}, \tag{3}$$

wobei $I_{m_j,r}$ nach Bemerkung M.14.1 weiterhin eine isotone Folge $(A_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_{n,j} = \mathbb{R}^{m_j}$ enthält. Beachtet man dies, so ergibt sich unter Verwendung von (2), (1), Satz M.16.2, obiger Vereinbarung und (3) dann

$$\mathcal{B}_m = \sigma_{\mathbb{R}^m}(I_{m,r}) \overset{(1)}{=} \sigma_{\times_{j=1}^s \mathbb{R}^{m_j}}\Big(\boxtimes_{j=1}^{s} I_{m_j,s}\Big) \overset{\text{Satz } M.16.2}{=} \bigotimes_{j=1}^{s} \sigma_{\mathbb{R}^{m_j}}(I_{m_j,r}) \overset{(3)}{=} \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{m_j}.$$

■

Satz M.16.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $s \in \{2, 3, ...\}$, $(m_j)_{j=1}^s$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum_{j=1}^{s} m_j$. Für $j \in \{1, ..., s\}$ sei $X_j \in A(\Omega, \mathbb{R}^{m_j})$. Weiter sei $X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $\omega \to \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_s(\omega) \end{pmatrix}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) X ist $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_m$-messbar.

(ii) Für alle $j \in \{1, ..., s\}$ ist X_j eine $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_{m_j}$-messbare Abbildung.

Beweis. Da nach Satz M.16.5 die Beziehung $\mathcal{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathcal{B}_{m_j}$ besteht, liefert Satz M.16.3 sogleich die Behauptung. ■

v27m
12.10.2009

M.17. Borel-Messbarkeit von numerischen Funktionen

Im vorliegenden Abschnitt nehmen wir eine Vertiefung der Resultate von Abschnitt M.15 für den Fall einer speziellen σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ vor. Hierzu kompaktifizieren wir zunächst $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme der „idealen“ Elemente $-\infty$ und $+\infty$.

Satz M.17.1. Sei $\overline{\mathbb{R}} := \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. Weiterhin sei $\overline{\mathcal{B}_1} := \{A \in \mathfrak{P}(\overline{\mathbb{R}}) : A \cap \mathbb{R} \in \mathcal{B}_1\}$. Dann ist $\overline{\mathcal{B}_1}$ eine σ-Algebra in $\overline{\mathbb{R}}$, für welche $\overline{\mathcal{B}_1} \cap \mathbb{R} = \mathcal{B}_1$ und $\mathcal{B}_1 \subseteq \overline{\mathcal{B}_1}$ erfüllt sind.

Bemerkung M.17.1. Es ist $\overline{\mathcal{B}_1}$ das System aller derjenigen Teilmengen A von $\overline{\mathbb{R}}$, welche mit einem gewissen $B \in \mathcal{B}_1$ eine der Darstellungen $A = B$, $A = B \cup \{-\infty\}$, $A = B \cup \{+\infty\}$ oder $A = B \cup \{-\infty, +\infty\}$ besitzen.

Bemerkung M.17.2. Der meßbare Raum $(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathcal{B}_1})$ ist total atomar.

Bemerkung M.17.3. Seien $\overline{I}_{1,a} := \{[-\infty, a] : a \in \mathbb{R}\}$, $\overline{I}_{1,o} := \{[-\infty, a) : a \in \mathbb{R}\}$, $\overline{H}_{1,a} := \{[a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$, $\overline{I}_{1,o} := \{(a, +\infty] : a \in \mathbb{R}\}$. Dann gelten $\overline{H}_{1,o} = \{\overline{\mathbb{R}} \backslash A : A \in \overline{I}_{1,a}\}$ sowie $\overline{H}_{1,a} = \{\overline{\mathbb{R}} \backslash A : A \in \overline{I}_{1,0}\}$.

Satz M.17.2. Die in Bemerkung M.17.3 eingeführten Mengensysteme $\overline{I}_{1,a}, \overline{I}_{1,o}, \overline{H}_{1,a}$ und $\overline{H}_{1,o}$ sind sämtlich Erzeuger von $\overline{\mathcal{B}}_1$.

Nachfolgend betrachten wir einen nichttrivialen meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ und studieren die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$- bzw. $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_1$-meßbaren Abbildungen aus $A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$ bzw. $A(\Omega, \mathbb{R})$.

Definition M.17.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann bezeichne $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ bzw. $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbaren numerischen Funktionen auf Ω bzw. die Mengen aller $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_1$-messbaren reellen Funktionen auf Ω.

Bemerkung M.17.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

b) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

Seien Ω eine nichtleere Menge und $f \in A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Dann wird definiert $\{f \geq \alpha\} := f^{-1}([\alpha, +\infty])$, $\{f > \alpha\} := f^{-1}((\alpha, +\infty])$, $\{f \leq \alpha\} := f^{-1}([-\infty, \alpha])$ und $\{f < \alpha\} := f^{-1}([-\infty, \alpha))$.

Satz M.17.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. dann sind folgende Aussagenn äquivalent:

(i) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iii) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iv) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(v) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Es seien $\overline{I}_{1,a}$, $\overline{I}_{1,o}$, $\overline{H}_{1,a}$ und $\overline{H}_{1,o}$ wie in Bemerkung M.17.3 eingeführt. Dann ist (ii) bzw. (iii) bzw. (iv) bzw (v) äquivalent zu:

(ii') Es ist $f^{-1}(\overline{I}_{1,a}) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(iii') Es ist $f^{-1}(\overline{I}_{1,o}) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(iv') Es ist $f^{-1}(\overline{H}_{1,a}) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(v') Es ist $f^{-1}(\overline{H}_{1,o}) \subseteq \mathfrak{A}$.

Wegen der nach Satz M.17.2 gültigen Beziehung $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{I}_{1,a}) = \overline{\mathcal{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{I}_{1,o}) = \overline{\mathcal{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{H}_{1,a}) = \overline{\mathcal{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}(\overline{H}_{1,o}) = \overline{\mathcal{B}}_1$ liefert Satz M.15.2 die Äquivalenz von (i) mit (ii') bzw. (iii') bzw. (iv') bzw (v'). Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von (i) bis (v). ■

Satz M.17.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarerer Raum und $f \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})$

b) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

c) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

d) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

e) Für alle $\alpha \in \mathbb{R}$ gilt $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und Satz M.17.3. ■

Lemma M.17.1. Seien Ω eine nichtleere Menge sowie $f, g \in A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Es bezeichne $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen. Dann gilt $\{f < g\} = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} [\{f < y\} \cap \{y < g\}]$. Hierbei ist $\{f < g\} := \{\omega \in \Omega : f(\omega) < g(\omega)\}$.

Satz M.17.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gehören die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ sämtlich zu $\mathfrak{A}$.
Beweis. Wir betrachten zunächst $\{f < g\}$. Wegen Lemma M.17.1 gilt

$$\{f < g\} = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} [\{f < y\} \cap \{y < g\}]. \tag{1}$$

$$\text{Sei } y \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von f bzw. g liefert Satz M.17.3 dann $\{f < y\} \in \mathfrak{A}$ bzw. $\{y < g\} \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann

$$\{f < y\} \cap \{y < g\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen (1)–(3) dann

$$\{f < g\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt aus (4) dann

$$\{g < f\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

$$\text{Es ist } \{f \leq g\} = \Omega \setminus \{g < f\}. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (5) und (6) dann

$$\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Durch Vertauschen der Rollen von f und g folgt aus (7) dann

$$\{g \leq f\} \in \mathfrak{A}. \tag{8}$$

$$\text{Es ist } \{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\}. \tag{9}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen (7)-(9) mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann

$$\{f = g\} \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Wegen $\{f \neq g\} = \Omega \setminus \{f = g\}$ und der Wahl von $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra in Ω folgt aus (10) dann $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$. ■

Folgerung M.17.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gehören die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ sämtlich zu $\mathfrak{A}$.
Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und Satz M.17.5. ■

Folgerung M.17.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Weiter sei $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gehören $\{f = \alpha\}$ und $\{f \neq \alpha\}$ jeweils zu $\mathfrak{A}$.
Beweis. Sei $g\colon \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert gemäß $\omega \mapsto \alpha$. Wegen Beispiel M.15.1 ist dann $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus und aus der Wahl von f ergeben sich mittels Satz M.17.5 dann alle Behauptungen. ■

Folgerung M.17.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gehören $\{f = \alpha\}$ und $\{f \neq \alpha\}$ jeweils zu $\mathfrak{A}$.
Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und Folgerung M.17.2. ■

Lemma M.17.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie $h_{\alpha,\beta} := \alpha + \beta h$. Dann gilt $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.
Beweis. Nach Definition ist $h_{\alpha,0}$ die auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert α. Hieraus folgt mittels Beispiel M.15.1 dann $h_{\alpha,0} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Sei nun $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Weiter sei

$$a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\{h_{\alpha,\beta} \geq a\} = \{\alpha + \beta h \geq a\} = \{\beta h \geq a - \alpha\} = \begin{cases} \{h \geq \frac{1}{\beta}(a - \alpha)\} & \text{, falls } \beta \in (0, +\infty). \\ \{h \leq \frac{1}{\beta}(a - \alpha)\} & \text{, falls } \beta \in (-\infty, 0). \end{cases} \tag{2}$$

Wegen $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ liefert Satz M.17.3 dann

$$\{h \geq \frac{1}{\beta}(a - \alpha)\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

$$\text{und } \{h \leq \frac{1}{\beta}(a - \alpha)\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (2)–(4) gilt dann

$$\{h_{\alpha,\beta} \geq a\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ergibt sich erneut mittels Satz M.17.3 dann $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. ■

Satz M.17.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

a) Sei $f + g$ wohldefiniert. Dann ist $f + g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

b) Sei $f - g$ wohldefiniert. Dann ist $f - g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

Beweis.

a)
$$\text{Sei } \alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Dann gilt
$$\{f+g \geq \alpha\} = \{f \geq \alpha - g\}. \tag{2}$$
Mit den Bezeichnungen von Lemma M.17.2 gilt $\alpha - g = g_{\alpha,-1}$. Hieraus folgt mittels Lemma M.17.2 dann
$$\alpha - g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{3}$$
wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und (3) liefert Satz M.17.5 dann $\{f \geq \alpha - g\} \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt wegen (2) dann
$$\{f+g \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$
Wegen (1) und (3) liefert Satz M.17.3 dann $f+g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

b) Mit den Bezeichnungen von Lemma M.17.2 gilt $-g = g_{0,-1}$. Hieraus folgt mittels Lemma M.17.2 dann $-g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt bei Beachtung von $f - g = f + (-g)$ mittels (a) dann $f - g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

■

Satz M.17.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.
Beweis. Wegen Bemerkung M.17.4 und der Wahl von f und g gilt $\{f, g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt mittels Lemma M.17.2 dann $\{\alpha f, \beta g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus und aus der Wohldefiniertheit von $\alpha f + \beta g$ folgt mittels Teil (a) von Satz M.17.6 dann $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $\alpha f + \beta g \in A(\Omega, \mathbb{R})$ mittels Bemerkung M.17.4 dann $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. ■

Satz M.17.8. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nicht trivialer meßbarer Raum, sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die $f A$-$\mathcal{B}_1$-meßbarkeit von f^2. Sei hierzu
$$a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$
Dann gilt
$$\{f^2 \geq a\} = \begin{cases} \Omega & a \in (-\infty, 0] \\ \{f \leq -\sqrt{a}\} \cap \{f \geq \sqrt{a}\} & a \in (0, +\infty) \end{cases}. \tag{2}$$
Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist gilt
$$\Omega \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$
Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gilt nach Satz M.17.4 dann
$$\{\{f \leq -\sqrt{a}\}, \{f \geq \sqrt{a}\}\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$
Aus (2)–(4) folgt dann
$$\{f^2 \geq a\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) liefert Satz M.17.4 dann

$$f^2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R}). \tag{6}$$

v28m 13.10.2009

Wegen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liefert Satz M.17.7 dann

$$\{f+g, f-g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \tag{7}$$

Aus (7) und dem schon gezeigten (vergleiche (6)) folgt dann $\{(f+g)^2, (f-g)^2\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus ergibt sich mittels Satz M.17.7 dann

$$\frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \tag{8}$$

Es ist

$$\frac{1}{4}(f+g)^2 - \frac{1}{4}(f-g)^2 = \frac{1}{4}[(f+g)^2-(f-g)^2] = \frac{1}{4}[(f^2+2fg+g^2)-(f^2-2fg+g^2)] = f \cdot g \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) gilt dann $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

■

Folgerung M.17.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und für $\omega \in \Omega$ gelte zudem $g(\omega) \neq 0$. Dann gehören $\frac{1}{g}$ und $\frac{f}{g}$ zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Satz M.17.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$

Folgerung M.17.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$
Beweis. Es bezeichne g_α die auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert α. Wegen Beispiel M.15.1 ist $g_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $\alpha \cdot f = f \cdot g_\alpha$ mittels Satz M.17.9 dann $\alpha \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ ■

Bemerkung M.17.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $1_A \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$
Beweis. Wegen $A \in \mathfrak{A}$ gilt nach Teil (b) von Beispiel M.15.3 dann, dass

$$1_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.17.4 gilt

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \tag{2}$$

Wegen (1), (2) sowie den Sätzen M.17.8 und M.17.9 folgt dann $1_A \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ ■

Bemerkung M.17.6. Seien Ω eine nichtleere Menge sowie $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\{\sup\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \leq \alpha\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \leq \alpha\}$ und $\{\inf\limits_{n \in \mathbb{N}} f_n \geq \alpha\} = \bigcap\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f_n \geq \alpha\}$.

Satz M.17.10. Seien Ω eine nichtleere Menge sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $A(\Omega,\overline{\mathbb{R}})$. Dann gehören auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ jeweils zu $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$.

Folgerung M.17.6. Seien Ω eine nichtleere Menge sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $A(\Omega,\overline{\mathbb{R}})$. Weiter sei $\alpha\in\overline{\mathbb{R}}$. Dann gehören die Mengen $\{\liminf\limits_{n\to\infty} f_n=\alpha\}$, $\{\limsup\limits_{n\to\infty} f_n=\alpha\}$ und $\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n=\alpha\}$ sämtlich zu $\mathfrak{A}$

Beweis. Wegen Satz M.17.10 und Folgerung M.17.2 gilt:

$$\{\{\limsup_{n\to\infty} f_n=\alpha\},\{\liminf_{n\to\infty} f_n=\alpha\}\}\subseteq\mathfrak{A} \tag{1}$$

Weiterhin ist

$$\{\lim_{n\to\infty} f_n=\alpha\}=\{\limsup_{n\to\infty} f_n=\alpha\}\cap\{\liminf_{n\to\infty} f_n=\alpha\} \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist folgt wegen (1) und (2) mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann $\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n=\alpha\}\in\mathfrak{A}$ ■

Folgerung M.17.7. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $n\in\mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$. Dann gehören $\sup\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} f_k$, $\inf\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} f_k$ jeweils zu $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$.

Beweis. Setze für $k\in\{n+1,n+2,\ldots\}$ jeweils $f_k:=f_n$ und wende Satz M.17.10 an. ■

Folgerung M.17.8. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $n\in\mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Dann gehören $\sup\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} f_k$, $\inf\limits_{k\in\{1,\ldots,n\}} f_k$ jeweils zu $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und M.17.7 ■

Folgerung M.17.9. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, welche punktweise auf Ω (im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn) gegen eine numerische Funktion f auf Ω konvergiert. Dann gilt $f\in\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$

Beweis. Wegen $f=\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ liefert Satz M.17.10 die Behauptung. ■

Folgerung M.17.10. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$, welche punktweise auf Ω gegen eine relle Funktion f auf Ω konvergiert. Dann gilt $f\in\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 mit Folgerung M.17.9 ■

Satz M.17.11. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, dann gilt:

(a) Es bezeichne A die Menge aller $\omega\in\Omega$ für die, die Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ im eigentlichen oder uneigentlichen Sinne konvergiert. Dann gilt $A\in\mathfrak{A}$

(b) Es bezeichne B die Menge aller $\omega\in\Omega$ für die, die Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ im eigentlichen Sinner konvergiert. Dann gilt $B\in\mathfrak{A}$.

Beweis.

(a) Aus der Definition von A folgt

$$A = \{\liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n\} \tag{1}$$

Wegen Satz M.17.10 gilt

$$\{\limsup_{n\to\infty} f_n, \liminf_{n\to\infty} f_n\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) liefert Satz M.17.5 nun $A \in \mathfrak{A}$

(b) Aus Definition von A und B folgt sogleich

$$B = A \cap \{\limsup_{n\to\infty} f_n \neq \infty\} \cap \{\liminf_{n\to\infty} f_n \neq \infty\} \tag{3}$$

Wegen (2) liefert die Folgerung M.17.2 weiterhin

$$\{\{\limsup_{n\to\infty} f_n \neq \infty\}, \{\liminf_{n\to\infty} f_n \neq \infty\}\} \subseteq \mathfrak{A} \tag{4}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist folgt unter Beachtung von (3),(4) und (a) mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann $B \in \mathfrak{A}$

■

Wir wenden uns nun einer spezielle Charakterisierung der $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-Messbarkeit numerischer Funktionen zu. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Definition M.17.2. Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann heißt $\alpha^+ := \sup\{\alpha, 0\}$ bzw. $\alpha^- := -\inf\{\alpha, 0\}$ der **Positiv**- bzw. **Negativteil** von α.

Wir erweitern die Definition des Absolutbetrags auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch die Setzung $|+\infty| := +\infty$ und $|-\infty| := +\infty$

Bemerkung M.17.7. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $|a| = sup\{a, -a\}$.

(b) Es ist $a^- = (-a)^+$

(c) Es ist

$$a^+ = \begin{cases} a & , a \in [0, \infty] \\ 0 & a \in [-\infty, 0) \end{cases} .$$

(d) Es ist

$$a^- = \begin{cases} 0 & , a \in [0, \infty] \\ -a & a \in [-\infty, 0) \end{cases} .$$

(e) Es ist $a = a^+ - a^-$.

(f) Es ist $|a| = a^+ + a^-$.

(g) Sei $a \in \mathbb{R}$ dann gelten $a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$ und $a^- = \frac{1}{2}(a - |a|)$.

Satz M.17.12. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in A(\Omega; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$

  (ii) Es gilt $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt: $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$

Beweis.

(a) Wir zeigen:

„$(i) \to (ii)$“ Nach Beispiel M.15.1 ist die Nullfunktion auf Ω dann $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbar. Hieraus und aus der Vorraussetzung (a) ergibt sich mittels Folgerung M.17.7 dann die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-Messbarkeit von $f^+ = \sup\{f, 0\}$ und $-f^- = \inf\{f, 0\}$ also wegen Lemma M.17.2 dann auch die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-Messbarkeit von f^-.

„$(ii) \to (i)$“ Wegen Teil (e) von Bemerkung M.17.7 gilt

$$f = f^+ - f^-. \tag{1}$$

Wegen (1) und (ii) liefert Teil (b) von Satz M.17.6 dann $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

(b) Wegen Teil (f) von Bemerkung M.17.7 gilt

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{2}$$

Wegen (a) gilt

$$\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) liefert Teil (a) von Satz M.17.6 dann $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

■

Satz M.17.13. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ eine nichttrivialer messbarer Raum und $f \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$

  (ii) Es gilt $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt: $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und Satz M.17.12 ■

Für $p \in (0,\infty)$ setzen wir $(+\infty)^p := +\infty$.

Bemerkung M.17.8. Sei $p \in (0,\infty)$ und sei $h\colon [0,\infty] \to [0,\infty]$ definiert gemäß $x \mapsto x^p$. Dann ist h streng monoton wachsend und $h\big|_{[0,\infty)}$ ist stetig.

Satz M.17.14. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, weiter sei $p \in (0,\infty)$. Dann gilt $|f|^p \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$

Folgerung M.17.11. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$, weiter sei $p \in (0,\infty)$. Dann gilt $|f|^p \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$
Beweis. Kombiniere Bemerkung M.17.4 und Satz M.17.14. ■

Bemerkung M.17.9. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum $K \in \{\overline{\mathbb{R}},\mathbb{R}\}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};K)$,$p \in (0,\infty)$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gehören die Mengen $\{|f|^p \geq \alpha\}$,$\{|f|^p > \alpha\}$,$\{|f|^p \leq \alpha\}$ und $\{|f|^p < \alpha\}$ zu $\mathfrak{A}$.

Satz M.17.15. Seien I ein Intervall von $\overline{\mathbb{R}}$ und $f \in A(I,\overline{\mathbb{R}})$ eine Abbildung welche monoton wachsend oder fallend in I ist. Dann ist f eine $(\overline{\mathcal{B}}_1 \cap I)$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-messbare Abbildung.

Bemerkung M.17.10. Seine $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. $\overline{\Omega} \in \mathfrak{A} - \{\emptyset\}$, $K \in \{\overline{\mathbb{R}},\mathbb{R}\}$, $g \in A(\overline{\Omega},K)$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\overline{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\overline{\Omega}$. Im Fall $\Omega = \overline{\Omega}$ sei $G := g$ und im Fall $\Omega \subseteq \overline{\Omega}$ sei $G : \Omega \to K$ definiert gemäß

$$G(\omega) := \begin{cases} g(\omega) & ,\omega \in \overline{\Omega} \\ 0 & \omega \in \Omega - \overline{\Omega} \end{cases} .$$

Dann gilt:

(a) Es ist $G\big|_{\overline{\Omega}} = g$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $g \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A}_{\overline{\Omega}};K)$.

  (ii) Es ist $G \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};K)$.

Satz M.17.16. Sei I ein endliches oder unendliches Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $f \in A(I,\mathbb{R})$ eine in I konvexe oder konkave Funktion. Dann gilt $f \in \mathcal{M}(I,\mathcal{B}_1 \cap I;\mathbb{R})$.

M.18. Einige Aussagen zur Borel-Messbarkeit von nicht negativen numerischen Funktionen

Der vorliegende Abschnitt stellt wichtige Vorbereitungen für das später entwickelte Konzept der Integrationstheorie bereit. Wir führen die Untersuchung von Borel-messbaren nicht negativen numerischen Funktionen in 2 Teilschritten durch. Im 1. Schritt beschäftigen wir uns mit solchen Borel-messbaren nicht negativen reellen Funktionen, welche nur endlich viele Werte annehmen. Im 2. Schritt approximiernen wir dann eine beliebige Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega,[0,\infty])$ in einer gewissen Weise durch Funktionen des im 1. Schritt betrachteten Typs.

Definition M.18.1. Seien Ω eine nichtleere Menge und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt die Funktion $1_A : \Omega \to \mathbb{R}$, welche gemäß

$$1_A(\omega) := \begin{cases} 1 & , \omega \in A \\ 0 & , \omega \in \Omega - A. \end{cases}$$

definiert ist, die **Indikatorfunktion** der Menge A.

Bemerkung M.18.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann ist 1_Ω bzw. $1_\emptyset$ die auf Ω konstanten Funktionen mit Wert 1 bzw. 0.

v29m
19.10.2009

Bemerkung M.18.2. Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann gilt:

(a) Seien $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussage äquivalent:
  (i) Es ist $A \subseteq B$.
  (ii) Es ist $1_A \leq 1_B$.

(b) Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt $1_{\Omega \setminus A} = 1_\Omega - 1_A$.

(c) Sei $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt $1_A \cdot 1_B = 1_{A \cap B}$.

(d) Seien I eine nichtleere Indexmenge und $(A_b)_{b \in I}$ eine Familie aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten $1_{\bigcup\limits_{k \in I} A_k} = \sup\limits_{k \in I} 1_{A_k}$ sowie $1_{\bigcap\limits_{k \in I} A_k} = \inf\limits_{k \in I} 1_{A_k}$.

(e) Sei J ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter sei $(A_k)_{k \in J}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt $1_{\bigcup\limits_{k \in J} A_k} = \sum\limits_{k \in J} 1_{A_k}$.

(f) Sei $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten $1_{\limsup\limits_{n \to \infty} A_n} = \limsup\limits_{n \to \infty} 1_{A_n}$ sowie $1_{\liminf\limits_{n \to \infty} A_n} = \liminf\limits_{n \to \infty} 1_{A_n}$

Definition M.18.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $f \in A(\Omega, [0, +\infty))$. Dann heißt f eine $(\Omega, \mathfrak{A})$-**Elementarfunktion**, falls f nur endlich viele Werte annimmt und zudem $\mathfrak{A}$-$\mathcal{B}_1$-meßbar ist. Es bezeichne $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen.

Beispiel M.18.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und f eine auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert in $[0, +\infty)$. Dann ist $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.*
Beweis. *Kombiniere Definition M.18.2 und Beispiel M.15.1.* ■

Bemerkung M.18.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) Es ist $A \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Da 1_A höchstens die Werte 0 und 1 annimmt, folgt die Behauptung aus Teil(b) von Beispiel M.15.3. ■

Bemerkung M.18.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Es sei $n :=$ card [f(Ω)] und es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die n Elemente von $f(\Omega)$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$. Dann gilt:

(a) Für alle $j, k \in \{1, .., n\}$ mit $j \neq k$ gilt $A_j \cap A_k = \emptyset$.

(b) Es ist $\bigcup\limits_{j=1}^{n} A_J = \Omega$.

(c) Es ist $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$.

(d) Für $j \in \{1, ..., n\}$ gilt $\alpha_j \in [0, +\infty)$. Sei $j \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt $A_j = \{f = \alpha_j\}$ sowie $A_j \in \mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\}$.

Definition M.18.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter seien die Zahl n und die Folgen $(\alpha_j)_{j=1}^n$ sowie $(A_j)_{j=1}^n$ wie in Bemerkung M.18.4 definiert. Dann heißt das Tripel $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine **kanonische Darstellung** von f.

Definition M.18.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}, (\alpha_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $j, k \in \{1, .., n\}$ mit $j \neq k$ gilt $A_j \cap A_k = \emptyset$.

(ii) Es ist $\bigcup_{j=1}^n A_j = \Omega$.

(iii) Es ist $f = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$.

Dann heißt das Tripel $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine **Normaldarstellung** (kurz ND) von f.

Bemerkung M.18.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

(a) Sei $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine kanonische Darstellung von f. Dann ist $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von f.

(b) Es gibt stets eine Normaldarstellung von f.

Bemerkung M.18.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von f. Es sei $k \in \{1, ..., n\}$ so gewählt, dass $A_k \neq \emptyset$ erfüllt ist. Dann ist $\text{Rstr.}_{A_k} f$ die auf A_k konstante Funktion mit Werten α_k.

s

Bemerkung M.18.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Es sei $f := \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$. Dann ist $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$

Lemma M.18.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $(C_j)_{j=1}^n$ aus $\mathfrak{A}$ sowie Folgen $(\alpha_j)_{j=1}^n$ und $(\beta_j)_{j=1}^n$ aus $[0, +\infty)$ derart, dass $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ bzw. $[n, (\beta_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von u bzw. v ist.

Lemma M.18.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin seien (Unter Beachtung von Lemma M.18.1) die Zahl $n \in \mathbb{N}$, die Folge $(C_j)_{j=1}^n$ aus $\mathfrak{A}$ sowie die Folgen $(\alpha_j)_{j=1}^n$ und $(\beta_j)_{j=1}^n$ aus $[0, +\infty)$ derart gewählt, dass $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ bzw. $[n, (\beta_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von u bzw. v ist. Dann gilt:

(a) Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann ist $\alpha \cdot u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es ist $[n, (\alpha \cdot \alpha_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von $\alpha \cdot u$.

(b) Es ist $u + v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es ist $[n, (\alpha_j + \beta_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von $u + v$.

(c) Es ist $u \cdot v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es ist $[n, (\alpha_j \beta_j)_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von $u \cdot v$.

(d) Es ist $\sup\{u, v\} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $[n, (\sup\{\alpha_j, \beta_j\})_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ ist eine Normaldarstellung von $\sup\{u, v\}$.

(e) Es ist $\inf\{u, v\} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $[n, (\inf\{\alpha_j, \beta_j\})_{j=1}^n, (C_j)_{j=1}^n]$ ist eine Normaldarstellung von $\inf\{u, v\}$.

(f) Folgende Aussage sind äquivalent:

  (i) Es ist $v - u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

  (ii) Es ist $u \leq v$.

  (iii) Für alle $j \in \{1, \ldots, n\}$ mit $C_j \neq \emptyset$ gilt $\alpha_j \leq \beta_j$.

(g) Sei (i) erfüllt. Sei $I = \{j \in \{1, \ldots, n\} : C_j \neq \emptyset\}$. Dann gilt $I \neq \emptyset$ und $[\mathrm{card\, I}, (\beta_\mathrm{j} - \alpha_\mathrm{j})_{\mathrm{j} \in \mathrm{I}}, (\mathrm{C_j})_{\mathrm{j} \in \mathrm{I}}]$ ist eine Normaldarstellung von $v - u$.

Wir kommen nun zum zweiten Teil der Untersuchungen dieses Abschnitts.
Bezeichnung: Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Dann bezeichnet $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge der $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}_1}$-meßbaren numerischne Funktionen auf Ω mit Werten $[0, +\infty]$, d.h. es sei

$$\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, [0, +\infty]).$$

Beispiel M.18.2. *Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann gilt $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega)) = A(\Omega, [0, +\infty])$.*

Bemerkung M.18.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Dann ist $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.
Beweis. Kombiniere Definition M.18.2 und Bemerkung M.18.4. ■

Bemerkung M.18.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{\mathbb{R}})$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gehören f^+, f^- und $|f|^p$ jeweils zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.18.10. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist f eine $\mathfrak{A}$-$(\overline{\mathcal{B}_1} \cap [0, +\infty])$-meßbare Abbildung.

Lemma M.18.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

(a) Sei $\alpha \in [0, +\infty]$. Dann gilt $\alpha f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es ist $f + g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$

(c) Es ist $f \cdot g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(d) Es ist $\sup\{f, g\} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(e) Es ist $\inf\{f, g\} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(f) Sei $g \in A(\Omega, (0, +\infty))$. Dann gehören $\frac{f}{g}$ und $\frac{1}{g}$ zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Wegen $f, g \in A(\Omega, [0, +\infty])$ gehören die unter (a)-(f) betrachteten Abbildungen zu $A(\Omega, [0, +\infty])$. Es bleibt also nur noch deren $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}_1}$-Meßbarkeit zu zeigen. Diese ergibt sich im Fall von $\alpha \cdot f$ bzw. $f + g$ bzw. $f \cdot g$ bzw. $\sup\{f, g\}$ bzw. $\inf\{f, g\}$ bzw. $\frac{f}{g}$ bzw. $\frac{1}{g}$ sogleich aus Folgerung M.17.5 bzw. Teil (a) von Satz M.17.6 bzw Satz M.17.9 bzw. Folgerung M.17.7 bzw. Folgerung M.17.4. ■

Bemerkung M.18.11. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $1_A f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $1_A |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis.

(a) Wegen $A \in \mathfrak{A}$ sowie den Bemerkungen M.18.3 und M.18.8 gilt $1_A \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. mittels Teil (c) von Lemma M.18.3 nun $1_A \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Wegen Bemerkung M.18.9 gilt $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt mitels (a) dann $1_A \cdot |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

■

Bemerkung M.18.12. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, $\tilde{\Omega} \subseteq \mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\}$ und $g \in A(\tilde{\Omega}, [0, +\infty])$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ über $\tilde{\Omega}$. Im Fall $\tilde{\Omega} = \Omega$ sei $G := g$ und im Fall $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sei $G : \Omega \to [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$g(\omega) = \begin{cases} g(\omega) & , \text{falls } \omega \in \Omega \\ 0 & , \text{falls } \omega \in \Omega \backslash \tilde{\Omega}. \end{cases} .$$

Dann gilt:

(a) Es ist $g = \mathrm{Rstr.}_{\tilde{\Omega}} G$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $g \in \mathcal{E}^*(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A})$.

  (ii) Es ist $G \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.17.10. ■

Lemma M.18.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gehören $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ jeweils zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $A(\Omega, [0, +\infty])$, sind alle vorbetrachteten Funktionen aus $A(\Omega, [0, +\infty])$ und folglich wegen Satz M.17.10 dann aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ■

Lemma M.18.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarerer Raum sowie I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter seien $(a_k)_{k\in I}$ bzw. $(f_k)_{k\in I}$ Folgen aus $[0, +\infty]$ bzw. $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Im Fall eines endlichen I folgt die Behauptung aus den Teilen (a) und (b) von Lemma M.18.3. Im Fall von $I = \mathbb{N}$ folgt die Behauptung wegen $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k f_k = \sup\limits_{s\in\mathbb{N}} \sum\limits_{k=1}^{s} \alpha_k f_k$ aus Lemma M.18.4 und dem schon Gezeigten. ■

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnitts. Es besitzt fundamentale Bedeutung für den von uns gewählten Aufbau der Integrationstheorie.

Satz M.18.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarere Raum und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann gilt:

  (a1) Für $k \in \{1, ..., n2^n\}$ wird definiert

$$A_{kn} := \begin{cases} \{\frac{k}{2^n} \leq f < \frac{k+1}{2^n}\} & \text{, falls } k \in \{0, 1, ..., n2^n - 1\} \\ \{f \geq n\} & \text{, falls } k = n2^n. \end{cases}$$

  Dann ist $(A_{kn})_{k=0}^{n2^n}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ und es gilt $\bigcup\limits_{k=0}^{n2^n} A_{kn} = \Omega$.

  (a2) Sei $u_n := \sum\limits_{k=0}^{n2^n} \frac{k}{2^n} 1_{A_{kn}}$. Dann ist $u_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $[n2^n + 1, (\frac{k}{2^n})_{k=0}^{n2^n}, (A_{kn})_{k=0}^{n2^n}]$ eine Normaldarstellung von u_n und es gilt $u_n \leq u_{n+1}$.

(b) Es gilt $f = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

(c) Sei f zudem beschränkt. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \sup_{\omega\in\Omega} |u_n(\omega) - f(\omega)| = 0$.

v30m
20.10.2009

Satz M.18.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und bezeichne $\tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A})$ die Menge aller $f\in A(\Omega,\overline{\mathbb{R}})$ für die es eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ gibt mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$ gilt. Dann gilt $\tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A}) = \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. **Beweis.** Aufgrund der Teile (a2) und (b) von Satz M.18.1 gilt

$$\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}) \subseteq \tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A}) \tag{1}$$

Sei nun $f\in\tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ mit

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n. \tag{2}$$

Wegen Bemerkung M.18.8 ist dann $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Hieraus folgt wegen (2) mittel Lemma M.18.4 dann $f\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Es ist also

$$\tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist dann $\tilde{\mathcal{E}}(\Omega,\mathfrak{A}) = \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. ■

Bemerkung M.18.13. Seien Ω und Ω' nicht leere Mengen, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $A(\Omega,\Omega')$ sowie $A'\in\mathfrak{P}(\Omega')$. Für jedes $\omega\in\Omega$ sei $J_{A'}(\omega) := \{n\in\mathbb{N} : y_n(\omega)\in A'\}$. Die Abbildung $T_{A'}\colon\Omega\to\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$ sei definiert gemäß

$$T_{A'}(\omega) := \begin{cases} \min J_{A'}(\omega), & \text{falls } J_{A'}\neq\emptyset \\ +\infty & \text{, falls } J_{A'}=\emptyset. \end{cases}$$

Weiter sei $n\in\mathbb{N}\cup\{+\infty\}$. Dann ist

$$(T_{A'}^{-1})(\{n\}) = \begin{cases} y_1^{-1}(A') & \text{, falls } n=1 \\ [y_n^{-1}(A')]\cap[\bigcap_{j=0}^{n-1} y_j^{-1}(\Omega'\backslash A')], & \text{falls } n\in\mathbb{N}\backslash\{1\} \\ \bigcap y_j^{-1}(\Omega'\backslash A') & \text{, falls } n=+\infty. \end{cases}$$

Interpretieren wir den Parameterbereich $\mathbb{N}$ der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Zeitbereich, so beschreibt die in Bemerkung M.18.13 für $A'\in\mathfrak{P}(\Omega')$ eingeführte Abbildung $T_{A'}$ dann also gerade den Zeitpunkt des ersten Besuches der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A'.

Satz M.18.3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbaren Abbildungen aus $A(\Omega,\Omega')$ sowie $A'\in\mathfrak{A}'$. Es sei $T_{A'}$ wie in Bemerkung M.18.13 definiert. Dann gilt $T_{A'}\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$.

M.19. Einige mit einem Maßraum assoziierte Klassen von Borel-meßbaren Funktionen

Wir legen in diesem Abschnitt einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ zugrunde und assoziieren mit diesem spezielle Teilklassen von $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, bzw. $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$, welche später eine wesentliche Rolle in der Integrationstheorie spielen werden.

Bemerkung M.19.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $K \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Es bezeichne $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ die Menge aller $f \in (\Omega, \mathfrak{A}; K)$, welche der Beziehung $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$ genügen. Dann gilt $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \bar{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$.
Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.17.4. ■

Beispiel M.19.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt:*

a) *Es ist $\{1_A \neq 0\} = A$.*

b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*
   (i) *Es ist $1_A \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.*
   (ii) *Es ist $A \in \mathcal{N}_\mu$.*

Lemma M.19.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $K \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

a) Seien $f, g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$, wobei im Fall $K = \bar{\mathbb{R}}$ die Summe $f + g$ wohldefiniert sei. Dann gilt $f + g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

b) Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

c) Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $\alpha \in K$. Dann gilt $\alpha \cdot f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

d) Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $|f|^p \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

e) Seien $f, g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gehören $\inf\{f, g\}$ und $\sup\{f, g\}$ zu $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

f) Sei $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gehören f^+ und f^- zu $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

Satz M.19.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann ist $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein zweiseitges Ideal (und somit also insbesondere eine Unteralgebra) der $\mathbb{R}$-Funktionenalgebra $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

In unseren Späteren Betrachtungen werden wir im Falle eines vorgegebenes nichttrivialen Maßraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ häufig auf Situationen geführt, in denen zwei Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, deren Differenz in $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ liegt, den „gleichen Effekt" erzeugen. Diesem Phänomen wird durch Übergang zur Faktoralgebra

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) := \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) / \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$$

Rechnung getragen.

Definition M.19.1. Sei (Ω, ρ) ein Metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$.

a) Unter dem **Spektrum** $\mathrm{Spec}\,(\mu)$ von μ verstehen wir die Menge aller $x \in \Omega$, welches für jedes $r \in (0, +\infty)$ der Beziehung $K_\rho(x, r) \notin \mathcal{N}_\mu$ genügen.

b) Die Menge $\mathrm{Res}\,(\mu) := \Omega \backslash \mathrm{Spec}\,(\mu)$ heißt **Resolventermenge** von μ.

Bemerkung M.19.2. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathcal{B})$. Dann gelten $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}) = \emptyset$ und $\operatorname{Res}(\mathfrak{o}) = \Omega$.

Beispiel M.19.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann gelten $\operatorname{Spec}(\lambda^{(m)}) = \mathbb{R}^m$ und $\operatorname{Res}(\lambda^{(m)}) = \emptyset$.*

Satz M.19.2. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$. Dann gelten $\operatorname{Spec}(\mu) \in \mathcal{A}(\Omega, \rho)$ und $\operatorname{Res}(\mu) \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$.

Satz M.19.3. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$. Weiter sei $A \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$ so gewählt, daß $A \cap \operatorname{Spec}(\mu) \neq \emptyset$ erfüllt ist. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_\mu$.

Beweis. Sei x ein nach Voraussetzung existierender Punkt aus $A \cap \operatorname{Spec}(\mu)$. Wegen $A \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$ gibt es dann ein $r \in (0, +\infty)$ mit

$$K_\rho(x; r) \subseteq A. \tag{1}$$

Wegen $x \in \operatorname{Spec}(\mu)$ gilt

$$K_\rho(x; r) \notin \mathcal{N}_\mu \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus der Isotonie von μ dann $A \notin \mathcal{N}_\mu$. ■

Folgerung M.19.1. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$, so gewählt, daß $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ erfüllt ist. Weiter sei $A \in \mathcal{O}(\Omega, \rho) \setminus \{\emptyset\}$. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_\mu$.

Beweis. Nach Voraussetzung gelten $A \in \mathcal{O}(\Omega, \rho)$ und $A \cap \operatorname{Spec}(\mu) = A \cap \Omega = A \neq \emptyset$. Hieraus folgt mittels Satz M.19.3 dann $A \notin \mathcal{N}_\mu$. ■

Beispiel M.19.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $A \in \mathcal{O}(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}) \setminus \{\emptyset\}$. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$.*

Beweis. *Wegen Beispiel M.19.2 ist $\operatorname{Spec}(\lambda^{(m)}) = \mathbb{R}^m$. Damit liefert Folgerung M.19.1 dann $A \notin \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$.* ■

Satz M.19.4. Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$ so gewählt, daß $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ erfüllt ist. Dann gilt:

a) Sei $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dann gilt $f = 1_\emptyset$.

b) Seien $f, g \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$ so gewählt, daß $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann gilt $f = g$.

Beweis.

a) Wegen $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})), \mathbb{R} \setminus \{0\} \in \mathcal{O}(\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})$ und $\{f \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{0\})$. folgt mittels Satz M.15.7 dann

$$\{f \neq 0\} \in \mathcal{O}(\Omega, \rho). \tag{1}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ gilt

$$\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{2}$$

Wegen $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ sowie (1) und (2) liefert Folgerung M.19.1 dann $\{f \neq 0\} = \emptyset$. Somit ist $f = 1_\emptyset$.

b) Da $\mathcal{C}((\Omega,\rho),(\mathbb{R},\rho_{E,\mathbb{R}}))$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, gilt $f-g \in \mathcal{C}((\Omega,\rho),(\mathbb{R},\rho_{E,\mathbb{R}}))$. Hieraus folgt wegen (a) dann $f-g = 1_\emptyset$, also $f = g$.

■

Beispiel M.19.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt.*

a) Sei $f \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m,\rho_{E,\mathbb{R}^m}),(\mathbb{R}^m,\rho_{E,\mathbb{R}^m})) \cap \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}_m,\lambda^{(m)};\mathbb{R})$. Dann gilt $f = 1_\emptyset$.

b) Seien $f,g \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m,\rho_{E,\mathbb{R}^m}),(\mathbb{R}^m,\rho_{E,\mathbb{R}^m}))$ so gewählt, daß $f-g \in \mathcal{M}_0(\mathbb{R}^m,\mathcal{B}_m,\lambda^{(m)};\mathbb{R})$ erfüllt ist, Dann gilt $f = g$.

Satz M.19.5. Sei $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Es bezeichne $\mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ die Menge aller beschränkter Abbildungen aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Dann ist $\mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ eine Unteralgebra der $\mathbb{R}$-Funktionenalgebra $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.

M.20. μ-wesentlich beschränkte Funktionen

Wir legen in diesem Abschnitt einen nichtrivialen Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ zugrunde und nehmen unter Heranziehung des Systems $\mathcal{N}_\mu$ der μ-Nullmengen eine Abschwächung des Beschränkheitskonzepts für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$ vor.

Lemma M.20.1. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum.
Die Abbildung $N_{\infty,\mu}\colon \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}) \to [0,+\infty]$ sei definiert gemäß

$$g \mapsto \inf_{B\in\mathcal{N}_\mu}\left(\sup_{\omega\in\Omega}[1_{\Omega\setminus B}(\omega)]\cdot|g(\omega)|\right).$$

Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$ und sei $\mathcal{K}_{f,\mu} : \{\alpha \in [0,+\infty) : \{|f| > \alpha\} \in \mathcal{N}_\mu\}$. Dann gilt

$$N_{\infty,\mu}(f) = \begin{cases} \inf \mathcal{K}_{f,\mu}, & \text{falls } \mathcal{K} \neq \emptyset \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{K} = \emptyset. \end{cases}$$

Definition M.20.1. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$. Dann heißt f eine **μ-wesentlich beschränkte** Funktion, falls $N_{\infty,\mu}(f) \in [0,+\infty)$ erfüllt ist.

Für $K \in \{\bar{\mathbb{R}},\mathbb{R}\}$ bezeichne $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu;K)$ die Menge aller μ-wesentlich beschränkter Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};K)$.

Bemerkung M.20.1. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt $\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}) = \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\bar{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega,\mathbb{R})$.

Bemerkung M.20.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ und $N_{\infty,\mu}(f) \le \sup_{\omega\in\Omega} f(\omega)$.

Beweis. Man wähle $B = \emptyset$ in der Definition für $N_{\infty,\mu}(f)$. ■

Bemerkung M.20.3. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $K \in \{\bar{\mathbb{R}},\mathbb{R}\}$ und $f \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A};K)$.Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

a) Es ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

b) Es gibt ein $B_0 \in \mathcal{N}_\mu$, für das $1_{\Omega \setminus B_0} \cdot |f| \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ erfüllt ist.

Lemma M.20.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $K \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

a) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $N_{\infty,\mu}(f) = 0$.

  (ii) Es ist $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

b) Es ist $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K) \subseteq \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

v31m
26.10.2009

Lemma M.20.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$, wobei im Fall $K = \overline{\mathbb{R}}$ die Summe $f + g$ wohldefiniert sei. Dann gelten $f + g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ sowie $N_{\infty,\mu}(f + g) \leq N_{\infty,\mu}(f) + N_{\infty,\mu}(g)$.

b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gelten $f \cdot g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ sowie $N_{\infty,\mu}(f \cdot g) \leq N_{\infty,\mu}(f) \cdot N_{\infty,\mu}(g)$.

c) Seien $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\alpha \cdot f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ sowie $N_{\infty,\mu}(\alpha f) = |\alpha| \cdot N_{\infty,\mu}(f)$.

d) Seien $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gelten $|f|^p \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ sowie $N_{\infty,\mu}(|f|^p) = [N_{\infty,\mu}(f)]^p$.

e) Seien $f, g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gehören $inf\{f, g\}$ sowie $\sup\{f, g\}$ zu $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und es gelten $N_{\infty,\mu}(inf\{f, g\}) \leq N_{\infty,\mu}(|f| + |g|)$ sowie $N_{\infty,\mu}(\sup\{f, g\}) \leq N_{\infty,\mu}(|f| + |g|)$.

f) Sei $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gilt $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

Satz M.20.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:

a) Es ist $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ eine Unteralgebra von $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

b) Sei $N_{\infty,\mu;\mathbb{R}} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},\mu;K)} N_{\infty,\mu}$. Dann ist $N_{\infty,\mu;\mathbb{R}}$ eine Seminorm auf $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

M.21. Integrationstheorie

M.21.1. Das Programm

Vorgegeben seien ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und ein $f \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Wir fassen f als Wichtungsfunktion auf und stellen uns das Problem Ω bezüglich dieser Wichtung zu messen. Wir werden dieses Problem durch den Aufbau der Integrationstheorie lösen. Bei der Einführung des Integralbegriffs folgen wir einem Weg, der von W.H. Young vorgeschlagen wurde und der sich auf die Benutzung monotoner Folgen stützt. Dieser Zugang zeichnet sich dadurch aus, dass von vornherein auch unbeschränkte Funktionen und Maßräume unendlichen Maßes einbezogen werden. Die konstruktive Integraldefinition liefert automatisch für viele Aussagen einen effizienten Beweissatz.

M.21.2. Das Integral von $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen

Unser Aufbau eines Integralbegriffs wird in mehreren Schritten vollzogen. Wir betrachten einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Im vorliegenden Abschnitt werden wir das Integral für Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ einführen und erste Eigenschaften dieser Konstruktion diskutieren. Unsere Definition des Integrals basiert auf dem Begriff der Normaldarstellung (ND)

Lemma M.21.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es seien $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ sowie $[m, (\beta_k)_{k=1}^m, (B_k)_{k=1}^m]$ jeweils Normaldarstellungen von u. Dann gilt

$$\sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{k=1}^m \beta_k \mu(B_k).$$

Lemma M.21.2.1 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.21.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es sei $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von u. Dann heißt die in $[0, +\infty]$ gelegene Zahl

$$\int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j)$$

das μ-**Integral** von u.

Beispiel M.21.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und bezeichnet f die Nullfunktion auf Ω. dann ist $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int_\Omega f \, d\mu = 0$.*

Bemerkung M.21.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gelten $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int_\Omega 1_A \, \mathrm{d}\mu = \mu(A)$.
Beweis. Wegen Bemerkung M.18.3 gilt $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Setzen wir nun $\alpha_1 := 1$, $\alpha_2 := 0$ und $A_1 := A$, $A_2 := \Omega \backslash A$, so ist $[2, (\alpha_j)_{j=1}^2, (A_j)_{j=1}^2]$ eine Normaldarstellung von 1_A. Somit ist nach Definition M.21.2.1 dann $\int_\Omega 1_A \, \mathrm{d}\mu = \sum\limits_{J=1}^{2} \alpha_j \mu(A_j) = 1 \cdot \mu(A) + 0 \cdot \mu(\Omega \backslash A) = \mu(A)$. ■

Beispiel M.21.2.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und sei μ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\int_\Omega u \, d\mu = 0$.*

Beispiel M.21.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $\omega \in \Omega$. Es bezzeichne $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das Dirac-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitmasse in ω. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\int_\Omega u d\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = u(\omega)$.*

Satz M.21.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

a) Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann gelten $\alpha \cdot u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_\Omega \alpha \cdot u \, \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int\limits_\Omega u \, \mathrm{d}\mu$.

b) Es ist $u+v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int\limits_\Omega (u+v)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega v\,\mathrm{d}\mu$.

c) Sei $u \leq v$. Dann ist $\int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega v\,\mathrm{d}\mu$.

Folgerung M.21.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j=1}^n$ bzw. $(A_j)_{j=1}^n$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\sum\limits_{j=1}^n \alpha_j \cdot 1_{A_j} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega (\sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot 1_{A_j})\,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^n \alpha_j \cdot \mu(A_j).$$

Folgerung M.21.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gehören $\inf\{u, v\}$ und $\sup\{u, v\}$ zu $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$\int\limits_\Omega \inf\{u, v\}\,\mathrm{d}\mu \leq \inf\{\int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega v\,\mathrm{d}\mu\} \leq \sup\{\int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega v\,\mathrm{d}\mu\} \leq \int\limits_\Omega \sup\{u, v\}\,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma M.21.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu \leq \nu$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega ud\nu.$$

Lemma M.21.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\mu_n)_{n \in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(\alpha_n)_{n \in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum\limits_{n \in I} \alpha_n \mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega ud(\sum_{n \in I} \alpha_n \mu_n) = \sum_{n \in I} \alpha_n \int\limits_\Omega u\,\mathrm{d}\mu_n.$$

Satz M.21.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\tilde{\Omega} \in \mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\tilde{\Omega}$. Dann gilt

a) Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\tilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$ und setzt man $\mu_{\tilde{\Omega}} := Rstr._{\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}} \mu$, so ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$ ein Maß auf $(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$.

b) Sei $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und sei $f_{\tilde{\Omega}} := Rstr._{\tilde{\Omega}} f$. Dann gelten $1_{\tilde{\Omega}} \cdot f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, $f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{E}(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$ sowie

$$\int\limits_\Omega 1_{\tilde{\Omega}} \cdot f\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\tilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}}\,\mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}.$$

M.21.3. Das Integral nichtnegativer meßbarer Funktionen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann besteht das Ziel dieses Abschnitts darin, das μ-Integral auf Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, fA)$ auszudehnen. Hierbei werden wir wesentlich von der in Satz M.18.1 erhaltenen Darstellung einer Funktion $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, fA)$ als Supremum einer monoton wachsenden Folge von Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ Gebrauch machen. Unser Vorgehen wird maßgeblich durch folgendes Resultat bestimmt

Lemma M.21.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und eine Funktion $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ derart gewählt, dass $u \leq \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} u \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ gibt es nach Bemerkung M.18.4 dann ein $k \in \mathbb{N}$ sowie Zahlen

$$\alpha_1, ..., \alpha_k \in [0, +\infty) \tag{1}$$

und Mengen

$$A_1, ..., A_k \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

mit

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \cdot 1_{A_j}. \tag{3}$$

Wegen (1)-(3) liefert Folgerung M.21.2.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u \,\mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j). \tag{4}$$

Sei

$$\alpha \in (0, 1). \tag{5}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Dann wird definiert

$$B_n := \{u_n \geq \alpha u\}. \tag{7}$$

Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und (5) liefert Teil (a) von Lemma M.18.2 dann

$$\alpha u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{8}$$

Wegen $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, $u_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und (8) gehören u_n und die B_n zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (7) mittels Folgerung M.17.1 dann

$$B_n \in \mathfrak{A}. \tag{9}$$

Wegen (9) liefert Bemerkung M.18.3 dann

$$1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{10}$$

Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und (10) liefert Teil (c) von Lemma M.18.2 dann

$$u \cdot 1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{11}$$

Wegen (11) und (5) liefert Teil (a) von Satz M.21.2.1 nun

$$\alpha u 1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{12}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} \alpha u 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_{\Omega} u 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu. \tag{13}$$

Aus (7) und der Nichtnegatität von u_n folgt die Ungleichung

$$u_n \geq \alpha u 1_{B_n}. \tag{14}$$

Wegen $u_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, (12) und (14) liefert Teil (c) von Satz M.21.2.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u_n \, \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{\Omega} \alpha u 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt wegen (13) dann

$$\int\limits_{\Omega} u_n \, \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int\limits_{\Omega} u 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu. \tag{15}$$

Unter Verwendung von (3) sowie Teil (c) von Bemerkung M.18.2 ergibt sich

$$u \cdot 1_{B_n} \overset{(3)}{=} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j} \cdot 1_{B_n} = \sum_{j=1}^{k} (\alpha_j 1_{A_j} 1_{B_n}) = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n}. \tag{16}$$

Sei

$$j \in \{1, ..., k\}. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt bei Beachtung von (17), (2) und (9) mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann

$$A_j \cap B_n \in \mathfrak{A}. \tag{18}$$

Wegen $u_n \leq u_{n+1}$ folgt aus (7) dann $B_n \subseteq B_{n+1}$. Hieraus folgt

$$A_j \cap B_n \subseteq A_j \cap B_{n+1}. \tag{19}$$

Unter Beachtung von (16),(1),(17) und (18) ergibts sich mittels Folgerung M.21.2.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} (\sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n}) \, \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n). \tag{20}$$

Wir zeigen nun, dass $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega$ erfüllt ist. Es gilt

$$\Omega \backslash [\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n] = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \backslash B_n). \tag{21}$$

Sei

$$\omega \in \bigcap_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \backslash B_n). \tag{22}$$

Aus (6),(7) und (22) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ dann

$$0 \le u_n(\omega) < \alpha \cdot u(\omega). \tag{23}$$

Aus (23) und (5) ergibt sich

$$u(\omega) > 0. \tag{24}$$

Unter Beachtung von (23), (5) und (24) folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(\omega) \le \alpha u(\omega) < u(\omega),$$

was im Widerspruch zu Voraussetzung $u \le \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n$ stünde. Somit ist $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} (\Omega \backslash B_n) = \emptyset$, also wegen (21) dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega. \tag{25}$$

Wegen (25) gilt dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_j \cap B_n) = A_j \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = A_j \cap \Omega = A_j. \tag{26}$$

Wegen (6), (18), (19) und (26) folgt aus der Unterhalbstetigkeit von μ

$$\mu(A_j) = \mu(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (A_j \cap B_n)) = \lim_{n\to\infty} \mu(A_j \cap B_n). \tag{27}$$

v32m
27.10.2009

Unter Verwendung von (4), (17), (27) und (20) folgt nun

$$\begin{aligned} \int_\Omega u \, \mathrm{d}\mu &\overset{(4)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j) \overset{(17),(27)}{=} \sum_{j=1}^n \alpha_j [\lim_{n\to\infty} \mu(A_j \cap B_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \overset{(20)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u \cdot 1_{B_n} \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{28}$$

Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, liefert Teil (c) von Satz M.21.2.1, dass $(\int\limits_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathbb{R}$ ist. Somit gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{29}$$

Unter Beachtung von (29), (6), (15) und (28) folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(29)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(6),(15)}{\geq} \lim_{n\to\infty} [\alpha \cdot \int\limits_\Omega u \cdot 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu]$$
$$= \alpha \cdot [\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u \cdot 1_{B_n} \,\mathrm{d}\mu] = \alpha \cdot \int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt bei Beachtung von (4) dann

$$\int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}\mu = \lim_{\alpha\to 1-0} [\alpha \cdot \int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}\mu] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Satz M.21.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Dann gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

$$u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \tag{1}$$

und

$$v_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl der Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich bei Beachtung von (1) bzw. (2) mittels Lemma M.21.3.1 dann:

$$\int\limits_\Omega u_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu \text{ bzw. } \int\limits_\Omega v_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt nun:

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu \text{ bzw. } \sup_{k\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_k \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Es ist also $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu$. ■

Folgerung M.21.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = u$. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $v_n := u$. Dann ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = u$. Hieraus folgt dann $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n$ also mittels Satz M.21.3.1 dann $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n = \int\limits_\Omega \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega u \,\mathrm{d}\mu$. ■

Satz M.21.3.1 und Folgerung M.21.3.1 führen uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.21.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nicht trivialer Maßraum. Weiter seien $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach Satz M.18.1 existierende monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Dann heißt die in $[0, \infty]$ gelegene Zahl

$$\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu$$

das **μ-Integral** von f.

Bemerkung M.21.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nicht trivialer Maßraum. Weiter seien $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Dann ist die Folge $(\int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent im eigentlichen oder uneigentlichen Sinn und es gilt:

$$\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen Teil (c) von Satz M.21.2.1 ist die Folge $(\int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Hieraus folgen mit Definition M.21.3.1 dann alle Behauptungen. ■

Beispiel M.21.3.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und sein μ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\int\limits_\Omega f \, d\mu = 0$.*

Beispiel M.21.3.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Es bezeichne $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das Dirac-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\int\limits_\Omega f d\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = f(\omega)$.*

Satz M.21.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

(a) Sei $\alpha \in [0, \infty]$. Dann gelten $\alpha \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_\Omega \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

(b) Es gelten $f+g \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Sowie $\int\limits_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$.

(c) Sei $f \leq g$. Dann gilt $\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega g\,\mathrm{d}\mu$.

(d) Seien $\alpha_1,\alpha_2 \in [0,\infty]$ sowie $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ derart beschaffen, dass die Ungleichung $\alpha_1 \cdot 1_{A_1} \leq f \leq \alpha_2 \cdot 1_{A_2}$ besteht. Dann gilt $\alpha_1 \cdot \mu(A_1) \leq \int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu \leq \alpha_2 \cdot \mu(A_2)$.

Folgerung M.21.3.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und bezeichne f die auf Ω konstante Funktion mit Wert ∞. Dann gelten $f \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \begin{cases} \quad 0 \ , & \text{falls } \mu(\Omega)=0 \\ +\infty, & \text{falls } \mu(\Omega) \in (0,\infty]. \end{cases}$$

Folgerung M.21.3.3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$. Dann gelten $\{|f|, f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega f^+\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega f^-\,\mathrm{d}\mu$.

Das nachfolgende Resultat, welches auf Beppo Levi (1875-1961) zurückgeht, ist von fundamentaler Bedeutung für die Integrationstheorie.

Satz M.21.3.3 (Satz von der monotonen Konvergenz)**.** Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gelten $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega (\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n)\,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(ii) Es ist $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(iii) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \leq f_n$.

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

Wegen $f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ gibt es nach Satz M.18.1 dann eine monoton wachsende Folge $(u_{kn})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} u_{kn} = f_n. \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dann wird definiert:

$$v_k := \sup_{n \in \{1,\ldots,k\}} u_{kn}. \tag{4}$$

Da $(u_{kn})_{n=1}^k$ eine Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt wegen (4) mittels Teil (a) von Lemma M.18.2 dann

$$v_k \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Da für $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion $u_{kn} \leq u_{k+1,n}$ erfüllt ist, folgt aus (4) dann

$$v_k = \sup_{n \in \{1,\ldots,k\}} u_{kn} \leq \sup_{n \in \{1,\ldots,k+1\}} u_{k+1,n} = v_{k+1}. \tag{6}$$

Sei

$$\omega \in \Omega. \tag{7}$$

Wegen (4) gibt es dann ein $n_\omega \in \{1, \ldots, k\}$ mit

$$v_k(\omega) = u_{kn_\omega}(\omega). \tag{8}$$

Wegen (2) gilt

$$u_{kn_\omega}(\omega) \leq f_{n_\omega}(\omega). \tag{9}$$

Da die Folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und da $n_\omega \in \{1, \ldots, k\}$ erfüllt ist, gilt dann

$$f_{n_\omega}(\omega) \leq f_k(\omega). \tag{10}$$

Aus (8) bis (10) folgt nun

$$v_k(\omega) \leq f_k(\omega). \tag{11}$$

Wegen (7) und (11) gilt dann

$$\sup_{k \in \mathbb{N}} v_k \leq \sup_{k \in \mathbb{N}} f_k. \tag{12}$$

Aus (4) folgt für

$$n \in \{1, \ldots, k\} \tag{13}$$

weiterhin

$$u_{kn} \leq v_k. \tag{14}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Aus (13) bis (15) folgt dann

$$\sup_{k \in \{n,n+1,\ldots\}} u_{kn} \leq \sup_{k \in \{n,n+1,\ldots\}} v_k. \tag{16}$$

Da die Folge $(u_{kn})_{k \in \mathbb{N}}$ nach Konstruktion monoton wachsend ist, gilt unter Beachtung von (2) dann

$$\sup_{k \in \{n,n+1,\ldots\}} u_{kn} = \sup_{k \in \mathbb{N}} u_{kn} \overset{(2)}{=} f_n. \tag{17}$$

Wegen (6) gilt

$$\sup_{k\in\{n,n+1,\ldots\}} v_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} v_k. \tag{18}$$

Aus (16) bis (18) folgt nun

$$f_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_k. \tag{19}$$

Wegen (15) und (19) gilt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_k. \tag{20}$$

Aus (12) und (20) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_k. \tag{21}$$

Wegen (3), (5), (6), (11), (21) wird dann via (4) eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ definiert, welche die Eigenschaften (i) bis (iii) besitzt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ ist liefert Lemma M.18.4 dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{22}$$

Wegen (22), (i) und (ii) ergibt sich mittels Definition M.21.3.1 dann

$$\int\limits_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu \tag{23}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen (iii) mittels Teil (c) von Satz M.21.3.2 nun $\int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu$. Hieraus ergibt sich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega v_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt nun

$$\int\limits_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{25}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt andererseits $f_n \leq \sup\limits_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$ bei Beachtung von $f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ und (22) mittels Teil (c) von Satz M.21.3.2 dann

$$\int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

Somit ist

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Folgerung M.21.3.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$\int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_k \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

$$\text{Sei } n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann wird definiert

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{2}$$

Da $(f_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt aus (2) mittels Teil (b) von Satz M.21.3.2 dann zum einen

$$s_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}), \tag{3}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} s_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} f_k \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz M.21.3.2}}{=} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_k \, \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ einen Folge aus $A(\Omega, [0, \infty])$ ist, folgt aus (1) und (2) dann

$$s_n \leq s_{n+1}. \tag{5}$$

Wegen (1), (3) und (5) liefert der Satz M.21.3.3 dann zum einen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{6}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Wegen (1), (5) und (2) gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{8}$$

Wegen (1) und (5) ergibt sich mittels Teil (c) von Satz M.21.3.2, dass $\left(\int\limits_{\Omega} s_n \, \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $[0, \infty]$ ist. Hieraus folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} s_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Wegen (6) und (8) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}).$$

Die Kombination von (8), (7), (9), (1) und (4) erbringt weiterhin

$$\int_\Omega \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} f_k \,\mathrm{d}\mu \overset{(8)}{=} \int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(7)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(9)}{=} \lim_{n\to\infty}\int_\Omega s_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(1),(4)}{=} \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n}\int_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu.$$

■

Unser nächstes Ziel besteht darin, ausgehend von einem nichttrivialen messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ und einem Maß μ auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ via Integration von Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ eine Familie neuer Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ zu erzeugen. v33m 02.11.2009

Satz M.21.3.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Es sei $\mu_f : \mathfrak{A} \to [0, +\infty]$ für $A \in \mathfrak{A}$ (unter Beachtung der nach Teil (a) von Bemerkung M.18.11 gültigen Beziehung $1_A \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$) definiert gemäß: $\mu_f(A) := \int_\Omega 1_A \cdot f \,\mathrm{d}\mu$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu_f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es ist $\mu_f(\Omega) = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:
  (i) Es ist $\mu_f \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$.
  (ii) Es ist $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$.

(d) Sei $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:
  (d1) Es gelten $g \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(\mu_f)_g = \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu_f$.
  (d2) Es gilt $(\mu_f)_g = \mu_{g\cdot f}$.

(e) Sei $B \in \mathfrak{A}$. Dann ist $1_B \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und für $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu_{1_B}(A) = \mu(A \cap B)$.

(f) Es gelten $\Omega \in \mathfrak{A}$ sowie $\mu_{1_\Omega} = \mu$.

(g) Sei sogar $f \in A(\Omega, (0, +\infty))$. Dann gelten $\frac{1}{f} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(\mu_f)_{\frac{1}{f}} = \mu$.

Folgerung M.21.3.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(A_k)_{k\in I}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Es ist $(1_{A_k} \cdot f)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, $\sum\limits_{k\in I}(1_{A_k} \cdot f) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt:

$$\int_\Omega \left[\sum_{k\in I}(1_{A_k}\cdot f)\right] \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in I}\int_\Omega (1_{A_k}\cdot f)\,\mathrm{d}\mu$$

(b) Es sei $\bigcup\limits_{k\in I} A_k = \Omega$. Dann gilt $\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \sum\limits_{k\in I} \int\limits_\Omega 1_{A_k} \cdot f \,\mathrm{d}\mu$.

Folgerung M.21.3.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie f eine Funktion aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap A(\Omega[0, +\infty))$ mit $\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$. Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $[0, +\infty)$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$. Dann ist $(1_{\{f\geq\alpha_n\}} \cdot f)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gelte $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega 1_{\{f\geq\alpha_n\}} f \,\mathrm{d}\mu = 0$.

Folgerung M.21.3.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie f eine Funktion aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$mit $\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \in (0, +\infty)$. Es sei $g := \frac{1}{\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu} f$. Dann ist $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\mu_g \in \mathcal{M}^1_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

Satz M.21.3.4 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.21.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt ν ein **μ-stetiges** Maß, falls es ein $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$ gibt. Jedes solche f heißt dann eine **Dichteversion** von ν bezüglich μ.

Satz M.21.3.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty]$. Dann ist $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$\mu_{\sum\limits_{k\in I} \alpha_k f_k} = \sum_{k\in I} \alpha_k \mu_{f_k}.$$

Beispiel M.21.3.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und und A eine Menge aus $\mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Es bezeichne ν_A die (in Definition M.6.1) eingeführte μ-Gleichverteilung auf $\mathfrak{A}$. Weiter sei $f := \frac{1}{\mu(A)} 1_A$. Dann gelten $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\nu_A = \mu_f$.*

Satz M.21.3.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu \leq \nu$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \, d\nu.$$

Satz M.21.3.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\mu_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int_\Omega f d(\sum_{k\in I} \alpha_k \mu_k) = \sum_{k\in I} \alpha_k \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu_k.$$

Beispiel M.21.3.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, sowie $(\omega_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ Folgen aus Ω bzw. $[0, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum\limits_{k\in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_\Omega f \, d(\sum\limits_{k\in I} \alpha_k \epsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}) = \sum\limits_{k\in I} \alpha_k f(\omega_k)$.*

Beweis. *Kombiniere Satz M.21.3.7 und Beispiel M.21.3.2.* ■

Lemma M.21.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, sowie $\tilde{\Omega} \in (\mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\})$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\tilde{\Omega}$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $f_{\tilde{\Omega}} := \text{Rstr.}_{\tilde{\Omega}} f$. Dann gilt:

(a) Es gelten $1_{\tilde{\Omega}} \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, sowie $f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{E}^*(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$.

(b) Es sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n = f$. Dann gilt:

  (b1) Es ist $(1_{\tilde{\Omega}} a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} 1_{\tilde{\Omega}} a_n = 1_{\tilde{\Omega}} f$.

  (b2) Für $n \in \mathbb{N}$ sei $a_{n,\tilde{\Omega}} := \text{Rstr.}_{\tilde{\Omega}} a_n$. Dann ist $(a_{n,\tilde{\Omega}})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} a_{n,\tilde{\Omega}} = f_{\tilde{\Omega}}$.

Satz M.21.3.8. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\tilde{\Omega} \in \mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in Ω. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\tilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$ und setzt man $\mu_{\tilde{\Omega}} := \text{Rstr.}_{\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}} \mu$, so ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$ ein Maß auf $(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$.

(b) Seien $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und $f_{\tilde{\Omega}} := \text{Rstr.}_{\tilde{\Omega}} f$. Dann gelten: $1_\Omega f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}), f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{E}^*(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$ sowie $\int\limits_{\Omega} 1_{\tilde{\Omega}} f \, \mathrm{d}\mu = \int_{\tilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}} \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}$.

(c) Sei $g \in \mathcal{E}^*(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$. Im Fall $\tilde{\Omega} = \Omega$, sei $G := g$ und im Fall $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sei $G : \Omega \to [0, +\infty]$ definiert gemäß: $G(\omega) := \begin{cases} g(\omega) & \text{, falls } \omega \in \tilde{\Omega} \\ 0 & \text{, falls } \omega \in \Omega \backslash \tilde{\Omega}. \end{cases}$
Dann gelten $G \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_{\Omega} G \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\tilde{\Omega}} g \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}$.

M.21.4. Einige Ungleichungen von Tschebyschev und Markov

Wir betrachten in diesem Abschnitt folgende Situation: Gegeben seien ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu), K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$, sowie eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$. Dann sind wir daran interessiert, für $\alpha \in (0, +\infty)$ die Größe $\mu(\{|f| \geq \alpha\})$ geeignet abzuschätzen. Wir studieren diese Aufgabenstellung unter Zugrundelegung geeigneter Intergrierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion f. Diese Problemstellung wurde vor dem Hintergrund der Anwendung in der W.Theorie bereits im 19. Jahrhundert intensiv in der in St. Petersburg wirkenden Schule von P.L.Tschebyschev (1821-1884) untersucht. Neben Tschebyschev selbst erziehlte insbesondere dessen Schüler A.A.Markov (1856-1922) bedeutende Resultate zur genannten Problematik. Wir studieren in diesem Abschnitt den Ideenkreis der Ungleichungen vom Tschebyschev-Markov-Typ und geben erste Anwendungen dieser Ungleichungen. Vorrausschauend sei erwähnt, dass insbesondere in der W.Theorie die ausergewöhnliche Wirksamkeit dieser Ungleichungen zum Tragen kommen wird.

Anmerkung: Da diese Ungleichungen sehr wichtig sind, sind sie oft Bestandteil von Prüfungen.

Satz M.21.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$. Die Funktion $\phi : [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ sei monoton wachsend und es gelte $\phi^{-1}((0, +\infty)) \neq \emptyset$. Sei $\alpha \in \phi^{-1}((0, +\infty))$. Dann gelten $\{|f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}, \phi \circ |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, sowie

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\phi(\alpha)} \int\limits_{\Omega} (\phi \circ |f|) \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ gilt nach Bemerkung M.17.9 dann

$$\{|f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Da ϕ monoton wachsend ist liefert Satz M.17.15 dann $\phi \in \mathcal{M}([0, +\infty], \overline{\mathcal{B}}_1 \cap [0, +\infty], \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $\phi \in A([0, +\infty], [0, +\infty])$ dann

$$\phi \in \mathcal{E}^*([0, +\infty], \overline{\mathcal{B}}_1 \cap [0, +\infty]). \tag{2}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ und der nach Bemerkung M.17.4 gültigen Inklusion $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ liefert Bemerkung M.18.10 dann die $\mathfrak{A}$-$(\overline{\mathcal{B}}_1 \cap [0, +\infty])$-Meßbarkeit von $|f|$. Hieraus sowie aus der wegen (2) vorliegenden $(\overline{\mathcal{B}}_1 \cap [0, +\infty])$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-Meßbarkeit von ϕ folgt mittel Satz M.15.3 die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathcal{B}}_1$-Meßbarkeit von $\phi \circ |f|$. Hieraus folgt wegen $\phi \circ |f| \in A(\Omega, [0, +\infty])$ dann

$$\phi \circ |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Weil ϕ Werte in $[0, +\infty]$ annimmt, gilt dies auch für $\phi \circ |f|$. Somit ist

$$\phi \circ |f| \geq 1_{\{|f| \geq \alpha\}}(\phi \circ |f|). \tag{4}$$

Da ϕ monotn wächst, gilt.

$$1_{\{|f| \geq \alpha\}}(\phi \circ |f|) \geq [\phi(\alpha)] 1_{\{|f| \geq \alpha\}}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann.

$$\phi \circ |f| \geq [\phi(\alpha)] 1_{\{|f| \geq \alpha\}}. \tag{6}$$

Wegen (3),(1),(6) und $\phi(\alpha) \in (0, +\infty)$ folgt mittels Teil (a) von Satz M.21.3.2 dann $\int\limits_{\Omega} (\phi \circ |f| \, \mathrm{d}\mu) \geq [\phi(\alpha)]|)[\mu(\{|f| \geq \alpha\})]$. Hieraus folgt wegen $\phi(\alpha) \in (0, +\infty)$ dann $\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{[\phi(\alpha)]} \int\limits_{\Omega} (\phi \circ |f|) \, \mathrm{d}\mu$. ■

Satz M.21.4.2 (Ungleichung von Tschebyschev). Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$. Weiter seien $\alpha, p \in (0, +\infty)$. Dann gelten $\{|f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}, |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^P} \int\limits_{\Omega} |f|^p \, \mathrm{d}\mu$$

Beweis. Sei $\phi_p [0, +\infty] \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $x \mapsto x^p$. Wegen der Bemerkung M.17.8 ist ϕ_p dann monoton wachsend und zudem gilt $\phi_p^{-1}((0, +\infty)) = (0, +\infty)$. Hieraus folgen wegen $|f|^p = \phi_p \circ f$ folgen mittels Satz M.21.4.1 dann alle Behauptungen. ■ v34m 03.11.2009

Folgerung M.21.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $K \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ und $p \in (0, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ so gewählt, daß $\int_\Omega |f|^p \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$ erfülllt ist. Dann gilt $\lim_{\alpha \to +\infty} \mu(\{|f| \geq \alpha\}) = 0$.

Satz M.21.4.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := |f|^{-1}([k, k+1))$. Dann ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt $\sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mu(A_k) \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mu(A_k)$.

b) Sei μ endlich. Dann gilt:

(b1) Es ist $(\{|f| \leq k\})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\{|f| \leq k\}) = \sum_{k \in \mathbb{N}} k \cdot \mu(A_k)$$

, sowie

$$\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\{|f| \leq k\}) \leq \int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\{|f| \leq k\}).$$

(b2) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es ist $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$.

(ii) Es ist $\sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\{|f| \leq k\}) \in [0, +\infty)$.

(b3) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\lim_{n \to \infty} n \cdot \mu(\{|f| \geq n\}) = 0$.

(b4) Sei $f^{-1}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}) = \emptyset$. Dann gilt $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu = \sum_{k \in \mathbb{N}} \mu(\{|f| \leq k\})$.

M.21.5. Integration numerischer Funktionen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann besteht das Hauptziel dieses Abschnitts darin, den bisher für Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ erklärten Integralbegriff auf eine geeignete Teilklasse von $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ auszudehnen. Wegen Bemerkung M.18.9 gilt für $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ dann $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hierdurch werden wir auf folgende Begriffsbildung geführt.

Definition M.21.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann heißt f **quasi-μ-intergrierbar** bzw. **μ-integrierbar**, falls $\inf\{\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu\} \in [0, +\infty)$. bzw. $\sup\{\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu\} \in [0, +\infty)$ gilt. In beiden Fällen heißt dann die Zahl

$$\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu := \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu$$

das **μ-Integral** von f. Für $K \in \{\bar{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ bezeichnen $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$.

Bemerkung M.21.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$.
Beweis. Dies folgt aus Definition M.21.5.1 und der nach Bemerkung M.17.4 gültigen Beziehung $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$. ■

Bemerkung M.21.5.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann ist f quasi-μ-integrierbar.

Beispiel M.21.5.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und bezeichne μ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $\int_\Omega f \, d\mu = 0$.*

Beispiel M.21.5.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und sei $\omega \in \Omega$. Es bezeichne $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das Dirac-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:*

a) *Es ist f quasi-$\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$-integrierbar und es gilt $\int_\Omega f \, d\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = f(\omega)$.*

b) *Folgende Aussagen sind äquivalent*
   (i) *f ist $\epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$-integrierbar.*
   (ii) *Es ist $f(\omega) \in \mathbb{R}$.*

Bemerkung M.21.5.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Sei $f \in A(\Omega, [0, +\infty])$, bzw. $f \in A(\Omega, [-\infty, 0])$. Dann ist f quasi-$\mu$-integrierbar und es gilt $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty]$, bzw. $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in [-\infty, 0]$. Hierbei ist f genau dann μ-integrierbar, wenn $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$, bzw. $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in (-\infty, 0]$.

b) Die Funktion $|f|$ ist quasi-μ-integrierbar.

c) Sei f quasi-μ-integrierbar. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) f ist μ-integrierbar.
   (ii) Es ist $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$.

Bemerkung M.21.5.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $u, v \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $u + v \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.
Beweis. Kombiniere Teil (b) von Satz M.21.3.2 mit Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3. ■

Satz M.21.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Folgende Aussagen sind äquivalent
   (i) f ist μ-integrierbar.
   (ii) f^+ und f^- sind μ-integrierbar.

(iii) Es gibt nichtnegative μ-integrierbare Funktionen u, v auf Ω mit $f = u - v$.

(iv) Es gibt eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion g auf Ω mit $|f| \leq g$.

(v) $|f|$ ist μ-integrierbar.

b) Sei (i) erfüllt. Weiter seien u und v nichtnegative μ-integrierbare Funktionen auf Ω mit $f = u - v$. Dann gilt $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mu$.

Beweis.

a)

„$(i) \Rightarrow (ii)$“ Aus (i) folgt

$$\sup\{\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu\} \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Wegen (i) und Bemerkung M.21.5.2 ist f quasi-μ-integrierbar. Es gilt also

$$\inf\{\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu\} \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty) \tag{3}$$

und

$$\int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Wegen $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, [0, +\infty])$ sowie (3) bzw. (4) liefert Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 dann die μ-Integrierbarkeit von f^+ und f^-. Es gilt also (ii).

„$(ii) \Rightarrow (iii)$“ Wählt man $u := f^+$ und $v := f^-$, sow gilt $f = u - v$ und es sind u und v nichtnegativ sowie wegen (ii) auch μ-integrierbar. Es gilt also (iii)

„$(iii) \Rightarrow (iv)$“ Da nach (iii) nun $f = u - v$ erfüllt ist, sowie u und v nichtnegativ sind gelten $f = u - v \leq u \leq u + v$ und $-f = -(u - v) \leq v \leq u + v$. Hieraus folgt nun

$$|f| = \sup\{f, -f\} \leq u + v. \tag{5}$$

Da u und v nach (iii) nichtnegativ und μ-integrierbar sind, ist $u + v$ nach Bemerkung M.21.5.4 dann eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion. Hieraus und aus (5) folgt die Eigenschaft (iv).

„$(iv) \Rightarrow (v)$“ Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ gilt nach Bemerkung M.18.9 dann

$$|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{6}$$

Nach Wahl von g gilt

$$g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Wegen (iv) gilt

$$|f| \leq g. \tag{8}$$

Wegen (6)–(8) liefert Teil (c) von Satz M.21.3.2 dann

$$0 \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Da g nach (iv) nichtnegativ und μ-integrierbar ist, liefert Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 dann

$$\int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty). \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann $\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt bei Beachtung der Nichtnegativität von $|f|$ mittels Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 die μ-Integrierbarkeit voon $|f|$. Es gilt also (v).

„$(v) \Rightarrow (i)$“ Da $|f|$ nichtnegativ ist, folgt wegen (v) mittels Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 dann

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty). \tag{11}$$

Nach Bemerkung M.18.9 gelten

$$\{f^+, f^-, |f|\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{12}$$

Weiterhin gelten

$$f^+ \leq f^+ + f^- = |f| \tag{13}$$

und

$$f^- \leq f^+ + f^- = |f|. \tag{14}$$

Wegen (12) sowie (13) bzw. (14) liefert Teil (c) von Satz M.21.3.2 dann

$$0 \leq \int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \tag{15}$$

bzw.

$$0 \leq \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

Wegen (11),(15) und (16) gilt dann $\sup\{\int_\Omega f^+ \, \mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \, \mathrm{d}\mu\} \in [0, +\infty)$. Somit ist f dann μ-integrierbar. Es gilt also (i).

b) Nach Voraussetzung gilt $u - v = f = f^+ - f^-$. Hieraus folgt

$$u + f^- = v + f^+ \tag{17}$$

Da die Funktionen u, v, f^- und f^+ nach Voraussetzung sowie wegen (a) sämtlich nichnegativ und μ-integrierbar sind folgt wegen (17) mittels Teil (b) von Satz M.21.3.2 dann

$$\int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (u + f^-) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega (v + f^+) \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu \quad (18)$$

sowie wegen Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 weiterhin

$$\left\{ \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu \right\} \in [0, +\infty). \quad (19)$$

Aus (18) und (19) folgt dann $\int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f^- \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\mu - \int_\Omega v \,\mathrm{d}\mu$.

■

Folgerung M.21.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

a) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

b) Es ist $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Beweis. Kombiniere Satz M.21.5.1 und Bemerkung M.21.5.1. ■

Satz M.21.5.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ so gewählt, daß $f + g$ definiert ist. Dann gilt $f + g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $\int_\Omega f + g \,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \,\mathrm{d}\mu$.

Bemerkung M.21.5.5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \bar{\mathbb{R}}$. Dann gelten $(a \cdot b)^+ = \begin{cases} ab^+ , & \text{falls } a \in [0, +\infty) \\ |a| b^+, & \text{falls } a \in (-\infty, 0) \end{cases}$. sowie $(ab)^- = \begin{cases} ab^- , & \text{falls } a \in [0, +\infty) \\ |a| b^-, & \text{falls } a \in (-\infty, 0) \end{cases}$.

Satz M.21.5.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien f eine quasi-μ-integrierbare numerische Funktion auf Ω sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

a) Es ist $\alpha \cdot f$ quasi-μ-integrierbar und es gilt $\int_\Omega \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

b) Sei f μ-integrierbar. Dann ist αf μ-integrierbar und es gilt $\int_\Omega \alpha f \,\mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \,\mathrm{d}\mu$.

c) Sei $\alpha \neq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

   (i) f ist μ-integrierbar.

   (ii) αf ist μ-integrierbar.

Bemerkung M.21.5.6. Seien $a, b \in \bar{\mathbb{R}}$ so gewählt, daß $a \leq b$ erfüllt ist. Dann gelten $a^+ \leq b^+$ und $a^- \geq b^-$.

Satz M.21.5.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt

a) Seien f und g quasi-μ-integrierbare Funktionen auf Ω mit $f \leq g$. Dann gilt $\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$.

b) Sei f eine quasi-μ-integrierbare numerische Funktion. Dann gilt $|\int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu| \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu$.

Beweis. Idee: Beachte Bemerkung M.21.5.6 und verwende Teil (c) von Satz M.21.3.2. ■

Satz M.21.5.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt

a) Sei $f \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

   (i) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

   (ii) Es gilt $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

   (iii) Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es gibt eine nichtnegative μ-integrierbare numerische Funktion g auf Ω mit $|f| \leq g$.

   (iv) Es gelten $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

b) Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

   (v) Es ist $1_A \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

   (vi) Es ist $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

c) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dann gehören auch $\inf\{f, g\}$ und $\sup\{f, g\}$ zu $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

d) Seien $f, g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\alpha f + \beta g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie $\int_\Omega (\alpha f + \beta g) \, \mathrm{d}\mu = \alpha \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu + \beta \int_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$.

e) Es ist $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

v35m 09.11.2009

Das nachfolgende Resultat knüpft an Satz M.21.3.4 an. Dort hatten wir im Fall eines nichttrivialen Maßraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Maß $\mu_f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ konstruiert. Wir studieren nun die μ_f-Integrierbarkeit von Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

Satz M.21.5.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) g ist quasi-μ_f-integrierbar.

   (ii) $g \cdot f$ ist quasi-μ-integrierbar.

b) folgende Aussagen sind äquivalent:

   (iii) g ist μ_f-integrierbar.

   (iv) $g \cdot f$ ist μ-integrierbar.

c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu_f = \int\limits_\Omega g \cdot f \, \mathrm{d}\mu$.

Satz M.21.5.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter seien $(\mu_n)_{n\in I}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty)$. Es sei $\mu := \sum\limits_{n\in I} \alpha_n \mu_n$. Dann gilt

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \cap [\bigcap\limits_{n\in I} \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; \overline{\mathbb{R}})]$. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in I} \alpha_n \cdot \int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu_n.$$

Satz M.21.5.8. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty)$. Weiter sei $\mu := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \mu_n$. Dann gilt

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

(b1) folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot \int\limits_{\Omega} |f| \,\mathrm{d}\mu_n < +\infty$.

(b2) Sei (i) erfüllt und sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $(0, +\infty)$. Dann ist $f \in \bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; \overline{\mathbb{R}})$ und es gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot \int\limits_{\Omega} f \,\mathrm{d}\mu_n.$$

Beispiel M.21.5.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus Ω bzw. $[0, +\infty)$. Es sei $\mu := \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot \epsilon_{\omega_n, \mathfrak{A}}$. Dann gilt*

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

(b1) folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot |f(\omega_n)| < \infty$.

(b2) Sei (i) erfüllt und sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $(0, +\infty)$. Dann ist $(f(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und es gilt $\int\limits_{\Omega} f \,d\mu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n \cdot f(\omega_n)$.

Beweis. *Kombiniere die Sätze M.21.5.7 und M.21.5.8 und Beispiel M.21.5.2.* ■

Bemerkung M.21.5.7. Es bezeichne ν das Zählmaß auf $(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. Weiter sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Es sei $f : \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $n \mapsto a_n$. Dann gilt

a) Es ist $f \in \mathcal{M}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}); \mathbb{R})$.

b) folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \nu; \mathbb{R})$

  (ii) Es ist $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} |a_n| < +\infty$.

c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\int\limits_{\mathbb{N}} f d\nu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} a_n$.

Beweis. Wegen $\nu = \sum\limits_{n\in\mathbb{N}} \epsilon_{n,\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ folgt alles aus Beispiel M.21.5.3. ■

Satz M.21.5.9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien $s \in \mathbb{N}$ sowie $(\mu_n)_{n=1}^s$ bzw. $(\alpha_n)_{n=1}^s$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $(0, +\infty)$. Dann gilt:

a) Es ist $\sum\limits_{n=1}^s \alpha_n\mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Dann gilt:

  (b1) Es ist $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \sum\limits_{n=1}^s \alpha_n\mu_n; K) = \bigcap\limits_{n=1}^s \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; K)$.

  (b2) Sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \sum\limits_{n=1}^s \alpha_n\mu_n; K)$. Dann gelten $f \in \bigcap\limits_{n=1}^s \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; K)$ sowie $\int\limits_{\Omega} f d(\sum\limits_{n=1}^s \alpha_n\mu_n) = \sum\limits_{n=1}^s \alpha_n \cdot \int\limits_{\Omega} f \, \mathrm{d}\mu_n$.

Beispiel M.21.5.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien $s \in \mathbb{N}$, $(\omega_n)_{n=1}^s$ bzw. $(\alpha_n)_{n=1}^s$ Folgen aus Ω bzw. $(0, +\infty)$. Es sei $\mu := \sum\limits_{n=1}^s \alpha_n\epsilon_{\omega_n,\mathfrak{A}}$. Dann gilt*

a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

  (b1) folgende Aussagen sind äquivalent

    (i) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

    (ii) Es ist $(f(\omega_n))_{n=1}^s$ eine Folge aus $\mathbb{R}$.

c) Sei (i) erfüllt. Dann ist $(f(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und es gilt $\int\limits_{\Omega} f \, d\mu = \sum\limits_{n=1}^s \alpha_n \cdot f(\omega_n)$.

d) Es gilt $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Bemerkung M.21.5.8. Seien $s \in \mathbb{N}$ und $I_s := \{1, ..., s\}$. Es bezeichne ν das Zählmaß auf $(I_s, \mathfrak{P}(I_s))$. Dann gilt:

a) Es ist $\mathcal{L}^1(I_s, \mathfrak{P}(I_s), \nu; \mathbb{R}) = A(I_s, \mathbb{R})$.

b) Sei $(a_n)_{n \in I_S}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und sei $f : I_s \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $n \mapsto a_n$. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^1(I_s, \mathfrak{P}(I_s), \nu; \mathbb{R})$ und $\int\limits_\Omega f d\nu = \sum\limits_{n=1}^{s} a_n$.

Satz M.21.5.10. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\tilde{\Omega} \in \mathfrak{A} \backslash \{\emptyset\}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in Ω. Dann gilt:

a) Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\tilde{\Omega}$ und setzt man $\mu_{\tilde{\Omega}} := Rstr._{\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}} \mu$, so ist $\tilde{\mu}$ ein Maß auf $(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}})$.

b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und sei $f_{\tilde{\Omega}} := Rstr._{\tilde{\Omega}} f$. dann gilt

(b1) Es gelten $1_{\tilde{\Omega}} \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{M}(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}; \overline{\mathbb{R}})$.

(b2) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $1_{\tilde{\Omega}} \cdot f$ ist quasi-μ-integrierbar.

(ii) $f_{\tilde{\Omega}}$ ist quasi-$\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.

(b3) Folgende Aussagen sind äquivalent

(iii) $1_{\tilde{\Omega}} \cdot f$ ist μ-integrierbar.

(iv) $f_{\tilde{\Omega}}$ ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.

(b4) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\int\limits_\Omega 1_{\tilde{\Omega}} \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\tilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}} \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}$.

c) Sei $g \in \mathcal{M}(\tilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}; \overline{\mathbb{R}})$. Im Fall $\tilde{\Omega} = \Omega$ sei $G := g$ und im Fall $\tilde{\Omega} \subset \Omega$ sei $G : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ definiert gemäß $G(\omega) := \begin{cases} g(\omega) & , \text{falls } \omega \in \tilde{\Omega} \\ 0 & , \text{falls } \omega \in \Omega \backslash \tilde{\Omega}. \end{cases}$

Dann gilt:

(c1) Es ist $G \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

(c2) folgende Aussagen sind äquivalent

(i) G ist quasi-μ-integrierbar.

(ii) g ist quasi-$\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.

(c3) folgende Aussagen sind äquivalent

(iii) G ist μ-integrierbar.

(iv) g ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.

(c4) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\int\limits_\Omega G \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\tilde{\Omega}} g \, \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}$.

M.21.6. Einige Aussagen über die Rolle der μ-Nullmengen in der Integrationstheorie

Beim weiteren Ausbau der Integrationstheorie wird das System $\mathcal{N}_\mu$ der μ-Nullmengen eine wesentliche Rolle spielen. Die folgenden Resultate geben bereits erste Aufschlüsse hierüber.

Satz M.21.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

a) Es ist $\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}$.

b) folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist $\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

   (ii) Es ist $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$.

Beweis.

a) Nach Wahl von f gilt insbesondere

$$f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Folgerung M.17.2 dann

$$\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

b) Da f nichtnegativ ist, gilt $\{f \neq 0\} = \{f > 0\}$. Hieraus folgt wegen $\{f > 0\} = \bigcup\limits_{n \in \mathbb{N}} \{f \geq \frac{1}{n}\}$ dann

$$\{f \neq 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f \geq \frac{1}{n}\}. \tag{3}$$

$$\text{Sei } n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) lielfert Satz M.17.3 dann

$$\{f \geq \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Da f nichtnegativ ist, gilt

$$\frac{1}{n} \cdot 1_{\{f \geq \frac{1}{n}\}} \leq f. \tag{6}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie (5) und (6) liefert Teil (d) von Satz M.21.3.2 dann

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \mu(\{f \geq \frac{1}{n}\}) \leq \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

„$(i) \Rightarrow (ii)$“. Wegen (i) folgt aus (4) und (7) für $n \in \mathbb{N}$ dann $\{f \geq \frac{1}{n}\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgt bei Beachtung von (3) mittels Teil (d) von Satz M.5.1 dann $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Es gilt also (ii).

„$(ii) \Rightarrow (i)$“. Sei
$$n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$
Weiter sei
$$u_n := n \cdot 1_{\{f \neq 0\}}. \tag{9}$$
Wegen (8) und (9) und (2) liefert Folgerung M.21.2.1 dann
$$u_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{10}$$
sowie $\int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu = n \cdot \mu(\{f \neq 0\})$, also wegen (ii) dann
$$\int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{11}$$
Aus (8) und (9) folgt weiterhin
$$u_n \leq u_{n+1}. \tag{12}$$
Wegen Bemerkung M.18.8 gilt $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt bei Beachtung von (8), (10) und (12), dass $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Somit erbringt die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (vgl. Satz M.21.3.3) dann
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{13}$$
und bei zusätzlicher Beachtung von (8) und (11) weiterhin
$$\int\limits_\Omega (\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n) \,\mathrm{d}\mu \overset{SM.21.3.3}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_\Omega u_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(8),(11)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} 0 = 0. \tag{14}$$
Für $\omega \in \Omega$ gilt wegen (8) und (9) nun
$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(\omega) = \begin{cases} \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} n & \text{, falls } \omega \in \{f \neq 0\} \\ \sup\limits_{n \in \mathbb{N}} 0 & \text{, falls } \omega \in \{f = 0\} \end{cases} = \begin{cases} +\infty & \text{, falls } \omega \in \{f \neq 0\} \\ 0 & \text{, falls } \omega \in \{f = 0\}. \end{cases}$$
Hieraus folgt dann
$$f \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n. \tag{15}$$
Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, (13) und (15) ergibt sich mittels Teil (c) von Satz M.21.3.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (14) dann
$$0 \leq \int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n \,\mathrm{d}\mu \overset{(14)}{=} 0.$$
Somit ist $\int\limits_\Omega f \,\mathrm{d}\mu = 0$. Es gilt also (i).

■

Folgerung M.21.6.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien f und g Funktionen aus $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, für welche $f \leq g$ und $\{f < g\} \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen Teil (d) von Satz M.21.5.5 gelten

$$g - f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$\int\limits_\Omega (g - f) \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Wegen (1) ist $g - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann $g - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $f \leq g$ dann

$$g - f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen $f \leq g$ gilt $\{g - f \neq 0\} = \{f < g\}$. Hieraus folgt wegen $\{f \leq g\} \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_\mu$ dann

$$\{g - f \neq 0\} \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_\mu. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) liefert Satz M.21.6.1 dann

$$\int_\Omega (g - f) \, \mathrm{d}\mu \in (0, +\infty]. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) gilt dann

$$\int_\Omega (g - f) \, \mathrm{d}\mu \in (0, +\infty). \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann $\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu < \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$. ■

Folgerung M.21.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, dann gilt:

a) Seien $A \in \mathcal{N}_\mu$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gelten $1_A \cdot f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $\int\limits_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

b) Sei $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$, dann gelten $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Beweis.

v36m
10.11.2009

(a) Sei zunächst
$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$
Wegen $A \in \mathcal{N}_\mu$ ist $A \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt wegen (1) mittels Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann
$$1_A \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$
Wegen (2) liefert Teil (a) von Satz M.21.6.1 dann
$$\{1_A \cdot f \neq 0\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$
Weiterhin ist
$$\{1_A \cdot f \neq 0\} \subseteq A. \tag{4}$$
Wegen $A \in \mathcal{N}_\mu$ sowie (3) und (4) liefert Teil (b) von Satz M.5.1 dann
$$\{1_A \cdot f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$
Wegen (2) und (5) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.21.6.1 dann
$$\int\limits_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{6}$$
Sei nun
$$f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{7}$$
Wegen Teil (c) von Bemerkung M.17.7 gilt
$$f = f^+ - f^-. \tag{8}$$
Wegen (7) liefert Bemerkung M.18.9 nun
$$\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{9}$$
Wegen (9) und dem schon gezeigten (vergleiche (1) und (6)) gelten dann
$$\int\limits_\Omega 1_A \cdot f^+ \, \mathrm{d}\mu = 0 \tag{10}$$
und
$$\int\limits_\Omega 1_A \cdot f^- \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{11}$$
Wegen Bemerkung M.21.5.5 gelten weiterhin
$$(1_A \cdot f)^+ = 1_A \cdot f^+ \tag{12}$$
und
$$(1_A \cdot f)^- = 1_A \cdot f^-. \tag{13}$$

Aus (10) und (12) bzw. (11) und (13) folgt dann

$$\int_\Omega (1_A \cdot f)^+ \, \mathrm{d}\mu = 0 \text{ bzw. } \int_\Omega (1_A \cdot f)^- \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Hieraus folgt wegen Definition M.21.5.1 dann

$$1_A \cdot f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$$

sowie

$$\int_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega (1_A \cdot f)^+ \, \mathrm{d}\mu - \int_\Omega (1_A \cdot f)^- \, \mathrm{d}\mu = 0 - 0 = 0.$$

(b) Wegen $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ gilt $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgen bei Beachtung von $f = 1_{\{f \neq 0\}} \cdot f$ mittels (a) dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \text{ und } \int_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

■

Folgerung M.21.6.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und ν ein μ-stetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist ν absolutstetig bezüglich μ (vergleiche Definition M.8.1).
Beweis. Nach Wahl von ν gibt es ein $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$. Hieraus folgt für $A \in \mathcal{N}_\mu$ mittels Teil (a) von Folgerung M.21.6.2 dann

$$\nu(A) = \mu_f(A) = \int_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Es ist also $A \in \mathcal{N}_\nu$. Somit ist $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$, d.h. ν ist absolutstetig bezüglich μ. ■

Folgerung M.21.6.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie ν ein μ-stetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.
Beweis. Sei $\omega \in \Omega$. Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ ist dann $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus ergibt sich bei Beachtung der nach Folgerung M.21.6.3 gültigen Inklusion $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ dann $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\nu$. Somit ist $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. ■

Beispiel M.21.6.1. *Sie $m \in \mathbb{N}$ und bezeichnet $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borelmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Weiter sei ν ein $\lambda^{(m)}$-stetiges Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann gilt $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$.*

Satz M.21.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ und $h \in A(\Omega, K)$. Dann gilt:

(a) Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a1) Sei h quasi-μ-integrierbar. Dann ist $1_A \cdot h$ quasi-μ-integrierbar.

(a2) Sei $h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$. Dann gilt $1_A \cdot h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist $\{h \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$.

   (ii) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gelten $1_A \cdot h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ und $\int\limits_\Omega 1_A \cdot h \, \mathrm{d}\mu = 0$.

Satz M.21.6.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann

(a) Seien $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann gilt:

$$\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

(b) Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ mit $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. Weiter sei f quasi-$\mu$-integrierbar bzw. μ-integrierbar. Dann ist g quasi-μ-integrierbar bzw. μ-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu.$$

Folgerung M.21.6.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann ist $\mu_f = \mu_g$.
Beweis. Sei

$$A \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann

$$\{1_A \cdot f, 1_A \cdot g\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Wegen $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und (2) liefert Satz M.17.5 dann

$$\{1_A \cdot f \neq 1_A \cdot g\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Weiterhin ist

$$\{1_A \cdot f \neq 1_A \cdot g\} = \{f \neq g\} \cap A \subseteq \{f \neq g\}. \tag{4}$$

Wegen $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ sowie (3) und (4) liefert Teil (b) von Satz M.5.1 dann

$$\{1_A \cdot f \neq 1_A \cdot g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) liefert Teil (a) von Satz M.21.6.3 nun

$$\mu_f(A) = \int\limits_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu \overset{\text{Satz 3(a)}}{=} \int\limits_\Omega 1_A \cdot g \, \mathrm{d}\mu = \mu_g(A). \tag{6}$$

Aus (1) und (6) folgt nun $\mu_f = \mu_g$. ■

Satz M.21.6.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin möge ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega \setminus B} \cdot |f| \leq g$ existieren. Dann gilt:

(a) Es ist $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega g \, \mathrm{d}\mu$.

(b) Sei g sogar μ-integrierbar, dann gilt dies auch für f.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Tatsache, dass einer jeden μ-integrierbaren Funktion Grenzen hinsichtlich des Auftretens der Werte ∞ und $-\infty$ und generell hinsichtlich des Auftretens von, von Null verschiedenen Werten gesetzt sind. Dies wird im nachfolgenden Resultat präzisiert.

Satz M.21.6.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

a) Es ist $\{|f| = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu$.

b) Es ist $\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\} \subseteq \mathfrak{A}$ und es ist $\mu|_{\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}}$ ein σ-endliches Maß auf $(\{f \neq 0\}, \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\})$.

Beweis.

a) Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ gilt

$$f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Bemerkung M.18.9 dann

$$|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{2}$$

sowie Folgerung M.17.2 weiterhin

$$\{|f| = \infty\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

und

$$\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ gilt nach Teil (a) von Satz M.21.5.1 dann

$$|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}).$$

Hieraus folgt mittles Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 dann

$$\int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \in [0, \infty). \tag{5}$$

Sei

$$\alpha \in (0, \infty). \tag{6}$$

Aufgrund der Nichtnegativität von $|f|$ folgt dann

$$\alpha \cdot 1_{\{|f| = \infty\}} \leq |f|. \tag{7}$$

Wegen (2), (3), (6) und (7) folgt mittels Teil (c) von Satz M.21.3.2 dann

$$0 \leq \alpha \cdot \mu(\{|f| = \infty\}) \leq \int\limits_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt wegen (6) nun

$$0 \leq \mu(\{|f| = \infty\}) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{8}$$

Wegen (5) gilt

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left(\frac{1}{\alpha} \cdot \int\limits_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu \right) = 0. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt nun $\{|f| = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu$.

b) Wegen (4) ist aufgrund von Teil (a) von Satz M.6.3 dann $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$ eine σ-Algebra in $\{f \neq 0\}$ mit $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\} \subseteq \mathfrak{A}$ sowie $\mu|_{\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}}$ wegen Teil (c) von Satz M.6.3 ein Maß auf $(\{f \neq 0\}, \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\})$. Wir zeigen nun dessen σ-Endlichkeit. Es ist

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{|f| \geq \frac{1}{n}\}. \tag{10}$$

Wegen Satz M.21.4.2 gelten für $n \in \mathbb{N}$ dann $\{|f| \geq \frac{1}{n}\} \in \mathfrak{A}$ und

$$\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) \leq n \cdot \int\limits_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu$$

also wegen (5) dann

$$\mu(\{|f| \geq \frac{1}{n}\}) \in [0, \infty).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (10) dann die σ-Endlichkeit von $\mu|_{\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}}$.

■

Folgerung M.21.6.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und ν ein μ-stetiges Maß aus $\mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gibt es eine zu $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ gehörige Dichteversion f von ν bzgl. μ.
Beweis. Aufgrund der μ-Stetigkeit von ν gibt es ein

$$g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{1}$$

mit

$$\nu = \mu_g. \tag{2}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie (1) und (2) folgt mittels Teil (c) von Satz M.21.3.4 dann

$$g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{3}$$

Wegen (3) liefert Teil (a) von Satz M.21.6.5 nun $\{|g| = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgt aufgrund der wegen $g \in A(\Omega, [0, \infty])$ gültigen Beziehung dann

$$\{|g| = \infty\} = \{g = \infty\}.$$

und

$$\{g = \infty\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{4}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (4) dann

$$\Omega \backslash \{g = \infty\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Sei

$$f := 1_{\Omega \backslash \{g=\infty\}} \cdot g. \tag{6}$$

Wegen (1), (5) und (6) liefert Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann

$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Aus (6) folgt weiterhin

$$f \in A(\Omega, \mathbb{R}). \tag{8}$$

Aus (6) folgt zudem

$$\{f \neq g\} = \{g = \infty\}. \tag{9}$$

Aus (4) und (9) folgt nun

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{10}$$

Wegen (1), (7) und (10) liefert Folgerung M.21.6.5 dann

$$\mu_f = \mu_g.$$

Hieraus folgt wegen (2) dann

$$\nu = \mu_f. \tag{11}$$

Wegen (3), (7) und (10) liefert Teil (b) von Satz M.21.6.3 dann $f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen (8) dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}). \tag{12}$$

Wegen (11) und (12) ist dann alles gezeigt. ■

v37m 16.11.2009

Unsere nächsten Betrachtungen sind nun darauf gerichtet, im Fall eines nichttrivialen Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eines $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ verschieden Phänomene zu studieren, welche sich um die σ-Endlichkeit des Maßes μ_f ranken.

Satz M.21.6.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\{f = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann ist μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Folgerung M.21.6.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann ist μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Satz M.21.6.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Dann gilt $\{f = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$.

Satz M.21.6.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Weiter sei $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\mu_f = \mu_g$ erfüllt ist. Dann ist $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$.

Folgerung M.21.6.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$ so geschaffen, dass $\mu_f = \mu_g$ erfüllt ist. Dann gilt $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$.

Folgerung M.21.6.9. Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $f, g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_{\lambda^m}$.

(ii) Es ist $\lambda_f^{(m)} = \lambda_g^{(m)}$.

Beweis. Beachte die σ-Endlichkeit von $\lambda^{(m)}$ sowie die Folgerung M.21.6.5 und M.21.6.8.
■

Unsere nachfolgenden Überlegungen sind nun darauf gerichtet, im Falle eines meßbaren Raumen $(\Omega, \mathcal{B})$, dessen σ-Algebra $\mathcal{B}$ die Borelsche σ-Algebra eines metrischen Raumes (Ω, ρ) ist, und eine Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$, eine näherer Analyse der Maße $(\mu_f)_f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathcal{B})$ durchzuführen.

Satz M.21.6.9. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$, $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathcal{B})$ und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathcal{B})$. Dann gilt:

(a) Es gelten $\mathrm{Res}\,(\mu) \subseteq \mathrm{Res}\,(\mu_f)$ sowie $\mathrm{Spec}\,(\mu_f) \subseteq \mathrm{Spec}\,(\mu)$.

(b) Sei $x \in \Omega$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

  (i) Es ist $x \in \mathrm{Spec}\,(\mu_f)$.

  (ii) Für alle $r \in (0, +\infty)$ gilt $K_\rho(x; r) \cap \{f \neq 0\} \notin \mathcal{N}_\mu$.

  (iii) Es gibt ein $r_0 \in (0, +\infty)$ derart, dass für alle $r \in (0, r_0]$ gilt $K_\rho(x; r) \cap \{f \neq 0\} \notin \mathcal{N}_\mu$.

(c) Es gelte $\mathrm{Spec}\,(\mu) = \Omega$ sowie $\{f = 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann ist $\mathrm{Spec}\,(\mu_f) = \Omega$.

Folgerung M.21.6.10. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ so gewählt, dass $\{f = 0\} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathrm{Spec}\,((\lambda^{(m)})_f) = \mathbb{R}^m$.
Beweis. Wegen Beispiel M.19.2 gilt $\mathrm{Spec}\,(\lambda^{(m)}) = \mathbb{R}^m$. Nun folgt alles aus Satz M.21.6.9.
■

Satz M.21.6.10. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}^+(\Omega, \rho)$ und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \rho)$. Es bezeichne $\overline{\{f \neq 0\}}$ den Abschluß von $\{f \neq 0\}$ in (Ω, ρ). Dann gilt:

(a) Es gilt $\mathrm{Spec}\,(\mu_f) \subseteq \overline{\{f \neq 0\}} \cap \mathrm{Spec}\,(\mu)$.

(b) Sei zusätzlich $f \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Dann gilt:

 (b1) Es ist $[\{f \neq 0\} \cap \mathrm{Spec}\,(\mu)] \subseteq \mathrm{Spec}\,(\mu_f)$.

 (b2) Es sei $\{f \neq 0\} \subseteq \mathrm{Spec}\,(\mu)$. Dann gilt $\mathrm{Spec}\,(\mu_f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

 (b3) Es sei $\mathrm{Spec}\,(\mu) = \Omega$. Dann gilt $\mathrm{Spec}\,(\mu_f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

Folgerung M.21.6.11. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Es bezeichne $\overline{\{f \neq 0\}}$ den Abschluss von $\{f \neq 0\}$ in $(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathrm{Spec}\,((\lambda^{(m)})_f) \subseteq \overline{\{f \neq 0\}}$.

(b) Sei zusätzlich $f \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}^m}))$. Dann gilt $\mathrm{Spec}\,((\lambda^{(m)})_f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

Beweis. Wegen Beispiel M.19.2 gilt $\mathrm{Spec}\,(\lambda^{(m)}) = \mathbb{R}^m$. Somit liefert Teil (a) bzw. (b3) von Satz M.21.6.10 dann (a) bzw (b). ■

Satz M.21.6.11. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$ sowie μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathcal{B})$ mit $\mathrm{Spec}\,(\mu) = \Omega$. Weiter seien f und g Funktionen aus $\mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathcal{B}))$ mit $\mu_f = \mu_g$. Dann gilt $f = g$.
Beweis. Aus der Wahl von f und g folgt sogleich $\{f, g\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathcal{B}) \cap A(\Omega, \mathbb{R})$. Hieraus folgt bei Beachtung der σ-Endlichkeit von μ mittels Folgerung M.21.6.8 dann $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$, also wegen $\{f \neq g\} = \{f - g \neq 0\}$ dann $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathcal{B}, \mu; \mathbb{R})$. Hieraus folgt bei Beachtung von $\mathrm{Spec}\,(\mu) = \Omega$ sowie $f, g \in \mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$ mittels Teil (b) von Satz M.19.4 dann $f = g$. ■

Folgerung M.21.6.12. Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie f und g Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \cap \mathcal{C}((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$ mit $(\lambda^{(m)})_f = (\lambda^{(m)})_g$. Dann gilt $f = g$.
Beweis. Wegen Beispiel M.19.2 ist $\lambda^{(m)}$ ein σ-endliches Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ mit $\mathrm{Spec}\,(\lambda^{(m)}) = \mathbb{R}^m$. Hieraus folgt mittels Satz M.21.6.11 dann $f = g$. ■

Beispiel M.21.6.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Weiter seien $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und $g := 1_{\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m} \cdot f$. Dann gelten $g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und $\mu_f = \mu_g$.*
Beweis. *Die Menge $\mathbb{Q}^m$ abzählbar unendlich ist, folgt wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ mittels Bemerkung M.7.5 dann*

$$\mathbb{Q}^m \subseteq \mathcal{N}_\mu. \tag{1}$$

Weiterhin ist

$$\{f \neq g\} \subseteq \mathbb{Q}^m. \tag{2}$$

Da $\mathcal{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, folgt nun aus (1) dann $\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m \in \mathcal{B}_m$. Hieraus folgt nun wegen $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ mittels Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann

$$.g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \tag{3}$$

Wegen $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m; \overline{\mathbb{R}})$, $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ und (3) liefert Satz M.17.5 dann

$$\{f \neq g\} \subseteq \mathcal{B}_m. \tag{4}$$

Wegen (1),(2) *und* (4) *liefert Teil (b) von Satz* M.21.5.1 *dann*

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$, (3) *und* (5) *liefert Folgerung* M.21.6.5 *dann* $\mu_f = \mu_g$. ■

Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\mathbb{R}^{\cdot}\mathcal{B}_m)$ (z.B. $\mu = \lambda^{(m)}$). Weiterhin sei ν ein μ-stetiges Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$. Dann zeigt Beispiel M.21.6.2 welch große Variationsbreite in der Wahl einer Dichteversion von ν bezüglich μ ist. Ist hingegen μ zusätzlich σ-endlich und gilt zudem $\operatorname{Spec}(\mu) = \mathbb{R}^m$ (wie etwa für $\mu = \lambda^{(m)}$). So zeigt Satz M.21.6.11, dass es aber höchstens eine Dichteversion $f \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathcal{B}_m)$ von ν bezüglich μ geben kann. In diesem Fall wird man dann f als natürliche Dichterversion von ν bezüglich μ wählen.
Die vorangehenden Betrachtungen suggerieren die Behandlung folgender Aufgabenstellung: Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind „gut handhabbare“ Bedingungen für die μ-Stetigkeit von ν anzugeben.(d.h für die Existenz eines $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$. Dieses Problem beinhaltet eine zentrale Aufgabenstellung der Maß- und Integrationstheorie. Der nach folgendem Satz, welcher auf J. Radon (1887-1956) und O.M.Nikodym (1887-1974) zurückgeht, gibt eine Antwort auf die obige Frage.

Satz M.21.6.12 (Radon Nickodym)**.** Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiter seien μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und ν ein bezüglich μ absolutstetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann liegt μ-stetigkeit von ν vor.

Anmerkung: Die Vorführung des Beweises dauert zwei bis drei Vorlesungen und wird in einer Stochastik Vorlesung gezeigt.
Satz M.21.6.12 stellt also unter Zusatzvoraussetzungen eine Umkehrung von Folgerung M.21.6.3 dar.

M.21.7. Erste Aussagen über p-fach μ-integrierbare Funktionen

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. In den vorangegangen Abschnitten haben wir bereits eine ganze Reihe von Untersuchungen zur Struktur der Räume $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ geführt. Insbesondere gelangten wir zu der Erkenntnis, dass eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, K)$ genau dann zu $\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ gehört, wenn $|f| \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ erfüllt ist. Hieran anknüpfend wird bei vorgegebenem $p \in (0, +\infty)$ eine detailierte Untersuchung jener Funktionen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ suggeriert, für welche μ-Integrierbarkeit von $|f|^p$ vorliegt. Der vorliegende Abschnitt ist der Dikussion der Arithmetik p-fach μ-integrierbarer Funktionen gewidmet.

Beispiel M.21.7.1. *Sei* $p \in (1, +\infty)$. *Weiter sei* $f := Id_{\mathbb{N}}$. *Dann gehören natürlich* f *und* f^p *zu* $\mathcal{E}^*(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. *Weiter sei* $\mu_p := \sum\limits_{n \in \mathbb{N}} n^{-(p+1)} \epsilon_{n,\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$. *Wegen Beispiel* M.21.3.4 *ist dann* $\mu_p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ *und es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{N}} f \, d\mu_p = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-(p+1)} f(n) = \sum_{n \in \mathbb{N}} n^{-(p+1)} n = \sum_{n \in \mathbb{N}} \frac{1}{n^p} \in (0, +\infty)$$

sowie

$$\int_{\mathbb{N}} f^p \, d\mu_p = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-(p+1)}[f(n)]^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} n^{-(p+1)} n^p = \sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{n} = +\infty$$

d.h., f ist μ_p-integrierbar, f^p aber nicht.

Bemerkung M.21.7.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Wegen Bemerkung M.18.9 ist dann $|f|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Somit ist die Größe $N_{p,\mu}(f) := [\int_\Omega |f|^p \, d\mu]^{\frac{1}{p}}$ wohldefiniert ist und es gilt $N_{p,\mu}(f) \in [0, +\infty]$.

v38m 17.11.2009

Bemerkung M.21.7.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

a) Es gelten $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $N_{p,\mu}(|f|) = N_{p,\mu}(f)$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent
   (i) Es ist $N_{p,\mu}(f) = 0$.
   (ii) Es ist $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\alpha f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $N_{p,\mu}(\alpha f) = |\alpha| N_{p,\mu}(f)$.

Wir kommen nun zur zentralen Begriffsbildung dises Abschnitts.

Definition M.21.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann heißt f eine **p-fach μ-integrierbar**e Funktion, falls $|f|^p \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Bemerkung M.21.7.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

a) f ist p-fach μ-integrierbar.

b) $|f|$ ist p-fach μ-integrierbar.

c) Es ist $N_{p,\mu}(f) \in [0, +\infty)$.

Bemerkung M.21.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist 1-fach μ-integrierbar.

(ii) f ist μ-integrierbar.

Beweis. Wegen Defintion M.21.7.1 ist (i) äquivalent zu
(iii) |f| ist μ-integrierbar.
Wegen Teil (a) von Satz M.21.5.1 sind (ii) und (iii) äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unseren Herleitung die Äquivalenz von (i) und (ii). ∎

Bemerkung M.21.7.4 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.21.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien, $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann heißt die Menge $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$ aller p-fach μ-integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; K)$ der **K-Lebesgue-Raum** über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zum Exponenten p.

Beispiel M.21.7.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichtrivialer meßbarer Raum, $\omega \in \Omega$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Bemerkung M.21.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt

a) Es ist $1_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es gilt $N_{p,\mu}(1_A) = [\mu(A)]^{\frac{1}{p}}$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent

 (i) Es ist $1_A \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

 (ii) Es ist $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

c) Es ist $1_\emptyset \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und $N_{p,\mu}(1_\emptyset) = 0$.

d) Sei $B \in \mathfrak{A}$ so gewählt, daß $A \subseteq B$ erfüllt ist. Dann gelten $1_B - 1_A = 1_{B \setminus A} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $N_{p,\mu}(1_B - 1_A) = [\mu(B \setminus A)]^{\frac{1}{p}}$.

Bemerkung M.21.7.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Es existiere ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega \setminus B} \cdot |f| \leq |g|$. Dann ist $N_{p,\mu}(f) \leq N_{p,\mu}(g)$.

b) Es sei $\{|f| \neq |g|\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann ist $N_{p,\mu}(f) = N_{p,\mu}(g)$.

c) Es sei $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann ist $N_{p,\mu}(f) = N_{p,\mu}(g)$.

Satz M.21.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) Es existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, [0, +\infty])$ und ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega \setminus B}|f| \leq g$.

Folgerung M.21.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Weiter sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $1_A f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Satz M.21.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

a) Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

b) Seien $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ so gewählt, daß $f + g$ wohldefiniert ist. Dann ist $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Folgerung M.21.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$. Dann ist $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

Satz M.21.7.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ sowie $f, g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $\{\inf\{f, g\}, \sup\{f, g\}\} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Satz M.21.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

a) Es ist $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

b) Es ist $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Satz M.21.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

a) Seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gelten $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $N_{p,\mu}(fg) \leq N_{\infty,\mu}(g) N_{p,\mu}(f)$.

b) Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $g \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

c) Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}), g \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})$ sowie $\|g\|_\infty := \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$. Dann gelten $fg \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ sowie $N_{p,\mu}(fg) \leq \|g\|_\infty N_{p,\mu}(f)$.

Folgerung M.21.7.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer endlicher Maßraum sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

a) Sei $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt $N_{p,\mu}(g) \leq N_{\infty,\mu}(g) \cdot (\mu(\Omega))^{\frac{1}{p}}$.

b) Sei μ endlich. Dann gilt:

(b1) Es ist $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(b2) Es ist $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und für $g \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gilt mit der Setzung $\|g\|_\infty := \sup\limits_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$ dann $N_{p,\mu}(g) \leq \|g\|_\infty [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{p}}$ sowie $\int\limits_\Omega |g| \, d\mu \leq \|g\|_\infty [\mu(\Omega)]$.

Folgerung M.21.7.4. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit zugehöriger Borelscher σ-Algebra $\mathcal{B}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathcal{B})$ sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $\mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Beweis. Wegen Satz M.15.8 gilt $\mathcal{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Teil (b2) von Folgerung M.21.7.3 die Behauptung. ■

Satz M.21.7.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer endlicher Maßraum sowie $f \in A(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) Es ist $f \in \mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) Es ist $f \in \bigcap\limits_{p \in [1, +\infty)} \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

b) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $N_{\infty,\mu}(f) = \lim\limits_{p \to \infty} N_{p,\mu}(f)$.

Satz M.21.7.6 lässt deutlich werden warum das Symbol „∞" für die Bezeichnung $\mathcal{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ erkoren wurde.

M.21.8. Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski sowie erste Anwendungen

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in (0, +\infty)$. Die Abbildung $N_{p,\mu}\colon \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \to [0, +\infty]$ sei gemäß $f \mapsto [\int\limits_{\Omega} |f|^p \, \mathrm{d}\mu]^{\frac{1}{p}}$ erklärt. Der vorliegende Abschnitt ist der Diskussion von wichtigen Ungleichungen für $N_{p,\mu}$ und deren Konsequenzen gewidmet.
Unsere nachfolgende Überlegung ist auf dem Beweis einer auf Otto Hölder (1859–1937) zurückgehenden fundamentalen Ungleichung ausgerichtet. Hierzu benötigen wir noch einige Vorbereitnugen.

Bemerkung M.21.8.1. Seien die Zahlen $p, q \in (1, +\infty)$. Dann sind folgende Aussagen sind äquivalent

a) Es ist $q = \frac{p}{p-1}$.

b) Es ist $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

Lemma M.21.8.1. Seien $p \in (1, +\infty)$ sowie $q := \frac{p}{p-1}$. Dann gilt

a) Sei $t \in (0, +\infty)$. Dann gilt $\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} \geq 1$, wobei „=“ genau für $t = 1$ zutrifft.

b) Seien $a, b \in [0, +\infty]$. Dann gilt $ab \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$.

c) Seien $a, b \in [0, +\infty)$. Dann ist die Ungleichung von (b) genau dann mit „=“ erfüllt, wenn $a^p = b^q$ erfüllt ist.

Satz M.21.8.1 (Höldersche Ungleichung)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (1, +\infty)$ und $q := \frac{p}{p-1}$. Weiter seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

a) Es ist $fg \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und es gilt $N_{1,\mu}(fg) \leq N_{p,\mu}(f) N_{q,\mu}(g)$.

b) Seien $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ und $g \in \mathcal{L}^q(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $fg \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Beweis.

a) Wegen Satz M.17.9 gilt

$$fg \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{1}$$

Wir betrachten zuerst den Fall

$$\inf\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} = 0. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert der Teil (b) von Bemerkung M.21.7.2 dann, dass $\{f, g\} \cap \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \neq \emptyset$. Hieraus folgt mittels Teil (b) von Lemma M.19.1 nun $fg \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$, also wegen Teil (b) von Bemerkung M.21.7.2 dann

$$N_{1,\mu}(fg) = 0. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$N_{1,\mu}(fg) = 0 = N_{p,\mu}(f)N_{q,\mu}(g). \tag{4}$$

Sei nun

$$\inf\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} \in (0, +\infty]. \tag{5}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\sup\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} = +\infty. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann

$$N_{1,\mu}(fg) \leq +\infty = N_{p,\mu}(f)N_{q,\mu}(g). \tag{7}$$

Sei nun schließlich

$$\sup\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} \leq +\infty. \tag{8}$$

Aus (5) und (8) folgt dann

$$\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} \subseteq (0, +\infty). \tag{9}$$

Wegen (9) gilt dann

$$\left\{\frac{|f|}{N_{p,\mu}(f)}, \frac{|g|}{N_{q,\mu}(g)}\right\} \subseteq A(\Omega, [0, +\infty]) \tag{10}$$

Aus (10) folgt mittels Teil (b) von Lemma M.21.8.1 dann

$$\frac{|f|}{N_{p,\mu}(f)}\frac{|g|}{N_{q,\mu}(g)} \leq \frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{N_{p,\mu}(f)}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{N_{q,\mu}(g)}\right)^q. \tag{11}$$

Aus (9) und (11) folgt nun

$$\begin{aligned}|f \cdot g| \leq |f||g| &\leq [N_{p,\mu}(f)][N_{q,\mu}(g)]\left[\frac{1}{p}\left(\frac{|f|}{N_{p,\mu}(f)}\right)^p + \frac{1}{q}\left(\frac{|g|}{N_{q,\mu}(g)}\right)^q\right] = \\ &= \frac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p}[N_{q,\mu}(g)]|f|^p + \frac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)][N_{q,\mu}(g)]^{1-q}|g|^q.\end{aligned} \tag{12}$$

Wegen (1) liefert Bemerkung M.18.9 dann

$$|f \cdot g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{13}$$

Wegen $\{f, g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ liefert Bemerkung M.18.9 weiterhin

$$\{|f|^p, |g|^q\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{14}$$

Wegen (9) und (14) folgt aus den Teilen (a) und (b) von Lemma M.18.3 nun

$$\frac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p}[N_{q,\mu}(g)]|f|^p + \frac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)][N_{q,\mu}(g)]^{1-q}|g|^q \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{15}$$

Wegen (13),(15) und (12) liefret Teil (c) von Satz M.21.3.2 dann

$$\int\limits_{\Omega} |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} \frac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p}[N_{q,\mu}(g)]|f|^p + \frac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)][N_{q,\mu}(g)]^{1-q}|g|^q \, \mathrm{d}\mu. \quad (16)$$

Wegen $p \in (1, +\infty)$ und der Wahl von q gilt nach Bemerkung M.21.8.1 dann v39m 23.11.2009

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1. \quad (17)$$

Wegen (15), (14) und (9) folgt aus den Teilen (a) und (b) von Satz M.21.3.2 bei Beachtung von (17) dann

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega} \{\tfrac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p}[N_{q,\mu}(g)] \cdot |f|^p + \tfrac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)]^{1-q} \cdot |g|^q\} \, \mathrm{d}\mu \\
&= \tfrac{1}{p}[N_{p,\mu}(l)]^{1-p} \cdot [N_{q,\mu}(g)] \cdot [\int\limits_{\Omega} |f|^p \, \mathrm{d}\mu] + \tfrac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)]^{1-q} \cdot [\int\limits_{\Omega} |g|^q \, \mathrm{d}\mu] \\
&= \tfrac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p} \cdot [N_{q,\mu}(g)] \cdot [N_{p,\mu}(f)]^p + \tfrac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)]^{1-q} \cdot [N_{q,\mu}(g)]^q \\
&= \tfrac{1}{p} \cdot [N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)] + \tfrac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)] \\
&\overset{(17)}{=} [N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)].
\end{aligned} \quad (18)$$

Unter Verwendung von (16) und (18) folgt dann

$$\begin{aligned}
N_{1,\mu}(f \cdot g) &= \int\limits_{\Omega} |f \cdot g| \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{(16)}{\leq} \int\limits_{\Omega} \{\tfrac{1}{p}[N_{p,\mu}(f)]^{1-p} \cdot [N_{q,\mu}(g)] \cdot |f|^p + \tfrac{1}{q}[N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)]^{1-q} \cdot |g|^q\} \, \mathrm{d}\mu \\
&\overset{(18)}{\leq} [N_{p,\mu}(f)] \cdot [N_{q,\mu}(g)].
\end{aligned} \quad (19)$$

Wegen (1), (2), (4)-(8) und (19) ist dann (a) gezeigt.

b) Nach Wahl von f und g gilt wegen Bemerkung M.21.7.3 dann $\{N_{p,\mu}(f), N_{q,\mu}(g)\} \subseteq [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen (a) dann $N_{1,\mu}(f \cdot g) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.7.3 dann $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

■

Die Höldersche Ungleichung ermöglicht für $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$ die Herleitung interessanter Zusammenhänge zwischen den Elementen der Familie $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)))_{p \in (0,+\infty)}$.

Satz M.21.8.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Weiter seien $r \in (0, +\infty)$, $s \in (r, +\infty]$ und $t \in (r, s)$. Dann gilt $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K) \cap \mathcal{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K) \subseteq \mathcal{L}^t(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

Satz M.21.8.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $r \in (0, +\infty)$ und $s \in (r, +\infty)$. Dann gilt :

a) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $N_{r,\mu}(f) \leq [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{r} - \frac{1}{s}} \cdot [N_{s,\mu}(f)]$.

b) Sei $K \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$. Dann ist $\mathcal{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K) \subseteq \mathcal{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; K)$.

c) Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} N_{s,\mu}(f_n - f) = 0$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, $f \in \mathcal{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} N_{r,\mu}(f_n - f) = 0$.

Folgerung M.21.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Wahrscheinlichkeits-Raum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

a) Seien $r \in (0, +\infty)$ und $s \in (r, +\infty]$. Dann gilt $N_{r,\mu}(f) \leq N_{s,\mu}(f)$.

b) Es gilt $N_{\infty,\mu}(f) = \sup\limits_{p\in(0,+\infty)} N_{p,\mu}(f) = \lim\limits_{p\to+\infty} N_{p,\mu}(f)$.

Das nachfolgende Resultat ermöglicht einen alternativen Beweis von Teil (b) von Satz M.21.8.3.

Lemma M.21.8.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Weiter seien $r \in (0, +\infty)$ und $s \in (r, +\infty)$. Dann ist $\{|f|^r, |f|^s\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int\limits_\Omega |f|^r \,\mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \int\limits_\Omega |f|^s \,\mathrm{d}\mu$.

Satz M.21.8.4 (Ungleichung von Minkowski)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in [1, +\infty)$. Weiter seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ so gewählt, dass $f + g$ definiert ist. Dann gelten $f + g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie

$$N_{p,\mu}(f + g) \leq N_{p,\mu}(f) + N_{p,\mu}(g).$$

Beweis. Wegen Teil (a) von Satz M.17.6 gilt

$$f + g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{1}$$

Wegen (1) folgt mittels Bemerkung M.18.9 dann

$$|f + g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Wegen $\{f, g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ liefert Bemerkung M.18.9 zudem

$$\{|f|, |g|\} \subset \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen (3) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.21.3.2 dann

$$|f| + |g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{4}$$

und

$$\int\limits_\Omega [|f| + |g|] \,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega |g| \,\mathrm{d}\mu. \tag{5}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt

$$|f+g| \leq |f| + |g|. \tag{6}$$

Wegen (2), (4) und (6) liefert Teil (c) von Satz M.21.3.2 nun

$$\int_\Omega |f+g| \, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega [|f| + |g|] \, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Aus (7) und (5) folgt dann

$$N_{1,\mu}(f+g) = \int_\Omega |f+g| \, \mathrm{d}\mu \overset{(7)}{\leq} \int_\Omega [|f|+|g|] \, \mathrm{d}\mu \overset{(5)}{=} \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g| \, \mathrm{d}\mu = N_{1,\mu}(f) + N_{1,\mu}(g). \tag{8}$$

Im Fall $p = 1$ ist wegen (8) alles gezeigt.

$$\text{Sei nun } p \in (1, +\infty). \tag{9}$$

Unter Beachtung von (6), (1) sowie der aus (4) folgenden Beziehung $|f|+|g| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ folgt mittels Teil (a) von Bemerkung M.21.7.6 dann

$$N_{p,\mu}(f+g) \leq N_{p,\mu}(|f| + |g|). \tag{10}$$

Sei zunächst

$$sup\{N_{p,\mu}(f), N_{p,\mu}(g)\} = +\infty. \tag{11}$$

Aus (11) folgt dann

$$N_{p,\mu}(f+g) \leq +\infty = N_{p,\mu}(f) + N_{p,\mu}(g). \tag{12}$$

Sei nun

$$sup\{N_{p,\mu}(f), N_{p,\mu}(g)\} \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Wegen (13) liefert Bemerkung M.21.7.3 dann

$$\{f, g\} \subseteq \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}).$$

Hieraus folgt mittels Teil (b) von Satz M.21.7.2 nun $f + g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen Bemerkung M.21.7.3

$$N_{p,\mu}(f+g) \in [0, +\infty). \tag{14}$$

Unter Beachtung von (6) ergibt sich

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1} \cdot |f+g| \overset{(6)}{\leq} |f+g|^{p-1}[|f|+|g|] = |f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|. \tag{15}$$

Wegen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sorwie (1) folgt mittels Bemerkung M.18.9 dann

$$\{|f|, |g|, |f+g|^{p-1} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{16}$$

Wegen (16) liefert Teil (c) von Lemma M.18.3 dann

$$\{|f+g|^{p-1} \cdot |f|, |f+g|^{p-1} \cdot |g|\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{17}$$

Wegen (17) erbringt Teil (b) von Satz M.21.3.2 nun

$$|f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{18}$$

sowie

$$\int\limits_\Omega [|f+g|^{p-1}|f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|] \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu. \tag{19}$$

Wegen (1) folgt mittels Bemerkung M.18.9 dann

$$|f+g|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{20}$$

Wegen (20), (18) und (15) folgt mittels Teil (c) von Satz dann

$$\int\limits_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega [|f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|] \, \mathrm{d}\mu. \tag{21}$$

Unter Verwendung von (21) und (19) folgt nun

$$\begin{aligned} [N_{p,\mu}(f+g)]^p &= \int\limits_\Omega |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu \\ &\overset{(21)}{\leq} \int\limits_\Omega [|f+g|^{p-1} \cdot |f| + |f+g|^{p-1} \cdot |g|] \, \mathrm{d}\mu \\ &\overset{(19)}{=} \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1} \cdot |f| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1} \cdot |g| \, \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{22}$$

Unter Beachtung von (9) sei

$$q := \frac{p}{p-1}. \tag{23}$$

Aus (23) folgen

$$(p-1)q = p \tag{24}$$

$$\text{sowie } q \neq 0 \text{ und } \frac{p}{q} = p-1. \tag{25}$$

Sei $h \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Die Anwendung der Hölderschen Ungleichung (vgl. Teil (a) von Satz M.21.8.1) liefert bei Beachtung von (9) und (23) dann

$$\int\limits_\Omega |f+g|^{p-1} \cdot |h| \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega ||f+g|^{p-1} \cdot |h|| \, \mathrm{d}\mu = N_{1,\mu}(|f+g|^{p-1} \cdot |h|) \overset{S.1}{\leq} N_{p,\mu}(h) \cdot N_{q,\mu}(|f+g|^{p-1}). \tag{26}$$

Unter Beachtung von (24) und (25) folgt nun

$$\begin{aligned} N_{q,\mu}(|f+g|^{p-1}) &= \Big(\int_\Omega ||f+g|^{p-1}|^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} = \Big(\int_\Omega (|f+g|^{p-1})^q \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \Big(\int_\Omega |f+g|^{(p-1)q} \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \overset{(24)}{=} \Big(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\Big(\int_\Omega |f+g|^p \,\mathrm{d}\mu\Big)^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} = [N_{p,\mu}(f+g)]^{\frac{p}{q}} \\ &\overset{(25)}{=} [N_{p,\mu}(f+g)]^{p-1}. \end{aligned} \tag{27}$$

Unter Verwendung von (22), (26) und (27) folgt nun

$$\begin{aligned} [N_{p,\mu}(f+g)]^p &\overset{(22)}{\leq} \int_\Omega |f+g|^{p-1}\cdot|f| \,\mathrm{d}\mu + \int_\Omega |f+g|^{p-1}\cdot|g| \,\mathrm{d}\mu \\ &\overset{(26)}{\leq} N_{p,\mu}(f)\cdot N_{q,\mu}(|f+g|^{p-1}) + N_{p,\mu}(g)\cdot N_{q,\mu}(|f+g|^{p-1}) \\ &= [N_{p,\mu}(f)+N_{p,\mu}(g)]\cdot[N_{q,\mu}(|f+g|^{p-1})] \\ &\overset{(27)}{=} [N_{p,\mu}(f)+N_{p,\mu}(g)]\cdot[N_{p,\mu}(f+g)]^{p-1} \end{aligned} \tag{28}$$

Falls $N_{p,\mu}(f+g)=0$ ist, gilt insbesondere $N_{p,\mu}(f+g) \leq N_{p,\mu}(f)+N_{p,\mu}(g)$. Ist higegen $N_{p,\mu}(f+g) \neq 0$, so folgt aus (14) dann

$$N_{p,\mu}(f+g) \in (0,+\infty). \tag{29}$$

Aus (28) und (29) folgt dann

$$N_{p,\mu}(f+g) \leq N_{p,\mu}(f)+N_{p,\mu}(g).$$

■

Es folgen nun erste Anwendungen von Satz M.21.8.4.

Satz M.21.8.5. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1,+\infty)$. Es sei $N_{p,\mu,\mathbb{R}} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})} N_{p,\mu}$. Dann ist $(\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}), N_{p,\mu,\mathbb{R}})$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{R}$.

Beweis. Wegen Folgerung M.21.7.2 ist $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Wegen Teil (c) von Bemerkung M.21.7.2 und Satz M.21.8.4 ist $N_{p,\mu,\mathbb{R}}$ eine Seminorm auf $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$. ■

Folgerung M.21.8.2. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in [1,+\infty)$. Dann gilt

a) Seien $f,g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$. Dann gilt $|N_{p,\mu}(f)-N_{p,\mu}(g)| \leq N_{p,\mu}(f-g)$.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist $N_{p,\mu,\mathbb{R}}$ eine Norm auf $\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$.

(ii) Es ist $\mathcal{N}_\mu = \{\emptyset\}$.

Satz M.21.8.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:

a) Seien $f, g \in \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

b) Die Abbildung $[\cdot, \cdot]_{\mu,\mathbb{R}} : \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sei definiert gemäß $[f, g] \mapsto \int\limits_\Omega f \cdot g \, \mathrm{d}\mu$. Dann ist $(\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{\mu,\mathbb{R}})$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$ mit zugehöriger Seminorm $N_{2,\mu,\mathbb{R}}$.

Folgerung M.21.8.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\mathfrak{A}_{\mu,e} := \{C \in \mathfrak{A} : \mu(C) \in [0, +\infty)\}$. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$. Dann gehört 1_A und 1_B zu $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt $[1_A, 1_B]_{\mu,\mathbb{R}} = \mu(A \cap B)$.

Bezeichnung Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in (0, +\infty)$. Wegen Teil (b) von Bemerkung M.21.7.2 gilt dann $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \{f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})) : N_{p,\mu}(f) = 0\}$. Hierbei folgt bei Beachtung von Satz M.19.1, dass $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ist. Es bezeichne $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) := \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \backslash \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ den entsprechenden Faktorraum. Für $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ bezeichne hierbei $< f >_{\mu,\mathbb{R}}$ das durch f erzeugte Element von $L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. v40m 24.11.2009

Satz M.21.8.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1, \infty)$. Es sei $|| \cdot ||_{p,\mu,\mathbb{R}} : L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \to [0, \infty)$ definiert gemäß $< f >_{\mu,\mathbb{R}} \to N_{p,\mu}(f)$. Dann ist die Abbildung $|| \cdot ||_{p,\mu,\mathbb{R}}$ wohldefiniert und $(L^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), || \cdot ||_{p,\mu,\mathbb{R}})$ ist ein normierter Raum über $\mathbb{R}$.

Satz M.21.8.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Die Abbildung $(\cdot, \cdot)_{\mu,\mathbb{R}} : L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ sei definiert gemäß $[< f >_{\mu,\mathbb{R}}, < g >_{\mu,\mathbb{R}}] \to [f, g]_{\mu,\mathbb{R}}$. Dann ist $(\cdot, \cdot)_{\mu,\mathbb{R}}$ wohldefiniert und $(L^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), (\cdot, \cdot)_{\mu,\mathbb{R}})$ ist eine Prähilbertraum über $\mathbb{R}$ mit zugehöriger Norm $|| \cdot ||_{2,\mu,\mathbb{R}}$.

Satz M.21.8.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ und $p \in [1, \infty)$. Weiter seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, f eine Funktion aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und $\lim\limits_{n \to \infty} N_{p,\mu}(f_n - f) = 0$. Dann gilt:

a) Es ist $1_A \cdot f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, $(1_A \cdot f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt $\lim\limits_{n \to \infty} N_{p,\mu}(1_A f_n - 1_A f) = 0$.

b) Es gelten $\lim\limits_{n \to \infty} N_{p,\mu}(1_A \cdot f_n) = N_{p,\mu}(1_A \cdot f)$ sowie $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_\Omega 1_a \cdot |f_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega 1_A \cdot |f|^p \, \mathrm{d}\mu$.

c) Sei $p = 1$ dann gilt $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_\Omega 1_A \cdot f_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega 1_A \cdot f \, \mathrm{d}\mu$. (Also insbesondere $\lim\limits_{n \to \infty} \int\limits_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu$)

M.21.9. Einige grundlegende Konvergenzsätze der Integrationstheorie

Konvergenzeigenschaften von Integralen und Funktionen spielen eine zentrale Rolle in der Integrationstheorie. Insbesondere behandeln wir in diesem Abschnitt die Vertauschbarkeit von Integral- und Limesbildung. Hinsichtlich der R-Integrierbarkeit ist bekannt, dass diese Vertauschbarkeit im Fall von gleichmäßiger Konvergenz möglich ist. wir werden in diesem Abschnitt erkennen, dass im Rahmen unseres Integrationskonzepts die gewünschte Vertauschbarkeit unter weitaus schwächeren Voraussetzungen vorliegt.
Das nachfolgende Resultat von P.L. Fatou ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Integrationstheorie und ihre Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Satz M.21.9.1 (Lemma von Fatou)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \,\mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen Lemma M.18.4 gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Weiter sei

$$g_n := \inf_{s\in\{n,n+1,\ldots\}} f_s. \tag{3}$$

Wegen $\{n, n+1, \ldots\} \supseteq \{n+1, n+2, \ldots\}$ gilt

$$\inf_{s\in\{n,n+1,\ldots\}} f_s \leq \inf_{s\in\{n+1,n+2,\ldots\}} f_s.$$

Hieraus folgt wegen (2) und (3) nun

$$g_n \leq g_{n+1}. \tag{4}$$

Wegen (2) und (3) liefert Lemma M.18.4 weiterhin

$$g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Wegen (2), (4) und (5) erbringt die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (vgl. Satz M.21.3.3) dann, dass $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \,\mathrm{d}\mu = \sup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \,\mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

Aufgrund der Eigenschaften des unteren Limes folgt bei Beachtung von (2) und (3) dann

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\{n,n+1,...\}} f_s \overset{(2),(3)}{=} \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu = \sup_{n\to\infty} \int_\Omega g_n \, d\mu. \tag{8}$$

Seien

$$n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

und

$$s \in \{n, n+1, ...\}. \tag{10}$$

Wegen (9), (10), (2) und (3) gilt dann, dass

$$g_n \leq f_s. \tag{11}$$

Wegen (2), (5), (9)-(11) und $f_s \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ liefert Teil (c) von Satz M.21.3.2 nun

$$\int_\Omega g_n \, d\mu \leq \int_\Omega f_s \, d\mu. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgt dann

$$\int_\Omega g_n \, d\mu \leq \inf_{s\in\{n,n+1,...\}} \int_\Omega f_s \, d\mu. \tag{13}$$

Unter Verwendung von (9),(13) und der Eigenschaften des unteren Limes folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega g_n \, d\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \inf_{s\in\{n,n+1,...\}} \int_\Omega f_s \, d\mu = \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{14}$$

Aus (8) und (14) folgt dann

$$\int_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, d\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \, d\mu. \tag{15}$$

Wegen (1) und (15) ist dann alles gezeigt. ■

Folgerung M.21.9.1. Sie $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es existiert ein $L \in (0, \infty)$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\int_\Omega f_n \, d\mu \leq L$.

(ii) Es existiert eine Menge $A \in \mathcal{N}_\mu$ derart, dass für alle $\omega \in \Omega \setminus A$ gilt $\lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega)$.

Dann gilt $\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \le L$.

Beweis. Wegen Satz M.21.9.1 gelten

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{1}$$

sowie

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Aus (2) und Voraussetzung (i) folgt

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu \le L. \tag{3}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. (1) gehört f bzw. $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt mittels Satz M.17.5 dann

$$\{\liminf_{n\to\infty} \ne f\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (ii) gilt

$$\{\liminf_{n\to\infty} \ne f\} \subseteq A. \tag{5}$$

Wegen $A \in \mathcal{N}_\mu$, (4) und (5) liefert Teil (b) von Satz (M.5.1) nun

$$\{\liminf_{n\to\infty} f_n \ne f\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{6}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, (1) und (6) liefert Teil (a) von Satz M.21.6.3 nun

$$\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Aus (3) und (7) folgt dann

$$\int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu \le L.$$

■

Wir wenden uns nun einem Kovergenzkonzept zu, welches in Maßtheorie und Stochastik gleichermaßen von Bedeutung ist. Ein Maß μ auf einem nichttrivialen meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ realisiert eine Bewertung der Mengen aus $\mathfrak{A}$. In diesem Sinn repräsentiert $\mathcal{N}_\mu$ das System der aus der Sicht der durch μ gegebenen Bewertung vernachlässigbaren Mengen aus $\mathfrak{A}$. In diesem Zusammenhang erscheint es natürlich einen Konvergenzbegriff für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ einzuführen, der auf der Tatsache basiert, dass die Mengen aller Punkte, in denen keine Konvergenz stattfindet, μ-vernachlässigbar sind. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.21.9.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall (kurz μ-f. ü.) auf Ω gegen f konvergent, falls ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ derart existiert, dass die Folge $(1_{\Omega\setminus B} \cdot f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen $1_{\Omega\setminus B} \cdot f$ konvergiert.

Bemerkung M.21.9.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie f eine Funkton aus $A(\Omega, \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f. ü. auf Ω gegen f.

Wir kommen nun zu einem zentralen Resultat der Integrationstheorie welches auf Henri Lebesgue zurückgeht. Unser Beweis wird maßgeblich auf das Lemma von Fatou zurückgreifen.

Satz M.21.9.2 (Lebesguescher Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in (0, \infty)$. Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f. ü. gegen f konvergiert. Weiterhin existiert ein $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ derart, dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega\setminus B_n}|f_n| \leq g$ existiert. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Im Fall $p = 1$ gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei

$$B := \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n. \tag{1}$$

Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{N}_\mu$ ist, folgt wegen (1) mittels Teil (d) von Satz M.5.1 nun

$$B \in \mathcal{N}_\mu. \tag{2}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Aus (1) folgt dann $B_n \subseteq B$. Hieraus folgt $\Omega\setminus B \subseteq \Omega\setminus B_n$ und somit nach Teil (a) von Bemerkung M.18.2 dann $1_{\Omega\setminus B} \leq 1_{\Omega\setminus B_n}$. Hieraus folgt bei Beachtung der Wahl von f_n, B_n und g dann

$$1_{\Omega\setminus B} \cdot |f_n| \leq g. \tag{4}$$

Sei $\tilde{g} : \Omega \to [0, \infty]$ definiert gemäß:

$$\tilde{g} = \begin{cases} g(\omega), \text{ falls } \omega \in \Omega\setminus B \\ \infty \ \ , \text{ falls } \omega \in B \end{cases} \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann
$$|f_n| \leq \tilde{g}. \tag{6}$$
Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (2) dann $\Omega \backslash B \in \mathfrak{A}$. Hieraus und aus $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ergibt sich mittels Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann
$$1_{\Omega \backslash \ B} \cdot g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$
Sei jetzt
$$h := (\infty) \cdot 1_B. \tag{8}$$
Wegen (2) ist $B \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt mit den Bemerkungen M.18.3 und M.18.8 dann
$$1_B \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{9}$$
Wegen (8) und (9) liefert Teil (a) von Lemma M.18.3 nun
$$h \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{10}$$
Aus (5) und (8) folgt dann
$$\tilde{g} = 1_{\Omega \backslash B} \cdot g + h. \tag{11}$$
Wegen (7), (10) und (11) liefert Teil (b) von Lemma M.18.3 nun
$$\tilde{g} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{12}$$
Aus (5) folgt
$$\{g \neq \tilde{g}\} \subseteq B. \tag{13}$$
Wegen $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, (12) und der Inklusion $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ folgt mittels Satz M.17.5 dann, dass
$$\{g \neq \tilde{g}\} \in \mathfrak{A}. \tag{14}$$
Wegen (2), (13) und (14) liefert Teil (b) von Satz M.5.1 dann
$$\{g \neq \tilde{g}\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{15}$$
Wegen $\{g, \tilde{g}\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und (15) liefert die Bemerkung M.21.7.6 dann $N_{p,\mu}(\tilde{g}) = N_{p,\mu}(g)$. Also wegen $g \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$ dann $N_{p,\mu}(\tilde{g}) \in [0, \infty)$ und somit auch
$$\tilde{g} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{16}$$
Nach Vorraussetzung gibt es ein

v41m
30.11.2009

$$C \in \mathcal{N}_\mu \tag{17}$$
mit folgenden Eigenschaften.
(I) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt $\lim\limits_{n \to \infty} 1_{\Omega \backslash C}(\omega) f_n(\omega) = 1_{\Omega \backslash C}(\omega) f(\omega)$. Wegen $\tilde{g} \in A(\Omega, [0, +\infty])$ folgt aus (3),(6),(I) dann
$$1_{\Omega \backslash C}(f) \leq \tilde{g}. \tag{18}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})$ sowie (16)-(18) liefert Satz M.21.7.1 dann

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}). \tag{19}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Wegen $\{f_n, f\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liefert Satz M.17.7 dann $f_n - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mit Bemerkung M.17.4 nun

$$f_n - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{21}$$

Sei

$$g_n := |f_n - f|^p. \tag{22}$$

Wegen (21) und (22) liefert Bemerkung M.18.9 nun

$$g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{23}$$

Unter Verwendung von (22), der Dreiecksungleichung (DU), $p \in (0, +\infty)$, Bemerkung M.17.8 und (6) folgt dann

$$0 \leq g_n \overset{(22)}{=} |f_n - f|^p \overset{DU}{\leq} [|f_n| + |f|]^p \overset{(6)}{\leq} [\tilde{g} + |f|]^p. \tag{24}$$

Wegen (19) ist nach Bemerkung M.21.7.3 dann

$$|f| \in \mathcal{L}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}). \tag{25}$$

Wegen (16) und (25) liefert Teil (b) von Satz M.21.7.2 dann

$$\tilde{g} + |f| \in \mathcal{B}^p(\Omega, \mathfrak{a}, \mu, \overline{\mathbb{R}}). \tag{26}$$

Sei

$$h := [\tilde{g} + |f|]^p. \tag{27}$$

Unter Beachtung von $\tilde{g} + |f| = |\tilde{g} + |f||$ folgt aus (26) und (27) dann

$$h \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{28}$$

Wegen (23) ist

$$g_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{29}$$

Wegen(24) sowie (27)-(29) liefert Satz M.21.5.1 nun

$$g_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{30}$$

Aus (21) und (22) erkennt man sogleich, dass $g_n \in A(\Omega, \mathbb{R})$. Somit ist $h - g_n$ wohldefiniert. Wegen (28) und (30) liefert Teil (b) von Satz M.21.5.1 dann

$$h - g_n \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{31}$$

$$\int_\Omega (h - g_n)\ \mathrm{d}\mu = \int_\Omega h\ \mathrm{d}\mu - \int_\Omega g_n\ \mathrm{d}\mu. \tag{32}$$

Wegen (31) gilt $h - g_n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$, während sich (24) und (27) weiterhin $h - g_n \in A(\Omega, [0, +\infty])$ ergibt. Somit ist

$$h - g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{33}$$

Wegen (26) und (33) erbringt die Anwendung des Lemmas von Fatou dann

$$\liminf_{n\to\infty}(h - g_n) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{34}$$

Sowie

$$\int\limits_\Omega (\liminf_{n\to\infty}(h - g_n))\ \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (h - g_n)\ \mathrm{d}\mu. \tag{35}$$

Unter Beachtung von (20),(31) und (32) folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (h - g_n)\ \mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \left[\int\limits_\Omega h\ \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega g_n\ \mathrm{d}\mu\right] = \int\limits_\Omega h\ \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n\ \mathrm{d}\mu. \tag{36}$$

Aus (35) und (36) folgt nun

$$\int\limits_\Omega (\liminf_{n\to\infty}(h - g_n))\ \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega h\ \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n\ \mathrm{d}\mu. \tag{37}$$

Sei

$$\omega \in \Omega \backslash C. \tag{38}$$

Wegen (38),(20),(22) und (I) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty}[h(\omega) - g_n(\omega)] = \lim_{n\to\infty}[h(\omega) - |f_n(\omega) - f(\omega)|^p]$$

$$= h(\omega) - [\lim_{n\to\infty} |f_n(\omega) - f(\omega)|]^p = h(\omega) - 0^p = h(\omega)$$

und folglich also

$$\liminf_{n\to\infty}[h(\omega) - g_n(\omega)] = h(\omega). \tag{39}$$

Wegen (28) und (34) gehören h und $\liminf_{n\to\infty}(h - g_n)$ zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$
Hieraus folgt mittels Satz M.17.5 dann

$$\{h \neq \liminf_{n\to\infty}(h-g_n)\} \in \mathfrak{A}. \tag{40}$$

Wegen (38) und (39) gilt

$$\{h \neq \liminf_{n\to\infty}(h-g_n)\} \subseteq C. \tag{41}$$

Wegen (17),(40) und (41) liefert Teil (b) von Satz M.5.1 nun

$$\{h \neq \liminf_{n\to\infty}(h-g_n)\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{42}$$

Wegen (20), (23) und (33) liefert Teil (b) von Lemma M.18.3 dann

$$h \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{43}$$

Wegen (34),(43) und (42) liefert Teil (a) von Satz M.21.6.3 dann

$$\int\limits_\Omega h \; \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega [\liminf_{n\to\infty}(h-g_n)] \; \mathrm{d}\mu. \tag{44}$$

Aus (37) und (44) nun

$$\int\limits_\Omega h \; \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega h \; \mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \; \mathrm{d}\mu. \tag{45}$$

Aus (28) und (45) ergibt sich

$$0 \leq -\limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \; \mathrm{d}\mu. \tag{46}$$

Unter Verwendung von (20),(24) und (46) folgt nun

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \; \mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \; \mathrm{d}\mu \overset{(46)}{\leq} 0. \tag{47}$$

Also $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \; \mathrm{d}\mu = 0$. Hieraus folgt wegen (20) und (22) nun

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{48}$$

Ist speziell $p = 1$, so folgt wegen (48) mittels Teil (c) von Satz M.21.8.9 dann

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f_n \, \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_\Omega f \, \mathrm{d}\mu. \tag{49}$$

Wegen (19),(47) und (49) ist dann alles gezeigt. ■

Es ist wichtig, die Rolle der Majorante in Satz M.21.9.2 zu verstehen. Diese besitzt nämlich die Funktion eines Schirms, unter dem sich alles kontrollieren lässt. Um die Bedeutung einer solchen Kontrolle zu erkennen, betrachen wir das folgende Beispiel.

Beispiel M.21.9.1. *Es möge der Maßraum $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1, \lambda^{(1)})$ vorliegen. Dann gilt*

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $f_n := n \cdot 1_{(0,\frac{1}{n})}$. Dann ist $f_n \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ und es gilt $\int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^{(1)} = n\lambda^{(1)}((0, \frac{1}{n})) = n\frac{1}{n} = 1$.

(b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunkiton $1_\emptyset$ auf $\mathbb{R}$.

(c) Es gilt $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\mathbb{R}} f_n \, d\lambda^{(1)} = \lim\limits_{n\to\infty} 1 = 1 \neq 0 = \int\limits_{\mathbb{R}} 1_\emptyset \, d\lambda^{(1)}$.

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1, +\infty)$. Dann besteht das Ziel unserer nachfolgenden Betrachtungen im Nachweis der Vollständigkeit des seminormierten Raumes $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$. Dieses Resultat wurde nahezu gleichzeitig unabhängig voneinander im Jahr 1907 von den Mathematikern F.Riesz und E. Fischer publiziert. Unser Beweis erfolgt in Anlehnung an H.Weyl. Hierbei wird wesentlich auf den Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz zurückgegriffen. Wir stellen nun einige weitere Hilfsmittel für den angestrebten Beweis bereit. Wir dehnen nun die Minkowskische Ungleichung auf Reihen und Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ aus.

Lemma M.21.9.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in [1, +\infty)$ und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$N_{p,\mu}(\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n) \leq (\sum_{n\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(f_n)).$$

Beweis. Wegen Lemma M.18.5 gilt

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Weiter sei

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{3}$$

Da $(f_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt wegen (3) mittels Teil (b) von Lemma M.18.3 dann

$$s_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{4}$$

Wegen (4) liefert Bemerkung M.18.9 dann

$$s_n^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Aus (2) und (3) folgt sogleich, $s_n \leq s_{n+1}$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.8 nun

$$s_n^p \leq s_{n+1}^p. \tag{6}$$

Unter Verwendung von (3) und Satz M.21.8.4 ergibt sich

$$N_{p,\mu}(s_n) \overset{(3)}{=} N_{p,\mu}\left(\sum_{k=1}^{n} f_k\right) \overset{Satz M.21.8.4}{\leq} \sum_{k=1}^{n} N_{p,\mu}(f_k) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(f_k). \tag{7}$$

Aus (2) und (7) folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(s_n) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(f_k). \tag{8}$$

Unter Beachtung von (2),(5) und (6) liefert die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz M.21.3.3) dann $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} s_n^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_{\Omega} (\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n^p)\, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n^p\, \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = \lim_{n\in\mathbb{N}} s_n = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (2), (6) und (10) folgt dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n^p = (\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n)^p = (\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k)^p. \tag{11}$$

Wegen (1) gilt insbesondere

$$|\sum_{k\in\mathbb{N}} f_k| = \sum_{k\in\mathbb{N}} f_k. \tag{12}$$

Unter Verwendung von (12),(11), (9) und der aus (4) folgenden Nichtnegativität der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} N_{p,\mu}(\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)) &= \left[\int\limits_{\Omega} |\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \overset{(12)}{=} \left[\int\limits_{\Omega} (\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k))^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \overset{(11)}{=} \left[\int\limits_{\Omega} (\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n^p) \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &\overset{(9)}{=} \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} (s_n^p) \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} |s_n|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left[(\int\limits_{\Omega} |s_n|^p \,\mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}}\right] \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(s_n). \end{aligned} \tag{13}$$

Aus (8) folgt nun

$$N_{p,\mu}\left(\sum_{k\in\mathbb{N}} f(k)\right) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(f(k)). \tag{14}$$

Wegen (1) und (14) ist dann alles gezeigt. ∎

Lemma M.21.9.2. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $(X, ||\cdot||)$ ein seminormierter Raum über K. Weiterhin sein $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(X, ||\cdot||)$, für welche eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_{n_k} - x|| = 0$ existieren. Dann gilt $\lim\limits_{n\to\infty} ||x_n - x|| = 0$.

v42m
31.11.2009

Lemma M.21.9.3. Sei $K \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und sei $(X, \|.\|)$ ein seminormierter Raum über K. Weiterhin seien die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X sowie $x \in X$ so gewählt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - x\| = 0$ erfüllt ist. Sei $\tilde{x} \in X$, dann sind folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \|x_n - \tilde{x}\| = 0$.

(ii) Es ist $\|x_n - \tilde{x}\| = 0$.

Lemma M.21.9.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derat, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Sei $\tilde{f} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen $\tilde{f}$.

(ii) Es ist $f - \tilde{f} \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Satz M.21.9.3 (F.Riesz/E.Fischer)**.** Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nicht trivialer Maßraum und $p \in [1, +\infty]$. Dann gilt:

a) Der seminormierte Raum $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$ ist vollständig.

b) Seien die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und die Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ so gewählt, daß $\lim\limits_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f_m - f|^p p \, d\mu = 0$ erfüllt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ welche μ-f.ü. auf Ω gegen f konvergiert.

Beweis.

a) Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ derart, daß für alle $r, s \in \{n_k, n_{k+1}, \dots\}$ gilt

$$N_{p,\mu}(f_r - f_s) < \frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

Wir betrachten die Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, folgt aus (1) für $k \in \mathbb{N}$ dann

$$N_{p,\mu}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < \frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Weiter sei

$$g_k = f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \tag{4}$$

Wegen $\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gilt:

(I) Es ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Wegen (3),(4) und (I) folgt mittels Satz M.17.7 nun

$$g_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (5) liefert Bemerkung M.18.9 nun

$$|g_k| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}).l \tag{6}$$

Wegen (3) und (6) liefert Lemma M.21.9.1 dann

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

sowie

$$N_{p,\mu}(\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|) \leq \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(|g_k|). \tag{8}$$

Unter Beachtung von Teil (a) von Bemerkung M.21.7.2, (3), (4) und (2) ergibt sich:

$$\sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(|g_k|) = \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(g_k) = \sum_{k\in\mathbb{N}} N_{p,\mu}(f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) < \sum_{k\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^k} = 1 \tag{9}$$

Es ist

$$N_{p,\mu}(\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|) = [\int_\Omega |\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k||^p \,\mathrm{d}\mu]^{\frac{1}{p}} = [\int_\Omega (\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|)^p \,\mathrm{d}\mu]^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Aus (8)-(10) folgt dann

$$\int_\Omega (\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|)^p \,\mathrm{d}\mu \in [0, 1]. \tag{11}$$

Wegen (7) liefert Bemerkung M.18.9 dann

$$(\sum_{k\in\mathbb{N}} |g_k|)^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{12}$$

Wegen (11) und (12) liefert Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 nun

$$(\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k|)^p \in \mathcal{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}) \tag{13}$$

Wegen (3) ergibt sich mittels Teil (a) von Satz M.21.6.5 dann $\{|(\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k|)^p| = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgt wegen $\{|(\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k|)^p| = +\infty\} = \{\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k| = +\infty\}$ dann

$$\{\sum_{k\in\mathbb{N}}|a_k| = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{14}$$

Sei

$$B := \{\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k| = +\infty\}. \tag{15}$$

Wegen (15) konvergiert für $\omega \in \Omega\backslash B$ die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k(\omega)|$ und somit also auch die Reihe $\sum_{k\in\mathbb{N}} g_k(\omega)$. Beachtet man dies sowie die wegen (4) für $k \in \mathbb{N}$ gültige Identität $\sum_{s=1}^k g_s = \sum_{s=1}^k (f_{n_{s+1}} - f_{n_s}) = f_{n_{k+1}} - f_{n_1}$, so ergibt sich für $\omega \in \Omega\backslash B$ die Konvergenz der Folge $(f_{n_k}(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$. Somit konvergiert die Folge $(1_{\Omega\backslash B} f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω. Es sei

$$F := \lim_{k\to\infty} 1_{\Omega\backslash B} f_{n_k}. \tag{16}$$

Wegen (14) und (15) gilt

$$B \in \mathcal{N}_\mu. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (17) dann

$$\Omega\backslash B \in \mathfrak{A}. \tag{18}$$

Wegen (18) und (I) ergibt sich mittels Bemerkung M.17.5 dann:

(II) Es ist $(1_{\Omega\backslash B} f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.

Wegen (16) und (II) liefert Folgerung M.17.10 dann

$$F \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R}). \tag{19}$$

Wegen (16), (17) und (19) gilt nun

(III) Die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-f.ü. auf Ω gegen F.

Wir wollen nun den Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz auf die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und die Funktion F anwenden. Hierzu gilt es eine geeignete Majorante $g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}) \cap \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ der Folge $(|f_{n_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ zu finden. Sei

$$g := \sum_{k\in\mathbb{N}}|g_k|. \tag{20}$$

Aus (13) und (20) folgt dann

$$g \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}). \tag{21}$$

Wegen $f_{n_1} \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ liefert Bemerung 21.7.3 dann

$$|f_{n_1}| \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \tag{22}$$

Wegen (21) und (22) liefert Teil (a) von Satz M.21.7.2 dann

$$g + |f_{n_1}| \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}). \tag{23}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Wegen (24), (3) und (4) gilt dann

$$f_{n_{k+1}} = (f_{n_{k+1}} - f_{n_k}) + f_{n_1} = (\sum_{s=1}^{k} (f_{n_{s+1}} - f_{n_s})) + f_{n_1} = \sum_{s=1}^{k} g_s + f_{n_1} \tag{25}$$

Unter Beachtung von (25) der Dreiecksungleichung und (20) folgt nun

$$|f_{n_{k+1}}| = |\sum_{s=1}^{k} g_s + f_{n_1}| \leq \sum_{s=1}^{k} |g_s| + |f_{n_1}| \leq \sum_{s \in \mathbb{N}} |g_s| + |f_{n_1}| = g + |f_{n_1}| \tag{26}$$

Wegen (19), (III), (23), (24) und (26) liefert der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz M.21.9.2) dann

$$F \in \mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \tag{27}$$

sowie

$$\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega} |f_{n_k} - F|^p \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{28}$$

Aus (28) folgt nun

$$\lim_{k \to \infty} N_{p,\mu}(f_{n_k} - F) = \lim_{k \to \infty} ([\int_{\Omega} |f_{n_k} - F|^p \, \mathrm{d}\mu]^{\frac{1}{p}}) = (\lim_{k \to \infty} \int_{\Omega} |f_{n_k} - F|^p \, \mathrm{d}\mu)^{\frac{1}{p}} = 0^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{29}$$

Da $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im seminormierten Raum $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$ ist, folgt wegen (27) und (29) mittels Lemma M.21.9.2 dann

$$\lim_{n \to \infty} N_{p,\mu}(f_n - F) = 0. \tag{30}$$

Wegen (27) und (30) ist der seminormierte Raum $(\mathcal{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$ dann vollständig.

b) Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} N_{p,\mu}(f_n - f) = 0. \tag{31}$$

Wegen (31) ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann insbesondere eine Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}), N_{p,\mu;\mathbb{R}})$. Wie in Beweis von (a) gezeigt wurde (vgl. (III),(27) und (30)) gibt es dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $F \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ derart, daß $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. auf Ω gegen F konvergiert und daß zudem

$$\lim_{n\to\infty} N_{p,\mu}(f_n - F) = 0. \tag{32}$$

erfüllt ist. Da $(\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),N_{p,\mu;\mathbb{R}})$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (31) und (32) mittels Lemma M.21.9.3 dann $N_{p,\mu}(F-f) = 0$. Hieraus folgt wegen Teil (b) von Bemerkung M.21.7.2 dann $F - f \in \mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, also wegen $F - f \in A(\Omega,\mathbb{R})$ dann $F - f \in \mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Hieraus sowie aus der Wahl von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und F folgt mittels Lemma M.21.9.4 dann, daß $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. auf Ω gegen f konvergiert. Damit ist alles gezeigt.

■

Satz M.21.9.4. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann ist der Raum $(\mathcal{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}), [\cdot,\cdot]_{\mu,\mathbb{R}})$ ein Semihilbertraum über $\mathbb{R}$ mit zugehöriger Norm $N_{2,\mu;\mathbb{R}}$.

Satz M.21.9.5. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1,+\infty)$. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),N_{p,\mu;\mathbb{R}})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ derart, daß $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-f.ü. auf Ω gegen f konvergiert. Dann gelten $f \in \mathcal{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ sowie $\lim\limits_{n\to\infty} N_{p,\mu}(f_n - f) = 0$.

M.21.10. Integration bezüglich eines Bildmaßes

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, einen nichttrivialen meßbaren Raum $(\Omega',\mathfrak{A}')$ und eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung und $T \in A(\Omega,\Omega')$. Nach Satz M.15.10 induzieren T und μ dann ein Bildmaß $T(\mu)$ auf $(\Omega',\mathfrak{A}')$. Unsere nachfolgenden Betrachtungen sind dann auf die Untersuchung des zwischen der $T(\mu)$-Integrierbarkeit einer Funktion $f' \in \mathcal{M}(\Omega',\mathfrak{A}';\overline{\mathbb{R}})$ und der μ-Integrierbarkeit der Funktion $f' \circ T$ gerichtet.

Bemerkung M.21.10.1. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, sowie $T \in A(\Omega,\Omega')$. Weiter sei $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$. Dann gilt:

a) Es ist $1_{A'} \circ T = 1_{T^{-1}(A')}$.

b) Sei $f' \in A(\Omega',\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $(1_{A'}f') \circ T = 1_{T^{-1}(A')}(f' \circ T)$.

Lemma M.21.10.1. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $T \in A(\Omega,\Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Dann gilt:

a) Sei $u' \in \mathcal{E}(\Omega',\mathfrak{A}')$. Dann gilt:

(a1) Es ist $u' \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

(a2) Sei $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A'_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldartellung von u'. Dann ist $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (T^{-1}(A'_j))_{j=1}^n]$ eine Noramldarstellung von $u' \circ T$.

b) Sei $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gilt:

(b1) Es ist $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b2) Sei $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u'_n = f'$. Dann ist $(u'_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u'_n \circ T) = f' \circ T$.

Satz M.21.10.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Weiter sei $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gelten $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_{\Omega'} f' \, \mathrm{d}[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T) \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $u' \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ und sei $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (A'_j)_{j=1}^n]$ eine Normaldartellung von u'. Wegen Teil (a) von Lemma M.21.10.1 ist dann $u' \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $[n, (\alpha_j)_{j=1}^n, (T^{-1}(A'_j))_{j=1}^n]$ eine Normaldarstellung von $u' \circ T$ unter Verwendung von Definition M.21.2.1 folgt nun

$$\int\limits_{\Omega'} u' \, \mathrm{d}[T(\mu)] = \sum_{j=1}^n \alpha_j([T(\mu)](A'_j)) = \sum_{j=1}^n \alpha_j \mu(T^{-1}(A'_j)) = \int\limits_{\Omega} u' \circ T \, \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Sei nun $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Wegen Teil (b1) von Lemma M.21.10.1 ist dann

$$f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Sei $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufgrund der Teile (a2) und (b) von Satz M.18.1 existierende monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} u'_n = f'$. Wegen Definition M.21.3.1 gilt dann

$$\int\limits_{\Omega'} f' \, \mathrm{d}[T(\mu)] = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega'} u'_n \, \mathrm{d}[T(\mu)] \tag{3}$$

während sich aus Teil (b2) von Lemma M.21.10.1 weiterhin ergibt, dass $(u'_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}}(u'_n \circ T) = f' \circ T$ ist. Hieraus folgt mittels Definition M.21.3.1 dann v43m 07.12.2009

$$\int\limits_{\Omega} (f' \circ T) d\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} (u'_n \circ T) d\mu. \tag{4}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen $u'_n \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ aus dem schon Gezeigten (vgl. (1)) dann $u'_n \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int\limits_{\Omega'} u'_n d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} (u'_n \circ T) d\mu$. Hieraus folgt in Verbindung mit (3) und (4) dann

$$\int\limits_{\Omega'} f' d[T(\mu)] \overset{(3)}{=} \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega'} u'_n d[T(\mu)] = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} (u'_n \circ T) d\mu \overset{(4)}{=} \int\limits_{\Omega} (f' \circ T) d\mu. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) ist dann alles gezeigt. ■

Folgerung M.21.10.1. Seine $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Weiter sei $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gilt

a) Sei $A' \in \mathfrak{A}'$. Dann gelten $1_{A'} \cdot f' \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$, $1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} \cdot f' d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} 1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T) d\mu.$$

b) Es gelten $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $T(\mu_{(f' \circ T)}) = [T(\mu)]_{f'}$.

Beweis.

a) Wegen $A' \in \mathfrak{A}'$ und $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$ folgt mittels Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann

$$1_{A'} \cdot f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}'). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Satz M.21.10.1 nun

$$(1_{A'} \cdot f') \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

und

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} \cdot f' d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} [(1_{A'} \cdot f') \circ T] d\mu. \tag{3}$$

Wegen Teil (b) von Bemerkkung M.21.10.1 gilt

$$(1_{A'} \cdot f') \circ T = 1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T). \tag{4}$$

Wegen (4) folgt aus (2) bzw. (3) dann

$$1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{5}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} \cdot f' d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} 1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T) d\mu. \tag{6}$$

wegen (1), (5) und (6) ist (a) bewiesen.

b) Wegen Satz M.21.10.1 gilt
$$f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$
Sei
$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{8}$$
Unter Beachtung von (8) folgt mittels (a) dann
$$[T(\mu_{(f' \circ T)})](A') = \mu_{(f' \circ T)}(T^{-1}(A')) = \int_{\Omega} [1_{T^{-1}(A')} \cdot (f' \circ T)] d\mu \overset{(a)}{=} \int_{\Omega'} 1_{A'} \cdot f' d[T(\mu)] = [T(\mu]_{f'}(A'). \tag{9}$$
Aus (8) und (9) folgt dann
$$T(\mu_{(f' \circ T)}) = [T(\mu)]_{f'}. \tag{10}$$
Wegen (7) und (10) ist dann (b) bewiesen.

■

Bemerkung M.21.10.2. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $T \in A(\Omega, \Omega')$ sowie $f' \in A(\Omega', \overline{\mathbb{R}})$. Dann gelten $(f' \circ T)^+ = (f')^+ \circ T$ und $(f' \circ T)^- = (f')^- \circ T$.

Satz M.21.10.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung. Weiter sei $f' \in \mathcal{M}(\Omega', \mathfrak{A}'; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

a) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (i) f' ist quasi-$[T(\mu)]$-integrierbar.
   (ii) $f' \circ T$ ist quais-μ-integrierbar.

b) Folgende Aussagen sind äquivalent:
   (iii) f' ist $[T(\mu)]$-integrierbar.
   (iv) $f' \circ T$ ist μ-integrierbar.

c) Sei (i) erfüllt. Dann ist $f' \circ T$ quasi-μ-integrierbar und es gilt $\int_{\Omega'} f' d[T(\mu)] = \int_{\Omega} (f' \circ T) d\mu$.

Beweis. Wegen Bemerkung M.18.9 gilt
$$\{(f')^+, (f')^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}'). \tag{1}$$
Wegen (1) folgen mittels Satz M.21.10.1 dann
$$\{(f')^+ \circ T, (f')^- \circ T\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{2}$$
sowie
$$\int_{\Omega'} (f')^+ d[T(\mu)] = \int_{\Omega} [(f')^+ \circ T] d\mu \tag{3}$$

und

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^- d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} [(f')^- \circ T] d\mu. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.21.10.2 gelten

$$(f' \circ T)^+ = (f')^+ \circ T \tag{5}$$

und

$$(f' \circ T)^- = (f')^- \circ T. \tag{6}$$

Aus (2), (5) und (6) folgt nun

$$\{(f' \circ T)^+, (f' \circ T)^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) folgt zudem

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^+ d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^+ d\mu \tag{8}$$

bzw.

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^- d[T(\mu)] = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^- d\mu. \tag{9}$$

Unter Beachtung von Definition M.21.5.1 ergibt sich wegen (8) und (9) sogleich die Behauptung von (a) und (b). Sei nun (i) erfüllt. Aufgrund des schon Gezeigten ist $f' \circ T$ dann quasi-μ-integrierbar. Somit ist $f' \circ T \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und unter Beachtung von Definition M.21.5.1 sowie (8) und (9) ergibt sich

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega'} f' d[T(\mu)] &\overset{DM.21.5.1}{=} \int\limits_{\Omega'} (f')^+ d[T(\mu)] - \int\limits_{\Omega'} (f')^- d[T(\mu)] \overset{(8),(9)}{=} \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^+ d\mu - \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^- d\mu \\ &\overset{DM.21.5.1}{=} \int\limits_{\Omega} (f' \circ T) d\mu. \end{aligned}$$

■

M.21.11. Einige Zusammenhänge zwischen den Integrationstheorien von Riemann und Lebesgue

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen dem hier entwickelten Konzept der Integration bzgl. eines Maßes und der klassischen Riemannschen Integrationstheorie. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen lässt sich wie folgt beschreiben. Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$ und $f \in A([a,b], [0, +\infty))$ sei stetig.
Beim Riemann-Integral unterteilt man den Urbildbereich $[a, b]$ in Teilintervalle und versucht, das Integral mit Hilfe von zu solchen Zerlegungen gehörigen Treppenfunktionen zu beschreiben.

Beim Maßintegral hingegen wird, wie eine nähere Analyse der für die Entwicklung dieses Konzepts zentralen Sätze M.21.3.1 und M.18.1 zeigt, eine Zerlegung des Bildbereichs in Teilintervalle vorgenommen und auf deren Grundlage werden die zur Berechnung des Integrals nötigen Elementarfunktionen erzeugt. Entscheidend für unser Vorgehen war, dass sich unsere Funktion f als Supremum einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen darstellen lässt. Analysieren wir nun den hierzu nötigen Satz M.18.1, so erkennen wir, dass die Konstruktion einer solchen monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen auf der Grundlage der Zerlegung des Bildbereichs der Funktion f vorgenommen wurde. Wir werden in diesem Abschnnitt nachweisen, dass eine auf einem abgeschlossenen endlichen Intervall Riemann-integrierbare reelle Funkton, welche zudem Borel-meßbar ist, auch bezüglich des eingeschränkten Lebesgue-Borel-Maßes integrierbar ist und dass die entsprechenden Integrale übereinstimmen. (Dies trifft allso insbesondere auf stetige Funktionen zu.) Diese Tatsache versetzt uns in die Lage, ganze Klassen von Lebesgue-Integralen durch Zurückführung auf Riemann-Integrale explizit berechnen zu können.
Wir wollen den soeben angekündigten Zusammenhang nun herleiten. Hierzu stellen wir zunächst die hierfür benötigten Begriffe und Resultate aus der Theorie des Riemann-Integrals bereit. Dies betrifft insbesondere den Darbouxschen Zugang zum Riemann-Integral.

Definition M.21.11.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Unter einer **Zerlegung** Z von $[a, b]$ verstehen wir dann eine nichtleere endliche Menge von abgeschlossenen Teilintervallen von $[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $\bigcup\limits_{I \in Z} I = [a, b]$.

(ii) Für alle $I, J \in Z$ mit $I \neq J$ ist $I \cap J$ entweder leeer oder einelementig. Die Endpunkte der durch Z bestimmten abgeschlossenen Teilintervalle von $[a, b]$ (zu denen stets a und b gehören) heißen die Teilpunkte der Zerlegung Z von $[a, b]$. Es bezeichne $Z[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

Definition M.21.11.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiterhin seien $Z, Z' \in Z[a, b]$. Dann heißt Z' eine **Verfeinerung** von Z, wenn zu jedem $I' \in Z'$ ein $I \in Z$ mit $I' \subseteq I$ existiert. In diesem Fall schreiben wir $Z \leq Z'$.

Bemerkung M.21.11.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiterhin seien Z und Z' Zerlegungen von $[a, b]$ mit $Z \leq Z'$. Es sei x ein Teilpuznkt von Z. Dann ist x auch ein Teilpunkt von Z'.

Satz M.21.11.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Dann gilt:

a) Seien $Z_1, Z_2 \in Z[a, b]$ so gewählt, dass sowohl $Z_1 \leq Z_2$ als auch $Z_2 \leq Z_1$ erfüllt ist. Dann gilt $Z_1 = Z_2$.

b) Seien $Z_1, Z_2, Z_3 \in Z[a, b]$ zo gewählt, dass $Z_1 \leq Z_2$ und $Z_2 \leq Z_3$ erfüllt ist. Dann gilt $Z_1 \leq Z_3$.

(c1) Es gibt genau ein $Z' \in Z[a,b]$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $Z_1 \leq Z'$ und $Z_2 \leq Z'$.

(ii) Falls $Z \in Z[a,b]$ so beschaffen ist, dass $Z_1 \leq Z$ und $Z_2 \leq Z$ erfüllt ist, so ist $Z' \leq Z$.

(c2) Es gibt genau ein $Z'' \in Z[a,b]$ mit folgenden Eigenschaften:

(iii) Es ist $Z'' \leq Z_1$ und $Z'' \leq Z_2$.

(iv) Falls $Z \in Z[a,b]$ so beschaffen ist, dass $Z \leq Z_1$ und $Z \leq Z_2$ erfüllt ist, so ist $Z \leq Z''$.

Satz M.21.11.1 führt uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.21.11.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter seien $Z_1, Z_2 \in Z[a,b]$. Dann heißt das durch die Eigenschaften (i) und (ii) aus Teil (c1) von Satz M.21.11.1 bzw. die Eigenschaften (iii) und (iv) aus Teil (c2) von Satz M.21.11.1 eindeutig festgelegte Element Z' bzw. Z'' von $Z[a,b]$ das **Supremum** bzw. **Infimum** von Z_1 und Z_2. Wir schreiben für Z' bzw. Z'' dann auch $sup\{Z_1, Z_2\}$ bzw. $inf\{Z_1, Z_2\}$.

Definition M.21.11.4. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiterhin sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $Z[a,b]$. Dann heißt $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ **monoton wachsend** bzw. **monoton fallend**, falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Z_n \leq Z_{n+1}$ bzw. $Z_{n+1} \leq Z_n$.

Wir wenden uns nun dem Darbouxschen Zugang zum Riemann-Integral zu.

Definition M.21.11.5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Sei $Z \in Z[a,b]$. Dann heißen die Zahlen

$$s_f(Z) := \sum_{I\in Z} (\inf_{x\in I} f(x)) \cdot \lambda^{(1)}(I) \text{ bzw. } S_f(Z) := \sum_{I\in Z} (\sup_{x\in I} f(x)) \cdot \lambda^{(1)}(I)$$

die zu Z gehörige **Darbouxsche Untersumme** bzw. **Darbouxsche Obersumme** von f.

Lemma M.21.11.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in (A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seien Z und Z' Zerlegungen von $[a,b]$ mit $Z \leq Z'$. Dann gilt

$$s_f(Z) \leq s_f(Z') \leq S_f(Z') \leq S_f(Z).$$

Lemma M.21.11.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seien $Z_1, Z_2 \in Z[a,b]$. Dann gilt

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2).$$

Beweis. Sei $Z := \sup\{Z_1, Z_2\}$. Wegen Teil (c1) von Satz M.21.11.1 gelten dann $Z_1 \leq Z$ und $Z_2 \leq Z$. Hieraus folgt in Verbindung mit Lemma M.21.11.1 nun

$$s_f(Z_1) \leq s_f(Z) \leq S_f(Z) \leq S_f(Z_2),$$

also

$$s_f(Z_1) \leq S_f(Z_2).$$

■

Lemma M.21.11.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b],\mathbb{R})$ beschränkt. Weiter seien

$$\underline{I}_f := \sup_{Z \in \mathbb{Z}[a,b]} s_f(Z) \text{ sowie } \overline{I}_f := \inf_{Z \in Z[a,b]} S_f(Z)$$

Dann gilt $\underline{I}_f \leq \overline{I}_f$

Definition M.21.11.6. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b],\mathbb{R})$ beschränkt. Dann heißen die in Lemma M.21.11.3 eingeführten Zahlen $\underline{I}_f$ bzw. $\overline{I}_f$ das **untere** bzw. **obere Darbouxsche Integral** von f.

Satz M.21.11.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b],\mathbb{R})$ beschränkt. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) f ist R-integrierbar.

  (ii) f ist beschränkt und es gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.

  (iii) f ist beschränkt und zu jedem $\epsilon \in (0, \infty)$ gibt es eine $Z \in Z[a,b]$ mit $S_f(Z) - s_f(Z) \in [0, \epsilon)$.

(b) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f = \int_a^b f(x)dx$.

Folgerung M.21.11.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b],\mathbb{R})$ eine R-integrierbare Funktion. Dann ist f beschränkt und es gibt eine monoton wachsende Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $Z[a,b]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \int_a^b f(x)dx \text{ und } \lim_{n\to\infty} S_f(Z) = \int_a^b f(x)dx.$$

Beispiel M.21.11.1 (Dirichletsche Sprungfunktion)**.** *Sei $f : [0,1] \to R$ definiert gemäß*

$$f(x) := \begin{cases} 1, \text{ falls } x \in [0,1]\backslash\mathbb{Q} \\ 0, \text{ falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q} \end{cases}$$

Dann gilt:

a) *Es ist f beschränkt und für jedes $Z \in Z[0,1]$ gelten $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$.*

b) *f ist nicht R-integrierbar.*

c) *Seien $A := [0,1], \mathfrak{B}_{1,A} = \mathfrak{B} \cap [0,1]$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)}|_{\mathfrak{B}_{1,A}}$. Dann gelten $f \in \mathcal{E}(A, \mathfrak{B}_{1,A})$ sowie*

$$\int_A f d\lambda_A^{(1)} = \int_A 1_{[0,1]\backslash\mathbb{Q}} d\lambda_A^{(1)} = \lambda_A^{(1)}([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = \lambda^{(1)}([0,1]\backslash\mathbb{Q}) = \lambda^{(1)}([0,1]) - \lambda^{(1)}(\mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1.$$

Bezeichnung: Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Für $Z \in Z[a,b]$ sei

$$t_{f,Z} := \sum_{I \in Z} (\inf_{x \in I} f(x)) 1_I \text{ sowie } T_{f,Z} := \sum_{I \in Z} (\sup_{x \in I} f(x)) 1_I$$

Bemerkung M.21.11.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seien $Z \in Z[a,b]$ und $y \in [a,b]$. Dann gilt:

a) Sei y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gibt es genau ein $I \in Z$ mit $y \in I$ und es gelte dann, dass

$$t_{f,Z}(y) = \inf_{x \in I} f(x) \text{ sowie } T_{f,Z}(y) = \sup_{x \in I} f(x).$$

b) Sei y ein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gibt es genau 2 voneinander verschiedene Intervalle I und I' von Z zu denen y gehört und es gelten dann

$$t_{f,Z}(y) = \inf_{x \in I} f(x) + \inf_{x \in I'} f(x) \text{ sowie } T_{f,Z}(y) = \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I'} f(x).$$

Lemma M.21.11.4. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Sei $Z \in Z[a,b]$. Dann gilt:

a) Sei $||f||_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Weiter sei $y \in [a,b]$. Dann gilt

(a1) Sei y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gilt:

$$-||f||_\infty \leq t_{f,Z}(y) \leq f(y) \leq T_{f,Z}(y) \leq ||f||_\infty.$$

(a2) Sei y ein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gilt:

$$-2||f||_\infty \leq t_{f,Z}(y) \leq T_{f,Z}(y) \leq 2||f||_\infty.$$

b) Seien $A := [a,b], \mathfrak{B}_{1,A} := \mathfrak{B}_1 \cap A$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)}|_{\mathfrak{B}_{1,A}}$. Dann gelten $\{t_{f,Z}, T_{f,Z}\} \subseteq \mathcal{L}^1(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R})$ sowie

$$\int_A t_{f,Z} d\lambda_A^{(1)} = s_f(Z) \text{ und } \int_A T_{f,Z} d\lambda_A^{(1)} = S_f(Z).$$

Lemma M.21.11.5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in A([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seinen $Z_1, Z_2 \in Z[a,b]$ so gewählt, dass $Z_1 \leq Z_2$ erfüllt ist. Weiter sein $y \in [a,b]$ so gewählt, dass y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_2 ist. Dann gelten:

$$t_{f,Z_1}(y) \leq t_{f,Z_2}(y) \leq T_{f,Z_2}(y) \leq T_{f,Z_1}(y)$$

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnittes. Bei dessen Beweis werden wir sowohl das Lemma von Fatou als auch den Lebesgueschen Satz der majorisierten Konvergenz benötigen.

Satz M.21.11.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Es seien $A := [a,b], \mathfrak{B}_{1,A} := \mathfrak{B}_1 \cap A$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)}|_{\mathfrak{B}_{1,A}}$. Weiterhin sei $f \in A([a,b],\mathbb{R})$ eine R-integrierbare Funktion aus $\mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R})$. Dann gilt:

a) Es ist $f \in \mathcal{L}^1(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R})$ und es gilt $\int\limits_A f d\lambda_A^{(1)} = \int\limits_a^b f(x)dx$.

b) Sei $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß:

$$F(x) = \begin{cases} f(x), \text{ falls } x \in A \\ \quad 0 \quad, \text{ falls } x \in \mathbb{R}\backslash A \end{cases}$$

Dann gelten $F \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R})$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F d\lambda^{(1)} = \int\limits_a^b f(x)dx.$$

Beweis. (a)Aufgrund der R-Integrierbarkeit von f liefert Folgerung M.21.11.1 die Beschränktheit von f sowie die Existenz einer monoton wachsenden Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $Z[a,b]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \int\limits_a^b f(x)dx \tag{1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{2}$$

Sei

$$||f||_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)|. \tag{3}$$

Da f beschränkt ist folgt aus (3) dann

$$||f||_\infty \in [0,\infty). \tag{4}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3) und (4) ergibt sich mittels Teil (a) von Lemma M.21.11.4 dann

$$-\infty < -2||f||_\infty \le t_{f,Z_n} \le T_{f,Z_n} \le 2||f||_\infty < \infty. \tag{6}$$

Aus Teil (b) von Lemma M.21.11.4 ergeben sich weiterhin

$$\{t_{f,Z_n}, T_{f,Z_n}\} \subseteq \mathcal{L}^1(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}) \tag{7}$$

sowie

$$\int_A t_{f,Z_n} d\lambda_A^{(1)} = s_f(Z) \tag{8}$$

und

$$\int_A T_{f,Z_n} d\lambda_A^{(1)} = S_f(Z). \tag{9}$$

Wegen (7) folgen mittels Teil (d) von Satz M.21.5.5 dann

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{L}^1(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}) \tag{10}$$

und

$$\int_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)} = \int_A T_{f,Z_n} d\lambda_A^{(1)} - \int_A t_{f,Z_n} d\lambda_A^{(1)}. \tag{11}$$

Aus (11), (9) und (8) folgt nun

$$\int_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)} = S_f(Z_n) - s_f(Z_n). \tag{12}$$

Wegen (6) gilt

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in A(A, [0,\infty]). \tag{13}$$

Wegen (10) gilt

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_1; \overline{\mathbb{R}}). \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt nun

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{E}^*(A, \mathfrak{B}_{1,A}). \tag{15}$$

Unter Beachtung von (5) und (15) erbringt die Anwendung von Lemma von Fatou (vergleiche Satz M.21.9.1 dann

$$\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) \in \mathcal{E}^*(A, \mathfrak{B}_{1,A}) \tag{16}$$

sowie

$$0 \leq \int_A [\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})] d\lambda_A^{(1)} \leq \liminf_{n\to\infty} \int_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)}. \tag{17}$$

Unter Verwendung von (1),(2) und (12) ergibt sich

$$0 = \int\limits_a^b f(x)dx - \int\limits_a^b f(x)dx \overset{(1),(2)}{=} \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) - \lim_{n\to\infty} s_f Z_n = \lim_{n\to\infty} (S_f(Z_n) - s_f(Z_n))$$

$$\overset{(12)}{=} \lim_{n\to\infty} \int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)} = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)}. \tag{18}$$

Aus (17) und (18) folgt nun

$$\int\limits_A \liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) d\lambda_A^{(1)} = 0. \tag{19}$$

Wegen (16) und (19) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.21.6.1 dann, dass

$$\{\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) \neq 0\} \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{20}$$

Bezeichnet für $n \in \mathbb{N}$ nun B_n die Menge der in (a,b) gelegenen Teilpunkte von Z_n, so ist B_n nach Konstruktion von Z_n dann endlich. Setzen wir nun $B := \bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} B_n$, so ist B dann eine höchstens abzählbare Teilmenge von A. Hieraus folgt aufgrund der Stetigkeit des Maßes $\lambda_A^{(1)}$ mittels Bemerkung M.7.5 dann

$$B \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{21}$$

Aus der Definition von B ergibt sich

$$[a,b] \backslash B = [a,b] \backslash (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} ([a,b] \backslash B_n). \tag{22}$$

Sei

$$y \in [a,b] \backslash B. \tag{23}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Wegen (22) bis (24) ist dann

$$y \in [a,b] \backslash B_n.$$

Somit ist y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_n. Hieraus ergibt sich mittels Teil (a1) von Lemma M.21.11.4 dann

$$-\,||f||_\infty \leq t_{f,Z_n}(y) \leq f(y) \leq T_{f,Z_n} \leq ||f||_\infty. \tag{25}$$

Aus (25) und (4) folgt dann

$$0 \leq f(y) - t_{f,Z_n}(y) \leq T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y). \tag{26}$$

Nach Konstruktion gilt

$$Z_n \leq Z_{n+1}. \tag{27}$$

Wegen (23) und (22) gilt

$$y \in [a,b] \backslash B_{n+1}.$$

Somit ist y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_{n+1}. Beachtet man dies sowie (27) so ergibt sich mittels Lemma M.21.11.5 dann

$$t_{f,Z_n}(y) \leq t_{f,Z_{n+1}}(y) \leq T_{f,Z_{n+1}}(y) \leq T_{f,Z_n}(y). \tag{28}$$

Wegen (24) und (28) ist dann $(t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ und $(T_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$. Somit sind die Folgen $(t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Monotonieprinzip jeweils konvergent. Sei

$$t_f(y) := \lim_{n\to\infty} t_{f,Z_n}(y) \tag{29}$$

und

$$T_f(y) := \lim_{n\to\infty} T_{f,Z_n}(y). \tag{30}$$

Wegen (29) und (30) ist dann die Folge $(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$T_f(y) - t_f(y) = \lim_{n\to\infty} (T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)). \tag{31}$$

Aus (31) folgt insbesondere

$$T_f(y) - t_f(y) = \liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)). \tag{32}$$

Sei

$$N := \{\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) \neq 0\}. \tag{33}$$

Aus (20) und (33) folgt dann

$$N \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{34}$$

Wegen (21) und (34) folgt mittels Teil (c) von Satz M.5.1 dann

$$B \cup N \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{35}$$

Es ist

$$[a,b] \backslash (B \cup N) = ([a,b] \backslash B) \cap ([a,b] \backslash N). \tag{36}$$

Sei

$$y \in [a,b] \backslash (B \cup N). \tag{37}$$

Wegen (36) und (37) gilt dann

$$y \in [a,b] \backslash B. \tag{38}$$

Wegen (38), (23) und (32) gilt dann

$$T_f(y) - t_f(y) = \liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)). \tag{39}$$

Wegen (36) und (37) gilt weiterhin

$$y \in [a,b]\backslash N. \tag{40}$$

Aus (33) und (40) folgt nun

$$\liminf_{n\to\infty}(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)) = 0. \tag{41}$$

Aus (39) und (41) folgt dann

$$T_f(y) - t_f(y) = 0. \tag{42}$$

Wegen (38), (42), (23) und (31) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty}(T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) = 0. \tag{43}$$

Aus (23), (24), (26), (38) und (43) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty}(f(y) - t_{f,Z_n}(y)) = 0$$

und somit also auch

$$\lim_{n\to\infty} t_{f,Z_n} = f(y). \tag{44}$$

Wegen (37) und (44) gilt dann: v45m

(I)Die Folge $(1_{[a,b]\backslash(B\cup N)}t_{f,Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[a,b]$ gegen $1_{[a,b]\backslash(B\cup N)}f$. 14.12.2009

Nach Voraussetzung gilt $f \in \mathcal{M}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}_1; \mathbb{R})$. Wegen (7) ist (t_{f,Z_n}) eine Folge aus $\mathcal{M}(\mathfrak{A}, \mathcal{B}_1; \mathbb{R})$. Kombiniert man dies mit (35), so folgt aus (I) dann:

(II) Die Folge (t_{f,Z_n}) konvergiert $\lambda_A^{(1)}$-f.ü. auf $[a,b]$ gegen f.

Wir wollen nun den Lebesqueschen Satz von der majoriesierten Konvergenz heranziehen. Hierzu müssen wir noch eine $\lambda_A^{(1)}$-integrierbare Majorante der Folge $(t_{f,Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bereitstellen. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Wegen Teil (a) Lemma M.21.11.4 gilt

$$(t_{f,Z_n}) \leq 2||f||_\infty \cdot 1_A. \tag{46}$$

Wegen $A \in \mathcal{B}_{1,A}$ und (4) ergeben sich mittels Folgerung M.21.2.1 dann

$$2||F||_\infty 1_A \in \mathcal{E}(A, \mathcal{B}_{1,A}) \tag{47}$$

und

$$\int_A 2||f||_\infty 1_A d_A^{(1)} = 2||f||_\infty[\lambda^{(1)}(A)] = 2||f||_\infty[\lambda^{(1)}([a,b])] = 2||f||_\infty(b-a) \in [0,\infty). \tag{48}$$

Wegen (47) und (48) liefert Teil (a) von Bemerkung M.21.5.3 dann

$$2||f||_\infty 1_A \in \mathcal{L}^1(A, \mathcal{B}_{1,A}, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}). \tag{49}$$

Wegen (5),(7),(45),(49) und (II) liefert der Lebesquesche Satz von der majoriesierten Konvergenz (vgl. Satz M.21.9.2) nun

$$f \in \mathcal{L}^1(A, \mathcal{B}_{1,A}, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}) \tag{50}$$

sowie

$$\int_A f d\lambda_a^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \int_A t_{f,z_n} d\lambda_A^{(1)}. \tag{51}$$

Wegen (1),(3) und (8) gilt

$$\int\limits_a^b f(x)dx = \lim_{n \to \infty} s_f(z_n) = \lim_{n \to \infty} \int\limits_A t_{f,z_n} d\lambda_A^{(1)}. \tag{52}$$

Aus (51) und (52) folgt dann

$$\int\limits_A f d\lambda_A^{(1)} = \int\limits_a^b f(x)dx. \tag{53}$$

Wegen (50) und (53) ist dann (a) bewiesen.

(b) Dies folgt wegen (1) sogleich aus den Teilen (c3) und (c4) von Satz M.21.5.10.

■

Folgerung M.21.11.2. Seien $a \in \mathbb{R}, b \in (a, +\infty)$ und $f \in \mathcal{C}(([a,b], \rho_{E,[a,b]}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Dann ist $f \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{B}_1 \cap [a,b]; \mathbb{R})$ sowie R-integrierbar und es gelten die Aussagen (a) und (b) von Satz M.21.11.3.

Beweis. Aus der Wahl von f folgt sogleich die R-integrierbarkeit von f. Da $\mathcal{B}_1 \cap [a,b]$ die borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes $([a,b], \rho_{E,[a,b]})$ ist, folgt aus der Wahl von f mittels Satz M.15.8 dann $f \in \mathcal{M}([a,b], \mathcal{B}_1 \cap [a,b]; \mathbb{R})$. Damit folgen die restlichen Behauptungen aus Satz M.21.11.3. ■

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, auch Lebesque-Integrale von Funktionen, welche nicht notwendig beschränkt oder aber mit einem unbeschränkten Intervall definiert sind, duch Zurückführung auf die entsprechenden uneigentlichen R-Integrale zu bestimmen. Dies wird nur bedingt gelingen. Im Falle nichtnegativer Funktionen werden wir unser Ziel vollständig realisieren. Andererseits werden wir jedoch auf Beispiele von Funktionen stoßen, welche uneigentlich R-integrierbar, jedoch nicht Lebesque-Integrierbar sind. Wir stellen nun eine für unser weiters Vorgehen wichtige Begriffsbildung bereit.

Definition M.21.11.7. Sei f ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $f \in A(I, \mathbb{R})$. Dann heißt f **lokal R-integrierbar** auf I, falls für jedes abgeschlossene endliche Teilintervall J von I R-Integrierbarkeit von $\mathrm{Rstr}._J f$ vorliegt.

Bemerkung M.21.11.3. Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und $f \in \mathcal{C}((I; \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Dann ist f lokal R-integrierbar auf I.

Satz M.21.11.4. Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}, \mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ und $\lambda_I^{(1)} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda_I^{(1)}$. Weiterhin sei f eine lokal auf R-integrierbare Funktion auf I mit Werten in $[0, +\infty)$, welche zu $\mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_{1,I})$ gehört. Dann gilt:

(a) Sei $I = \mathbb{R}$ dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda_I^{(1)} = \int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \mathrm{Rstr.}_{[-n,n]} f(x)\, dx.$$

(b) Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R} sei I = [a, +\infty)$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{n} \mathrm{Rstr.}_{[a,n]} f(x)\, dx.$$

(c) Mit einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ sei $I = (-\infty, b]$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{b} \mathrm{Rstr.}_{[-n,b]} f(x)\, dx.$$

(d) Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $I = (a, +\infty)$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{n} \mathrm{Rstr.}_{[a+\frac{1}{n},n]} f(x)\, dx.$$

(e) Mit einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ sei $I = (-\infty, b)$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{b-\frac{1}{n}} \mathrm{Rstr.}_{[-n,b-\frac{1}{n}]} f(x)\, dx.$$

(f) Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b = (a, \infty)$ gelte $I = (a, b]$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b} \mathrm{Rstr.}_{[a+\frac{1}{n},b]} f(x)\, dx.$$

(g) Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b = (a, \infty)$ gelte $I = [a, b)$. Dann gilt

$$\int\limits_{I} f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b-\frac{1}{n}} \mathrm{Rstr.}_{[a,b-\frac{1}{n}]} f(x)\, dx.$$

(h) Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b = (a, +\infty)$ gelte $I = (a, b)$. Dann gilt

$$\int_I f\, d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} \mathrm{Rstr.}_{[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}]} f(x)\, dx.$$

Bemerkung M.21.11.4. Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$. Weiterhin sei $f \in \mathcal{C}((I; \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap A(I, [0, +\infty))$. Dann ist f lokal R-integrierbar auf I und es gilt $f \in \mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_{1,I})$.

Beispiel M.21.11.2. *Sei $f : \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definiert gemäß $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. Dann gilt $f \in \mathcal{C}((I; \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ sowie $\int_{\mathbb{R}} f d\lambda^{(1)} = \pi$.*

Beweis. *Aus der Definition von f erkennt man sogleich, dass $f \in \mathcal{C}((I; \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap A(\mathbb{R}, [0, +\infty))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.4, dass f lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist und zu $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ gehört. Hieraus folgt mittels Teil (a) von Satz M.21.11.4 dann*

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}} f d\lambda^{(1)} &= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (Rstr._{[-n,n]} f)(x) dx \\
&= \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} dx \\
&= \lim_{n\to\infty} [\arctan x]_{-n}^{n} \\
&= \lim_{n\to\infty} [\arctan n - \arctan(-n)] \\
&= \lim_{n\to\infty} 2 \arctan n \\
&= 2 \lim_{n\to\infty} \arctan n \\
&= 2\frac{\pi}{2} \\
&= \pi.
\end{aligned}$$

■

Beispiel M.21.11.3. *Sei $a \in (0, +\infty)$. Dann gilt*

(a) *Sei $f_a : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definiert gemäß $x \mapsto 1_{(0,\infty)}(x) \exp\{-ax\}$. Dann gelten $f_a \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ sowie $\int_{\mathbb{R}} f_a\, d\lambda^{(1)} = \frac{1}{a}$.*

(b) *Sei $g_a : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \mapsto \exp\{-a|x|\}$.*
Dann gelten $g_a \in \mathcal{C}((\mathbb{R}; \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ sowie $\int_{\mathbb{R}} g_a\, d\lambda^{(1)} = \frac{2}{a}$.

Wir untersuchen nun den Fall reeller Funktionen beliebigen Vorzeichens. Wir geben zunächst ein Beispiel einer uneigentlich R-integrierbaren Funktionen, welche nicht Lebesque-integrierbar ist. Hierzu ziehen wir die *sinc*-Funktion heran und stellen zunächst einige Eigenschaften dieser Funktion bereit.

Bemerkung M.21.11.5. Sei $sinc : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß
$(sinc)(u) := \begin{cases} \frac{sin(n)}{n} & \text{, falls } n \in \mathbb{R}\backslash\{0\} \\ 0 & \text{, falls } n = 0 \end{cases}$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Es ist $(sinc)(x) = (sinc)(-x)$.

(b) Es ist $|(sinc)(x)| \leq 1$.

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} (\prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k})$.

(d) Es ist $(sinc)(x) = \lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k}$.

(e) $\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}[\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}]}\ldots$

Beispiel M.21.11.4. *Sei die sinc-Funktion wie in Bemerkung M.21.11.5 definiert. Dann gilt:*

(a) Es ist $sinc \in \mathcal{C}((\mathbb{R};\rho_{E,\mathbb{R}}),(\mathbb{R},\rho_{E,\mathbb{R}}))$.

(b) Es ist $sinc \in \mathcal{M}(\mathbb{R},\mathcal{B}_1;\mathbb{R}) \backslash \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B}_1,\lambda^{(1)};\mathbb{R})$.

(c) Das uneigentliche R-Integral $\int\limits_0^\infty (sinc)(x)dx$ *konvergiert.*

(d) Sei $p \in (1,+\infty)$. *Dann gilt* $sinc \in \mathcal{L}^p(\mathbb{R},\mathcal{B}_1,\lambda^{(1)};\mathbb{R})$.

Satz M.21.11.5. Sein I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}, \mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}}\lambda^{(1)}$. Weiterhin sei f eine quasi-$\lambda^{(1)}$-integrierbare und auf I lokal R-integrierbare Funktion. Dann gelten die Aussagen (a)-(h) aus Satz M.21.11.4.

Beweis. Sämtliche Behauptungen sind eine unmittelbare Konsequenz aus Defintion M.21.5.1, der Zerlegung $f = f^+ - f^-$, der Tatsache, dass f^+ und f^- lokal R-integrierbare Funktionen aus $\mathcal{E}^*(I,\mathcal{B}_{1,I})$ sind und der nach Satz M.21.11.4 bestehenden Gültigkeit der Aussagen (a)-(h) für lokal R-integrierbare Funktionen aus $\mathcal{E}^*(I,\mathcal{B}_{1,I})$. ■

M.21.12. Einige Aussagen über $\lambda^{(1)}$-stetige Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}_1)$

Bei einer ganzen Reihe von stochastichen Anwendungen spielen veschieden Klassen von $\lambda^{(1)}$-stetigen Maßen eine entscheidende Rolle. Aus diesem Grund erscheint es lohnenswert, die Klasse der $\lambda^{(1)}$-stetigen Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R},\mathcal{B}_1)$ näher zu betrachten. Zunächst studieren wir einige Wechselbeziehungen zwischen den Differenzierbarkeitseigenschaften der Verteilungsfunktionen eines solchen Maßes und verschiedenen anderen Größen.

Satz M.21.12.1. Sei $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R},\mathcal{B},\lambda^{(1)};\mathbb{R}) \cap A(\mathbb{R},[0,+\infty))$. Weiter sei $\nu := (\lambda^{(1)})_f$. Dann gilt

(a) Es ist $\nu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^1,\mathcal{B}_1)$.

(b) Es bezeichne $F_{\nu,l}$ bzw. $F_{\nu,r}$ die linke bzw. rechte Verteilungsfunktion von ν. Dann gilt $F_{\nu,l} = F_{\nu,r}$.

(c) Sei x_0 ein Stetigkeitspunkt von f. Dann ist $F_{\nu,l}$ in x_0 differenzierbar und es gilt $(F_{\nu,l})'(x_0) = f(x_0)$.

(d) Sei $f \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Dann ist $F_{\nu,l}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt $(F_{\nu,l})' = f$.

Satz M.21.12.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ derart beschaffen, dass $F_{\mu,l}$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Dann gelten $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$, $(F_{\mu,l})' \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ sowie $\mu = \lambda^{(1)}_{(F_{\mu,l})'}$.

Satz M.21.12.3. Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine bijektive stetige differenzierbare Funktion derart, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $g'(x) \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

(a) Bezeichne h die Umkehrabbildung von g. Dann ist h stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $h'(x) \in (0, +\infty)$.

(b) g ist $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-meßbar.

(c) Sei $f \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{L}^1(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$. Dann gelten $(f \circ h)h' \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}, \mathcal{B}_1)$ sowie
$$g((\lambda^{(1)}_f)) = (\lambda^{(1)})_{(f \circ h)h'}.$$

v46m 4.1.2010

M.21.13. Die Eulersche Gammafunktion

Wir behandeln in diesem Abschnitt eine der wichtigsten Funktionen der Analysis, die sogenannte Eulersche Gammafunktion. Wir wählen hier einen Zugang zur Gammafunktion, der an die Techniken dieses Kapitels angepasst ist. Wie zahlreiche wichtige konkrete Funktionen lässt sich die Gammafunktion für wesentliche Teile ihres Definitionsbereiches durch Integration gewinnen.

Lemma M.21.13.1. Seien $I := (0,1], \mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda^{(1)}_I := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$.Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : (0,1] \to [0, +\infty)$ sei definiert gemäß $x \mapsto x^{\alpha-1} \cdot exp\{-x\}$. Dann gelten $f \in \mathcal{L}((I, \rho_{E,i}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(I_{\mathcal{B}_{1,I}})$ sowie
$$\int_I f d\lambda^{(1)}_I \begin{cases} = +\infty, & \text{falls } \alpha \in (-\infty, 0) \\ \in (0, +\infty), & \text{falls } \alpha \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Lemma M.21.13.2. Seien $I := [1, +\infty)$, $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda^{(1)}_I := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : [1, +\infty) \to [0, +\infty)$ sei definiert gemäß $x \to x^{\alpha-1} \cdot exp\{-x\}$. Dann gelten $f \in \mathcal{C}((I, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_{1,I})$ sowie $\int_I f d\lambda^{(1)}_I \in (0, +\infty)$.

Lemma M.21.13.3. Seien $I := (0, +\infty)$, $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda^{(1)}_I := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Weiter seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f : (0, +\infty) \to [0, +\infty)$ sei definiert gemäß $x \mapsto x^{\alpha-1} \cdot exp\{-x\}$. Dann gilt

a) Es gelten $f \in \mathcal{C}((I, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}) \cap \mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_{1,I})$ sowie
$$\int_I f d\lambda^{[1]}_I \begin{cases} = +\infty, & \text{falls } \alpha \in (-\infty, 0] \\ \in (0, +\infty), & \text{falls } \alpha \in (0, +\infty). \end{cases}$$

b) Es ist f lokal R-integrierbar auf I und es gilt

$$\int_I f d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} (\text{Rstr.}_{[\frac{1}{n},n]} f)(x)dx.$$

Lemma M.21.13.3 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.21.13.1. Seien $I := (0,+\infty)$, $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} := \text{Rstr.}_{\cdot_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Dann heit die Funktion $\tilde{\Gamma} : (0,+\infty) \to (0,+\infty)$, welche gemäß

$$\tilde{\Gamma}(u) := \int_I x^{u-1} \cdot exp\{-x\} \lambda_I^{(1)}(dx)$$

erklärt ist, das **Eulersche Gammaintegral**.

Satz M.21.13.1. Es bezeeichne $\tilde{\Gamma}$ das Eulersche Gammaintegral. Sei $u \in (0,+\infty)$. Dann gelten $u+1 \in (0,+\infty)$ sowie $\tilde{\Gamma}(u+1) = u \cdot \tilde{\Gamma}(U)$.

Folgerung M.21.13.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

a) Es ist $\tilde{\Gamma}(U) = (n-1)!$.

b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\tilde{\Gamma}(\frac{n}{2}+k) = \frac{1}{2^k}(\prod_{j=1}^{k}[n+2(j-1)]) \cdot \tilde{\Gamma}(\frac{n}{2})$.

Wir suchen nun nach einer adäquaten Fortsetzung des Eulerschen Gammaintegrals auf eine „möglichst große" Teilmenge von $\mathbb{R}$.

Seien $s \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Unter Beachtung von Teil (a) von Folgerung M.21.13.1 ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\tilde{\Gamma}(s) &= (s-1)! = \frac{(s-1)! \cdot \prod_{j=s}^{s+n} j}{\prod_{j=s}^{s+n} j} = \frac{(s+n)!}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} = \frac{n! \cdot \prod_{k=1}^{s}(n+k)}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} = \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{s}(n+k)}{n^s} \\ &= \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \prod_{k=1}^{s} \frac{n+k}{n} = \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \prod_{k=1}^{s}(1+\frac{k}{n}).\end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{s}(1+\frac{k}{n}) = \prod_{k=1}^{s}(1+\lim_{n\to\infty}\frac{k}{n}) = \prod_{k=1}^{s} 1 = s^1 = 1$$

dann

$$\tilde{\Gamma}(s) = \lim_{n\to\infty}[\frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \prod_{k=1}^{s}(1+\frac{k}{n})] = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)}.$$

Die soeben erhaltene Produktdarstellung des Eulerschen Gammaintegrals für $s \in \mathbb{N}$ lässt sich tatsächlich auf $(0,+\infty)$ ausdehnen. Die Konvergenz des uneigentlichen Produkts liegt sogar für $\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$ vor. Dies ist der Gaußsche Zugang zur Gammafunktion.

Satz M.21.13.2. a) Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$ Für $n \in \mathbb{N}$ wird definiert

$$\Gamma_n(x) := \frac{n! \cdot n^x}{\prod\limits_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Dann ist die Folge $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und die Konvergenz ist gleichmäßig in jedem Intervall $(a,b] \subseteq \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$.

b) Es bezeichne Γ die Grenzfunktion der in (a) eingführten Funktionenfolge $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt:

(b1) Γ ist stetig auf $\mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$ und hat zudem keine Nullstelle.

(b2) Es bezeichne $\tilde{\Gamma}$ das Eulersche Gammaintegral. Dann gilt $\tilde{\Gamma} = \text{Rstr.}_{\cdot(0,+\infty)}\Gamma$.

Definition M.21.13.2. Die in Satz M.21.13.2 eingeführte Funktion $\Gamma : \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\} \to \mathbb{R}$ heißt die (reelle) **Eulersche Gammafunktion**.

Satz M.21.13.3. Sei $x \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$. Dann gelten $x+1 \in \mathbb{R}\backslash\{0,-1,-2,...\}$ sowie $\Gamma(x+1) = x \cdot \Gamma(x)$.

Für unsere weiteren Zwecke wird sich die Kenntnis des Funktionswert $\Gamma(\frac{1}{2})$ als besonders wichtig erweisen. Aus diesem Grund werden wir uns nun mit der Berechnung dieses Werts befassen. Unsere Strategie basiert auf der Heranziehung der Wallisischen Produktdarstellung der Zahl $\frac{\pi}{2}$. Deren Herleitung bestimmt den Inhalt unserer nächsten Überlegungen.

Bemerkung M.21.13.1. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $(cos)^n$ und $(sin)^n$ jeweils lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$.

Lemma M.21.13.4. Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $I_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bzw. $J_n : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \to \int\limits_0^x (cost)^n dt$ bzw. $x \to \int\limits_0^x (sint)^n dt$. Dann gilt

a) Sei $n \in \{2,3,...\}$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$I_n(x) = \frac{1}{n}(cosx)^{n-1} \cdot sinx + \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}(x)$$

sowie

$$J_n(x) = \frac{1}{n}(sinx)^{n-1} \cdot cosx + \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}(x).$$

b) Die Folgen $(I_n(\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(J_n(\frac{\pi}{2}))_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton fallend.

c) Sei $n \in \{2,3,...\}$. Dann gelten $I_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{n-1}{n} \cdot I_{n-2}(\frac{\pi}{2})$ sowie $J_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{n-1}{n} \cdot J_{n-2}(\frac{\pi}{2})$.

d) Es ist $I_0(\frac{\pi}{2}) = J_0(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$ sowie $I_1(\frac{\pi}{2}) = J_1(\frac{\pi}{2}) = 1$.

e) Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $I_n(\frac{\pi}{2}) = J_n(\frac{\pi}{2})$.

f) Sei $s \in \mathbb{N}$. Dann gelten

$$J_{2s}(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{2j-1}{2j} \text{ sowie } J_{2s+1}(\frac{\pi}{2}) = \prod_{j=1}^{s} \frac{2j}{2j+1}.$$

g) Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $J_{2s}(\frac{\pi}{2}) = \frac{1}{4^s} \cdot \binom{2s}{s} \cdot \frac{\pi}{2}$.

h) Sei $n \in \mathbb{N}$ Dann gilt $n \cdot J_{n-1}(\frac{\pi}{2}) \cdot J_n(\frac{\pi}{2}) = \frac{\pi}{2}$.

Lemma M.21.13.5. Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne J_n die in Lemma M.21.13.4 eingeführte Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann gilt

a) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{J_n(\frac{\pi}{2})}{J_{n-2}(\frac{\pi}{2})} = 1$.

b) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{J_n(\frac{\pi}{2})}{J_{n-1}(\frac{\pi}{2})} = 1$.

c) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} (n \cdot [J_n(\frac{\pi}{2})]^2) = \frac{\pi}{2}$.

d) Es ist $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt{n} \cdot [J_{2n}(\frac{\pi}{2})] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Satz M.21.13.4 (Wallisisches Produkt)**.** Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} (\frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1}) = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Wegen Teil (c) von Lemma M.21.13.5 gilt

$$\lim_{n\to\infty} ((2n+1) \cdot [J_{2n+1}(\frac{\pi}{2})]^2) = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil (f) von Lemma M.21.13.4 dann

$$\begin{aligned}
(2n+1) \cdot [J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2})]^2 &= (2n+1)[\prod_{j=1}^{n} \tfrac{2j}{2j+1}]^2 \\
&= (2n+1)(\prod_{j=1}^{n} \tfrac{2j}{2j+1}])(\prod_{j=1}^{n} \tfrac{2j}{2j+1}]) \\
&= (2n+1) \cdot \tfrac{2n}{2n+1} (\prod_{j=1}^{n-1} \tfrac{2j}{2j+1}) \cdot (\prod_{j=1}^{n} \tfrac{2j}{2j+1}) \\
&= 2n \cdot (\prod_{j=1}^{n-1} \tfrac{2j}{2j+1}) \cdot (\prod_{j=1}^{n} \tfrac{2j}{2j+1}) \\
&= (\tfrac{\prod_{j=1}^{n} sj}{\prod_{k=1}^{n-1} (2k+1)}) \cdot (\prod_{J01}^{n} \tfrac{2j}{2j+1} \\
&= \prod_{j=1}^{n} (\tfrac{2j}{2j-1} \cdot \tfrac{2j}{2j+1}).
\end{aligned} \tag{3}$$

Aus (1)-(3) folgt dann $\lim\limits_{n\to\infty} \prod\limits_{j=1}^{n} (\frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1}) = \frac{\pi}{2}$. ■

Satz M.21.13.5. Es gilt
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Wegen Definition M.21.13.2 gilt
$$\Gamma(\frac{1}{2}) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot n^{\frac{1}{2}}}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2} + k)}. \tag{1}$$

Sei
$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittes Teil (f) von Lemma M.21.13.4 dann
$$\begin{aligned} \frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2}+k)} &= \frac{n!\sqrt{n}}{\prod\limits_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2}} = \frac{2^{n+1}\cdot n!\cdot\sqrt{n}}{\prod\limits_{k=0}^{n} (2k+1)} = \frac{2\cdot\sqrt{n}\cdot(\prod\limits_{k=1}^{n} 2k)}{\prod\limits_{k=1}^{n} (2k+1)} = 2\sqrt{n}\cdot\prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \\ &\overset{\text{Lemma } 4(f)}{=} 2\sqrt{n}\cdot J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2}) = 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}}\cdot\sqrt{2n+1}\cdot J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2}) \\ &= 2\cdot\sqrt{\tfrac{n}{2n+1}}\cdot\sqrt{(2n+1)\cdot[J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2})]^2}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen Teil (c) von Lemma M.21.13.5 ist
$$\lim_{nn\to\infty} \sqrt{(2n+1)\cdot[J_{2n+1}(\frac{\pi}{2})]^2} = \sqrt{\lim_{n\to\infty}((2n+1)[J_{2n+1}(\frac{\pi}{2})]^2)}. \tag{4}$$

Aus (1)-(4) folgt dann
$$\begin{aligned} \Gamma(\tfrac{1}{2}) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n!\cdot n^{\frac{1}{2}}}{\prod\limits_{k=0}^{n} (\frac{1}{2}+k)} = \lim_{n\to\infty} 2\cdot\sqrt{\tfrac{n}{2n+1}}\sqrt{(2n+1)\cdot[J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2})]^2} \\ &= 2\lim_{n\to\infty}\sqrt{\tfrac{n}{2n+1}}\cdot\lim_{n\to\infty}\sqrt{(2n+1)\cdot[J_{2n+1}(\tfrac{\pi}{2})]^2} = 2\cdot\sqrt{\tfrac{1}{2}}\cdot\sqrt{\tfrac{\pi}{2}} = 2\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2} \\ &= \sqrt{\pi}. \end{aligned}$$

■

Folgerung M.21.13.2. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt
$$\Gamma(\frac{2n+1}{2}) = [\prod_{k=1}^{n}(2k-1)]\cdot\frac{\sqrt{\pi}}{2^n}.$$

Beweis. Idee: Verwende vollständige Induktion sowie die Sätze M.21.13.3 und M.21.13.5.
■

v47m
5.1.2010

Satz M.21.13.6. Seien $I := (0, +\infty)$, $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Weiterhin $s \in [0, +\infty)$ und die Funktion $f_s \colon I \to (0, +\infty)$ sei definiert gemäß $x \mapsto x^s \cdot \exp\{-x^2\}$. Dann gilt:

a) Es ist $f_s \in \mathcal{C}((I, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_I)$ und es gilt $\int_I f_s \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{s+1}{2})$.

b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten $\int_I f_{2k} \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} & \text{, falls} k = 0 \\ [\prod_{j=1}^{k}(2j-1)]\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}, & \text{falls} k \in \mathbb{N} \end{cases}$. sowie $\int_I f_{2k+1} \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{k!}{2}$.

Beweis.

a) Aus der Definition von f_s folgt sogleich $f_s \in \mathcal{C}((I, \rho_{E,I}, (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap A(I, [0, +\infty))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.4, dass f_s zu $\mathcal{E}^*(I, \mathcal{B}_I)$ gehört und zudem lokal R.-integrierbar auf I ist. Hieraus folgt mittels Teil (d) von Satz M.21.11.4 dann

$$\int_I f_s \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[\frac{1}{n}, n]} f_s)(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \exp\{-x^2\} \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Unter Verwendung der Substitutionsregel für R-Integrale folgt nun

$$\int_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \exp\{-x^2\} \, \mathrm{d}x = \int_{(\frac{1}{n})^2}^{n^2} t^{\frac{s}{2}} \exp\{-t\} \frac{1}{2} t^{-\frac{1}{2}} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_{(\frac{1}{n})^2}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \exp\{-t\} \, \mathrm{d}t \tag{3}$$

Unter Beachtung von Teil (b) von Lemma M.21.13.3 angewandt auf die Teilfolge $(n^2)_{n \in \mathbb{N}}$ von $(n)_{\in \mathbb{N}}$, Definition 1 sowie Teil (b2) von Satz M.21.13.2 folgt dann

$$\lim_{n \to \infty} \int_{(\frac{1}{n})^2}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \exp\{-t\} \, \mathrm{d}t = \int_I t^{\frac{s+1}{2}-1} \exp\{-t\} \lambda_I^{(1)}(\,\mathrm{d}t) = \tilde{\Gamma}(\frac{s+1}{2}) = \Gamma(\frac{s+1}{2}) \tag{4}$$

Unter Verwendung (1)–(4) folgt dann $\int_I f_s \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \exp\{-x^2\} \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{2} \int_{(\frac{1}{n})^2}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \exp\{-t\} \, \mathrm{d}t \overset{(4)}{=} \frac{1}{2}\Gamma(\frac{s+1}{2})$.

b) Unter Beachtung von (a), Satz M.21.13.5 und Folgerung M.21.13.2 ergibt sch $\int_I f_{2b} \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{2k+1}{2}) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi} & \text{, falls } k = 0 \\ [\prod_{j=1}^{k}(2j-1)]\frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}}, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \end{cases}$. Unter Beachtung von (a), Teil (b2) von Satz M.21.13.2 und Teil (a) von Folgerung M.21.13.1 ergibt sich weiterhin $\int_I f_{2k+1} \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma(\frac{2k+1+1}{2}) = \frac{1}{2}\Gamma(k+1) = \frac{1}{2}\tilde{\Gamma}(k+1) = \frac{k!}{2}$.

■

M.21.14. Über die Familie der Normalverteilungen auf $(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht eine parametrische Familie von W-Maßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, welche eine zentrale Rolle in der W-Theorie einnimmt. Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ sei definiert gemäß $x \mapsto \exp\{-x^2\}$. Dann ist g offensichtlich stetig, besitzt aber (wie aus der Analysis bekannt ist) keine Elementare Stammfunktion. Hierdurch wird die Berechnung des Integrals $\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}$ erschwert.

Satz M.21.14.1. Sei $g\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definiert gemäß $x \mapsto \exp\{-x^2\}$. Dann gelten $g \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \sqrt{\pi}$.
Beweis. Aus der Definition von g folgt sogleich $g \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap A(\mathbb{R}, [0, +\infty))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.4, dass g zu $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ gehört und zudem lokal R-Integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt mittels Satz M.21.11.4, dass

$$\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[-n,n]} g)(x) \, \mathrm{d}x \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{2}$$

Da g eine gerade Funktion ist gilt

$$\int_{-n}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[-n,n]} g)(x) \, \mathrm{d}x = 2 \int_{0}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[0,n]} g)(x) \, \mathrm{d}x \tag{3}$$

Seien $I := (0, +\infty)$, $\mathcal{B}_{1,I} := \mathcal{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} := \mathrm{Rstr.}_{\mathcal{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Unter Beachtung von Teil (d) von Satz M.21.11.4 sowie Teil (b) von Satz M.21.13.6 folgt dann

$$\int_{0}^{\infty} (\mathrm{Rstr.}_{[0,+\infty]} g)(x) \, \mathrm{d}x = \lim_{n \to \infty} \int_{\frac{1}{n}}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[\frac{1}{n},n]} g)(x) \, \mathrm{d}x = \int_{I} (\mathrm{Rstr.}_{I} g)(x) \, \mathrm{d}x = \frac{1}{2}\sqrt{\pi} \tag{4}$$

Unter Beachtung von (1)-(4) folgt nun
$\int_{\mathbb{R}} g \, \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim\limits_{n \to \infty} \int_{-n}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[-n,n]} g)(x) \, \mathrm{d}x = \lim\limits_{n \to \infty} 2 \int_{0}^{n} (\mathrm{Rstr.}_{[0,n]} g)(x) \, \mathrm{d}x$
$= 2 \cdot \int_{0}^{\infty} (\mathrm{Rstr.}_{[0,+\infty)} g)(x) \, \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = \pi.$ ∎

Satz M.21.14.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Es sei $f_{a,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \to (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$f_{a,\sigma^2}(x) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\{-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\}.$$

Dann gilt:

a) Es ist $f_{a,\sigma^2} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

b) Unter Beactung von (a) werde definiert $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} := (\lambda^{(1)})_{f_{a,\sigma^2}}$. Dann gelten $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})$ (Hierbei ist $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemaß $x \mapsto \sigma x + a$.).

c) Es ist Spec $(\mathscr{N}_{a,\sigma^2} = \mathbb{R}$.

Definition M.21.14.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz M.21.14.2 eingeführte W-Maß $\mathscr{N}_{a,\sigma^2}$ die **Normalverteilung** mit den Parametern a und σ^2 und die in Satz M.21.14.2 eingeführte Funktion f_{a,σ^2} die **kanonische $\lambda^{(1)}$-Dichte** von $\mathscr{N}_{a,\sigma^2}$. Insbesondere wird $\mathscr{N}_{0,1}$ die **Standartdnormalverteilung** genannt.

Es sei erwähnt, daß die kanonischen $\lambda^{(1)}$-Dichten der Normalverteilungsfamilie auch als Gaußsche Glockenkurven bezeichnet werden. Auf den 10 DM-Schein war neben einem Porträt von C.F.Gauß auch eine Gaußsche Glockenkurve zu sehen.

M.21.15. Einige Beispiele von $\lambda^{(1)}$-stetigen Maßen aus $\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Zahlreiche der in konkreten stochastischen Anwendungen auftretende Maße aus $\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ besitzen die Eigenschaft der $\lambda^{(1)}$-Stetigkeit. Das Anliegen diesen Abschnitts besteht darin einige für unsere späteren Betrachtungen bedeutsame Maße der genannten Klasse vorzustellen.

Satz M.21.15.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Es sei $\sigma_{a,b} \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$\sigma_{a,b}(x) := \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in \mathbb{R} \backslash [a, b] \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in (\frac{a+b}{2}] \end{cases}$$

Dann gilt

a) Es ist $\sigma_{a,b} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

b) Unter Beachtung von (a) werde definiert $S_{a,b} := (\lambda^{(1)})\sigma_{a,b}$. Dann gelten $S_{a,b} \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $\mathbb{R} \backslash [a, b] \in \mathcal{N}_{S_{a,b}}$.

c) Es ist Spec $(S_{a,b}) = [a, b]$.

d) Es ist $F_{S_{a,b},l} = F_{S_{a,b},r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_{S_{a,b},l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, a) \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2} & \text{, falls } x \in [a, \frac{a+b}{2}] \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in (\frac{a+b}{2}, b] \\ 1 & \text{, falls } x \in (b, +\infty) \end{cases}$.

Definition M.21.15.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Dann heißt daß in Satz M.21.15.1 eingeführte W-Maß $S_{a,b} \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die **Simpsonverteilung** (oder **Dreiecksverteilung**) mit den Parametern a und b. Im Fall $b \in (0, +\infty)$ heißt $S_{-b,b}$ auch die **symmetrische Simpsonverteilung** (oder auch symmetrische Dreiecksverteilung) zum Parameter b.

Bemerkung M.21.15.1. Seien die Zahlen $a_1 \in \mathbb{R}$ und $b_1 \in (a_1, +\infty)$ sowie $a_2 \in \mathbb{R}$ und $b_2 \in (a_2, +\infty)$ so gewählt, daß $S_{a_1,b_1} = S_{a_2,b_2}$ erfüllt ist. Dann gelten $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$.
Beweis. Unter Beachtung von Teil(c) von Satz M.21.15.1 ergibt sich
$[a_1, b_1] = \text{Spec}\,(S_{a_1,b_1}) = \text{Spec}\,(S_{a_2,b_2}) = [a_2, b_2]$. Hieraus folgen $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. ■

Satz M.21.15.2. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0,+\infty)$. Es sei $F_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \to (0,+\infty)$ definiert gemäß

$$F_{\alpha,\beta}(x) := \frac{\beta}{\pi} \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2}.$$

Dann gilt:

a) Es ist $F_{\alpha,\beta} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

b) Unter Beachtung von (a) werde deifniert $\gamma_{\alpha,\beta} := (\lambda^{(1)})_{F_{\alpha,\beta}}$. Dann gelten $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $\gamma_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1})$.

c) Es ist $\mathrm{Spec}\,(\gamma_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}$.

d) Es ist $F_{\gamma_{\alpha,\beta},l} = F_{\gamma_{\alpha,\beta},r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_{\gamma_{\alpha,\beta},l}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan \frac{x-\alpha}{\beta} + \frac{1}{2}$

Definition M.21.15.2. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0,+\infty)$. Dann heißt das in Satz M.21.15.2 eingeführte W-Maß $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die **Cauchy-Verteilung** mit den Parametern α und β. Insbesondere wird $\gamma_{0,1}$ auch als **Standard-Cauchy-Verteilung** bezeichnet.

Wir wenden uns nun einer Famile von W-Maßen zu, welche insbesondere zur modellierung der Lebensdauer von Objekten verwendet wird welche einem Alterungsprozeß unterliegen. Dies trifft z.B. auf Radioktive Atome, Glühbirnen oder Transistoren zu.

Satz M.21.15.3. Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und sei $e_\eta\colon \mathbb{R} \to [0,+\infty]$ definiert gemäß

$$e_\eta(x) := \eta 1_{[0,+\infty)}(x) \exp\{-\eta x\}.$$

Dann gilt:

a) Es ist $e_\eta \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

b) Unter Beachtung von (a) werde definiert $E_\eta := (\lambda^{(1)})_{e_\eta}$. Dann gelten $E_\eta \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_{E_\eta}$.

c) Es ist $\mathrm{Spec}\,(E_\eta) = [0,+\infty)$.

d) Es ist $F_{E_\eta,l} = F_{E_\eta,r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt $F_{E_\eta,l}(x) = \begin{cases} 0 & \text{, falls } x \in (-\infty, 0] \\ 1 - \exp\{-\eta x\}, & \text{falls } x \in (0,+\infty). \end{cases}$

Definition M.21.15.3. Sei $\eta \in (0,+\infty)$. Dann heißt das in Satz M.21.15.3 eingeführte W-Maß $E_\eta \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ die **Exponentialverteilung** zum Parameter η.

v48m
11.1.2010

Satz M.21.15.4. Sein $a \in \mathbb{R}, \eta \in (0,\infty)$. Sei $l_{a,\eta} : \mathbb{R} \to [0,+\infty)$ definiert gemäß

$$l_{a,\eta}(x) := \frac{\eta}{2} \exp(-\eta|x-a|).$$

Dann gilt:

(a) $l_{a,\eta} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$.

(b) Unter Beachtung von (a) sei $L_{a,\eta} := (\lambda^{(1)})_{l_{a,\eta}}$.
Dann ist $L_{a,\eta} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), T_{\frac{1}{2},a}(L_{0,1}) = L_{a,\eta}$.

(c) $spec(L_{a,\eta}) = \mathbb{R}$.

(d) Es ist $F_{L_{a,\eta,l}} = F_{L_{a,\eta,r}}$, und für $x \in \mathbb{R}$ gilt
$F_{L_{a,\eta}}(x) := \begin{cases} \frac{1}{2} exp(\eta(x-a)) & , x \in (-\infty, a) \\ 1 - \frac{1}{2} exp(-\eta(x-)) & , x \in [a, +\infty). \end{cases}$

Definition M.21.15.4. Seien $a \in \mathbb{R}, \eta \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz eingeführte W-Maß $L_{a,\eta}$ die **Laplace-Verteilung** mit den Parametern a und η . Insbesondere wird $L_{0,1}$ auch als **Standard-Laplace-Verteilung** bezeichnet.

In den nachfolgenden Betrachtungen greifen wir auf Eulersche Gammafunktion Γ zurück.

Satz M.21.15.5. Seien $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Sei $h_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$h_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0] \\ \frac{\beta\alpha}{\Gamma(\alpha)} x^{\alpha-1} \exp(-\beta x) & , x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$.

(b) Unter Beachtung von (a) werde definiert. $\Gamma_{\alpha,\beta} := (\lambda^{(1)})_{h_{\alpha,\beta}}$.
Dann $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), (-\infty, 0] \in \mathcal{N}_{p_{\alpha,\beta}}$.

(c) $\Gamma_{\alpha,\beta} = T_{\frac{1}{\beta},0}(\Gamma_{\alpha,1})$.

(d) $spec\Gamma_{\alpha,\beta} = [0, +\infty)$.

Definition M.21.15.5. Seine $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Dann heit das in Satz M.21.15.5 eingeführte W-Maß $\Gamma_{\alpha,\beta}$ die **Gammaverteilung** mit den Parametern α und β.

Wir erkennen nun, dass die in Defnition M.21.15.3 eingeführte Exponentialverteilung spezielle Gammaverteilungen sind.

Satz M.21.15.6. Sei $\eta \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

(a) $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$.

(b) $E_\eta = T_{\frac{1}{\eta},0}(E_1)$.

Wir heben nun eine spezielle Teilklasse von Gammaverteilungen, welche für die mathematische Satistik von besonderem Interesse ist, heraus.

Definition M.21.15.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ dann wird die Gammaverteilung $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ mit den Parametern $\frac{n}{2}, \frac{1}{2}$ auch als **zentrale Chiquadrat-Verteilung** mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Anstelle von $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ wird auch das Symbol χ_n^2 verwendet.

Satz M.21.15.7. Sei $T : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \mapsto x^2$. Dann ist T eine $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-meßbare Abbildung und falls $N_{0,1}$ die Standardnormalverteilung bezeichnet, gilt

$$T(N_{0,1}) = \chi_n^2.$$

Wir studieren nun eine 2-parametrische Familie von W-Maßen, welche die Familie der Exponentialverteilung umfasst und ähnlich wie diese rege Anwendung bei der Modellierung der Lebensdauer von verschiedenen Phänomenen und Objekten in Natur und Technik findet.

Satz M.21.15.8. Seien $\alpha, \beta \in (0, \infty)$. Sei $w_{\alpha,\beta} : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ definiert gemäß:

$$w_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} \alpha, \beta x^{\alpha-1} \exp(-\beta x^{\alpha}) & , x \in (0, \infty) \\ 0 & , x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) $w_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$.

(b) Unter Beachtung von (a) sei $W_{\alpha,\beta} := (\lambda^{(1)})_{w_{\alpha,\beta}}$.
Dann gilt $W_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), (-\infty, 0] \in \mathcal{N}_{w_{\alpha,\beta}}$.

(c) $specW_{\alpha,\beta} = [0, +\infty)$.

(d) $F_{w_{\alpha,\beta},l} = F_{w_{\alpha,\beta},r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt. $F_{w_{\alpha,\beta},l}(x) := \begin{cases} 0 & , x \in (-\infty, 0] \\ 1 - \exp(-\beta x^{\alpha}) & , x \in (0, +\infty) \end{cases}$

(e) $W_{1,\beta} = \Gamma_{1,\beta} = E_{\beta}$.

Definition M.21.15.7. Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz M.21.15.8 eingeführte W-Maß $W_{\alpha,\beta}$ die **Weihbuhl-Verteilung** mit Parametern α und β.

M.22. Einige diskrete W-Maße aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$

Bemerkung M.22.0.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0, p \in [0, 1]$. Weiter sei

$$\beta_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \epsilon_{k,\mathcal{B}_1}.$$

Dann ist $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^{1,mol}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), \beta_{n,1} = \epsilon_{1,\mathcal{B}_1}, \beta_{n,0} = \epsilon_{0,\mathcal{B}_1}$.

Definition M.22.0.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0, p \in [0, 1]$. Dann heißt das in Bemerkung M.22.0.1 eingeführte W-Maß $\beta_{1,p}$ die **Binomialverteilung** mit den Parametern n und p. Die Binomialverteilung $\beta_{1,p}$ wird auch **Bernoulli-Veteilung** zum Parameter p genannt.

Bemerkung M.22.0.2. Seien $p \in (0, 1]$,

$$G_p := \sum_{k \in \mathbb{N}_0} (1-p)^k p \epsilon_{k,\mathcal{B}_1},$$

$$\tilde{G}_p := \sum_{k\in\mathbb{N}} (1-p)^{k-1} p\epsilon_{k,\mathcal{B}_1}.$$

Dann gehören G_p und $\tilde{G}_p$ zu $M_+^{1,d}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1)$ und $G_1 = \epsilon_{0,\mathcal{B}_1}, \tilde{G}_1 = \epsilon_{1,\mathcal{B}_1}$.

Definition M.22.0.2. Sei $p \in (0,1]$. Dann heißt G_p bzw. $\tilde{G}_p$ die **geometrische Verteilung** zum Parameter p bzw. die **Ersterfolgsverteilung** zum Parameter p.

Bemerkung M.22.0.3. Seien $p \in (0,1], r \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$G_{p,r} := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} \binom{k+r-1}{k} (1-p)^k p^r \epsilon_{(k,\mathcal{B}_1)}.$$

Dann gelten $G_{p,r} \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^{\cdot}\mathcal{B}_1), G_{p,1} = G_p, G_{1,r} = \epsilon_{0,\mathcal{B}_1}$.

Definition M.22.0.3. Sei $p \in (0,1], r \in \mathbb{N}$. Dann heißt das in Bemerkung M.22.0.3 eingeführte W-Maß $G_{p,r}$ die **negative Binomialverteilung** mit den Parameter p und r.

Bemerkung M.22.0.4. Seien die Zahlen $N, M, n \in \mathbb{N}$ so gewählt so gewählt, dass $n \leq N$ und $M \leq N$ erfüllt ist. Weiter sei

$$H_{N,M,n} = \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k}\binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \epsilon_{k,\mathcal{B}_1}.$$

Dann gelten $H_{N,M,n} \in \mathcal{M}_+^{1,mol}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), X_{\mathcal{B}_1, H_{N,M,n}} := \{k \in \mathbb{R}^1 : H_{N,M,n}(\{k\}) \neq 0\} = \{k \in \mathbb{N}_0 : max\{0, n+M-N\} \leq k \leq min\{n, M\}\}$.

Herkunft dieses Maßes: Wenn wir eine Urne betrachten mit M weißen, $N-M$ schwarzen Kugeln und n mal ziehen ohne Zurücklegen, dann ist $H_{N,M,n}(\{k\})$ die Wahrscheinlichkeit gerade k weiße Kugeln gezogen zu haben.

Definition M.22.0.4. Das in Bemerkung M.22.0.4 eingeführte W-Maß $H_{N,M,n}$ heißt die **hypergeometrische Verteilung** mit Parametern N, M und n.

Wir präsentieren nun einen asymptotischen Zusammenhang zwischen den hypergeometrischen Verteilungen und den Binomialverteilungen.

Satz M.22.0.1. Seien $n \in \mathbb{N}, (M_N)_{N\geq n}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ mit folgeneden Eigenschaften:

(i) Für $N \in \{n, n+1, n+2, ...\}$ gilt $M_n \leq N$.

(ii)

Die Folge $(\frac{M_n}{N})_{N\geq n}$ konvergiert gegen eine Zahl $p \in (0,1)$. Dann gelten folgenede Aussagen:

(a) $\lim\limits_{N\to\infty} M_n = +\infty, \lim\limits_{N\to\infty} (n + M_n - N) = -\infty$

(b) Sei $k \in \{0, 1, ..., n\}$. Dann gilt $\lim\limits_{N\to\infty} H_{N,M,n}(\{k\}) = \beta_{n+p}(\{k\})$.

Bemerkung M.22.0.5. Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Sei

$$\pi_\alpha := \sum_{k\in\mathbb{N}_0} exp(-\alpha)\frac{\alpha^k}{k!}\epsilon_{k,\mathcal{B}_1}.$$

Dann ist $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^1, \mathcal{B}_1), \pi_0 = \epsilon_{0,\mathcal{B}_1}$.

Definition M.22.0.5. Sei $\alpha \in [0, \infty)$. Dann heißt π_α die **Poisson-Verteilung** zum Parameter α.

Bemerkung M.22.0.6. Seien $\alpha \in [0, \infty), p \in [0, 1]$, dann folgt $\alpha \cdot p \in [0, \infty)$ sowie $\sum\limits_{k\in\mathbb{N}_0} \pi_\alpha(\{k\})\beta_{k,p} = \pi_{\alpha p}$.

Wir leiten nun einen Zusammenhang zwischen den Familien der Poissonverteilung und der Binomialverteilung her. In vielen konkreten Anwendungen treten Binomialverteilungen auf. Im Fall großer n ist die Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung durch das Auftreten der Fakultäten numerisch schwierig. Deshalb suchen wir geeignete Approxomationen. Wir nehmen deratige Approximationen, die auf dem Grenzwertsatz von S.D.Poisson (1781-1840) basiert.Dieser markiert einen Meilenstein in der Geschichte der W-Theorie. Wir benötigen hierzu noch ein paar kleine Vorbereitungen.

Lemma M.22.0.1. Seien $n \in \mathbb{N}, a, b \in \mathbb{C}$. Dann gilt

(a) $a^n - b^n = (a - b) \sum\limits_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

(b) Seien $a, b \in K_{\rho_{E,\mathbb{C}}}(0, 1) := \{z \in \mathbb{C}|\, |z| \leq 1\}$. Dann gilt: $|a^n - b^n| \leq n|a - b|$.

Lemma M.22.0.2. Seien $\alpha \in [0, +\infty)$ sowie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ mit $\lim\limits_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - \frac{\alpha_n}{n})^n = \exp(-\alpha)$.

Satz M.22.0.2 (Grenzwertsatz von Poisson)**.** Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0, 1]$, für welche die Folge $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist, und es bezeichne α den (den zu $[0, +\infty)$ gehörigen) Grenzwert. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt: $\lim\limits_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}(\{k\}) = \pi_\alpha(\{k\})$. v49m 12.1.2010

Beweis. Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \alpha$, der Nichtnegativität der Folge $(np_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha \in (0, \infty)$ folgt aus Lemma M.22.0.2

$$\lim_{n\to\infty}[(1 - p_n)^n] = \lim_{n\to\infty}\left[(1 - \frac{np_n}{n})^n\right] = exp\{-\alpha\}. \tag{1}$$

Sei zunächst $k = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\beta_{n,p_n}(\{0\}) = \binom{n}{0}p_n^0(1 - p_n)^{n-0} = (1 - p_n)^n. \tag{2}$$

Aus (2) und (1) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}(\{0\}) = exp\{-\alpha\} = \pi(\{0\}). \tag{3}$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \{k, k+1, ...\}$ gilt dann

$$\begin{aligned}
\beta_{n,p_n}(\{k\}) &= \tbinom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \tfrac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right] p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\
&= \tfrac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(np_n - jp_n)\right] (1-p_n)^{n-k}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Wegen $\lim\limits_{n\to\infty} np_n = \alpha_n$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty} np_n \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0. \tag{5}$$

Aus (5) folgt für $j \in \{0, ..., k-1\}$ dann

$$\lim_{n\to\infty} (np_n - jp_n) = \lim_{n\to\infty} np_n - j \lim_{n\to\infty} p_n = \alpha. \tag{6}$$

Aus (5) und (1) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} [(1-p_n)^{n-k}] = \lim_{n\to\infty} [(1-p_n)^n](1 - \lim_{n\to\infty} p_n)^{-k} = exp\{-\alpha\}. \tag{7}$$

Aus (4), (6) und (7) folgt

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}(\{k\}) = \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty}(np_n - jp_n)\right] \cdot \lim_{n\to\infty}(1-p_n)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!} exp\{-\alpha\} = \pi_\alpha(\{k\}). \tag{8}$$

Wegen (3) und (8) ist dann alles gezeigt.

■

v51m
19.01.2010

M.23. Über Momente und weitere numerische Charakteristika von Maßen

M.23.1. Einige Bemerkungen über allgemeine Momentenprobleme

In zahlreichen Anwendeungen wird man auf Aufgaben folgenden Typs geführt: Gegeben seien ein nichttrivialer meßbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Menge H, eine Abbildung $L \colon \mathcal{M} \to H$ sowie eine nichtleere Teilmenge H_0 von H. Es ist dann die Megen aller derjenigen Maße ? $\in \mathcal{M}$ zu bestimmen, welche der Bedingung $L(\mu) \in H_0$ genügen.
Dies geht mit jener Vorstellung einher, daß man ein Phänomen vorliegen hat, über das man die Annahme postuliert, daß dessen Beschreibeung durch ein Maß $\tilde{?} \in \mathcal{M}$ modelliert wid. Hierbei wird dann weiterhin angenommen, daß nicht a priori die vollständige

Information über dieses Maß $\tilde{?}$ vorhanden ist. Es möge also nicht die Kenntnis von $\tilde{\mu}$ selbst, sondern nur die Knentnis einer aus $\tilde{\mu}$ abgeleiteten Größe $L(\tilde{?})$ vorliegen. Aus der Kenntins von $L(\tilde{\mu})$ ist dann durch entsprechende Analysen die konkrete Gestalt von $\tilde{\mu}$ zu ermitteln. Dies bedeutet, wir haben die Urbildmenge von $L(\tilde{\mu})$ unter der Abbildung L zu bestimmen.
Erweist sich diese Urbildmenge als einelementig, so besitzt unsere Aufgabe eine eindeutige Lösung. Andernfalls sind wir gezwungen, eine zusätzliche Analyse dieser Urbildmenge vorzunehmen. Praktisch bedeutet dies, daß zumeist auf dieser Urbildmegen ein Extremalprinzip festgelegt wird und daß durch Behandlung der zugehörigen Extremalaufgabe ein enstprechendes Element in eindeutiger Weise ausgesondert werden kann.
Um die soeben geschilderte Vorgehensweise in die Tat umzusetzen, benötigen wir geeignte Konstruktionen von Abbildunge L, welche unserem Anliegen gerecht werden. Die Werte dieser Abbildungen L sollten dann also inhaltlich gesehen wesentliche Kenngrößen der betrachteten Maße vermitteln. Das Ziel des vorlegenden Kapitels besteht nun darin, geeignete Kanditaten solcher Kenngrößen bereitzustellen.
Wir wenden uns nun der konkreten Aufgabe eines Prinzips zur Konstruktion von Abbilduneg L zu, welche die oben geschilderte Funktion efüllen können. Unser Prinzip wird hierbei darin bestehen, diese Abbildung L via Integration einer geeigneten Funktionenmenge festzulegen. Die konkrete Wahl dieser Funktionenmenge sollte hierbei so erfolgen, daß diese einerseits möglichst einfach handhabbar ist und darüber hinaus aber anderrseits möglichst in irgendeiner Weise repräsentativ für den zugrundeliegenden meßbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, also viel Information über diesen vermittelt. Wir werden somit auf die folgende abstrakte Aufgabenstellung geführt:

Allgemeines Momentenprbolem:

Gegeben seien ein nichtrivialer meßbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Indexmenge I sowie Familien $(f_k)_{k\in I}$ bzw. $(c_k)_{k\in I}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ bzw. $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+((\Omega, \mathfrak{A}), (f_k)_{k\in I}, (c_k)_{k\in I})$ all jener Maße $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ zu bestimmen, welche den folgenden Bedingungen genügen:

(I) Für alle $k \in I$ gilt $f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(II) Für alle $k \in I$ gilt $\int\limits_\Omega f_k \,\mathrm{d}\mu = c_k$.

Wir stellen nun den Zusammenhang zu unseren obigen allgemeinen Überlegungen her. Es ist hier $\mathcal{M}$ die Menge all jener Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$, welche für alle $k \in I$ der Bedingung $f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ genügen. Weiterhin ist H die Menge $A(I, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$ sowie H_0 die Einermenge, welche diejenige Abbildung $h \in A(I, \mathbb{R})$ enthält, welche für $k \in I$ durch $h(k) = c_k$ gegeben ist.
Wir heben nun den für unsere nachfolgenden Betrachtungen zentralen Spezialfall des obigen allgemenien Momentenproblems besonders heraus.

Potenzmomentenproblem:

Es seien $A \in \mathfrak{B}_1 \backslash \{\emptyset\}, (\Omega, \mathfrak{A}) := (A, \mathfrak{B}_1 \cap A), I$ ein Abschnitt von $\mathbb{N}_0$, und für $k \in I$ sei $f_k \colon A \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \mapsto x^k$.

Ist sepeziell $I = \mathbb{N}_0$ sowie $A = \mathbb{R}$ bzw. $A = [0, +\infty)$ bzw. A ein kompaktes Interval von $\mathbb{R}$, so spricht man von einem Hamburgerschen bzw. Stieltjesschen bzw. Hausdorffschen Momentenproblem.

Aus der Sicht der W.-Theorie ist insbesondere das Hamburgersche Momentenproblem von Interesse. v52m 25.01.2010

M.23.2. Potenzmomente von Maßen auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Im $\mathbb{R}^m$ erscheint die Menge der dort definierten reelen Polynomfunktionen in m Veränderlichen als eine repräsentative Funktionenmenge. Diese Menge ist ein Vektoraum in denen die Monome eine natürliche Basis bilden. Aus diesem Grund erscheint es natürlich, die Integrale der Monome bzüglich eine Maßes aus $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ als Kenngröße zur Klassifikation von derartigen Maßen zu verwenden.

Bemerkung M.23.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}, (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Es sei:

$$P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}} : \ \mathbb{R}^m \to \mathbb{R} \ , \ \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \mapsto \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j} .$$

Dann gilt $P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$, sowie $|P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}}| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. $P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}}$

Bemerkung M.23.2.1 führt auf folgende Begriffsbildung. Hierbei sei daran erinnert, dass wegen Satz M.21.5.1 eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$ genau dann μ-integrierbar ist, wenn dies für $|f|$ zutrifft.

Definition M.23.2.1. Sein $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^+$. Dann heißt:

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} |P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| \, d\mu$$

das $(k_1, ..., k_m)$-te **absolute Moment** von μ. Falls $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)} \in [0, +\infty)$, so sagt man, dass das $(k_1, ..., k_m)$-te Moment von μ existiert und nennt die $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu)$

$$M_{(k_1,...,k_m)}(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,...,k_m)\mathbb{R}} \, d\mu$$

das $(k_1, ..., k_m)$-te **Moment** von μ sowie $\sum\limits_{j=1}^{m} k_j$ dessen Ordnung. $M_{(k_1,...,k_m)}(\mu)$

Bemerkung M.23.2.2. Seien $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(a) $\mathcal{M}_{(0,0,...,0)}(\mu) = \mu(\mathbb{R}^m)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent

(i) $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Das $(0, ..., 0)$-te Moment von μ existiert.

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt

$$M_{(0,...,0)}(\mu) = \mathcal{M}_{(0,...,0)}(\mu)$$

(d) Sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$. Dann gilt:

$$|M_{(k_1,...,k_m)}(\mu)| \leq \mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu)$$

Für $m \in \mathbb{N}$ und $R \in (0, +\infty)$ sei $K'_{\rho E,\mathbb{R}}(O_{m\times 1}; R) := \{x \in \mathbb{R}^m : \rho_{E,\mathbb{R}^m}(O_{m\times 1}, x) \leq R\}$.

Satz M.23.2.1. Sei $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so beschaffen, dass ein $R \in (0, \infty)$ mit $\mathbb{R}^m \backslash K'_{\rho E,\mathbb{R}^m}(O_{m\times 1}, R) \in \mathcal{N}_\mu$ existiert. Weiter seien $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m, k := \sum\limits_{j=1} k_j$. Dann gilt:

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0, R^k \mu(\mathbb{R}^m)],$$
$$M_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [-R^k \mu(\mathbb{R}^m, R^k \mu(\mathbb{R}^m))]$$

In stochastischen Anwendungn werden oft $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-ZV X auf einem WR $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ betrachtet. Diese werden am umfassendsten duch die Verteilung P_X beschrieben. Wir wollen die Momente von P_X in Termen von X ausdrücken. Diese Fragestellung wird im folgenden Satz behandelt, der eine noch allgemeinere Situation erfasst.

Satz M.23.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $m \in \mathbb{N}, X : \Omega \to \mathbb{R}^m$ eine $\mathfrak{A} - \mathfrak{B}_m$-meßbar. Weiter sei $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$. Weiter sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:

(a)

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) = \int\limits_\Omega \prod_{j=1}^m |X_j(\omega)|^{k_j} \nu(d\omega)$$

(b) Folgende Aussagen sind trivial:

(i) Das $(k_1, ..., k_m)$-te Moment von $X(\nu)$ existiert.

(ii) $\prod\limits_{j=1}^m X_j^{k_j} \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu; \mathbb{R})$.

(c) Sei (i) erfüllt. Dann gilt:

$$M_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) = \int\limits_\Omega \prod_{j=1}^m [X_j(\omega)]^{k_j} \nu(d\omega).$$

(d) Sei (i) erfüllt und sei für $j \in \{1, ..., n, m\}$ zudem $X_j(\Omega) \subseteq [0, +\infty)$. Dann gilt

$$M_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) = \mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)).$$

Beweis.

(a) Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt

$$|P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

Unter Verwendung von Definition M.23.2.1, (1), Satz M.21.10.1

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} |P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| d[X(\nu)] = \int\limits_{\Omega} |P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| \circ X d\nu \\ &= \int\limits_{\Omega} |P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} \circ X| d\nu = \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{m} |X_j(\omega)|^{k_j} \nu(d\omega).\end{aligned} \tag{2}$$

(b) Dies folgt aus (a).

(c) Wegen (i) und Definition M.23.2.1 gilt nach Satz M.21.5.1

$$P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, X(\nu); \mathbb{R}). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (3) folgt mit Satz M.21.10.2 (b),(c): $P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} \circ X \in \mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu; \mathbb{R})$ und

$$M_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} d[X(\nu)] = \int\limits_{\Omega} P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} \circ X \partial\nu = \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1} [X_j(\omega)]^{k_j} \nu(d\omega) \tag{4}$$

(d) Für $j \in \{1, ..., m\}$ gilt nach Voraussetzung $|X_j| = X_j$. $\overset{(2),(4)}{\Rightarrow}$ $M_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu)) = \mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(X(\nu))$.

■

Bemerkung M.23.2.3. Seien $m \in \mathbb{N}, (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so gewählt, dass $M_{(2k_1,...,2k_m)} \in [0, \infty)$. Dann ist $M_{(2k_1,...,2k_m)}(\mu) = \mathcal{M}_{(2k_1,...,2k_m)}(\mu)$. und somit insbesondere auch

$$M_{(2k_1,...,2k_m)}(\mu) \in [0, \infty)$$

.

Satz M.23.2.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(a_s)_{s\in I}$ eine Folge aus $[0,\infty)$, $(x_s)_{s\in I}$ Folge aus $\mathbb{R}^m$. Für $s \in I$ sei $x_s = (x_1^{(s)}, ..., x_m^{(s)})^T$. Weiter sei μ das durch $\mu := \sum\limits_{s\in I} a_s \epsilon_{x_s;\mathfrak{B}_m}$ definierte Element aus $\mathcal{M}_+^d(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).Sei (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt

(a) $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) = \sum\limits_{s\in I}(\prod\limits_{j=1}^{m} |x_j^{(s)}|^{k_j})a_s$.

(b) Sei $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0,\infty)$. Dann gilt: $M_{(k_1,...,k_m)}(\mu) = \sum\limits_{s\in I}(\prod\limits_{j=1}^{m} [x_j^{(s)}]^{k_j})a_s$.

(c) Sei I endlich. Dann ist $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty)$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Beispiel M.21.3.4.

(b) Dies folgt aus Beispiel M.21.5.3, M.21.5.4.

(c) Folgt aus (a).

■

Beispiel M.23.2.1. *Sei* $m \in \mathbb{N}, c = (c_1, ..., c_m)^T \in \mathbb{R}^m, (k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$.

(a) $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) = \prod\limits_{j=1}^{m} |c_j|^{k_j}$.

(b) $M_{(k_1,...,k_m)}(\mu) = \prod\limits_{j=1}^{m} c_j^{k_j}$.

Satz M.23.2.4. Seien $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ und $P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}$ die in Bemerkung M.23.2.1 definierte Abbildung. Dann gilt:

(a) $|P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| \cdot f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. und $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu_f) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}}| \cdot f \, d\mu$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu_f) \in [0,\infty)$.

  (ii) $P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(c) Sei (i) erfüllt, dann gilt: $M_{(k_1,...,k_m)}(\mu_f) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}} f \, d\mu$.

Beweis.

(a) folgt aus Satz M.21.3.4 (d1)

(b) bzw. (c)

folgt aus Teil (b) bzw. (c) von Satz M.21.5.6.

■

Satz M.23.2.5. Seien $m \in \mathbb{N}$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(a_s)_{s\in I}$ bzw. $(\mu_s)_{s\in I}$ Folgen aus $[0,\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann:

(a) $\sum\limits_{s\in I} a_s\mu_s \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, und es gilt: $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\sum\limits_{s\in I} a_s\mu_s) = \sum\limits_{s\in I} a_s \mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu_s)$.

(b) Sei $(a_s)_{s\in I}$ Folgen aus $[0,\infty)$ und sei $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\sum\limits_{s\in I} a_s\mu_s) \in [0,\infty)$. Dann gilt

  (b1) Sei $s \in I$. Dann $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0,\infty)$.

  (b2) $M_{(k_1,...,k_m)}(\sum\limits_{s\in I} a_s\mu_s) = \sum\limits_{s\in I} a_s M_{(k_1,...,k_m)}(\mu)$.

M.23.3. Einige spezifische Aussagen über Potenzmomente von Maßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Bemerkung M.23.3.1. Sei $k \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so beschaffen, so dass $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_\mu$ und $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0,\infty)$. Dann gilt $M_k(\mu) = \mathcal{M}_k(\mu)$ und somit
$M_k(\mu \in [0,\infty)$.

Wir wenden uns nun einer speziellen Teilklasse von $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_m)$ zu. Hierzu führen wir zunächst eine etwas allgemeinere Begriffsbildung ein.

Definition M.23.3.1. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und es bezeichne $\mathcal{K}(\Omega, \rho)$ das System der kompakten Teilmengen von (Ω, ρ). Sei $\mu \in \mathbb{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$. Dann heißt μ ein Borelmaß, wenn für jedes kompakte $K \in \mathcal{K}(\Omega, \rho)$ gilt $\mu(K) \in [0,\infty)$. Es bezeichne $\overset{\vee}{\mathcal{M}}_+ (\Omega, \mathfrak{B}_m)$ die Menge aller Borelmaße auf $(\Omega, \mathfrak{B})$.

Bemerkung M.23.3.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ σ-endlich.

Bemerkung M.23.3.3. Seien $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind äquivalent.

(a) $\mu \in \overset{\vee}{\mathcal{M}}_+ (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Für jedes beschränkte $B \in \mathfrak{B}_m$ gilt $\mu(B) \in [0,\infty)$.

Beweis. Man beachte, dass $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}})$ nach Satz von Bolzano-Weierstrass gerade aus denjenigen Mengen aus $A(\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m})$ besteht, welche zudem beschränkt sind. ■

v53m
26.01.2010

Satz M.23.3.1. Sei $k \in \mathbb{N}$ und weiter $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0,\infty)$. Sei $l \in \{0, ..., k\}$. Dann gelten $\mathcal{M}_l(\mu) \in [0,\infty)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.
Beweis. Wegen $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ gilt

$$\mu([-1,1]) \in [0,\infty). \tag{1}$$

Wegen $[-1,1] \in \mathcal{B}_1$ gilt nach Bemerkung M.21.2.1 und Bemerkung M.18.8

$$1_{[-1,1]} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{2}$$

und
$$\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]} d\mu = \mu([-1,1]). \tag{3}$$
Wegen Bemerkung M.23.2.1 ist
$$\{|P_{k,\mathbb{R}}|, |P_{l,\mathbb{R}}|\} \subseteq \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{4}$$
und somit gilt nach Satz M.21.3.2.(b)
$$1_{[-1,1]} + |P_{k,\mathbb{R}}| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \tag{5}$$
Wegen $l \in \{0, ..., k\}$ gilt für $x \in [-1,1]$ bzw. $x \in \mathbb{R} \backslash [-1,1]$ dann
$$|P_{l,\mathbb{R}}(x)| = |x|^l \leq 1_{[-1,1]}(x) \text{ bzw. } |P_{l,\mathbb{R}}(x)| = |x|^l \leq |x|^k = |P_{k,\mathbb{R}}(x)|$$
und somit gilt
$$|P_{l,\mathbb{R}}(x)| \leq 1_{[-1,1]}(x) + |P_{k,\mathbb{R}}(x)|. \tag{6}$$
Unter Verwendung von Definition M.23.2.1, (4)-(6), Satz M.21.3.2 und (3) folgt nun
$$M_l(\mu) \overset{Def. M.23.2.1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{l,\mathbb{R}}| d\mu \overset{(4)-(6), Satz M.21.3.2(c)}{\leq} \int\limits_{\mathbb{R}} (1_{[-1,1]} + |P_{k,\mathbb{R}}|) d\mu \overset{(4),(6), Satz M.21.3.2(b)}{=}$$
$$\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]} d\mu + \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{k,\mathbb{R}}| d\mu \overset{(3), Def. M.23.2.1}{=} \mu([-1,1]) + \mathcal{M}_k(\mu),$$
also wegen (1) und $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0, \infty)$ dann
$$\mathcal{M}_l(\mu) \in [0, \infty). \tag{7}$$
Wegen Bemerkung M.23.2.2 gilt $\mathcal{M}_0(\mu) = \mu(\mathbb{R})$, also wegen (7) dann
$$\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1).$$

■

Bezeichnung:Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien
$$\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) := \{\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) : \mathcal{M}_k(\mu) \in [0, \infty)\},$$
$$\mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) := \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \cap \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1).$$
Weiter seien
$$\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1),$$
$$\mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) := \bigcap_{k \in \mathbb{N}} \mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$$

Bemerkung M.23.3.4. Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$,so dass $l \leq k$ gilt. Dann ist $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,l}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,0}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) = \mathcal{M}_+^{b}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Beweis. Verwende Satz M.23.3.1 und Bemerkung M.23.2.1.(b). ■

Bezeichnung: Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Es bezeichne $\mathfrak{P}_{\mathbb{R},s}$ die Menge aller Polynomfunktionen $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, deren Grad s nicht übersteigt. Weiter sei $\mathfrak{P}_{\mathbb{R}} := \bigcup\limits_{s \in \mathbb{N}_0} \mathfrak{P}_{\mathbb{R},s}$.

Bemerkung M.23.3.5. Sei $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(a) (i) $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,s}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(ii) $\mathfrak{P}_{\mathbb{R},s} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(iv) $\mathfrak{P}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$.

Für $\sigma \in \mathbb{R}, a \in \mathbb{R}$ sei $T_{\sigma,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \mapsto \sigma x + a$. Dann ist $T_{\sigma,a}$ $\mathcal{B}_1$-$\mathcal{B}_1$-messbar.

Satz M.23.3.2. Sie $\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), k \in \mathbb{N}_0, a \in \mathbb{R}, \sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0, \infty)$.

(ii) $\mathcal{M}_k(T_{\sigma,a}(\mu)) \in [0, \infty)$.

(b) Wenn (i) erfüllt ist. Dann gilt:

$$M_k(T_{\sigma,a}(\mu)) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} \sigma^l M_l(\mu).$$

M.23.4. Erwartungswert und Varianz eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Im Mittelpunkt steht die für stochastische Anwendungen besonders interessante Klasse $\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Wir werden jedem Maß dieser Klasse vor dem Hintergrund dieses Abschnitts 2 wichtige Kenngrößen zuordnen. Die erste dieser Größe beschreibt das Gravitationszentrum von μ, die 2. das Schwanken von μ um dieses Gravitationszentrum.

Definition M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann wird die Zahl $M_1(\mu)$ der **Erwartungswert** von μ genannt.

Satz M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt

(a) $T_{\sigma,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) $M_1(T_{\sigma,a}(\mu)) = \sigma M_1(\mu) + a$, also

$$M_1(T_{\sigma,a}(\mu)) = T_{\sigma,a}(M_1(\mu)).$$

Beweis. Die Behauptung von (a) bzw. (b) folgt aus (a) bzw. (b) von Satz M.23.3.2 ■

Definition M.23.4.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann heißt μ **zentriert**, falls $M_1(\mu) = 0$ ist.

Bemerkung M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann ist $T_{1,-M_1(\mu)}(\mu)$ ein zentriertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Definition M.23.4.3. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, dann heißt $T_{1,-M_1(\mu)}(\mu)$ die **Zentrierung** von μ.

Definition M.23.4.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann wird die Größe $var(\mu) := M_2(T_{1,-M_1(\mu)}(\mu))$ die **Varianz** von μ genannt.

Satz M.23.4.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann:

(a) $var(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} [x - M_1(\mu)]^2 \mu(dx)$.

(b) Folgend Aussagen sind äquivalent:

  (i) $var(\mu) \in [0, \infty)$.

  (ii) $M_2(\mu) \in [0, \infty)$.

(c) $var(\mu) = \mathcal{M}_2(\mu) - [M_1(\mu)]^2$

(d) Sei $\mathcal{M}_2(\mu) \in [0, \infty)$. Dann $var(\mu) = M_2(\mu) - [M_1(\mu)]^2$.

Lemma M.23.4.1. Sei $a \in (0, \infty)$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so gewählt, dass $\mathbb{R}\backslash[-a, a] \in \mathcal{N}_\mu$. Dann gelten $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $M_1(\mu) \in [-a, a]$ und $var(\mu) \in [0, a^2]$.

Das nachfolgende Resultat ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz M.21.4.2 und Satz M.23.4.1.(a)

Satz M.23.4.3 (Ungleichung von Tschebyscheff)**.** Seine $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), \alpha \in (0, \infty)$. Dann:

(a) Sei $p \in (0, \infty)$. Dann:

$$\mathbb{R}^1 \backslash (M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha) \in \mathfrak{B}_1,$$

$$|T_{1,-M_1(\mu)}|^p \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$$

sowie

$$\mu(\mathbb{R}^1 \backslash (M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha)) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int\limits_{\mathbb{R}} |T_{1,-M_1(\mu)}|^p d\mu$$

(b)

$$\mu(\mathbb{R}^1 \backslash (M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha)) \leq \frac{var(\mu)}{\alpha^2}.$$

Beweis.

(a) Es ist

$$\mathbb{R}^1 \backslash (M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha) = (T_{1,-M_1(\mu)})^{-1}(\mathbb{R}^1 \backslash (-\alpha, \alpha)) = \{|T_{1,-M_1(\mu)}| \geq \alpha\}. \quad (1)$$

Da $T_{1,-M_1(\mu)}$ wegen Satz M.15.9.(b) $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar ist, folgen bei Beachtung von (1) mit Satz M.21.4.2 alle Behauptungen von (a).

(b) ergibt sich durch die Wahl $p = 2$ in (a).

■

Beispiel M.23.4.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$.*

(a) $\mathcal{M}_k(\epsilon_{a,\mathfrak{B}_1}) = |a|^k$, $M_k(\epsilon_{a,\mathfrak{B}_1}) = a^k$.

(b) $\epsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ *und* $var(\epsilon_{a,\mathfrak{B}_1}) = 0$.

Satz M.23.4.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt

(a) $var(\mu) \in [0, \infty]$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $var(\mu) = 0$.

(ii) $\mu = \epsilon_{M_1(\mu),\mathfrak{B}_1}$.

Folgerung M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann

$$[M_1(\mu)]^2 \leq \mathcal{M}_2(\mu),$$

wobei die Gleichheit genau dann vorliegt, wenn mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\mu = \epsilon_{a,\mathfrak{B}_1}$ besteht.

Satz M.23.4.5. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gelten $T_{\sigma,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und $var(T_{\sigma,a}(\mu)) = |\sigma|^2 var(\mu)$. (Insbesondere ist also $var(T_{1,a}(\mu)) = var(\mu)$.)

Wir wenden uns nun einer wichtigen Teilklasse von $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ zu.

Definition M.23.4.5. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann heißt μ **standardisiert**, falls $M_1(\mu) = 0$ und $var(\mu) = 1$.

Bemerkung M.23.4.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so beschaffen, dass $var(\mu) \in (0, \infty)$. Seien

$$\sigma := \frac{1}{\sqrt{var(\mu)}} \text{ und } a := \frac{-M_1(\mu)}{\sqrt{var(\mu)}}.$$

Dann ist $T_{\sigma,a}(\mu)$ ein standardisiertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Bemerkung M.23.4.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.23.4.6. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2,}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ so gewählt, dass $var(\mu) \in (0, \infty)$. Weiter seien σ und a wie in Bemerkung M.23.4.2 erklärt. Dann heißt das Maß $T_{\sigma,a}(\mu)$ die **Standardisierung** von μ.

v56m
07.04.2010

M.23.5. Maße von k-ter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Aufgabe eine geeignete Verallgemeinerung von Satz M.23.3.1 für den Fall $m \in \{2, 3, ...\}$ zu finden. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass sich die Aussage von Satz M.23.3.1 nicht unmittelbar auf den Fall $m \in \{2, 3, ...\}$.

Beispiel M.23.5.1. *Seien $I := (0,1), \mathfrak{B}_{1,I} := \mathfrak{B}_1 \cap I$ und $\lambda_I^{(1)} := Rstr._{\mathfrak{B}_{1,I}} \lambda^{(1)}$. Weiter seien $\alpha \in (0,1)$ sowie $\beta \in (\alpha, 1)$. Ausserdem seien $X_1 : I \to \mathbb{R}$ bzw. $X_2 : I \to \mathbb{R}$ defineirt gemäß $u \mapsto \frac{1}{u}[1_{0,\beta}(u)]$ bzw. $u \mapsto \frac{1}{1-u}[1_{(\alpha,1)}(u)]$ und es sei $X := \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \end{pmatrix}$. Dann ist X eine $\mathfrak{B}_{1,I}$-$\mathfrak{B}_2$-meßbare Abbildung und es gelten $\mathcal{M}_{(1,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) \in (0, \infty)$, aber $\mathcal{M}_{(1,0)}(X(\lambda_I^{(1)})) = +\infty$ und $\mathcal{M}_{(0,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) = +\infty$.*

Beweis. *Sei $f_1 : I \to \mathbb{R}$ bzw. $f_2 : I \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $u \mapsto \frac{1}{u}$ bzw. $u \mapsto \frac{1}{1-u}$. Dann gilt:*

$$\{f_1, f_2 \subseteq \mathcal{C}((I, \rho_{E,I}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))\} \tag{1}$$

Das $\mathfrak{B}_{1,I}$ die Borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes $(I; \rho_{E,I})$ ist, folgt wegen (1) mittels Satz M.15.8 nun

$$\{f_1, f_2\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{1,I}; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen $\{(0,\beta), (\alpha, 1)\} \subseteq \mathfrak{B}_{1,I}$ folgt aus Beispiel M.15.3 dann

$$\{1_{(0,\beta),1_{(\alpha,1)}}\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{(1,I)}; \mathbb{R}) \tag{3}$$

Aus den Definitionen von X_1 bzw. X_2 folgt

$$X_1 = 1_{0,\beta} f_1 \tag{4}$$

bzw.

$$X_2 = 1_{\alpha,1} f_2 \tag{5}$$

Wegen (2)-(5) folgt mittels Satz M.17.8 dann

$$\{X_1, X_2\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{1,I}; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Wegen (6) liefert Satz M.16.6 dann: (I) Es ist X eine $\mathfrak{B}_{1,I}$-$\mathfrak{B}_2$-meßbare Abbildung. Wegen (I) ergeben sich mittels Teil (a) von Satz M.23.2.2 dann

$$\mathcal{M}_{(1,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int_I |X_1|^1 |X_2|^1 d\lambda_I^{(1)} = \int_I |X_1||X_2| d\lambda_I^{(1)} \tag{7}$$

$$\mathcal{M}_{(1,0)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int_I |X_1|^1 |X_2|^0 d\lambda_I^{(1)} = \int_I |X_1| d\lambda_I^{(1)} \tag{8}$$

und

$$\mathcal{M}_{(0,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int_I |X_1|^0 |X_2|^1 d\lambda_I^{(1)} = \int_I |X_2| d\lambda_I^{(1)} \tag{9}$$

Aus der Definition von X_1 *und* X_2 *folgt sogleich*

$$\{X_1, X_2\} \subseteq A(I, [0, +\infty)). \tag{10}$$

Aus (10) *folgen dann*

$$|X_1| = X_1 \tag{11}$$

und

$$|X_2| = X_2. \tag{12}$$

Wegen (11) *und* (12) *ergibt sich aus* (7) *bzw* (8) *bzw* (9) *dann*

$$\mathcal{M}_{(1,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int\limits_I X_1 X_2 d\lambda_I^{(1)} \tag{13}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{(1,0)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int\limits_I X_1 d\lambda_I^{(1)} \tag{14}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{(0,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) = \int\limits_I X_2 d\lambda_I^{(1)} \tag{15}$$

Wegen (6) *und* (10) *gilt*

$$\{X_1, X_2\} \subseteq \mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_1, I) \tag{16}$$

Wegen (16) *ergibt sich mittels Teil (c) von Lemma M.18.3 dann*

$$X_1 \cdot X_2 \in \mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_1, I) \tag{17}$$

Wir nehmen nun eine Abschätzung des Integrals auf der rechten Seiten von (13) *vor. Für* $u \in (\alpha, \beta) giltu(1-u) > \alpha(1-\beta) > 0$. *Hieraus folgt für* $u \in I$ *dann* $\frac{1}{u(1-u)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u) \leq \frac{1}{\alpha(1-\beta)} \cdot 1_{\alpha,\beta}(u)$ *und somit wegen*

$[X_1(u)][X_2(u)] = [\frac{1}{u} \cdot 1_{(0,\beta)(u)}][\frac{1}{1-u} \cdot 1_{(\alpha,1)}(u)] = \frac{u}{1-u} 1_{(0,\beta)\cap(\alpha,1)}(u) = \frac{u}{1-u} 1_{(\alpha,\beta)}(u)$ *dann* $[X_1(u)][X_2(u)] \leq \frac{1}{\alpha(1-\beta)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u)$. *Es ist also*

$$[X_1(u)][X_2(u)] \leq \frac{1}{\alpha(1-\beta)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}. \tag{18}$$

Wegen $\alpha \in (0, 1)$ *und* $\beta \in (\alpha, 1)$ *gilt*

$$\frac{1}{\alpha(1-\beta)} \in (0, +\infty) \tag{19}$$

Weiterhin ist

$$(\alpha, \beta) \in \mathfrak{B}_{1,I} \tag{20}$$

Unter Beachtung von (17)-(20) ergibt sich mittels Teil (d) von Satz M.21.3.2 dann $\int\limits_I X_1 X_2 d\lambda_I^{(1)} \leq \frac{1}{\alpha(1-\beta)}[\lambda_I^{(1)}(\alpha,\beta)]$, *also wegen* $\lambda_I^{(1)}((\alpha,\beta)) = \lambda^{(1)}((\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$ *dann*

$$\int\limits_I X_1 X_2 d\lambda_I^{(1)} \leq \frac{\beta - \alpha}{\alpha(1-\beta)} \tag{21}$$

Aus (13) und (21) folgt nun

$$\mathcal{M}_{(1,1)}(X(\lambda_I^{(1)})) \in (0, +\infty) \tag{22}$$

Wir wenden uns nun der Berechnung der Integrale auf dem rechten Seiten von (14) und (15) zu. Hierzu werden wir Satz M.21.11.4 heranziehen. Wir treffen nun die entsprechenden Vorbereitungen.

Seien

$$I_1 = (0, \beta) \tag{23}$$

und

$$I_2 = (\alpha, 1) \tag{24}$$

Sei

$$j \in \{1, 2\} \tag{25}$$

Aus (23)-(25) folgt dann

$$I_j \in \mathfrak{B}_{1,I} \tag{26}$$

Seien

$$\mathfrak{B}_{1,I_j} := \mathfrak{B}_1 \cap I_j \tag{27}$$

sowie

$$\lambda_{1,I_j} := Rstr._{\mathfrak{B}_{1,I_j}} \lambda^{(1)} \tag{28}$$

Wegen (26) folgt aus (27) bzw (28) dann

$$\mathfrak{B}_{1,I_j} = \mathfrak{B}_{1,I} \cap I_j \tag{29}$$

bzw.

$$\lambda_{I_j}^{\{}(1)\} = Rstr._{\mathfrak{B}_{1,I_j}} \lambda_I^{(1)}. \tag{30}$$

Wegen (17),(26),(29) und (30) folgt mittels Teil (b) von Satz M.21.3.8 dann

$$Rstr._{I_j} X_j \in \mathcal{E}^*(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j}) \tag{31}$$

sowie

$$\int\limits_I 1_{I_j} X_j d\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I Rstr._{I_j} X_j d\lambda_I^{(1)}. \tag{32}$$

Aus der Definition der beteiligten Funktionen folgen sogleich:

$$Rstr._{I_j} X_j = Rstr._{I_j} f_j \tag{33}$$

sowie

$$1_{I_j} X_j = X_j \tag{34}$$

Wegen (33) folgt aus (31) bzw (32) dann

$$Rstr._{I_j} f_j \in \mathcal{E}^*(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j}) \tag{35}$$

bzw.

$$\int\limits_I 1_{I_j} X_j d\lambda_I^{(1)} = \int\limits_{I_j} Rstr._{I_j} f_j d\lambda_{I_j}^{(1)} \tag{36}$$

Aus (34) und (36) folgt nun

$$\int\limits_I X_j \partial\lambda_I^{(1)} = \int\limits_{I_j} Rstr._{I_j} f_j d\lambda_{I_j}^{(1)} \tag{37}$$

Aus der Definition von f_j erkennt man sogleich dass $Rstr._{I_j} f_j \in \mathcal{C}((I_j, \rho_{E;I_j}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap A(I_j, [o, +\infty))$ erfüllt ist. Hieraus erkennt man mittels Bemerkung M.21.11.4 dann die lokale R integrierbarkeit von $Rstr._{I_j} f_j$ auf I_j sowie weiterhin $Rstr._{I_j} f_j \in \mathcal{E}^*(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j})$. Hieraus ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.21.11.4 dann

$$\int\limits_{I_1} Rstr._{I_1} f_1 d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} (Rstr._{[\frac{1}{n},\beta-\frac{1}{n}]} f_1)(u) du$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} \frac{1}{u} du = \lim_{n\to\infty} [\ln u]_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} [\ln(\beta - \frac{1}{n}) - \ln(\frac{1}{n})] = \ln\beta + \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty \tag{38}$$

sowie

$$\int\limits_{I_2} Rstr._{I_2} f_2 d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} (Rstr._{[\alpha+\frac{1}{n},1-\frac{1}{n}]} f_2)(u) du$$

$$= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{1-u} du = \lim_{n\to\infty} [-\ln 1 - u]_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} = \ln 1 - \alpha + \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty \tag{39}$$

Unter Verwendung von (14),(25)(27) und (38) bzw(15)(25)(37) und (39) folgt dann

$$\mathcal{M}_{1,0}(X(\lambda_I^{(1)})) \overset{(14)}{=} \int\limits_I X_1 d\lambda_I^{(1)} \overset{(25),(37)}{=} \int\limits_I Rstr._{I_1} f_1 d\lambda_I^{(1)} \overset{(38)}{=} +\infty \tag{40}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{0,1}(X(\lambda_I^{(1)})) \overset{(15)}{=} \int\limits_I X_2 d\lambda_I^{(1)} \overset{(25),(37)}{=} \int\limits_I Rstr._{I_2} f_2 d\lambda_I^{(1)} \overset{(39)}{=} +\infty \tag{41}$$

Wegen (I), (22),(40) udn (41) ist dann alles gezeigt. ■

Beispiel M.23.5.1 belegt folgenden Sachverhalt.

Bemerkung M.23.5.1. Seien $m \in \{2, 3, ...\}$ und $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Es sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_(k_1, ..., k_m)(\mu) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Ist nun $(l_1, ..., l_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, dass für $j \in \{1, ..., m\}$ gilt $l_j \leq k_j$, so ist nicht notwendig $\mathcal{M}_{(l_1,...,l_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$.

Unser Bestreben eine m-dimensionale Verallgemeinerung von Satz M.23.3.1 zu finden, führt uns auf die Betrachtung einer speziellen Klasse von Monomen in m Veränderlichen.

Bemerkung M.23.5.2. Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $j \in \{1, ..., m\}$. Weiter sei $\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_j)^k$. Dann gilt:

(a) Für $s \in \{1, ..., m\}$ sei $k_s := \begin{cases} k, \text{ falls} & s = j \\ 0, \text{ falls} & s \in \{1, ..., m\} \setminus \{j\} \end{cases}$.

Dann gilt $\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m} = P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}^m}$.

(b) Es ist $\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \subseteq \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$ sowie $|\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m}| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Sei $\pi_{m,j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}, (x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_j$. Dann ist $\pi_{m,j} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mathbb{R})$ und es gilt $\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m} = P_{(k;\mathbb{R})} \circ \pi_{m,j}$.

(d) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten:

$$\mathcal{M}_k(\pi_{m,j}(\mu)) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m}| d\mu$$

sowie

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) = \mathcal{M}_k(\pi_{m,j}(\mu)).$$

Beweis.

(a) Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

(b) Dies folgt wegen (a) aus der Bemerkung M.23.2.1.

(c) Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgen $\pi_{m,j} = \tilde{P}_{j,1,\mathbb{R}^m}$ und $\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{k,\mathbb{R}^m} \circ \pi_{m,j}$ folgen aus (a) dann (c)

(d) Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt $|P_{k,\mathbb{R}}| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_m)$. Wegen (4) und (3) liefert M.21.10.1 dann $|P_{k,\mathbb{R}}| \circ \pi_{m,j} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie $\int\limits_{\mathbb{R}} |P_{k,\mathbb{R}}| d\pi_{m,j}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{k,\mathbb{R}}| \circ \pi_{m,j} d\mu$. Wegen (2) gilt $|P_{k,\mathbb{R}}| \circ \pi_{m,j} = |P_{k,\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j}| = \tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m}$. Unter Beachtung von Definition M.23.2.1 sowie von (5) und (6) folgt nun $\mathcal{M}_k(\pi_{m,j}(\mu)) =$

$\int\limits_{R} |P_{k,\mathbb{R}}| d\pi_{m,j}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |P_{k,\mathbb{R}}| \circ \pi_{m,j} d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^n}| \, d\mu$. Unter Verwendung von Definition M.23.2.1 sowie von (a) und (7) folgt: $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{(k_1,\ldots,k_m),\mathbb{R}^m}| \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{j,k,\mathbb{R}^m}| \, d\mu = \mathcal{M}_k(\pi_{m,j}(\mu))$.

■ v57m 12.04.2010

Es sei daran erinnert (vgl. Definition M.23.2.1, dass das Symbol $\tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ für die Menge aller Borelmaße auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ steht. Sei $k \in \mathbb{N}$. Im Abschnitt 23.2 von dem dann die Menge $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) := \{\mu \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}) : \mathcal{M}_k(\mu) \in [0, +\infty)\}$. betrachtet. Unsere nächste Zielsetzung besteht darin, eine geeignete Verallgemeinerung der Menge $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B})$ für den Fall $m \in \{2, 3 \ldots .\}$ vorzunehmen.

Bemerkung M.23.5.3. Sei $k \in \mathbb{N} und sei \tilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}$ wie in Bemerkung M.23.5.2 erklärt. Dann gilt:

(a) Es ist $\tilde{P}_{1,k;\mathbb{R}} = \mathbb{P}_{k;\mathbb{R}}$.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gelten $(\tilde{P}_{1,k;\mathbb{R}} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und $\mathcal{M}_k(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{1,k;\mathbb{R}}| \, d\mu$.

(c) Sei $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) := \mu \in \mathcal{M}_k^b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) : \mathcal{M}_k^b(\mu) \in [0, \infty)$.

Beweis.

(a) Das folgt aus Definition der beteiligten Abbildungen.

(b) Dies folgt aus (a) und Definition M.23.2.1.

(c) Wegen Bemerkung M.23.5.2 gilt $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \subseteq \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Hieraus und aus der Definition von $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ folgt dann

$$\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) = \mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}) : \mathcal{M}_k(\mu) \in [0, +\infty)$$

Hieraus folgt wegen (b) dann $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}_1, \mathbb{B}_1) = \mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) : \int\limits_{\mathbb{R}} |\tilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}| \, d\mu \in [0, +\infty)$.

■

Teil (c) von Bemerkung M.23.5.3 liefert uns auf folgende Begriffsbildung welche das zentrale Objekt dieses Abschnitts darstellt.

Definition M.23.5.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \, in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$. Dann heißt μ von $k - ter Ordnung$, falls für alle $j \in 1, \ldots, m$ und der Bezeichnung von M.23.3.2 die Beziehung $\int\limits_{\mathbb{R}} |\tilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}| \, d\mu \in [0, +\infty)$ besteht. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_m)$ die Menge aller Maße von k-ter Ordnung. Weiter sei $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) := \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Bemerkung M.23.5.4. Sei $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) und k \in \mathbb{N}$. Dannsind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(ii) Für alle $j \in 1, ..., m$ besteht mit den Bezeichnungen von Bemerkung 2 die Beziehung $\pi_{j,k;\mathbb{R}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Beweis.

(1.) $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Wegen Teil (b) von Bemerkung M.23.3.2 gilt für $j \in \{1, ..., m\} \tilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittel Teil (a) von Satz M.21.5.1 und Definition M.23.3.1 die Äquivalenz von (i) und (ii).

(2.) $(i) \Leftrightarrow (ii)$ Dies folgt aus Teil(c) von Bemerkung M.23.3.2 und Definition M.23.3.1.

■

Das Ziel unserer nachfolgenden Überlegung besteht darin, den Nachweis dafür zu erbringen , das sich die Aussage von Satz M.23.3.1im Falle $m \in \{2, 3, ...\}$und $k \in \mathbb{N}$ geeignet auf die Klasse $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ übertragen lässt. Hierzu treffen wir zunächst die folgende Beobachtung.

Lemma M.23.5.1. Seien $m \in N, k \in \{1, .., n\} sowie l \in \{1, .., k\}$. Dann gilt $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. **Beweis.** Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Wegen Bemerkung M.23.3.4 gilt für alle $j \in \{1, ..., m\}$ mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.23.3.2 dann $\Pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Hieraus folgt für alle $j \in \{1, ..., m\}$ wegen $l \in \{1, .., k\}$ mittels Bemerkung M.23.3.2 dann $\Pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,l}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Hieraus folgt durch erneute Anwendung von Bemerkung M.23.3.4 dass $\mu \in \mathcal{M}_k^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es ist also $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,l}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ■

Wir streben nun eine weitreichende Erweiterung von Satz M.23.3.1 und Lemma M.23.5.1 an. Bei deren Beweis wird das nach folgende Resultat eine wesentliche Rolle spielen.

Satz M.23.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Weiter seien $m \in \{2, 3...\}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$, $(p_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $(0, +\infty)$ und $p_0 = \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $(f_j)_{j=1}^n \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}), p_0 \in (0, +\infty)$ und es gilt $\mathcal{N}_{p_0,\mu}(\prod_{j=1}^n f_j) \subseteq \prod_{j=1}^n \mathcal{N}_{p_j,\mu}(f_j)$

(b) Für $j \in \{1, ...n\}$ sei $f_j \in \mathcal{L}^{p_j}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $\prod_{j=1}^n f_j \in \mathcal{L}^{p_0}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{/R})$.

Beweis.

(a) Wegen Satz gilt

$$\prod_{j=1}^n (f_j) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \tag{1}$$

Da $(p_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $(0, +\infty)$ ist, folgt aus der Definition dann

$$p_0 \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Wir führenden Beweis der noch ausstehenden Behauptung von (a) durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 2$ Dann gilt

$$\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p_0}} = \frac{p_0}{p_1} + \frac{p_0}{p_2} = p(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}) = p_0 \frac{1}{p_0} = 1 \tag{3}$$

Aus (3) folgen insbesondere

$$\frac{p_1}{p_0} \in (0, +\infty) \tag{4}$$

und $\frac{1}{\frac{p_2}{p_0}} = 1 - \frac{1}{\frac{p_1}{p_0}} = \frac{\frac{p_1}{p_0}-1}{\frac{p_1}{p_0}}$, also

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{\frac{p_1}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0} - 1} \tag{5}$$

Aufgrund der Wahl von f_1 und f_2 liefert Bemerkung M.18.9 dann

$$\{|f_1|^{p_0}, |f_2|^{p_0}\} \subseteq \mathfrak{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{6}$$

Wegen (3) - (6) erbringt die Anwendung der Hölderschen Ungleichung (vgl Satz M.21.8.1) dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(|f_1|^{p_0}|f_2|^{p_0}) \subseteq \mathcal{N}_{\frac{p_1}{p_0},\mu}(|f_1|^{p_0}) + \mathcal{N}_{\frac{p_2}{p_0},\mu}(|f_2|^{p_0} \tag{7}$$

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(|f_1|^p * |f_2|^{p_0}) = \int\limits_{\mathbb{R}} |f|_1^p * |f|_2^{p_0} d\mu = \int\limits_{\Omega} |f_1 * f_2|^{p_0} d\mu \tag{8}$$

Sowie

$\mathcal{N}_{\frac{p_1}{p_0},\mu}(|f_2|^{p_0}) * \mathcal{N}_{\frac{p_2}{p_0},\mu}(|f_2|^{p_0})$

$= (\int\limits_{\Omega} [|f_1|^{p_0}]^{\frac{p_1}{p_0}} d\mu)^{\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}}} * (\int\limits_{\Omega} [|f_2|^{p_0}]^{\frac{p_2}{p_0}} d\mu)^{\frac{1}{\frac{p_2}{p_0}}}$

$= [(\int\limits_{\Omega} |f_1|^{p_1})^{\frac{1}{p_1}} * (\int\limits_{\Omega} |f_2|^{p_2} d\mu)^{\frac{1}{p_2}}]^{p_0}$

$$[\mathcal{N}_{p_1,\mu}(f_1) * \mathcal{N}_{p_2,\mu}(f_2)]^{p_0} \tag{9}$$

Aus (6) - (8) folge nun

$$\int\limits_{\Omega} |f_1 f_2|^{p_0} d\mu \subseteq [\mathcal{N}_{p_1,\mu}(f_1) * \mathcal{N}_{p_2,\mu}(f_2)^{p_0}] \tag{10}$$

Wegen (2) ist die Funktion $h : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$, welche gemäß $x \to x^{p_0}$ definiert ist, nach Bemerkung M.17.8 monoton wachsen . Somit folgt aus ?? sodann $\mathcal{N}_{p_1,\mu}(f_1)\mathcal{N}_{p_2,\mu}(f_2)$. Damit ist die Behauptung für $n = 2$ nachgewiesen. Sein nun

$n \in \{2, 3, ...\}$ und sei die Behauptung für $k \in \{2, ..., n\}$ bereits nachgewiesen. Weiter seien $(f_j)_{j=1}^{n+1}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und $(p_j)_{j=1}^{n+1}$ eine Folge aus $(0, +\infty)$. Es seien

$$p_0 := \frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j} \tag{11}$$

und

$$q_0 := \sum_{j=1}^{n} p_j \tag{12}$$

Aus (12) und der Induktionsvoraussetzung folgen dann

$$q_0 \in (0, +\infty) \tag{13}$$

$$\prod_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}) \tag{14}$$

und

$$\mu(\prod_{j=1}^{n} f_j) \leq \prod_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{p_j,\mu}(f_j) \tag{15}$$

Wegen (1) und (12) gilt dann $\frac{1}{\frac{1}{q_0} + \frac{1}{p_{n+1}}} \overset{(12)}{=} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} p_j + \frac{1}{p_{n+1}}} =$

$$\frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1} p_j} = p_0 \tag{16}$$

Wegen (13) (14) (16) sowie $f_{n+1} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}$ und $p_{n+1} \in (0, +\infty)$ folgt aus dem bereits für n=2 Bewiesenen $\mathcal{N}_{p_0,\mu}(\prod_{j=1}^{n+1} f_j) = \mathcal{N}_{p_0,\mu}((\prod_{j=1}^{n} f_j) f_{j+1} \leq$

$$\mathcal{N}_{p_0,\mu}(\prod_{j=1}^{n} f_j) * \mathcal{N}_{p_{n+1},\mu}(f_{n+1}) \tag{17}$$

Aus (15) und (17) folgt denn $\mathcal{N}_{p_0,\mu}(\prod_{j=1}^{n+1} f_i) \leq \prod_{j=1}^{n+1} \mathcal{N}_{p_0,\mu}(f_j)$. Damit ist die 3. Behauptung von (a) induktiv gezeigt.

(b) Aufgrund der Wahl von $(f_j)_{j=1}^{n}$ ist $\mathcal{N}_{p_j,\mu}(f_i)_{j=1}^{n}$ nach Bemerkung M.21.7.3 eine Folge aus $[0, +\infty)$. Hieraus folgt mittel (a) dann $\mathcal{N}_{p_0,\mu}(\prod_{j=1}^{n} f_j) \in [0, +\infty)$.Hieraus folgt mittels M.21.7.3 dann $\prod_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{L}^{p_0}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

■

Wir kommen nun zum Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz M.23.5.2. Sei $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mathcal{M}_{+}^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, das $\sum_{j=1}^{m} \leq k$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathcal{M}_{(k_1,..,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$. **Beweis.** Sei

$$Q := \{l \in \{1, ..., m\} : Es\ ist\ k_l \neq 0.\} \tag{1}$$

Sei zunächst

$$Q = \emptyset \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist dann

$$(k_1, ..., k_m) = (0, ..., 0) \tag{3}$$

Wegen Teil (a) von Bemerkung M.23.2.3 gilt dann

$$\mathcal{M}_{(0,...,0)}(\mu) = \mu(\mathbb{R}^m) \tag{4}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m)$ folgt aus (2) und (3) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty) \tag{5}$$

Wir betrachten nun folgende Situation.

(I) Es sein Q einelementig. Wegen (I) und (1) gilt dann: Es gibt genau ein $j \in \{1, .., m\}$ mit $k_j \neq 0$. Wegen (II) gilt dann

$$k_j = \sum_{l=1}^{m} k_l \tag{6}$$

Wegen $\sum_{l=1}^{m} k_l \leq k$ folgt aus (6) und (II) dann

$$k_j \in \{1, ..., k\} \tag{7}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und (7) folgt aus Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k_j}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Sei $\Pi_{m,j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemaß

$$(x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_j. \tag{8}$$

Wegen (8) gilt nach M.23.5.3 dann $\Pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k_j}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, also

$$\mathcal{M}_{k_j}(\Pi_{m,j}(\mu)) \in [0, +\infty)) \tag{9}$$

Da wegen (II) nach Teil(d) von Bemerkung M.23.5.2 nun $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist, folgt aus (9) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,...k_m)}(\mu) \in [0, +\infty). \tag{10}$$

Wir betragen nun folgende Situation

(III) Die Menge Q enthalte mindestens 2 Elemente. Wegen (1) und (III) gilt dann

$$m \in \{2, 3, ...\} \tag{11}$$

Es sei

$$r := cardQ \tag{12}$$

Wegen (1), (III),(11) und (12) gilt dann

$$r \in \{2, ..., m\} \tag{13}$$

Unter beachtung von (12) seien $i_1, ..., i_r$ die r paarwweise verschiedenen Elemente von Q. Aus (1) folgt dann

$$\sum_{p=1}^{r} k_{i_p} = \sum_{l=1}^{m} k_l \tag{14}$$

Aus (1) und der Definition der beteiligten Abbilungen folgt weiterhin das

$$\mathbb{P}_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m)} = \prod_{p=1}^{r} \tilde{\mathbb{P}}_{i_p,k_p;\mathbb{R}^m} \tag{15}$$

Aus Definition M.23.2.1 und (15) folgt dann v58m 13.04.2010

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)} \overset{DM.23.2.1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} |P_{(k_1,...;k_m);\mathbb{R}^m}| d\mu = \mathcal{N}_{1,\mu}(P_{(k_1,...,k_m);\mathbb{R}^m}) \overset{(15)}{=} \mathcal{N}_{1,\mu}\left(\prod_{p=1}^{r} \tilde{P}_{i_p,k_{i_p};\mathbb{R}^m}\right) \tag{16}$$

Vor dem Hintergrund von (16) streben wir nun die Anwendung von Teil (a) von Satz M.23.5.1 an. Sei

$$s \in \{1, .., n\} \tag{17}$$

Wegen Teil (b) von Bemerkung M.23.5.2 ist dann $\tilde{P}_{i_s,k_{i_s}}; \mathbb{R}^m \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann

$$\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \bar{\mathbb{R}}) \tag{18}$$

Da $(k_{i_r})_{r=1}^{p}$ nach Voraussetzung eine Folge aus $\mathbb{N}$ ist, folgt aus (13) dann

$$k_{i_s} < \sum_{p=1}^{r} k_{i_p} \tag{19}$$

Da nach Voraussetzung $\sum\limits_{l=1}^{m} \leq k$ erfüllt ist, folgt aus (14) und (19) nun

$$k_{i_s} < k \tag{20}$$

Unter Beachtung von $k_{i_s} \neq 0$ sei

$$q_s = \frac{k}{k_{i_s}} \tag{21}$$

Wegen $\{k, k_{i_s}\} \subseteq \mathbb{N}$ und (20) folgt aus (21) dann

$$q_s \in (1, +\infty) \tag{22}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt für $x = (x_1, ..., x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ bei Beachtung von (21) weiterhin

$$|\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}(x)|^{q_s} = |(x_{i_s})^{k_{i_s}}|^{q_s} = (|x_{i_s}|^{k_{i_s}})^{q_s} = |x_{i_s}|^{k_{i_s}q_s} \overset{(21)}{=} |x_{i_s}|^k = |(x_{i_s})^l k = |\tilde{P}_{i_s,l;\mathbb{R}^m}(x)|$$

Es ist also

$$|\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}|^{q_s} = |\tilde{P}_{i_s,l;\mathbb{R}^m}| \tag{23}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}| d\mu \in [0, +\infty) \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt nun $\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}|^{q_s} d\mu \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen $\mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} |\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}|^{q_s} d\mu\right)^{\frac{1}{q_s}}$ dann

$$\mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}) \in [0, +\infty) \tag{25}$$

Unter Beachtung von (17), (21) und (14) folgt

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s} \overset{(17),(21)}{=} \sum_{s=1}^{r} \frac{k_{i_s}}{k} = \frac{1}{k} \sum_{s=1}^{r} k_{i_s} \overset{(14)}{=} \sum_{l=1}^{m} k_l \tag{26}$$

Nach Voraussetzung gilt $\sum\limits_{l=1}^{m} k_l \leq k$. Sei zunächst

$$\sum_{l=1}^{m} k_l = k \tag{27}$$

Aus (26) und (27) folgt dann

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{q_s} = 1 \tag{28}$$

Unter Beachtung von (17), (18), (22) und (28) folgt mittels Teil (a) von Satz M.23.5.1 nun

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(\prod_{s=1}^{r} \tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}) \leq \prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}) \tag{29}$$

Aus (29) und (16) folgt dann $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \leq \prod\limits_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m})$ Hieraus folgt wegen (17) und (25) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty) \tag{30}$$

Unter Beachtung von $\sum\limits_{l=1}^{m} k_l \leq k$ und dem soeben behandelten Fall (27) sei nun

$$\sum_{l=1}^{m} k_l < k \tag{31}$$

Aus (17), (22), (26) und (31) folgt dann

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s} \in (0,1) \tag{32}$$

Unter Beachtung von (32) sei

$$q_0 := \frac{1}{1 - \sum\limits_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s}} \tag{33}$$

Aus (32) und (33) folgt dann

$$q_0 \in (1, +\infty) \tag{34}$$

Wegen $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$ gelten nach Teil (a) von Bemerkung M.21.7.5 dann

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{35}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m}) = [\mu(\mathbb{R}^m)]^{\frac{1}{q_0}} \tag{36}$$

Wegen (35) liefert Bemerkung M.17.4 dann

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \bar{\mathbb{R}}) \tag{37}$$

Aus (36) und der Wahl von μ folgt

$$\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m}) \in [0, +\infty) \tag{38}$$

Unter Verwendung von (34), (37), (17), (22) und (38) folgt mittels Teil (a) von Satz M.23.5.1 dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}\left(1_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{s=1}^{r} \tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}\right]\right) \leq [\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m})]\left[\prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m})\right] \tag{39}$$

Unter Beachtung von $1_{\mathbb{R}^m}\left[\prod\limits_{s=1}^{r} \tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}\right] = \prod\limits_{s=1}^{r} \tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m}$ folgt aus (16) und (39) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \leq [\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m})]\left[\prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}(\tilde{P}_{i_s,k_{i_s};\mathbb{R}^m})\right]$$

Hieraus folgt wegen (38), (17) und (25) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty) \tag{40}$$

Wegen (1), (2), (5), (I), (10), (III), der Voraussetzung $\sum\limits_{l=1}^{m} k_l = k$, (27), (30), (31) und (40) ist alles gezeigt. ■

Vorausschauend sei erwähnt, dass wir später für $m \in \mathbb{N}$ der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ besondere Aufmerksamkeit schenken werden. Diese Klasse ist von besonderer bedeutung für die mathematische Statistik.

M.23.6. Einige spezifische Aussagen über Potenzmomente von Maßen aus $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

In verschiedenen stochastischen Anwendungen spielen Maße aus $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ eine prägnante Rolle. Wir haben in Abschnitt 22 eine ganze Reihe von wichtigen Repräsentanten dieser Klasse angeführt. Im vorliegenden Abschnitt wenden wir uns der Berechnung der Momente dieser Maße zu. Hierzu sei bemerkt, dass uns Satz M.23.2.3 eine erste prinzipielle Antwort auf die genannte Problemstellung liefert.

Beispiel M.23.6.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_n = \frac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n} \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$. Dann gilt*

(a) *Es ist $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,mol}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

(b) *Es ist $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_1(\mu_n) = \frac{n+1}{2}$, $\mathcal{M}_2(\mu_n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ sowie $var(\mu_n) = \frac{n^2-1}{12}$.*

Beweis.

(a) *Da $\left(\frac{1}{n}\right)_{j=1}^{n}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$ mit $\sum\limits_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1$ ist, folgt dies aus Lemma M.7.7.*

(b) *Dies folgt sogleich aus Teil (c) von satz M.23.2.3.*

(c) *Wegen (b) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.23.2.3 dann*

$$\mathcal{M}_r(\mu_n) = \mathcal{M}_r\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=r}^{n} k^r$$

(d) *Aus (c) folgt dann insbesondere*

$$\mathcal{M}_1(\mu_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)}{2} = \frac{n+1}{2}$$

$$\mathcal{M}_2(\mu_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{n}\frac{n(n+1)(2n+1)}{6} = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$$

Hieraus folgt bei Beachtung von (b) mittels Teil (d) von Satz M.23.4.2 dann

$$var(\mu_n) == \mathcal{M}_2(\mu_n) - [\mathcal{M}_1(\mu_n)]^2 = \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \left(\frac{n+1}{2}\right)^2$$

$$= \frac{(n+1)(2n+1)}{6} - \frac{(n+1)^2}{2} = \frac{2(n+1)(2n+1) - 3(n+1)^2}{12}$$
$$= \frac{(n+1)[2(2n+1) - 3(n+1)]}{12} = \frac{(n+1)[4n+2-3n-3]}{12} = \frac{(n+1)(n-1)}{12}$$
$$= \frac{n^2+1}{12}$$

■

Bemerkung M.23.6.1. Seien $N \in \mathbb{N}$ sowie $n \in \{1, .., N\}$. Dann gilt

$$n \binom{N}{n} = N \binom{N-1}{n-1}$$

Beweis. Es gilt

$$n \binom{N}{n} = n \frac{N!}{n!(N-n)!} = N \frac{(N-1)!}{(n-1)![(N-1)-(n-1)]!} = N \binom{N-1}{n-1}$$

■

Satz M.23.6.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ mit $p \in [0,1]$. Es bezeichne $\beta_{n,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Dann gilt:

(a) Es ist $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Es ist $\mathcal{M}_1(\beta_{n,p}) = np$.

(c) Es gelten $\mathcal{M}_2(\beta_{n,p}) = np(np+1-p)$ sowie $var(\beta_{n,p}) = np(1-p)$.

Beweis. Wegen Definition M.22.0.1 gilt

$$\beta_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{1}$$

(a) Dies folgt wegen (1) sogleich aus Teil (c) von Satz M.23.2.3.

(b) Wegen Bemerkung M.23.6.1 gilt für

$$k \in \{1, .., n\} \tag{2}$$

dann

$$k \binom{n}{k} = n \binom{n-1}{k-1} \tag{3}$$

Wegen (a) und (1) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (2), (3) und dem Binomischen Satz dann

$$\mathcal{M}_1(\beta_n, p) \overset{(1)}{=} \mathcal{M}_1 \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \epsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \right) \overset{SM.23.2.3}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \overset{(2),(3)}{=} \sum_{k=1}^{n} n \binom{n-1}{k-1} p^k(1-p)^{n-k} = np \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{s=0}^{n-1} \binom{n-1}{s} p^s(1-p)^{(n-1)-s} \overset{BS}{=} np[p+(1-p)]^{n-1} = np1^{n-1} = np.$$

(c) Für

$$n \in \{2, 3, ...\} \tag{4}$$

folgt aus (b) sogleich

$$\sum_{k=0}^{n-1} k \binom{n-1}{k} p^k(1-p)^{(n-1)-k} = \mathcal{M}_1(\beta_{n-1,p}) \overset{(b)}{=} (n-1)p \tag{5}$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{k=0}^{1-1} k \binom{1-1}{k} p^k(1-p)^{(1-1)-k} = 0 = (1-1)p \tag{6}$$

Für

$$k \in \{1, ..., n\} \tag{7}$$

folgt unter Beachtung von (2) und (3) weiterhin

$$k^2 \binom{n}{k} = kk\,(n) \overset{(2),(3)}{=} kn \binom{n-1}{k-1} = [(k-1)+1]n \binom{n-1}{k-1}$$

$$= n\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\right] \tag{8}$$

Wegen (a) und (1) ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (7), (8), (4), (5), (6) und des Binomischen Satzes, dass

$$\mathcal{M}_2(\beta_{n,p}) \overset{(1)}{=} \mathcal{M}_2\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}\epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) \overset{SM.23.2.3}{=} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} p^k(1-p)^{n-k} \overset{(7),(8)}{=} \sum_{k=1}^{n} n\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\right] p^k(1-p)^{n-k}$$

$$= np \sum_{k=1}^{n} \left[(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1}\right] p^{k-1}(1-p)^{n-k}$$

$$= np\left[\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k} + \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} p^{k-1}(1-p)^{n-k}\right]$$

$$= np\left[\sum_{s=0}^{n-1} s\binom{n-1}{s}p^s(1-p)^{(n-1)-s} + \sum_{s=0}^{n-1}\binom{n-1}{s}p^s(1-p)^{(n-1)-s}\right]$$

$$\overset{(4)-(5),BS}{=} np\left[(n-1)p + [p+(1-p)]^{n-1}\right] = np\left[(n-1)p + 1^{n-1}\right]$$

$$= np[(n-1)p+1] = np(np+1-p) \tag{9}$$

Wegen (a) folgt mittels Teil (d) von Satz M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (8) und (9) dann

$$var(\beta_{n,p}) = \mathcal{M}_2(\beta_{n,p}) - [\mathcal{M}_1(\beta_{n,p})]^2 = np(np+1-p)-(np)^2 = np(np+1-p-np) = np(1-p))$$

■

Unser nächstes Teilziel besteht in der Berechnung von Erwartungswert und Varianz der hypergeometrischen Verteilungen. Hierzu ist eine kleine Vorbereitung nötig. v59m 19.04.2010

Lemma M.23.6.1. Seien $N \in \mathbb{N}$, sowie $M \in \{1, ..., N\}$. Weiter sei $l \in \{0, ..., N-1\}$. Dann gilt

$$\binom{N-1}{l} = \sum_{k=0}^{l}\binom{M-1}{k}\binom{N-M}{l-k}$$

Lemma M.23.6.2. lemma M.23.6.2 Seien $N \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $M \in 2, ..., N$. Weiter sei $l \in 0, ..., N-2$. Dann gilt:

$$\binom{N-2}{l} = \sum_{k=0}^{l}\binom{M-2}{k}\binom{N-M}{l-k}$$

Satz M.23.6.2. Seien $N \in \mathbb{N}$, $n \in \{1, ..., N\}$ sowie $M \in \{1, ..., N\}$. Es bezeichne $H_{N,M,n}$ die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N,M und n. Dann gilt

(a) Es ist $H_{N,M,n} \in \mathcal{M}_+^{1,+\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(b) Es ist $M_1(H_{N,M,n}) = n\frac{M}{N}$

(c) Es gelten $M_2(H_{N,M,n}) = \frac{M}{N}$, sowie $var(H_{N,M,n}) = \frac{M}{N}(1-\frac{m}{N})$

(d) Seien zusätzlich $N, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Dann gelten $M_2(H_{N,M,n}) = \frac{M(M-1)}{\binom{N}{n}}\binom{N-2}{n-2} + n\frac{M}{N}$ sowie $var(H_{N,M,n}) = n\frac{M}{N}(1-\frac{M}{N})\frac{N-n}{N-1}$

(e) Unter Beachtung von $\frac{M}{N} \in [0,1]$ bezeichne $\beta_{n,\frac{M}{N}}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und $\frac{M}{N}$. Dann gilt: $var(H_{N,M,n}) = \frac{N-m}{n-1}var(\beta_{n,\frac{M}{N}})$

Wir wenden uns nun der Poisson-Verteilung zu:

Satz M.23.6.3. Sei $\alpha \in [0, +\infty)$ und bezeichne Π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter α. Dann gilt:

(a) Es ist $\Pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^{1,+\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(b) Es ist $M_1(\Pi_\alpha) = \alpha$

(c) Es gelten $M_2(\Pi_\alpha) = \alpha(\alpha + 1)$ und $var(\Pi_\alpha) = \alpha$

Beweis. Wegen M.22.0.5 gilt

$$\Pi_\alpha = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^k}{k!}\epsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{1}$$

(a) Sei $\alpha = 0$. Wegen (1) ist dann $\Pi_\alpha = \epsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. Hieraus folgt für $l \in \mathbb{N}_0$ wegen Teil (c) von Satz M.23.2.3 dann

$$M_l(\Pi_\alpha) = M_l(\epsilon_0, \mathfrak{B}_1) = 0 \in [0, +\infty) \tag{2}$$

Sei nun $\alpha \in (0, +\infty)$. Weiter sei $l \in \mathbb{N}_0$. Wegen (1) folgt mittels Teil (a) von Satz M.23.2.3 dann:

$$M_l(\Pi_\alpha) \overset{(1)}{=} M_l(\sum_{k\in\mathbb{N}} exp\{-\alpha\}\frac{\alpha}{k!}\epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k^l exp\{-\alpha\}\frac{\alpha}{k!} = exp\{-\alpha\}\sum_{k\in\mathbb{N}_0} k^l\frac{\alpha}{k!} \tag{3}$$

Wir weisen nun mittels Quotientenkriterium die Konvergenz der in (3) auftretende Reihe nach. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt

$$\leq \frac{\frac{(k+1)^l\alpha^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^l\alpha^k}{k!}} = (\frac{k+1}{k})^l\frac{\alpha}{k+1} = \alpha(1+\frac{1}{k})^l\frac{1}{k+1} \tag{4}$$

Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\{\alpha(1+\frac{1}{k})^l\frac{1}{k+1}\} = \alpha(1+\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k})^l\lim_{n\to\infty}\frac{1}{k+1} = \alpha 1^l 0 = 0 \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) folgt mittels Quotientenkriterium dann

$$\sum_{k\in\mathbb{N}_0} k^l\frac{\alpha^k}{k!} \in [0, +\infty) \tag{6}$$

Aus (3) und (6) folgt dann $\mathbb{M}_l(\Pi_\alpha) \in [0, +\infty)$. Somit ist $\Pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(b) Unter Beachtung von (1) und (a) folgt mittel Teil (b) von Satz M.23.2.3 dann:

$$M_1(\Pi_\alpha) \overset{(1)}{=} M_1(\sum_{k\in\mathbb{N}_0}\exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^k}{k!}\epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^k}{k!}$$

$$= \exp\{-\alpha\}[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} k\frac{\alpha^k}{k!} = \exp\{-\alpha\}[\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^k}{(k-1)!}] = \alpha\exp\{-\alpha\}[\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}]$$

$$= \alpha\exp\{-\alpha\}[\sum_{s\in\mathbb{N}_0}\frac{\alpha^s}{s!}] = \alpha\exp\{-\alpha\}\exp\{\alpha\} = \alpha$$

(c) Aus (b) folgt

$$\sum_{k\mathbb{N}_0} exp\{-\alpha\}k\frac{\alpha^k}{k!} = M_1(\Pi_\alpha) = \alpha \tag{7}$$

Wegen (1) und (a) folgt mittels Teils(b) von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (7) dann:

$$M_2(\Pi_\alpha) \overset{(1)}{=} M_2(\sum_{k\in\mathbb{N}_0} = \exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^k}{k!}\epsilon_{k,\mathfrak{B}_1}) = \sum_{k\in\mathbb{N}_0} k^2 \exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^k}{k!}$$

$$= \alpha[\sum_{k\in\mathbb{N}_0} k^2 \exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^{k-1}}{k!}] = \alpha[\sum_{k\in\mathbb{N}}((k-1)+1))\exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}]$$

$$= \alpha[\sum_{k\in\mathbb{N}}(k-1)\exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} + \exp\{-\alpha\}\sum_{k\in\mathbb{N}}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}]$$

$$= \alpha[\sum_{s\in\mathbb{N}_0} s\exp\{-\alpha\}\frac{\alpha^s}{s!} + \exp\{-\alpha\}\sum_{s\in\mathbb{N}_0}\frac{\alpha^s}{s!}]$$

$$\overset{(7)}{=} \alpha[\alpha + \exp\{-\alpha\}\exp\{\alpha\}] = \alpha(\alpha+1) \tag{8}$$

Wegen (a) folgt mittels Teil (d) von M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (b) und (8) dann:
$var(\Pi_\alpha) = M_2(\Pi_\alpha - [M_1(\Pi_\alpha)]^2 = \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = \alpha$ ■

M.23.7. Berechnung der Potenzmomente einer markanter $\lambda^{(1)}$-stetiger Masse aus $\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Wir haben in dem Abschnitt 21.14 uns 21.15 eine Reihe von Beispielen $\lambda^{(1)}$-stetiger Maße aus $\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ vorgestellt, welche in stochastischen Anwendungen eine wesentliche Rolle spielen. Im vorliegenden Abschnitt vervollkommnen wir unsere Kenntnisse über Maße, indem wir ihre Potenzmomente berechnen. Hierzu werden wir Satz M.23.2.4 heranziehen. Wir wenden uns zunächst der kontinuierlichen Gleichverteilung auf einem endlichen Intervall zu.

Bemerkung M.23.7.1. Seien $a, b \in \mathbb{C}$, sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $a^k b^(k+1) = (a-b)[\sum_{s=0}^k a^s b^{k-1}]$.

Satz M.23.7.1. Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in (0, +\infty)$, $\Delta := [a, b]$ und bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu_\Delta \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(b) Es sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:
$M_k(\Pi_\Delta) = \frac{1}{k+1}\frac{b^{k+1}-a^{k+1}}{b-a} = \frac{1}{k+1}[\sum_{s=0}^k a^s b^{k-1}]$

(c) Es gelten $M_1(\mu_\Delta) = \frac{a+b}{2}$, sowie $var(\mu_\Delta) = \frac{(b-a)^2}{12}$

(d) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist μ_Δ standardisiert

   (ii) Es ist $\Delta = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$

Wir wenden uns nun den Momenten der Normalverteilungsfamilien zu.

Lemma M.23.7.1. Es bezeichen $\mathcal{N}_{0,1}$ die standardisiert Normalverteilung. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten:

$$M_{2k}(\mathcal{N}_{0,1}) := \begin{cases} 1 & , falls\ k = 0 \\ \prod_{j=1}^{k}(2j+1) & , falls\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sowie

$$M_{2k+1}(\mathcal{N}_{0,1}) = \frac{1}{2\sqrt{\Pi}2^{k+1}}k!$$

Beweis. Sei $f_{0,1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gem. $x \mapsto \frac{1}{2\Pi}exp\{-\frac{x^2}{2}\}$. Wegen Teil (a) von M.21.14.2 ist dann

$$f_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{1}$$

Wegen M.21.14.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} = (\lambda^{(1)})_{f_{0,1}} \tag{2}$$

$$Sei k \in \mathbb{N}_0 \tag{3}$$

Weiter sei $P_{s;\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ gem. $x \mapsto x^s$. Wegen (1) gilt nach Teil (a) von Satz M.23.2.4 dann

$$|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{4}$$

sowie

$$\mathcal{M}((\lambda^{(1)})_{f_{0,1}}) = \int_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}d\lambda^{(1)} \tag{5}$$

Aus (2) und (5) folgt dann

$$\mathcal{M}(\mathcal{N}_{0,1})_{f_{0,1}}) = \int_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}d\lambda^{(1)} \tag{6}$$

Aus den Defintionen von $P_{s;\mathbb{R}}$ und $f_{0,1}$ folgt sogleich $|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.4 dass $|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}$ lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung von $|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1} \in \mathcal{A}[\mathbb{R}, +\infty))$ und (4) mittels Teil (a) von Satz M.21.11.4 dann

$$\int_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}d\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} [Rstr._{[-n,n]}(|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1})](x)dx \tag{7}$$

Aus Definition von $P_{s;\mathbb{R}}$ und $f_{0,1}$ erkennt man sogleich, dass $|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}$ eine gerade Funktion ist. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n}[Rstr._{[-n,n]}(|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1})](x)dx = 2\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{n}[Rstr._{[0,n]}(|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1})](x)dx$$

$$= 2\int\limits_{0}^{n}|x^s|\frac{1}{\sqrt{2\Pi}}exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\int\limits_{0}^{n}x^s exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx. \tag{8}$$

Nehmen wir nun die Substitution von $u = \frac{x^2}{\sqrt{2}}$ vor, so ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ dann $\frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\int\limits_{0}^{n}x^s exp\{-\frac{x^2}{2}\}dx = \int\limits_{0}^{n}(\sqrt{2}u)^s exp\{-u^2\}\sqrt{2}du =$

$$\sqrt{2}^{s+1}\int\limits_{0}^{\frac{u}{sqrt2}}u^2 exp\{-u^2\}du \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n}[Rstr._{[-n,n]}(|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1})](x)dx = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}\int\limits_{0}^{\frac{u}{\sqrt{2}}}u^2 exp\{-u^2\}du \tag{10}$$

Aus (5), (7) und (10) folgt nun

$$M_s(\mathcal{N}_{0,1}) \overset{(5)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}}|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1}d\lambda^{(1)} \overset{(7)}{=} \lim_{n\to\infty}\int\limits_{-n}^{n}[Rstr._{[-n,n]}(|P_{s;\mathbb{R}}|f_{0,1})](x)dx$$

$$\overset{(10)}{=} \lim_{n\to\infty}\frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}\int\limits_{0}^{\frac{u}{\sqrt{2}}}u^2 exp\{-u^2\}du = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}\lim_{n\to\infty}\int\limits_{0}^{\frac{u}{\sqrt{2}}}u^2 exp\{-u^2\}du =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}\int^{\infty}u^2 exp\{-u^2\}du =$$

$$\frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}[\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}u^s exp\{-u^2\}]du \tag{11}$$

Seien $I := (0, +\infty)$. $\mathfrak{B}_{1,I} = \mathfrak{B}_1 \cap I$ $\lambda^{(1)} := Rstr._{\mathfrak{B}_{1,I}}\lambda^{(1)}$. weiter sei $f_s : I \to \mathbb{R}$ def. gem. $u \mapsto u^s exp\{u^2\}$. Wegen Teil (a) von Satz M.21.13.6 ist dann $f_s \in \mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_{1,I})$ und dem Beweis von Satz M.21.13.6 (vgl. Formel (1)) wurde gezeigt

$$\int\limits_{I}f_s d\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n}u^s exp\{-u^2\}]du \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt nun

$$M_s(\mathcal{N}_{0,1}) = \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{s+1}\int_I f_s d\lambda_I^{(1)} \tag{13}$$

Sei nun

$$k\ in \mathbb{N}_0 \tag{14}$$

Aus Teil (b) von Satz M.21.13.6 folgen dann

$$\int_I f_{2k} d\lambda_I^{(1)} = \begin{cases} \frac{\sqrt{\Pi}}{2} & , falls\ k=0 \\ [\prod_{j=1}^k (2j-1)]\frac{\sqrt{\Pi}}{2^{k+1}} & , falls\ k \in \mathbb{N} \end{cases}$$

sowie

$$\int_I f_{2k+1} d\lambda_I^{(1)} = \frac{k!}{2} \tag{15}$$

Unter Beachtung von (11) und (15) folgen dann

$$M_0(\mathcal{N}_{0,1}) \overset{(11)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{0+1}\int_I f_{0,1} d\lambda_I^{(1)} \overset{15}{=} \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{0+1}\frac{1}{2}\sqrt{\Pi} = 1 \tag{16}$$

Sowie für

$$k \in \mathbb{N} \tag{17}$$

weiterhin

$$M_0(\mathcal{N}_{0,1}) \overset{(11)}{=} \tfrac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{k+1}\int_I f_{2k} d\lambda_I^{(1)} \overset{(15)}{=} \tfrac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{k}\sqrt{2}[\prod_{j=1}^k (2j-1)]\tfrac{\sqrt{\Pi}}{2^{k+1}}$$

$$= \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}2^k\sqrt{2}[\prod_{j=1}^k (2j-1)]\frac{\sqrt{\Pi}}{2^{k+1}} = \prod_{j=1}^k (2j-1) \tag{18}$$

Unter Verwendung von (11) und (15) folgt $M_{2k+1}(\mathcal{N}_{0,1}) \overset{(11)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{(k+1)+1}\int_I f_{2k+1} d\lambda_I^{(1)} \overset{(15)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\Pi}}\sqrt{2}^{2(k+1)}\frac{k!}{2} =$

$$\frac{2^{k+1}}{\sqrt{2\Pi}}k! \tag{19}$$

Wegen (14), sowie (16) - (19) ist dann alles gezeigt. ■

v60m
20.04.2010

Lemma M.23.7.2. Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) $f \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R})$.

(ii) Es ist f lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$.

(iii) f ist ungerade.

Dann gilt: $\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda^{(1)} = 0$.

Beweis. Wegen (i) und (ii) gilt nach Teil (a) von Satz M.21.11.5 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f\, d\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} (Restr._{[-n,n]} f)(x)\, dx \tag{1}$$

Wegen (ii) und (ii) gilt für $n \in \mathbb{N}$ nun $\int\limits_{-n}^{n} (Restr._{[-n,n]} f)(x) dx = 0$ Hieraus folgt in Verbindung mit (1) dann $\int\limits_{\mathbb{R}} d\lambda^{(1)} = 0$. ■

Lemma M.23.7.3. Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $g : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:

(i) Es ist $g \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$.

(ii) Es ist g eine gerade Funktion.

(iii) Es ist $P_{\mathcal{E},\mathbb{R}} g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R})$.

Dann gilt:

(a) Es ist $g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Es ist $\mathcal{M}_k((\lambda^{(k)})_g) \in [0, +\infty)$.

(c) Sei k ungerade. Dann ist $M_k((\lambda^{(1)})_g) = 0$.

(d) Es ist $P_{k;\mathbb{R}}$ lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$.

(e) es ist $P_{k_{\mathbb{R}}}$ ist ungerade.

Beweis.

(a) Wegen (i) folgt mittels Satz M.15.8 dann $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1 m \mathfrak{B}_1; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann $g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $g \in A(\mathbb{R}, [0, \infty))$ dann $g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Wegen (iii) ergibt sich $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R})$. Hieraus ergibt sich mittels Folgerung M.21.5.1 dann $|P_{k,\mathbb{R}}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mathbb{R})$, also wegen $|P_{k,\mathbb{R}} g| = |P_{k,\mathbb{R}}| g$ dann $|P_{k,\mathbb{R}}| g \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R})$. Hieraus folgt miitels Teil (b) von Satz M.23.2.4 dann $\mathcal{M}_k((\lambda^{(1)})_g) \in [0, +\infty)$.

(c) Wegen (b) folgt mittels Teil (c) von Satz M.23.2.4 dann:

$$M_k((\lambda^{(1)})_g) = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{k,\mathbb{R}} g d\lambda^{(1)} \tag{1}$$

Aus (i) und der Definition von $P_{k,\mathbb{R}}$ folgt sogleich $P_{k,\mathbb{R}} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.3 dann Eigenschaft (d) da k ungerade ist, folgt aus der Definition von $P_{k,\mathbb{R}}$ sogleich, dass $P_{k,\mathbb{R}}$ eine ungerade Funktion ist. Hieraus und aus (iii) folgt dann Eigenschaft (e).

Wegen (iii), (iv) (v) folgt aus Lemma M.23.7.2 nun $\int\limits_{\mathbb{R}} P_{k,\mathbb{R}} d\, f\lambda^{(1)} = 0$. Hieraus folgt wegen (1) dann $M_k((\lambda^{(1)})_g) = 0$. ■

Satz M.23.7.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit dem Parameter a und σ^2. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\mathbb{M}_k(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}) = \begin{cases} \sigma^k [\prod\limits_{j=1}^{\frac{k}{2}} (2j-1)] & \text{, falls } k \text{ gerade} \\ 0 & \text{, sonst.} \end{cases}$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $M_k(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) = \sum\limits_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \sigma^j [M_j(\mathcal{N}_{0,1})]$

(d) Es gelten: $M_1(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) = a$ und $var(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) = \sigma^2$.

Beweis.

(a) Aus Teil (b) von Satz M.21.14.2 und Lemma M.23.7.1 folgt:
$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,+\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{1}$$
Sei $T_{\sigma,a} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}; x \mapsto \sigma x + a$. Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{\sigma,a}$ dann $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-meßbar und wegen Teil (b) von Satz M.21.14.2 gilt
$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1}) \tag{2}$$
Wegen (1) und (2) liefert Teil (a) von Satz M.23.3.2 dann $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Wegen (2) gilt insbesondere
$$\mathcal{N}_{0,\sigma^2} = T_{\sigma,0}(\mathcal{N}_{0,1}) \tag{3}$$
Wegen (1) folgt mittels Teil (b) von Satz M.23.3.2 dann
$$M_k(T_{\sigma,0}(\mathcal{N}_{0,1})) = \sigma^k [M_k(\mathcal{N}_{0,1})] \tag{4}$$
Aus (3) und (4) dann
$$M_k(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}) = \sigma^k [M_k(\mathcal{N}_{0,1})] \tag{5}$$
Sei zunächst k gerade. Wegen (4) liefert Bemerkung M.23.2.3 dann $M_k(\mathcal{N}_{0,1}) = \mathcal{M}_k(\mathcal{N}_{0,1})$ und somit wegen der nach Lemma M.23.7.1 gültigen Beziehung $\mathcal{M}_k(\mathcal{N}_{0,1}) =$

$\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(2j-1), also M_k(\mathcal{N}_{0,1}) = \prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(2j-1)$. Hieraus folgt in Verbindung mit (5) dann $M_k(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}) = \sigma^k[\prod_{j=1}^{\frac{k}{2}}(2j-1)]$.

Sei nun k ungerade. Sei $f_{0,\sigma^2:\mathbb{R}\to[0,+\infty)} : x \mapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}\exp -\frac{x^2}{\sigma^2}$. Wegen Teil (a) von Satz M.21.14.2 gelten

$$f_{0,\sigma^2} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \tag{6}$$

und

$$f_{0,\sigma^2} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{7}$$

Wegen Definition M.21.11.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,\sigma^2}(\lambda^{(1)})_{f_{0,\sigma^2}} \tag{8}$$

Aus der Definition von f_{0,σ^2} folgt sogleich: Es ist f_{0,σ^2} eine gerade Funktion. Wegen (a) gilt

$$\mathcal{M}_k(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}) \in [0, +\infty) \tag{9}$$

Sei $P_{k,\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto x^k$. Wegen (7) und (9) liefert Teil (b) von Satz *M*.23.2.4 dann

$$P_{k,\mathbb{R}} f_{0,\sigma^2} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}) \tag{10}$$

Wegen (6) (i), (10), (8) und der Wahl von k liefert Teil (c) von Lemma M.23.7.3 dann $M_k(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}) = 0$

(c) Unter Beachtung von (2) und (1) ergibt sich mittels Teil(b) von Satz M.23.3.2 dann $M_k(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) \overset{(2)}{=} M_k(T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})) = \sum_{j=0}^{k}\binom{k}{j} a^{k-j}\sigma^j[M_j(\mathcal{N}_{0,1})]$.

(d) Wegen (1) gilt insbesondere $\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Hieraus folgt mittels Teil (b) von Satz M.23.4.1 dann

$$M_1(T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})) = \sigma[M_1(\mathcal{N}_{0,1})] + a \tag{11}$$

Wegen (b) gelten

$$M_1(\mathcal{N}_{0,1}) = 0 \tag{12}$$

und

$$M_2(\mathcal{N}_{0,1}) = \prod_{j=1}^{1}(2j-1) = 1 \tag{13}$$

Unter Verwendung von (2) und (11) ergibt sich

$$M_1(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) \overset{(2)}{=} M_1(T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})) \overset{(11)}{=} \sigma[M_1(\mathcal{N}_{0,1})] + a \overset{(12)}{=} a \tag{14}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil (d) von Satz M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (13) und (12) dann

$$car(\mathcal{N}_{0,1}) = M_2(\mathcal{N}_{0,1}) - [M_1(\mathcal{N}_{0,1})]^2 = 1 - 0^2 = 1 \tag{15}$$

Wegen (1) folgt mittels Satz M.23.4.5 weiterhin $var(T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})) = \sigma^2 \cdot var(\mathcal{N}_{0,1})$. Hieraus folgt in Verbindung mit (2) und (15) dann

$$var(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}) \overset{(2)}{=} var(T_{\sigma,a}(\mathcal{N}_{0,1})) = \sigma^2 var(\mathcal{N}_{0,1}) = \sigma^2$$

■

Folgerung M.23.7.1. Seien $(a_1, \sigma_1), (a_2, \sigma_2) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent.

(i) Es ist $(a_1, \sigma_1) = (a_2, \sigma_2)$.

(ii) Es ist $\mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2} = \mathcal{N}_{a_2,\sigma_2^2}$.

Beweis. Dies folgt sogleich aus Teil (d) von Satz M.23.7.2 ■

Unsere Aufmerksamkeit gilt nun den Momenten der Familie der Cauchy-Verteilungen.

Satz M.23.7.3. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0, +\infty)$. Es bezeichne $\gamma_{\alpha,\beta}$ die Cauchy-VErtelung mit den Parametern α und β. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt: $\mathcal{M}_k(\gamma_{\alpha,\beta}) = +\infty$. **Beweis.** Wegen Teil (b) von Satz M.21.15.2 gelten dann

$$\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_1^1(\mathbb{R}, \mathfrak{B}_1) \tag{1}$$

sowie

$$T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1}) = \gamma_{\alpha,\beta} \tag{2}$$

Sei

$$F_{0,1} : \mathbb{R} \to (0, +\infty) : x \mapsto \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2 + 1} \tag{3}$$

Wegen Teil (a) von Satz M.21.15.2 gelten dann

$$F_{0,1} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \tag{4}$$

und

$$F_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{5}$$

Wegen (3) gilt nach Defintionion von $F_{0,1}$ zudem

$$\gamma_{0,1} = (\lambda^(1))_{F_{0,1}} \tag{6}$$

Wegen (5) gilt nach Teil (a) von Satz M.23.2.4 dann

$$|P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{7}$$

sowie

$$\mathcal{M}_1((\lambda^{(1)})_{F_{0,1}}) = \int_{\mathbb{R}} |P_{1,\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} d\lambda^{(1)} \tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt nun

$$\mathcal{M}_1(\gamma_{0,1}) = \int_{\mathbb{R}} |R_{1,\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} d\lambda^{(1)} \tag{9}$$

Wegen (4) und der Wahl von $P_{1,\mathbb{R}}$ folgt sogleich $|P_{1,\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in \mathcal{C}((\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}}))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.21.11.4, dass $|P_{1,\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1}$ lokal R-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. hieraus folt bei Beachtung von $|P_{1,\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in A(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ und (7) mittels Teil (a) von Satz M.21.11.4 dann

$$\int_{\mathbb{R}} |P_{1,\mathbb{R}}| F_{0,1} d\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (Restr._{[-n,n]}[|P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1}])(x)dx. \tag{10}$$

Aus der Definition von $P_{1,\mathbb{R}}$ und $F_{0,1}$ erkennt man sogleich, dass $|P_{1;\mathbb{R}}|f_{0,1}$ eine gerade Funktion ist. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$ dann $\int\limits_{-n}^{n} (Restr._{[-n,n]}[|P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1}])(x)dx = 2 \int\limits_{0}^{n} (Restr._{[-n,n]}[|P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1}])(x)dx = 2\int_0^n |x| \frac{1}{\pi} \frac{1}{x^2+1} dx = \frac{2}{\pi} [\frac{1}{2} \ln(1+x^2)]_{x=0}^{x=n} = \frac{1}{\pi} \ln(1+n^2)$
Kombiniert man dies mit (9) und (10), so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(\gamma_{0,1}) &\overset{(9)}{=} \int_{\mathbb{R}} |P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1} d\lambda^{(1)} \overset{(10)}{=} \lim_{n\to\infty} \int_{-n}^{n} (Restr._{[-n,n]}[|P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1}])(x)dx \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi} \ln(1+n^2) = +\infty \end{aligned} \tag{11}$$

Aus (11) folgt mittels Teil (a) von Satz M.23.3.2 dann

$$M_1(T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1})) = +\infty \tag{12}$$

Aus (2) und (12) folgt dann

$$\mathcal{M}_1()\gamma_{\alpha,\beta} = +\infty \tag{13}$$

Da wegen (13) insbesondere $\gamma_{\alpha,\beta} \in \tilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ erfüllt ist, folgt wegen (13) mittels Satz M.23.3.1 für $k \in \mathbb{N}$ dann $\mathcal{M}_k(\gamma_{\alpha,\beta}) = +\infty$. ■

Wir beschäftigen und nun mit dem Studium der Momente der Familie der Gammaverteilungen und ihren Spezialfällen.

Satz M.23.7.4. Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ und bezeichne $\Gamma_{\alpha,\beta}$ die Gammaverteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt

(a) Es ist $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{M}_k(\Gamma_{\alpha,\beta}) = M_k(\Gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\beta^k \Gamma(\alpha)}$.

(c) Es gelten $\mathcal{M}_1(\Gamma_{\alpha,\beta}) = M_1(\Gamma_{\alpha,\beta}) \frac{\alpha}{\beta}$ sowie $var(\Gamma_{\alpha,\beta}) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.

Folgerung M.23.7.2. Seien $(\alpha_1, \beta_1), (\alpha_2, \beta_2) \in (0, +\infty) \times (0, \infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $(\alpha_1, \beta_1) = (\alpha_2, \beta_2)$.

(ii) Es ist $\Gamma_{(\alpha_1,\beta_1)} = \Gamma_{(\alpha_1,\beta_1)}$

Satz M.23.7.5. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne χ_n^2 die zentrale Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden. Dann gilt

(a) Es ist $\chi_n^2 \in \mathcal{M}_+^{1,+\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{M}_k(\chi_n^2) = M_k(\chi_n^2) = \prod_{j=1}^{k} [n + (2j-1)]$.

(c) Es gelten $\mathcal{M}_1(\chi_n^2) = n$ sowie $var(\chi_n^2) = 2n$.

Beweis. Wegen $\chi_n^2 = \Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ folgen alle Behauptungen durch Anwendung von Satz M.23.7.4 ■

v61m
26.04.2010

Satz M.23.7.6. Sei $\eta \in (0, +\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt:

(a) Es ist $E_\eta \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mathcal{M}_k(E_\eta) = \frac{k!}{\eta^k}$

(c) Es gelten $\mathcal{M}_1(E_\eta) = \frac{1}{\eta}$ und $var(E_\eta) = \frac{1}{\eta^2}$

Beweis. Wegen Teil (a) von Satz M.21.15.6 gilt $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$. Hieraus folgen in Verbindung mit Satz M.23.7.4 dann alle Behauptungen. ■

M.23.8. Einige Bemerkungen zum Hamburgerschen Momentenproblem

Aus der Sicht der Stochastik sind insbesondere Potenzmomentprobleme von starkem Interesse. Aus diesem grund stellen wir im vorliegenden Abschnitt einige bemerkenswerte Aspekte zur Theorie des Hamburgerschen Momentenproblems vor. Es zeigt sich, dass es im Zusammenhang mit dieser Aufgabenstellung günstig ist, die vorgegebenen Daten in einer speziellen Weise zu organisieren. Dieses Anliegen führt uns auf den nachfolgend eingeführten Typ strukturierter matrizen, welcher bereits in Untersuchungen von Herrmann Hankel (1839-1873) anzutreffen ist und deshalb nach ihm benannt wurde.

Definition M.23.8.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(a_j)_{j=0}^{2n}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$. Für $(j,k) \in \{0,...,n\} \times \{0,...,n\}$ sei $h_{jk} := a_{j+k}$. Dann heißt die Matrix $H_{(a_j)_{j=0}^{2n}} := (h_{jk})_{j,k=0}^{n}$ die durch $(a_j)_{j=0}^{2n}$ erzeugte Hankelmatrix. Es ist z.B. $H_{(a_j)_{j=0}^{4}} = \begin{pmatrix} a_0 & a_1 & a_2 \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ a_2 & a_3 & a_4 \end{pmatrix}$

Bemerkung M.23.8.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(a_j)_{j=0}^{2n}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$. Dann ist

$$\left[H_{(a_j)_{j=0}^{2n}}\right]^T = H_{(a_j)_{j=0}^{2n}}$$

.

Definition M.23.8.2. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Weiter sei $s \in \{0,...,n\}$. Dann wird die durch die Folge $(\mathcal{M}_r(\mu))_{r=0}^{2s}$ erzeugte Hankelmatrix $H_{(\mathcal{M}_r(\mu))_{r=0}^{2s}}$ als die s-te zu μ gehörige Hankelmatrix bezeichnet und mit $H_{s,\mu}$ symbolisiert.

Definition M.23.8.3. Seien $q \in \mathbb{N}$ und A eine symmetrische Matrix aus $\mathbb{R}^{q\times q}$. Dann heißt A positiv semidefinit bzw. positiv definit, falls für alle $x \in \mathbb{R}^q$ bzw. alle $x \in \mathbb{R}^q \setminus \{0_{q\times 1}\}$ die Beziehung $x^T Ax \in [0,+\infty)$ bzw. $x^T Ax \in (0,+\infty)$ besteht. Es bezeichne $\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ bzw. $\mathbb{R}_{>}^{q\times q}$ die Menge aller positiv semidefiniten bzw. positiv definiten Matrizen aus $\mathbb{R}^{q\times q}$.

Bemerkung M.23.8.2. Es gelten $\mathbb{R}_{\geq}^{1\times 1} = [0,+\infty)$ und $\mathbb{R}_{>}^{1\times 1} = (0,+\infty)$.

Beispiel M.23.8.1. *Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $0_{q\times q} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q} \setminus \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.*

(b) *Es ist $I_q \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.*

Bemerkung M.23.8.3. Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{R}_{>}^{q\times q} \subset \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$.

Bemerkung M.23.8.4. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $A \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

(ii) Es ist $\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ und es gilt $detA \neq 0$.

Bemerkung M.23.8.5. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $A = (a_{jk})_{j,k=1}^{q} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. dann gilt:

(a) Seien $j,k \in \{1,...,q\}$. Dann gilt $(a_{jk})^2 \leq a_{jj}a_{kk}$.

(b) Sei $j_0 \in \{1,...,q\}$ so beschaffen, dass $a_{j_0j_0} = 0$ erfüllt ist. Sei $s \in \{1,...,q\}$. Dann gelten $a_{j_0s} = 0$ und $a_{sj_0} = 0$.

(c) Seien $m \in \{1,...q\}$ sowie $(i_j)_{j=1}^{m}$ eine streng monoton wachsende Folge aus $\{1,...,q\}$. Dann gilt $(a_{i_ji_k})_{j,k=1}^{m} \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$.

Bemerkung M.23.8.6. Seien $q \in \mathbb{N}$, $(a_j)_{j=1}^q$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und $A := diag(a_1, ..., a_q)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $a \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ (bzw. $a \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$).

(ii) Für alle $j \in \{1, ..., q\}$ gilt $a_j \in [0, +\infty)$ (bzw. $a_j \in (0, +\infty)$.

Wir stellen nun ein Prinzip zur Erzeugung positiv semidefiniter Matrizen bereit. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.23.8.7. Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiter seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $(x_j)_{j=1}^r$ und $(y_k)_{k=1}^s$ bzw. $(a_j)_{j=1}^r$ und $(b_k)_{k=1}^s$ Folgen aus H bzw. $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left(\sum_{j=1}^r a_j x_j, \sum_{k=1}^s b_k y_k\right) = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}^T \left[((x_j, y_k))_{\substack{j=1,...,r \\ k=1,...,s}}\right] \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

Beweis. Es gilt

$$\left(\sum_{j=1}^r a_j x_j, \sum_{k=1}^s b_k y_k\right) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^s a_j b_k (x_j, y_k) = \sum_{j=1}^r a_j \left(\sum_{k=1}^s (x_j, y_k) b_k\right)$$

$$= (a_1, ..., a_r) \begin{pmatrix} \sum\limits_{k=1}^s (x_1, y_k) b_k \\ \vdots \\ \sum\limits_{k=1}^s (x_r, y_k) b_k \end{pmatrix} = (a_1, ..., a_r) \begin{pmatrix} (x_1, y_1) & \cdots & (x_1, y_s) \\ \vdots & & \vdots \\ (x_r, y_1) & \cdots & (x_r, y_s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_r \end{pmatrix}^T \left[((x_j, y_k))_{\substack{j=1,...,r \\ k=1,...,s}}\right] \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_k \end{pmatrix}$$

■

Definition M.23.8.4. Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(x_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus H. Dann heißt $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n$ die Gramsche Matrix der Folge $(x_j)_{j=1}^n$ in $(H, (\cdot, \cdot))$.

Satz M.23.8.1. Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus H. Dann gilt:

(a) Es ist $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{\geq}^{n\times n}$.

(b) Sei $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{>}^{n\times n}$. Dann ist die Folge $(x_j)_{j=1}^n$ linear unabhängig.

(c) Sei $(H, (\cdot, \cdot))$ sogar ein Prähilbertraum. Weiterhin sei die Folge $(x_j)_{j=1}^n$ linear unabhängig. Dann gilt $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{>}^{n\times n}$.

Beweis.

(a) Sei

$$u = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.23.8.7 gilt dann

$$u^T \left[((x_j, x_k)]_{j,k=1}^n\right] u = \left(\sum_{j=1}^n u_j x_j, \sum_{k=1}^n u_k x_k\right) \tag{2}$$

Da $(\cdot, \cdot)$ ein Semiskalarprodukt auf H ist, gilt

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j, \sum_{k=1}^n u_k x_k\right) \in [0, +\infty) \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$u^T \left[((x_j, x_k)]_{j,k=1}^n\right] u \in [0, +\infty) \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{\geq}^{n \times n}$.

(b) Es bezeichne o das Nullelement in H. Sei $(u_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^n u_j x_j = 0 \tag{5}$$

Aus (5) folgt dann

$$\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j, \sum_{k=1}^n u_k x_k\right) = (o, o) = 0 \tag{6}$$

Sei

$$u = (u_1, ..., u_n)^T \tag{7}$$

Dann ist $u \in \mathbb{R}^n$ und aus (7), (1) und (2) folgt

$$u^T \left[((x_j, x_k))_{j,k=1}^n\right] u = 0 \tag{8}$$

Hieraus folgt wegen $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{>}^{n \times n}$ dann

$$u = 0_{n \times 1} \tag{9}$$

Wegen (7) und (9) gilt für $j \in \{1, ..., n\}$ dann $u_j = 0$. Hieraus folgt wegen (5) dann die lineare Unabhängigkeit der Folge $(x_j)_{j=1}^n$.

(c) Sei
$$u = (u_1, ..., u_n)^T \in \mathbb{R}^n \backslash \{0_{n\times 1}\} \tag{10}$$
Da die Folge $(x_j)_{j=1}^n$ linear unabhängig ist, folgt aus (10) dann
$$\sum_{j=1}^n u_j x_j \neq 0 \tag{11}$$
Da $(H, (\cdot,\cdot))$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (11) nun
$$\left(\sum_{j=1}^n u_j x_j, \sum_{k=1}^n u_k x_k\right) \in (0, +\infty) \tag{12}$$
Wegen (10), (1) und (2) gilt
$$u^T \left[((x_j, x_k))_{j,k=1}^n\right] u = \left(\sum_{j=1}^n u_j x_j, \sum_{k=1}^n u_k x_k\right) \tag{13}$$
Aus (12) und (13) folgt nun
$$u^T \left[((x_j, x_k))_{j,k=1}^n\right] u \in (0, +\infty) \tag{14}$$
Wegen (10) und (14) gilt dann $((x_j, x_k))_{j,k=1}^n \in \mathbb{R}_{>}^{n\times n}$

■

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Wegen Satz M.21.8.6 ist dann die Abbildung $[\cdot,\cdot]_{\mu,\mathbb{R}} : \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, welche gemäß $[f, g] \mapsto \int_\Omega fg\, d\mu$ definiert ist, ein Semiskalarprodukt auf $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Satz M.23.8.2. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt

(a) Es ist $\mathcal{P}_{\mathbb{R},2n} \subseteq \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}))$.

(b) Es ist $\mathcal{P}_{\mathbb{R},2n} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}))$.

(c) Sei $s \in \{0, ..., 2n\}$ und sei $P_{s;\mathbb{R}} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \mapsto x^s$. Dann gilt $P_{s;\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$ sowie $\int_\mathbb{R} P_{s;\mathbb{R}}\, d\mu = \mathcal{M}_s(\mu)$.

(d) Es bezeichne $H_{n,\mu}$ die n-te zu μ gehörige Hankelmatrix. Dann gilt

(d1) Es ist $(P_{j;\mathbb{R}})_{j=0}^n$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt
$$H_{n,\mu} = ([P_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}}])_{j,k=0}^n$$

(d2) Es ist $H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}$.

(d3) Seien $a = (a_0, ..., a_n)^T, b = (b_0, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1}$ sowie $P := \sum\limits_{j=0}^{n} a_j P_{j;\mathbb{R}}$ und $Q := \sum\limits_{k=0}^{n} b_k P_{k;\mathbb{R}}$. Dann gehören P und Q zu $\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt

$$[P, Q]_{\mu,\mathbb{R}} = a^T H_{n,\mu} b$$

Beweis.

(a) Dies folgt wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sogleich aus Teil (a) von Bemerkung M.23.3.5.

(b) Sei

$$P \in \mathcal{P}_{\mathbb{R},n} \tag{1}$$

Wegen (1) folgt aus (a) dann

$$P \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R}) \tag{2}$$

Aus (1) folgt sogleich

$$P^2 \in \mathcal{P}_{\mathbb{R},2n} \tag{3}$$

Wegen (3) folgt aus (a) dann

$$P^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{4}$$

Aus (4) folgt sogleich

$$P^2 \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R}) \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) liefert Folgerung M.21.5.1 dann $|P^2| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$, also wegen $|P^2| = |P|^2$ dann

$$|P|^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{6}$$

Wegen (2) und (6) gilt dann

$$P \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{7}$$

Aus (1) und (7) folgt nun

$$\mathcal{P}_{\mathbb{R},n} \subseteq \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$$

(c) Dies folgt aus (a) und Definition M.23.2.1

(d1) Nach Konstruktion ist $(P_{j;\mathbb{R}})_{j=0}^n$ eine Folge aus $\mathcal{P}_{\mathbb{R},n}$. Hieraus folgt mittels (b), dass $(P_{j;\mathbb{R}})_{j=0}^n$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$ ist. Für $j, k \in \{0, ..., n\}$ folgt bei Beachtung von $P_{j;\mathbb{R}} \cdot P_{k;\mathbb{R}} = P_{j+k;\mathbb{R}}$ und Definition M.23.2.1 weiterhin

$$[P_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}}]_{\mu,\mathbb{R}} = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{j;\mathbb{R}} P_{k;\mathbb{R}} d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{j+k;\mathbb{R}} d\mu = \mathcal{M}_{j+k}(\mu)$$

Hieraus folgt bei Beachtung von Definition M.23.8.1 und Definition M.23.8.2 dann

$$([p_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}}])_{j,k=0}^n = (\mathcal{M}_{j+k}(\mu))_{j,k=0}^n \overset{Def\,M.23.8.1}{=} H_{(\mathcal{M}_j(\mu))_{j=0}^{2n}} \overset{Def\,M.23.8.2}{=} H_{n,\mu}$$

(d2) Dies folgt wegen (d1) sogleich aus Teil (a) von Satz M.23.8.1.

(d3) Dies folgt wegen (d1) sogleich aus Bemerkung M.23.8.4.

■

v62m 27.04.2010

Wir geben nun für ein gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Charakterisierung der Menge jeder Maße aus $\mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ für die n-te zu μ gehörige Hankelmatrix singulär ist.

Satz M.23.8.3. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Es bezeichne $H_{n,\mu}$ die n-te zu μ gehörige Hankelmatrix. Dann gilt

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)} \backslash \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$.

(ii) Es gibt eine höchstens n elementige Teilmenge B_0 von $\mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}\backslash B_0 \in \mathbb{N}_\mu$.

(b) Sei (i) erfüllt. Dann gilt $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Beweis. (i)⇒ (ii) Wegen (i) gibt es ein

$$a = (a_o, ..., a_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0_{(n+1)\times(n+1)}\} \tag{1}$$

mit

$$a^T H_{n,\mu} a = 0. \tag{2}$$

Sei

$$P := \sum_{k=0}^{n} a_k P_{k,\mathbb{R}} \tag{3}$$

Wegen (3) folgt mittels Teil (d3) von Satz M.23.8.2 dann

$$P \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{4}$$

und

$$[P, P]_{\mu,\mathbb{R}} = a^T H_{n,\mu} a \tag{5}$$

Wegen (4) und der Definition von $[\cdot,\cdot]_{\mu,\mathbb{R}}$ gelten

$$P^2 \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{6}$$

und

$$[\cdot,\cdot]_{\mu,\mathbb{R}} = \int_{\mathbb{R}} P^2 d\mu \tag{7}$$

Aus (7), (5) und (2) und

$$\int_{\mathbb{R}} P^2 \, d\mu \overset{(7)}{=} [P, P]_{\mu,\mathbb{R}} \overset{(5)}{=} a^T H_{n\mu} a \overset{(2)}{=} 0 \tag{8}$$

Wegen (6) und $P^2 \in A(\mathbb{R}, [0, \infty))$ gilt

$$P^2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) liefert Teil (b) von Satz M.21.6.1 dann $\{P^2 \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$, also wegen $\{P^2 \neq 0\} = \{P \neq 0\}$ dann

$$\{P \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu \tag{10}$$

Sei

$$B_0 := \{P = 0\}. \tag{11}$$

Wegen (11) ist dann $\{B \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash B_0$. Hieraus folgt wegen (10) dann

$$\mathbb{R} \backslash B_0 \in \mathcal{N} \mu. \tag{12}$$

Da P wegen (1) und (2) ein von Nullpolynomen verschiedenes Polyno vom grad höchstens n über $\mathbb{R}$ ist, folgt wegen (11) aus dem Fundamentalsatz der Algebra, dass B_0 eine höchstens n-elementige Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt wegen (12) dann (ii).
<u>(ii)⇒ (i)</u> Wegen (ii) gibt es Folgen $(x_k)_{k=1}^n \in \mathbb{R}$ und $(\alpha_k)_{k=1}^n \in [0, +\infty)$ mittels

$$\mu = \sum_{k=1}^n \alpha_k \epsilon_{x_k, \mathfrak{B}_1} \tag{13}$$

Sei

$$Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : x \mapsto \prod_{k=1}^n (x - x_k) \tag{14}$$

Wegen (14) gelten dann

$$Q \in P_{\mathbb{R}, n} \tag{15}$$

und

$$Grad Q = n \tag{16}$$

sowie für

$$k \in \{1, ..., n\} \tag{17}$$

weiterhin

$$Q(x_k) = 0 \tag{18}$$

Wegen (15) und (16) gibt es ein eindeutig bestimmtes

$$b = (b_0, ..., b_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{0_{(n+1)\times(n+1)}\} \tag{19}$$

mittels

$$Q = \sum_{k=0}^n b_k P_{k, \mathbb{R}} \tag{20}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1 n \mathfrak{B}_1)$ sowie (19) und (20) folgt mittels Teil(d3) von Satz M.23.8.2 dann

$$Q \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}) \tag{21}$$

sowie

$$[Q, Q]_{\mu,\mathbb{R}} = b^T H_{n,\mu} b \tag{22}$$

Wegen (21) und der Definition von $[\cdot,\cdot]_{\mu,\mathbb{R}}$ gelten $Q^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R})$ und

$$[Q, Q]_{\mu,\mathbb{R}} = \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \, d\mu. \tag{23}$$

Wegen (13) folgt mittels Teil (b2) von Beispiel M.21.5.4 sowie zusätzlicher Beachtung von (17) und (18) dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \, d\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \epsilon_{x_k,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [Q^2(x_k)]^2 \overset{(17),(18)}{=} 0. \tag{24}$$

Unter Bechtung von (22), (23) und (24) folgt nun

$$b^T H_{n,\mu} b \overset{(22)}{=} [Q, Q]_{\mu,\mathbb{R}} \overset{(23)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \, d\mu = 0 \tag{25}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}(\mathbb{R}^1 n \mathfrak{B}_1)$ gilt nach Teil (d2) von Satz M.23.8.2 dann

$$H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}. \tag{26}$$

Wegen (19), (25) und (26) ist dann $H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)} \setminus \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$. Es gilt also (i) (b) Wegen (a) ist (i) und (ii) erfüllt. Wegen (ii) gibt es Folgen $(x_k)_{k=1}^n$ aus $\mathbb{R}$ und $(\alpha_k)_{k=1}^n$ aus $[0, +\infty)$ mit $\mu = \sum\limits_{k=1}^{n} \alpha_k \epsilon_{x_k,\mathfrak{B}_1}$. Hieraus folgt mittels Teil (b) von Satz M.23.8.3 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. ■

Wir wenden uns nun dem Hamburgischen Momentenproblem zu. Dieses ist nach dem deutschen Mathematiker Hans Ludwig Hamburger (1889-1956) benannt.
Hamburgersches Momentenproblem (HMP). Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ aller Maße $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ zu bestimmen, welche der Bedingung $(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}_0} = (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ genügen. Insbesondere ist eine Charakterisierung jener Folgen $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ zu geben, für die $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \neq \emptyset$ erfüllt ist. Wir formuleiren nun eine Kriterium zur Lösbarkeit des HMP. Hierzu benötigen wir die nachfolgend eingeführten Begriffsbildungen.

Definition M.23.8.5. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(c_j)_{j=0}^2 n$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $(c_j)_{j=0}^2 n$ Hankel-nichtnegativ definit bzw Hankel-positv-definit, falls die durch $(c_j)_{j=0}^{2n}$ erzeugte Hankelmatrix $H_{(c_j)_{j=0}^{2n}}$ der Beziehung $H_{(c_j)_{j=0}^{2n}} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}$ bzw. $H_{(c_j)_{j=0}^{2n}} \in \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$ genügt. Es bezeichne $\mathcal{H}_{2n,\geq}$ bzw. $\mathcal{H}_{2n,>}$ die Menhe aller Hankel nichtnegativ definiten bzw. Hanekl-positiv definiten Folgen $(c_j)_{j=0}^{2n}$ aus $\mathbb{R}$.

Definition M.23.8.6. Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ Hankel nichtnegativ definit bzw Hankel-positiv definit falls für alle $n\in\mathbb{N}_0$ die Beziehung $(c_j)_{j=0}^{2n}\in\mathcal{H}_{2n,\geq}$ bzw. $(c_j)_{j=0}^{2n}\in\mathcal{H}_{2n,>}$ besteht. Es bezeichne $\mathcal{H}_{\infty,\geq}$ bzw. $\mathcal{H}_{\infty,>}$ die Menge aller Hankel-nichtnegativ defintiten bzw Hankel-positiv-defintiten Folgen $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}$.

Satz M.23.8.4. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent

  (i) Es ist $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})\neq 0$

  (ii) es ist $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{H}_{\infty,\geq}$.

(b) Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{H}_{\infty,\geq}\backslash\mathcal{H}_{\infty,>}$. Dann besteht die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1,(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ aus genau einem Element μ und dieses Maß μ ist molekular.

Wir stellen nun eine hinreichende Bedingung zur Lösbarkeit eines HMP bereit. Hierzu sei daran erinnert, dass die dann betrachteten Maße in Satz M.23.2.1 behandelt wurden.

Satz M.23.8.5. Sei $\mu\in\mathcal{M}_+^{b}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ so beschaffen, dass ein $R\in(0,+\infty)$ mit $\mathbb{R}\backslash[-R,R]\in\mathcal{N}_\mu$ existiert. Dann gilt

(a) Es ist $\mu\in\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$.

(b) Es gilt $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}_0})=\{\mu\}$.

Beispiel M.23.8.2. *Es bezeichne $\mu_{[0,1]}$ die kontinuierliche Gleichverteilung auf $[0,1]$. Dann gilt:*

(a) Es ist $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1,(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0})=\{\mu_{[0,1]}\}$.

(b) Es gilt $(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{H}_{\infty,>}$.

Beweis.

(a) Wegen Teil (a) von Satz M.23.7.1 gilt $\mu_{[0,1]}\in\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ sowie

$$(M_k(\mu_{[0,1]}))_{k\in\mathbb{N}_0}=(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}. \tag{1}$$

Wegen (1) folgt bei Beachtung von $\mu_{[0,1]}\in\mathcal{M}_+^{b}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ und $\mathbb{R}\backslash[-1,1]\in\mathcal{N}_{\mu_{[0,1]}}$ mittels Teil (b) von Satz M.23.8.5 dann (a)

(b) Wegen (1) folgt bei Beachtung von $\mu_{[0,1]}\in\mathcal{M}_+^{b}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ und $\mathbb{R}\backslash[-1,1]\in\mathcal{N}_{\mu_{[0,1]}}$ mittels Teil (a) von Satz M.23.8.4 zunächst $(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{H}_{\infty,\geq}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und der Tatsache, dass $\mu_{[0,1]}$ kein molekulares Maß ist, mittels Satz M.23.8.3 für $n\in\mathbb{N}_0$ dann $H_{(\frac{1}{k+1})_{k=0}^{2n}}\in\mathbb{R}_>^{(n+1)\times(n+1)}$. Somit ist also $(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}\in\mathcal{H}_{\infty,>}$.

$\blacksquare$

Die zur Folge $(\frac{1}{k+1})_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Hankelmatrix wurde von David Hilbert studiert und wird deshalb als Hilbermatrix bezeichnet.

Beispiel M.23.8.3. *Sei $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in (0,\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Dann gilt:*

(a) Es ist $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Es gilt $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B} - 1; (M_k(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}))_{k\in\mathbb{N}_0}) = \{\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\}$.

Satz M.23.8.6. Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$, für welche die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ mindestens zwei Elemente enthält. Dann enthält $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ unedlich viele Elemente und es gilt $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,>}$.

Wir präsentieren nun eine Beispiel einer Folge $(c_K)_{k\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}$, für welche die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0})$ unendlich viele Elemente enthält.

Satz M.23.8.7. Sei $d_{0,1} : \mathbb{R} \to [0,+\infty) : d_{0,1}(x) := \begin{cases} \frac{1}{x}\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp -\frac{(\ln x)^2}{2} & \text{, falls } x \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

Dann gilt:

(a) Es ist $d_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Unter Beachtung von (a) sei $\nu_{0,1} := \lambda^{(1)} d_{0,1}$. Dann gilt:

  (b1) Es ist $\nu_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

  (b2) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mathcal{M}_k(\nu_{0,1}) = M_k(\nu_{0,1}) = \exp \frac{k^2}{2}$.

  (b3) Es gilt $var(\nu_{0,1}) = e(e-1)$.

Definition M.23.8.7. Das in Satz M.23.8.7 eingeführte Maß $\nu_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ heißt standardisierte logarithmische Normalverteilung.

Satz M.23.8.8. Sei $d_{0,1}$ die in Satz M.23.8.7 eingeführte Abbildung . Weiter sei $\epsilon \in [-1,1]$. Es sei $f_\epsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R} : f_\epsilon(x) := \begin{cases} [d_{0,1}(x)][1+\epsilon \sin(2x \ln x)] & \text{, falls } x \in (0,+\infty) \\ 0 & \text{, sonst} \end{cases}$

Dann gilt:

(a) Es ist $f_\epsilon \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

(b) Unter Beachtung von (a) sei $\nu_\epsilon := (\lambda^{(1)})_{f_\epsilon}$. Dann gilt

$$\nu_\epsilon \in \mathcal{M}_+^{b+\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (\exp(\frac{k^2}{2}))_{k\in\mathbb{N}_0}).$$

Wir wenden uns nun der finiten Version des HMP zu.
Finites Hamburgersches Momentenproblem (FHMP) Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(c_k)_{k=0}^m$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,m}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k=0}^m)$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,m}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ zu bestimmen, welche die Bedingung $(\mathcal{M}_k(\mu)_{k=0}^m = (c_k)_{k=0}^m$ genügen. Wir formulieren nun ein Kriterium zu Lösbarkeit des FHMP. Hierzu benötigen wir foldene Begriffsbildung.

Definition M.23.8.8. Sei $s \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $(c_j)_{j=0}^{2s}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt die Folge $(c_j)_{j=0}^{2s}$ Hankel- nichtnegativ definit erweiterbar bzw. Hanke- positiv definit erweiterbar, falls es relle Zahlen c_{2s+1} und c_{2s+2} derart gibt, dass $(c_j)_{j=0}^{2(s+1)} \in \mathcal{H}_{2(s+1),\geq}$ bzw. $(c_j)_{j=0}^{2(s+1)} \in \mathcal{H}_{2(s+1),>}$ erfüllt ist.

(b) Sei $(c_j)_{j=0}^{2s}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $(c_j)_{j=0}^{2(s+1)}$ Hankel- nichtnegativ definit erweiterbar bzw. Hankel- positiv definit erweiterbar, falls es $c_{2s+1} \in \mathbb{R}$ derart gibt, dass $(c_j)_{j=0}^{2s+1} \in \mathcal{H}_{2(s+1),\geq}$ bzw. $(c_j)_{j=0}^{2(s+1)} \in \mathcal{H}_{2(s+1),>}$ erfüllt.

Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne dann $\mathcal{H}_{m,\geq,e}$ bzw $\mathcal{H}_{m,>,e}$ die Menge aller Hankel- nichtnegativ definit erweiterbaren bzw. Hankel- positiv definit erweiterbaren Folgen $(c_j)_{j=0}^m$ aus $\mathbb{R}$.

Bemerkung M.23.8.8. Sei $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{H}_{2s,>,e} = \mathcal{H}_{2s,>} \subseteq \mathcal{H}_{2s,\geq,e} \subseteq \mathcal{H}_{2s,\geq}$

Beispiel M.23.8.4. *Sei $c_0 := 0$, $c_1 := 0$ und $c_2 := 1$. Dann gilt:*

(a) Es ist $H_{(c_j)_{j=0}^2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}_{\geq}^{2\times 2} \setminus \mathbb{R}_{>}^{2\times 2}$

(b) Es ist $(c_j)_{j=0}^2 \in \mathcal{H}_{2s,\geq} \setminus \mathcal{H}_{2,\geq,e}$ *(und somit also* $\mathcal{H}_{2s,\geq;e} \subset \mathcal{H}_{2s,\geq}$

Beweis.

(a) Dies folgt aus Bemerkung M.23.8.6.

(b) Seien c_3, $c_4 \in \mathbb{R}$. Dann gilt
$H_{(c_j)_{j=0}^4} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 1 & c_3 & c_4 \end{pmatrix}$ *Setzen wir dann* $H_{(c_j)_{j=0}^4} = (a_{jk})_{j,k=1}^3$, *so ist also* $a_{11} = 0$, $a_{31} = 1$. *Hieraus folgt wegen Teil (b) von M.23.8.5 dann* $H_{(c_j)_{j=0}^2} \notin \mathbb{R}_{\geq}^{3\times 3}$. *Hieraus folgt in Verbindung mit (a) dann* $(c_j)_{j=0}^2 \in \mathcal{H}_{2s,\geq} \setminus \mathcal{H}_{2,\geq,e}$.

■

Satz M.23.8.9. Seien $n \in N_0$ und $(c_j)_{j=0}^s$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,s}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_j)_{j=0}^s) \neq \emptyset$.

(ii) Es ist $(c_j)_{j=0}^s \in \mathcal{H}_{2s,\geq,e}$

(b) Sei $(c_j)_{j=0}^s \in \mathcal{H}_{2s,\geq,e} \setminus \mathcal{H}_{2s,>,e}$. Dann besteht die Menge $\mathcal{M}_+^{b,s}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_j)_{j=0}^s)$ aus genau einem Element und dieses Maß ist molekular.

Wir stellen nun noch ein weiteres finitest Momentenproblem vor.
Modifiziertes finites Hamburgersches Momentenproblem (MFHMP) Sei $s \in \mathbb{N}$ und $(c_k)_{k=0}^{2s}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,2s}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k=0}^{2s})$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}^{b,2s}(\mathbb{R}{\cdot}\mathfrak{B}_1)$ zu bestimmen, welche den Bedingungen $(\mathcal{M}_k(\mu))_{k=0}^{2s-1} = (c_k)_{k=0}^{2s-1}$ und $c_{2s} - \mathcal{M}_{2s}(\mu) \in [0, +\infty)$ genügen.

Satz M.23.8.10. Seien $s \in \mathbb{N}_0$, $(c_k)_{k=0}^{2s}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathcal{M}_+^{b,2s,\geq}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_k)_{k=0}^{2s}) \neq \emptyset$.

(ii) Es ist $(c_k)_{k=0}^{2s} \in \mathcal{H}_{2s,\geq}$

Beispiel M.23.8.5. *Seien $c_0 := 0$, $c_1 := 0$ und $c_2 := 1$. Dann besteht die Menge $\mathcal{M}_+^{b,2,\geq}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; (c_j)_{j=0}^2)$ genau aus dem Nullmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

M.23.9. Maße von zweiter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Im Abschnitt 23.5 haben wir für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ den Begriff eines Maßes von k-ter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ eingeführt (vgl. Definition M.23.5.1). In den stochastischen Anwendungen spielt die Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ der W-Maße von 2. Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ eine wesentliche Rolle. Aus diesem Grund ist es nötig dieser Klasse größerer Aufmerksamkeit zu widmen. Ein besonderes Merkmal der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist, dass durch deren spezielle Struktur der Einsatz auf Hilbertraummethoden ermöglicht wird. Hierbei sei daran erinnert (vgl. Satz M.21.8.6 das diese Abbildung $[.,.]_{\mu,\mathbb{R}} : \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, welche gemäß $[f, g] \to \int\limits_\Omega fg\, d\mu$ ist. In unseren nachfolgenden Bertachtungen benötigen wir Integral von Matrixfunktion. Diese sind wie folgt erklärt.

Definition M.23.9.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $f = (f_{jk})_{\substack{j=1,\ldots,p \\ k=1,\ldots,q}} \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})]^{[}p \times q]$.
Dann wird definiert $\int f d\mu := (\int\limits_\Omega f_{j,k})_{\substack{j=1,\ldots,p \\ k=1,\ldots,q}}$

Es folgen nun einige Regeln für das soeben eingeführte Objekt.

Lemma M.23.9.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $f \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p \times q}$. Dann gelten $f^T \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p \times q}$, sowie $\int f^T d\mu = [\int f^T d\mu$???

Lemma M.23.9.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Seien $f, g \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p \times q}$. Dann gelten $f + g \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p \times q}$ und $\int (f + g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu$.

(b) Sei $f \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times q}$. Weiterhin seien $r, s \in \mathbb{N}$ woe $A \in \mathbb{R}^{r\times p}$ und $B \in \mathbb{R}^{q\times s}$. Dann gelten $AfB \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{r\times s}$ sowie $\int\limits_\Omega AfBd\mu = A\int\limits_\Omega fd\mu B$.

Beweis. Beweisskizze: Man verwende Teild (d) von Satz M.21.5.5 ■

Lemma M.23.9.3. Sei $f \in [\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times q}$ und $g \in [\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{q\times r}$. Dann gilt $fg \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times r}$. **Beweis.** Man verwende Teil (a) von Satz M.21.8.6 und Teil (d) von Satz M.21.5.5. ■

Lemma M.23.9.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, sowie $p, q \in \mathbb{N}$. dann gilt:

(a) Sei $f, g \in [\mathcal{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times q}$. Dann gilt $fg^T \in [\mathcal{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times q}$ sowie

(b) $tr[\int\limits_\Omega ff^T d\mu] = \int\limits_\Omega I|f|_{E,\mathbb{R}^{p\times q}}]^2 d\mu$.

Beweis.

(a) Folgt sogelich aus Lemma M.23.9.3

(b) Man verwende (a) sowie die Identität $tr[ff^T] = [|f|_{E,\mathbb{R}^{p\times q}}]^2$.

■

Wir wenden uns zunächst Maßen von erster Ordnung aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu. Wir erinnern zunächst daran, das für $m \in \mathbb{N}$, $j \in \{1, ..., m\}$ und $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\tilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}$: $\mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_j)^k$ definiert ist. $\tilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}$

Satz M.23.9.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:

(a) Sei $j \in \{1, ..., m\}$. Dann gilt:

(a1) Es ist $\tilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

(a2) Unter Beachtung von (a1) sei $\tilde{\mathcal{M}}_j(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} d\mu$. $\tilde{\mathcal{M}}_j(\mu)$

Weiter sein $\Pi_{m,j}$ eine $\mathfrak{B}_m-\mathfrak{B}_1-$meßbare Abbildung und es gelten $\Pi_{m,j} \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie $\mathcal{M}_1(\Pi_{m,j}(\mu)) = \tilde{\mathcal{M}}_j(\mu)$.

(b) Es sein $\tilde{\mathbb{M}}_1 := (\tilde{\mathcal{M}}_1(\mu), ..., \tilde{\mathcal{M}}_m(\mu))^T$. Dann gilt $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} x\mu(d(x))$.

Beweis.

(a1) Dies folgt aus Bemerkung M.23.5.4

(a2) Wegen Teil (c) von Bemerkung M.23.5.2 gelten

$$\Pi_{m,j} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \quad (1)$$

sowie

$$\tilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} = P_{1,\mathbb{R}} \circ \Pi_{m;j} \quad (2)$$

Wegen (2) folgt aus (a) dann

$$P_{1,\mathbb{R}} \circ \Pi_{m;j} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) folgt aus Teil (b) von Satz M.21.10.2 dann

$$\mathbb{P}_{1;\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \Pi_{m;j}(\mu); \mathbb{R}) \tag{4}$$

Sowie mittels Teil (c) von Satz M.21.10.2 weiterhin

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (P_{1;\mathbb{R}} \circ \Pi_{m;j}) d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}} d(\Pi_{m;j}(\mu)) \tag{5}$$

Wegen (4) gilt dann

$$\Pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}^b_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6), (5) und (2) ergibt sich weiterhin

$$\mathbb{M}_1(\Pi_{m;j}(\mu)) \overset{(6)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}} d(\Pi_{m;j}(\mu)) \overset{(5)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} (P_{1;\mathbb{R}} \circ \Pi_{m;j}) d\mu \overset{(2)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} d\mu = \tilde{\mathcal{M}}_j(\mu)$$

Damit ist (a2) bewiesen.

(b) Sei

$$x = (x_1, ..., x_m) \in \mathbb{R}^m \tag{7}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \tilde{P}_{m,1;\mathbb{R}^m}(x) \\ \vdots \\ \tilde{P}_{m,1;\mathbb{R}^m}(x) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = x \tag{8}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.1 sowie (7) und (8) folgt dann $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) =$

$$\begin{pmatrix} \tilde{\mathcal{M}}_1(\mu) \\ \vdots \\ \tilde{\mathcal{M}}_m(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{1,1;R^m} d\mu \\ \vdots \\ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{m,1;R^m} d\mu \end{pmatrix} \overset{Def. M.23.9.1}{=} \int \begin{pmatrix} \tilde{P}_{1,1;R^m} \\ \vdots \\ \tilde{P}_{m,1;R^m} \end{pmatrix} d\mu \overset{(7)(8)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} x\mu(dx).$$

■

Satz M.23.9.1 führt uns auf folgende Verallgemeinerung der in Definition M.23.4.1 eingeführten Erwartungswert eines Maßes aus $\mathcal{M}^{1,1}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Definition M.23.9.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}^{1,1}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es sei $\tilde{\mathbb{M}}_m(\mu)$ wie in Satz M.23.9.1 erklärt. Dann heißt $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)$ der **Erwartungswert** von μ. $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)$ v64m 04.05.2010

Wir zeigen nun, dass für $k \in \mathbb{N}$ die Zugehörigkeit eines Maßes zur Klasse der Maße k-ter Ordnung auch nach affinen Transformationen erhalten bleibt. (Im skalaren Fall wurde dieses Resultat bereits in M.23.3.2 erhalten) Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.23.9.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $j \in \{1, ..., m\}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent

(i) Es ist $\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

(ii) Es ist $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

Beweis. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt so gleich $\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m} = (\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m})^k$ Hieraus folgt dann

$$|\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m}| = |(\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m})^k| = |\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m}|^k \tag{1}$$

Wegen Teil (b) von Bemerkung M.23.5.2 gelten

$$\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{2}$$

und

$$\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{3}$$

(1) "$(i) \Rightarrow (ii)$" Wegen (i) und (2) liefert M.21.5.1 dann $|\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ Hieraus folgt wegen (1) dann

$$|\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m}|^k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) ist dann $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ Es gilt also (ii)

(2) "$(ii) \Rightarrow (i)$" Wegen (ii) gilt $|\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m}|^k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ Hieraus folgt weg (1) dann

$$|\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{5}$$

Wegen (5) und (2) liefert Folgerung M.21.5.1 dann $\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ Es gilt also (i)

■

Bemerkung M.23.9.2. Seien $m, k \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(ii) $\forall j \in \{1, ..., m\}$gilt $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

Beweis. Nach Bemerkung M.23.5.4 ist (i) äquivalent zu:

(iii) $\forall j \in \{1, ..., m\}$ gilt $\widetilde{P}_{j.k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

Nach M.23.9.1 sind (ii) und (iii) äquivalent. Hieraus folgt die Äquivalenz von (i) und (ii). ■

Satz M.23.9.2. Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Weiter seien $l \in \mathbb{N}, A \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $a \in \mathbb{R}^l$ Die Abbildung $T_{A,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ sei definiert gemäß $x \longmapsto Ax + a$ Dann gilt:

(a) Es ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und es gilt $T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$.

(b) Es gelten $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$ sowie $\mathbb{M}_1(T_{A,a}(\mu)) = A[\mathbb{M}_1(\mu)]+ [\mu(\mathbb{R}^m)]a$

Beweis.

(a) Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung. Unsere Stratgie zum Beweis der zweiten Behauptung von (a) basiert auf der Verwendung von Teil (b) von Satz M.21.10.2 in Kombination mit Bemerkung M.23.9.2. Seien

$$A = (a_{ij})_{j=1,...l;k=1,...,m} \tag{1}$$

sowie

$$a = (a_1, ...a_l)^T \tag{2}$$

Unter Beachtung von (1) und (2) ergibt sich für $x = (x_1, ..., X_m)^T \in \mathbb{R}^m$ dann $\begin{pmatrix} \widetilde{P}_{1.1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a}(x) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{l.1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a}(x) \end{pmatrix} = [\begin{pmatrix} \widetilde{P}_{1.1;\mathbb{R}^l} \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{l.1;\mathbb{R}^l} \end{pmatrix} \circ T_{A,a}](x) = (Id_{\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a})(x) = T_{A,a} = Ax + a$
$\begin{pmatrix} \sum s = 1^m a_{1s}x_s + a_1 \\ \vdots \\ \sum s = 1^m a_{ls}x_s + a_l \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum s = 1^m a_{1s}\widetilde{P}_{s.1;\mathbb{R}^m}(x) + a_1\, 1_{\mathbb{R}^m}(x) \\ \vdots \\ \sum s = 1^m a_{ls}\widetilde{P}_{s.l;\mathbb{R}^m}(x) + a_l 1_{\mathbb{R}^m}(x) \end{pmatrix}$
Somit ist also

$$\begin{pmatrix} \widetilde{P}_{1.1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a} \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{l.1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum s = 1^m a_{1s}\widetilde{P}_{s.1;\mathbb{R}^m} + a_1 1_{\mathbb{R}^m} \\ \vdots \\ \sum s = 1^m a_{ls}\widetilde{P}_{s.l;\mathbb{R}^m} + a_l 1_{\mathbb{R}^m} \end{pmatrix} \tag{3}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gilt nach Bemerkung M.23.9.2 für

$$s \in \{1, ..., n\} \tag{4}$$

dann

$$\widetilde{P}_{s.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^l(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{5}$$

Aufgrund der Endlichkeit von μ gilt wegen Teil (b) von Bemerkung M.21.7.5 zu dem

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{6}$$

$$j \in \{1, ..., l\} \tag{7}$$

Da $\mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.21.7.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (4) bis (7) dann $\sum s = 1^m a_{js} \widetilde{P}_{s.1;\mathbb{R}^m} + a_j 1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ Hieraus folgt aufgrund der wegen (3) und (7) gültigen Identität

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a} \in \mathcal{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{8}$$

Wegen (8) gilt dann

$$|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a}|^k \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu, \mathbb{R}) \tag{9}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} = (\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l})^k$. Hieraus folgt nun $|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}| = |(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l})^k| = |\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l}|^k$. Damit ist aber

$$|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{A,a}|^k = |\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l}|^k \circ T_{A,a} = |\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}| \circ T_{A,a} \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann

$$|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}| \circ T_{A,a} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{11}$$

Da $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung ist, folgt wegen (11) mittels Teil (b) von Satz M.21.10.2 dann

$$|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}| \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l, T_{A,a}(\mu); \mathbb{R}) \tag{12}$$

Wegen teil (b) von Bemerkung M.23.5.2 gilt

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l; \mathbb{R}) \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) liefert Folgerung M.21.5.1 nun

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l, T_{A,a}(\mu); \mathbb{R}) \tag{14}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gilt nach Satz M.15.10 dann

$$T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l) \tag{15}$$

Wegen (7), (14) und (15) liefert Bemerkung M.23.5.4 dann $T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$

(b) Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ bzw. (*a*) leifert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^b, 1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ bzw. $T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ Unter Beachtung von Teil (b) von Satz M.23.9.1, Teil (*c*) von Satz M.21.10.2, den Teilen (a) und (b) von Lemma M.23.9.2 sowie nochmals Teil (b) von Satz M.23.9.1 Es ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu)) &= \int_{\mathbb{R}^l} y[T_{A,a}(\mu)](dy) = \int_{\mathbb{R}^m} y[T_{A,a}(x)]\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} (Ax + a)\mu(dx) \\
&= \int_{\mathbb{R}^m} (Ax + a1_{\mathbb{R}^m}(x))\mu(dx) = \int_{\mathbb{R}^m} Ax\mu(dx) + \int_{\mathbb{R}^m} a1_{\mathbb{R}^m}(x)\mu(dx) \\
&= A\int_{\mathbb{R}^m} x\mu(dx) + [\mu(\mathbb{R}^m)]a = A[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] + [\mu(\mathbb{R}^m)]a
\end{aligned}$$

■

Folgerung M.23.9.1. Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $j \in \{1, ..., m\}$ und es sei $\pi_{m;j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x = (x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_j$ Dann ist $/pi_{m;j}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt $\pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b, k(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$
Beweis. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt so gleich $\pi_{m;j} = T_{[e_j^{(m)}]^T,0}$ Hieraus folgen mittles Teil (a) von Satz M.23.9.2 dann alle Behauptungen

■

Satz M.23.9.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^1, 2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

(a) Sei $j \in \{1, ..., m\}$. Dann gilt
   (a1) Es ist dieses $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$
   (a2) Sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$
   (a3) Es ist $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

(b) Sei $(j, k) \in \{1, ..., m\} \times \{1, ..., m\}$ Dann gilt:
   (b1) Es ist $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$
   (b2) Unter Beachtung von $(b1)$ sei $\widetilde{M}_{jk}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k.1;\mathbb{R}^m} d\mu$ Dann gilt $\widetilde{M}_{jk}(\mu) = \widetilde{M}_{kj}(\mu)$
   (b3) Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann gilt $(\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a)(\widetilde{P}_{k.1;\mathbb{R}^m} - b) \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$
   (b4) Unter Beachtung von $(a3)$ werde für $s \in \{1, ..., m\}$ die Setzung $c := \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{s.1;\mathbb{R}^m} d\mu$ vorgenommen. Unter Beachtung von (b3) sei

$$cov_{jk}(\mu) := \int_{\mathbb{R}^m} [\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)][\widetilde{P}_{k.1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)] d\mu.$$

Dann gelten $cov_{jk}(\mu)$

$$cov_{jk}(\mu) = \widetilde{M}_{jk}(\mu) - [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)]$$

sowie

$$cov_{jk}(\mu) = cov_{kj}(\mu).$$

Beweis.

(a1) Dies folgt wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^1, 2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ aus Bemerkung M.23.9.1

(a2) Da μ endlich ist, gilt nach Teil (b) von Bemerkung M.21.7.5

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Da $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.21.7.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt bei Beachtung von $(a1)$ und (1) dann $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a \cdot 1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$, also wegen $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a \cdot 1_{\mathbb{R}^m} = \widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a$ dann $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} - a \in \mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

(a3) Wegen $\mu \in \mathcal{M}^1_+, 2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}^1_+, 1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hier aus folgt mittels Bemerkung M.23.9.1 dann $\widetilde{P}_{j.1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$

(b1) Dies folgt wegen $(a1)$ so gleich aus Teil (a) von Satz M.21.8.6

(b2) Dies folgt trivialerweise

(b3) Dies folgt wegen $(a2)$ so gleich aus Teil (a) von Satz M.21.8.6

(b4) Es ist

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)][\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)]$$

$$= \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} + [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot 1_{\mathbb{R}^m} \quad (2)$$

Unter Verwendung von (2),$(b1)$,$(a3)$ und (1) ergibt sich mittels Teil (d) von Satz M.21.5.5 sowie zusätzlicher Beachtung von $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$ dann

$$cov_{jk}(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} [\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)][\widetilde{P}_{k.1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)] d\mu$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} + [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot 1_{\mathbb{R}^m}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} d\mu - [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} d\mu$$

$$-[\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} d\mu + [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot \int_{\mathbb{R}^m} 1_{\mathbb{R}^m} d\mu$$

$$= \widetilde{M}_{jk}(\mu) - [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_j(\mu)] - [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)] + [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)] \cdot [\mu(\mathbb{R}^m)]$$

$$= \widetilde{M}_{jk}(\mu) - [\widetilde{M}_j(\mu)] \cdot [\widetilde{M}_k(\mu)]$$

Aus der Defnition von $cov_{jk}(\mu)$ und $cov_{kj}(\mu)$ folgt sogleich $cov_{jk}(\mu) = cov_{kj}(\mu)$

■

Satz M.23.9.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.23.9.3. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Mit den Bezeichnungen von Satz M.23.9.3 Sei $cov(\mu) := (cov_{jk}(\mu))^m_{j,k=1}$. Dann ist $cov(\mu)$ die Kovarianzmatrix von μ. $cov(\mu)$

Bemerkung M.23.9.3. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_+, 2(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt $cov(\mu) = var(\mu)$
Beweis. Aus der Definition der beteiligten Grössen folgt so gleich

$$\widetilde{M}_1(\mu) = M_1(\mu) \quad (1)$$

und

$$\widetilde{M}_{11}(\mu) = M_2(\mu) \quad (2)$$

Wegen Teil $(b4)$ von Satz M.23.9.3 gilt

$$cov(\mu) = cov_{11}(\mu) = \widetilde{M}_{11}(\mu) - [\widetilde{M}_1(\mu)]^2 \quad (3)$$

Wegen Teil (d) von Satz M.23.4.2 gilt

$$var(\mu) = M_2(\mu) - [M_1(\mu)]^2 \tag{4}$$

Wegen (1) und (2) folgt (3) und (4) dann $cov(\mu) = var(\mu)$ Wir wenden uns nun einer wesentlichen Struktureigenschaft der Kovarianzmatrix eines Ma?es $\mu \in \mathcal{M}_+^1, 2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu. ■

Satz M.23.9.4. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:

(a) Mit den Bezeichnungen von Satz M.23.9.3 werde für $j \in \{1, ..., m\}$ die Setzung $f_j := \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)$ vorgenommen. Dann ist $(f_j)_{j=1}^m$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ und es ist $cov(\mu)$ die Gramsche Matrix der Folge $(f_j)_{j=1}^m$ im Semiprähilbertraum $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{\mu,\mathbb{R}})$

(b) Es ist $cov(\mu) \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$

(c) Seien $j, k \in \{1, ..., m\}$. Dann gilt $(cov_{jk}(\mu))^2 \leq [cov_{jj}(\mu)][cov_{kk}(\mu)]$

Beweis. v65m 10.05.2010

(a) Wegen Teil (c2) von Satz M.23.9.3 ist $(f_j)_{j=1}^m$ eine Folge aus $\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$. Aus Definition M.23.9.3 erkennt man sogleich, dass $cov(\mu)$ die Gramsche Matrix der Folge $(f_j)_{j=1}^m$ im Semiprähilbertraum $(\mathcal{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}), [\cdot, \cdot]_{\mu,\mathbb{R}})$ ist.

(b) Dies folgt wegen (a) sogleich aus Teil (a) von Satz M.23.8.1.

(c) Dies folgt wegen (b) sogleich aus Teil (a) von Bemerkung M.23.8.5

■

Wir leiten nun wichtige Darstellungen für die Kovarianzmatrix eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ her.

Satz M.23.9.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

(a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und falls $\mathbb{M}_1(\mu)$ den Erwartungswert von μ bezeichnet, so gilt

$$\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} x \, \mu(dx)$$

(b) Mit den Bezeichnungen von Satz M.23.9.3 sei $\widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) := \left(\widetilde{M}_{j,k}(\mu)\right)_{j,k=1}^m$. Dann gilt

$$\widetilde{\mathbb{M}}_2 = \int_{\mathbb{R}^m} xx^T \, \mu(dx)$$

(c) Es bezeichne $cov(\mu)$ die Kovarianzmatrix von μ. Dann gilt (c1) Es ist $cov(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \, \mu(dx)$.

(c2) Es ist $cov(\mu) = \widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T$.

Beweis.

(a) Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt mittels Teil (b) von Satz M.23.9.1 dann $\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} x \, \mu(dx)$.

(b) Für
$$x = (x_1, ..., x_m)^T \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$
gilt
$$xx^T = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix}^T = (x_j x_k)_{j,k=1}^m = \left([\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}(x)][\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}(x)] \right)_{j,k=1}^m \tag{2}$$
Unter Beachtung von Definition M.23.9.1 sowie von (1) und (2) folgt dann
$$\widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) = \left(\widetilde{M_{j,k}}(\mu) \right)_{j,k=1}^m = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} \, d\mu \right)^m$$
$$\overset{Def. M.23.9.1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} \right)_{j,k=1}^m d\mu \overset{(1),(2)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} xx^T \, \mu(dx)$$

(c1) Für
$$x = (x_1, ..., x_m)^T \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$
gilt
$$[x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T = \begin{pmatrix} x_1 - \widetilde{M_1}(\mu) \\ \vdots \\ x_m - \widetilde{M_m}(\mu) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - \widetilde{M_1}(\mu) \\ \vdots \\ x_m - \widetilde{M_m}(\mu) \end{pmatrix}^T$$
$$= \left([x_j - \widetilde{M_j}(\mu)][x_k - \widetilde{M_k}(\mu)] \right)_{j,k=1}^m$$
$$\left([\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}(x) - \widetilde{M_j}(\mu)][\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}(x) - \widetilde{M_k}(\mu)] \right)_{j,k=1}^m \tag{4}$$
Unter Beachtung von Definition M.23.9.2, Definition M.23.9.1 sowie (3) und (4) folgt nun
$$cov(\mu) \overset{Def. M.23.9.2}{=} (cov_{jk}(\mu))_{j,k=1}^m$$
$$\overset{Def. M.23.9.2}{=} \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} [\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M_j}(\mu)][\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M_k}(\mu)] \, d\mu \right)_{j,k=1}^m$$

$$\stackrel{Def. M.23.9.1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left([\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)][\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)] \right)_{j,k=1}^m d\mu$$

$$\stackrel{(3),(4)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \, \mu(dx)$$

(c2) Für

$$x \in \mathbb{R}^m \tag{5}$$

gilt weiterhin

$$\begin{aligned} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T &= [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T] \\ &= xx^T - x[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]x^T + [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \end{aligned} \tag{6}$$

Unter Verwendung von (c1), (5), (6), (b), den Teilen (a) und (b) von Lemma M.23.9.2, Lemma M.23.9.1 sowie (a) folgt dann

$$cov(\mu) \stackrel{(c1)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \, \mu(dx)$$

$$\stackrel{(5),(6)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(xx^T - x[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]x^T + [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \right) \mu(dx)$$

$$\stackrel{Lem M.23.9.2,(a)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} xx^T \, \mu(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}^m} x[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \, \mu(dx) - \int\limits_{\mathbb{R}^m} [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]x^T \, \mu(dx)$$

$$+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T 1_{R^m} \, \mu(dx)$$

$$\stackrel{(b), Lem M.23.9.2(b)}{=} \widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) - \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} x \, \mu(dx) \right] [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} x^T \, \mu(dx) \right]$$

$$+ [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T [\mu(\mathbb{R}^m)]$$

$$\stackrel{(a), Lem M.23.9.1}{=} \widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} x \, \mu(dx) \right]^T + [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T$$

$$\begin{aligned} &\stackrel{(a)}{=} \widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T + [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \\ &= \widetilde{\mathbb{M}}_2(\mu) - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \end{aligned}$$

■

Beispiel M.23.9.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $c \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

(a) *Es ist* $\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) *Es ist* $\widetilde{\mathbb{M}}_1(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = c$.

(c) *Es ist* $\widetilde{\mathbb{M}}_2(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = cc^T$.

(d) *Es ist* $cov(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = 0_{m\times m}$.

Beweis.

(a) *Dies folgt aus Teil (b) von Beispiel M.23.2.1.*

(b) *Unter Beachtung von Teil (a) von Satz M.23.9.5 und Teil (b) von Beispiel M.21.5.2 ergibt sich*

$$\widetilde{\mathbb{M}}_1(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = \int_{\mathbb{R}^m} x\, \epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}(dx) = c$$

(c) *Unter Beachtung von Teil (b) von satz M.23.9.5 und teil (b) von Beispiel M.21.5.2 ergibt sich*

$$\widetilde{\mathbb{M}}_2(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = \int_{\mathbb{R}^m} xx^T\, \epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}(dx) = cc^T$$

(d) *Unter Verwendung von Teil (c2) von Satz M.23.9.5 sowie von (c) und (b) ergibt sich*

$$cov(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) = \widetilde{\mathbb{M}}_2(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m}) - [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m})][\widetilde{\mathbb{M}}_1(\epsilon_{c,\mathfrak{B}_m})]^T = cc^T - cc^T = 0_{m\times m}$$

■

Satz M.23.9.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $j \in \{1, ..., m\}$ und es sei $\pi_{m;j} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $x = (x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_j$. Dann gilt:

(a) Es ist $\pi_{m;j}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$$

(b) Es gelten $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, $\pi_{m;j} \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie mit den Bezeichnungen von Satz M.23.9.1 weiterhin $\widetilde{M_j}(\mu) = M_1(\pi_{m;j}(\mu))$.

(c) Es gilt $cov_{jj}(\mu) = var(\pi_{m;j}(\mu))$.

(d) Sei $k \in 1, ..., m$. Dann gilt

$$|cov_{jk}(\mu)| \leq \sqrt{var(\pi_{m;j}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{m;k}(\mu))}$$

Beweis.

(a) Dies ergibt sich aus Folgerung M.23.9.1.

(b) Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgen mittels Teil (a2) von Satz M.23.9.1 die restlichen Behauptungen von (b).

(c) Wegen Teil (d) von Satz M.23.9.3 gilt

$$\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}) \tag{1}$$

Nach Definition ist

$$cov_{jj}(\mu) = \int\limits_{R^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \, d\mu \tag{2}$$

Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} = P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m;j} \tag{3}$$

Aus (3) und (b) folgt sogleich

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 &= [(P_{j;\mathbb{R}} \circ \pi_{m;j}) - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \\ &= [P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \circ \pi_{m;j} \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (1), (4) und der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $\pi_{m;j}$ ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.21.10.2 dann

$$[P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \pi_{m;j}(\mu); \mathbb{R})$$

sowie mittels teil (c) von Satz M.21.10.2 zudem

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left([P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \circ \pi_{m;j}\right) \, d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} [P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \, d[\pi_{m;j}(\mu)] \tag{5}$$

Wegen (b) gilt $\pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Hieraus folgt mittels Teil (a) von Satz M.23.4.2 dann

$$var(\pi_{m;j}(\mu)) = \int\limits_{\mathbb{R}} [P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \, d[\pi_{m;j}(\mu)] \tag{6}$$

Unter Beachtung von (2), (4), (5) und (6) folgt dann

$$cov_{jj}(\mu) \overset{(2)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \, d\mu$$

$$\overset{(4)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left([P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \circ \pi_{m;j} \right) d\mu$$

$$\overset{(5)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}} [P_{1;\mathbb{R}} - M_1(\pi_{m;j}(\mu))]^2 \; d[\pi_{m;j}(\mu)]$$

$$\overset{(6)}{=} var(\pi_{m;j}(\mu))$$

(d) Unter Beachtung von Teil (c) von Satz M.23.9.4 sowie (c) ergibt sich

$$|cov_{jk}(\mu)| \leq \sqrt{cov_{jj}(\mu) cov_{kk}(\mu)} = \sqrt{cov_{jj}(\mu)}\sqrt{cov_{kk}(\mu)}$$
$$= \sqrt{var(\pi_{m,j}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{m,k}(\mu))}$$

■

Satz M.23.9.6 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.23.9.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$. Dann heißt die Zahl

$$cor(\mu) = \begin{cases} \frac{cov_{12}(\mu)}{\sqrt{var(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{2,2}(\mu))}} & \text{,falls } [var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0 \\ 0 & \text{,falls } [var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] = 0 \end{cases}$$

der Korrelationskoeffizient von μ.

Satz M.23.9.7. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$ und bezeichne $cor(\mu)$ den Korrelationskoeffizienten von μ. Dann gilt:

(a) Es ist $|cor(\mu)| \leq 1$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

 (i) Es ist $cor(\mu) = 0$.

 (ii) Es ist $cov_{12}(\mu) = 0$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

 (i) Es ist $|cor(\mu)| = 1$.

 (ii) Es gelten $[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0$ und $det[cov(\mu)] = 0$.

v66m
11.05.2010

Beweis.

(a) Nach Teil (d) von Satz M.23.9.6 gilt

$$|cov_{12}(\mu)| \leq \sqrt{var(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{2,2}(\mu))} \tag{1}$$

Falls $[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] = 0$, folgt aus Definition M.23.9.4 nun $|cor(\mu)| = |0| = 0 \leq 1$, während sich im Fall $[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0$ aus Definition M.23.9.4 und (1) dann $|cor(\mu)| \leq 1$ ergibt.

(b) (i)$\Rightarrow$ (ii) Falls $[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0$ ist, folgt aus (i) mit Definition M.23.9.4 dann $cor_{12}(\mu) = 0$ während sich im Fall $[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] = 0$ aus (1) sogleich $cov_{12}(\mu) = 0$ ergibt. Es gilt also (ii).
(ii)$\Rightarrow$ (i) Dies folgt sogelich auch Definition M.23.9.4.

(c) Wegen Teil (d2) von Satz M.23.9.3 gilt

$$cov_{12}(\mu) = cov_{21}(\mu) \tag{2}$$

Wegen Teil (c) von Satz M.23.9.6 gelten

$$cov_{11}(\mu) = var(\pi_{2,1}(\mu)) \tag{3}$$

und

$$cov_{22}(\mu) = var(\pi_{2,2}(\mu)) \tag{4}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.3 sowie von (2)-(4) folgt dann

$$det[cov(\mu)] = det[(cov_{jk}(\mu))_{j,k=1}^{2}] = [cov_{11}(\mu)][cov_{22}(\mu)] - [cov_{13}(\mu)][cov_{21}(\mu)]$$

$$\overset{(2)-(4)}{=} [var(\pi_{2;1}(\mu))][var(\pi_{2;2}(\mu))] - [cov1;2(\mu)]^2 \tag{5}$$

(iii)$\Rightarrow$ (iv) Aus (iii) mit Definition M.23.9.4 folgen sogleich

$$[var(\pi_{2;1}(\mu))][var(\pi_{2;2}(\mu))] \neq 0 \tag{6}$$

und

$$1 = |cor(\mu)|^2 = \left[\frac{cov_{12}(\mu)}{\sqrt{var(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{2,2}(\mu))}}\right]^2 = \frac{cov_{12}(\mu)^2}{var(\pi_{2,1}(\mu))var(\pi_{2,2}(\mu))},$$

also

$$[cov_{12}(\mu)]^2 = var(\pi_{2,1}(\mu))var(\pi_{2,2}(\mu)) \tag{7}$$

Aus (5) und (7) folgt dann

$$det[cov(\mu)] = 0 \tag{8}$$

(iv)$\Rightarrow$(iii) Wegen (iv)) gilt $det[cov(\mu)] = 0$. Hieraus folgt wegen (5) dann

$$[cov_{12}(\mu)]^2 = [var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))]. \tag{9}$$

Wegen (iv) gilt

$$[var(\pi_{2,1}(\mu))][var(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0 \tag{10}$$

Wegen (10), Definition M.23.9.4 und (9) ergibt sich

$$[cor(\mu)]^2 = \left[\frac{cov_{12}(\mu)}{\sqrt{var(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{var(\pi_{2,2}(\mu))}}\right]^2 = \frac{cov_{12}(\mu)^2}{var(\pi_{2,1}(\mu))var(\pi_{2,2}(\mu))} = 1 \tag{11}$$

Hieraus folgt $|cor(\mu)| = 1$. Es gilt also (iii).

$\blacksquare$

Wir untersuchen nun, in welcher Weise die Kovarianzmatrix eine Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Lokalisation von μ auf affinen Teilräumen von $\mathbb{R}^m$ bestimmt. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig.

Lemma M.23.9.5. Seien $m \in \mathbb{N}, \mu \in \mathcal{M} *_+^{1,2} (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(a) Es bezeichne $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)$ den Erwatungswert von μ. Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} b^T x\mu)dx = b^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)].$$

(b) Es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (b^T x - b^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \mu(dx) = b^T cov(\mu) b.$$

Beweis.

(a) Wegen Teil(a) von Satz M.23.9.5 gilt

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} x\mu(dx). \tag{1}$$

Unter Verwendung von (1) Teil (b) von Lemma M.23.9.2 ergibt sich $b^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \overset{(1)}{=} b^T[\int\limits_{\mathbb{R}^m} x\mu(dx)] \overset{LM.23.9.5,(b)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} b^T x\mu(dx)$

(b) Wegen Teil (c1) von Satz M.23.9.5 gilt

$$cov(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \mu(dx) \tag{2}$$

Wegen Teil(b) von Lemma M.23.9.2 dann

$$b^T cov(\mu) b = b^T(\int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \mu(dx)) b = \int\limits_{\mathbb{R}^m} b^T[x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T b\mu(dx) \tag{3}$$

Für $x \in \mathbb{R}^m$ gilt nun $(b^T x - b^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 = (b^T[x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 = (b^T[x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])(b^T[x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^T = b^T[x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T b$
Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (3) dann $b^T cov(\mu) b = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (b^T x - b^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \mu(dx)$.

$\blacksquare$

Lemma M.23.9.6. Seien $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^m \backslash \{0_{m\times 1}\}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiter sei $H_{a,\alpha} := \{x \in \mathbb{R}^m : a^T x = \alpha\}$ Dann gilt $H_{a,\alpha} \in \mathfrak{B}_m$.

Beweis. Sei $T_{a^T,-\alpha} : \mathbb{R}^m \Rightarrow \mathbb{R} : x \mapsto a^T x - \alpha$. Aus den Definitionen von $H_{a,\alpha}$ und $T_{a^T,-\alpha}$ folgt dann

$$H_{a,\alpha} = (T_{a^T,-\alpha})^{-1} \backslash \{0\} \tag{1}$$

Wegen $\{0\} \in \mathfrak{B}_1$ und der in Teil(b) von Satz M.15.9 gezeigten $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Meßbarkeit von $T_{a^T,-\alpha}$ folgt aus (1) dann $H_{a,\alpha} \in \mathfrak{B}_m$. ■

Lemma M.23.9.7. Seien $m \in \mathbb{N}$ und V ein von $\mathbb{R}^m$ verschiedener affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es sei $V = x_0 + U$ eine Darstellung mit einem $x_0 \in V$ und dem zu V gehörigen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(a) $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in $(\mathbb{R}^m, (\cdot,\cdot))_{E,\mathbb{R}^m}$. Dann ist $U^\perp$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$ und es gelten $\dim U^\perp = m - \dim U$ sowie $\dim(U^\perp) \in \mathbb{N}$.

(b) Sei $\dim(U^\perp) = s$. Unter Beachtung von $s \in \mathbb{N}$ bezeichne $(u_j)_{j=1}^s$ eine Basis von $U^\perp$. Weiter sei $A := \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_s^T \end{pmatrix}$. Dann gilt $V = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = Ax_0\}$.

(c) Für $j \in \{1,...,s\} sei H_{u_j,u_j^T x_0} := \{x \in \mathbb{R}^m : u_j^T x = u_j^T x_0\}$ Dann gilt $V = \bigcap_{j=1}^{s} H_{u_j,u_j^T x_0}$.

(d) Es gilt $V \in \mathfrak{B}_m$.

Beweis.

(a) Bekannt aus der Linearen Algebra.

(b) Es ist

$$x_0 \in \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = Ax_0\} \tag{1}$$

Weiterhin bezeichne

$$\mathcal{N}(A) := \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0_{m\times 1}\} \tag{2}$$

Den Nullraum von A. Dann ist $\{x \in \mathbb{R}^m : Ax = Ax_0\}$ ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$, für den wegen (1) und (2) die Darstellung

$$\{x \in \mathbb{R}^m Ax = Ax_0\} = x_0 + \mathcal{N}(A) \tag{3}$$

besteht. Sei

$$u \in U \tag{4}$$

Für

$$j \in \{1,...,m\} \tag{5}$$

folgt wegen $u_j \in U^{perp}$ und (4) nun

$$u_j^T u = (u_j, u)_{E,\mathbb{R}^m} = 0 \tag{6}$$

Unter Beachtung von (5) und (6) folgt nun

$$A_u = \begin{pmatrix} u_1^T \\ \vdots \\ u_s^T \end{pmatrix} u = \begin{pmatrix} u_1^T u \\ \vdots \\ u_s^T u \end{pmatrix} \overset{(5),(6)}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = 0_{s\times 1} \tag{7}$$

Aus (2) und (7) dann

$$u \in \mathcal{N}(A). \tag{8}$$

Aus (4) und (8) folgt nun

$$U \subseteq \mathcal{N}(A). \tag{9}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Folge $(u_j)_{j=1}^s$ und der Definition von A gilt

$$\text{Rang } A = s \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) folgt nun

$$\dim U = m - s = m - \text{Rang } A = \dim[\mathcal{N}(A)] \tag{11}$$

Aus (9), (11) und $\dim[\mathcal{N}(A)] < \infty$ folgt dann

$$\mathcal{N}(A) = U. \tag{12}$$

Aus der Wahl von U, (12) folgt dann

$V = x_0 + U \overset{(12)}{=} x_0 + \mathcal{N}(A) \overset{(3)}{=} \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = Ax_0\}$.

(c) Dies folgt aus (b) und der Konstruktion von A.

(d) Wegen Lemma M.23.9.6 ist $H_{u_j,u_j^T x_o})_{j=1}^s$ eine Folge aus $\mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, mittels Teil (b) von Satz M.4.1 dann $\bigcap\limits_{j=1}^{s} H_{u_j,u_j^T x_0} \in \mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt wegen (c) dann $V \in \mathfrak{B}_m$.

■

Definition M.23.9.5. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Unter dem Spaltenraum $\mathcal{R}(A)$ (Range von A) von A verstehen wir dann den von den Spalten von A erzeugten linearen Teilraum von $\mathbb{R}^p$.

Lemma M.23.9.8. Seien $p, q \in \mathbb{N} und A \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{R}(A)$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^p$ undes gilt $\dim[\mathcal{R}(A)] = \text{Rang } A$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

  (i) Es ist $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^p$.

  (ii) Es ist $\text{Rang } A = p$.

(c) Sei $p = q$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(iii) Es ist $\mathcal{R}(A) = \mathbb{R}^p$.

(iv) Es ist $\det A \neq 0$.

(d) Sei $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Dann gilt $\mathcal{R}(\alpha A) = \mathcal{R}(A)$.

Lemma M.23.9.9. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Es bezeichne $\mathcal{R}(A)$ den Spaltenraum sowie $\mathcal{N}(A^T)$ den Nullraum von A^T. Dann sind $\mathcal{R}(A)$ und $\mathcal{N}(A^T)$ in $(\mathbb{R}^p, (\cdot,\cdot)_{E,\mathbb{R}^p})$ zueinander orthogonale lineare Teilräume von $\mathbb{R}^p$, für welche $\mathcal{R}(A)+\mathcal{N}(A^T) = \mathbb{R}^p$ erfüllt und diese Minkowski-Summe zudem direkt ist.

Satz M.23.9.8. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten $\tilde(\mathbb{M})_1(\mu)+\mathcal{R}(cov(\mu)) \in \mathfrak{B}_m$ und $\mu(\tilde(\mathbb{M})_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu))) = 1$.
Beweis. Sei zunächst

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathbb{R}^m \tag{1}$$

Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ und μ ein W-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist, gelten dann $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$ und $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$. Hieraus folgen wegen (1) dann

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) \in \mathfrak{B}_m \tag{2}$$

und

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)\mathcal{R}(cov(\mu)) = 1 \tag{3}$$

Sei nun

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) \subset \mathbb{R}^m \tag{4}$$

Da $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu))$ ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist, welcher wegen (4) von $\mathbb{R}^m$ verschieden ist, liefert Teil (c) von Lemma M.23.9.7 dann

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) \in \mathfrak{B}_m. \tag{5}$$

Es bezeichne $[\mathcal{R}(cov(\mu))]^{perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{R}(cov(\mu))$ in $(\mathbb{R}^m, (\cdot,\cdot)_{E,\mathbb{R}^m})$. Wegen Lemma M.23.9.9 gilt dann

$$[\mathcal{R}(cov(\mu))]^{perp} = \mathcal{N}(cov(\mu)^T). \tag{6}$$

Wegen Definition M.23.9.3 und Teil (d2) von Satz M.23.9.3 gilt

$$cov(\mu) = [cov(\mu)]^T \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$[\mathcal{R}(cov(\mu))]^T = \mathcal{N}(cov(\mu)) \tag{8}$$

Sei $s := \dim([\mathcal{R}(cov(\mu))]^T)$. Wegen (4) ist nach Teil (a) aus Lemma M.23.9.7 dann $s \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $(u_j)_{j=1}^s$ eine Basis von $[\mathcal{R}(cov(\mu))]^T$. Wegen Teil (c) von Lemma M.23.9.7 gilt dann

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) = \bigcap_{j=1}^{s} H_{u_j, u_j^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]} \tag{9}$$

Sei

$$j \in \{1, ..., s\} \tag{10}$$

Wegen (10) und der Wahl von U_j folgt aus (8) dann $u_j \in \mathcal{N}(cov(\mu))$, also

$$[cov(\mu)]u_j = 0_{m\times 1} \tag{11}$$

Unterbeachtung von Teil (b) von Lemma M.23.9.5 sowie (11) folgt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (u_j^T Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 d\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (u_j^T x - u_j^T[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \mu(dx) = u_j^T[cov(\mu)]u_j = u_j 0_{m\times 1} = 0 \tag{12}$$

v67m
17.05.2010

Weiterhin ist folgendes erfüllt

$$(u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) folgt mittels Teil (b) von Satz M.21.6.1 nun

$$\{(u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$$

Hieraus folgt aus

$$\begin{aligned} &\{(u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)])^2 \neq 0\} \\ &= \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu \end{aligned}$$

dann

$$\{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu \tag{14}$$

Aus der Definition von

$$H_{u_j, u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]} = \mathbb{R}^m \setminus \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\} \tag{15}$$

Wegen (10) und (14) folgt mittels Teil (c) von Satz M.23.5.1 nun

$$\bigcup_{j=1}^{s} \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu \tag{16}$$

Wegen $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$ folgt aus (16) nun

$$\begin{aligned} &\mu(\{\mathbb{R}^m \setminus [\bigcup_{j=1}^{s} \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\}]) \\ &= \mu(\mathbb{R}^m) - \mu(\{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\}) = 1 - 0 = 1 \end{aligned} \tag{17}$$

Unter Beachtung von

$$\mathbb{R}^m \setminus [\bigcup_{j=1}^{s} \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\}] \overset{(15)}{=} \bigcap_{j=1}^{s} (\mathbb{R}^m \setminus \{u_j^T \cdot Id_{\mathbb{R}^m} - u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] \neq 0\})$$

$$\overset{(9)}{=} \bigcap_{j=1}^{s} H_{u_j, u_j^T[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]} = \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) \tag{18}$$

Aus (16) und (17) folgt dann

$$\mu(\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) = 1 \tag{19}$$

Wegen (1) - (5) und (19) ist dann alles gezeigt

■

Folgerung M.23.9.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $cov(\mu) = 0_{m\times m}$

(ii) Es ist $\mu = \mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_m}$

Beweis.

(1) "$(i) \Rightarrow (ii)$" Wegen Satz M.23.9.8 gelten $(\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu) \subset \mathfrak{B}_m$ und

$$\mu(\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) = 1 \tag{1}$$

Wegen (i) gilt $\mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathcal{R}(0_{m\times}) = \{0_{m\times 1}\}$ somit ist

$$(\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu) = \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \{0_{m\times 1}\} = \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\mu\{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)\}) = 1 \tag{3}$$

Wegen $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$ und wegen (3) gilt

$$\mu(\mathbb{R}^m \setminus \{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)\}) = \mu(\mathbb{R}^m) - \mu\{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)\}) = 1 - 1 = 0 \tag{4}$$

Wegen (4) folgt mittels Lemma M.23.7.3 sowie (3) dann $\mu = [\mu\{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)\})] \cdot \mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_m} = \mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_m}$ Es gilt also (ii)

(2) "$(ii) \Rightarrow (i)$" Unter Beachtung von (ii) und Teil (d) von Beispiel M.23.9.1 ergibt sich, $cov(\mu) = cov(\mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_m}) = 0_{m\times m}$ Es gilt also (i)

■

Satz M.23.9.9. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiterhin sei V ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$ Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu(V) = 1$

(ii) Es ist $\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu)) \subseteq V$

Satz M.23.9.10. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiterhin sei $r \in \{0, 1, ..., n\}$. Dann gilt

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

   (i) Es ist Rang$[cov(\mu)] = r$

   (ii) Es gibt einen r-dim affinen Teilraum V von $\mathbb{R}^m$ mit $\mu(V) = 1$ und falls $r \in \mathbb{N}$, so gilt für jeden $(r-1)$ - dim affinen Teilraum W von $\mathbb{R}^m$ dann $\mu(W) = 1$

   (iii) Es genau gibt einen r-dim affinen Teilraum V von $\mathbb{R}^m$ mit $\mu(V) = 1$ und falls $r \in \mathbb{N}$, so gilt für jeden $(r-1)$ - dim affinen Teilraum W von $\mathbb{R}^m$ dann $\mu(W) = 1$

(b) Sei (i) erfüllt. Bezeichnet dann V den eindeutig bestimmten affinen Teilraum von $\mathbb{R}^m$ mit der Eigenschaft (iii), so gilt $V = \widetilde{M_1}(\mu) + \mathcal{R}(cov(\mu))$

Seien $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$. Wir untersuchen nun die Lokalisation von μ auf affinen Teilraum von $\mathbb{R}^2$. Sei zunächst Rang$[cov(\mu)] = 2$ Dann gibt es keinen echten affinen Teilraum V von $\mathbb{R}^2$ mit $\mu(V) = 1$ Sei nun Rang$[cov(\mu)] = 1$. Dann sind drei Fälle möglich

(Fall 1) Es ist $cov_{11}(\mu) = 0$ und $cov_{22}(\mu) \neq 0$

(Fall 2) Es ist $cov_{11}(\mu) \neq 0$ und $cov_{22}(\mu) = 0$

(Fall 3) Es ist $cov_{11}(\mu) \neq 0$ und $cov_{22}(\mu) \neq 0$ und $[cov_{12}(\mu)]^2 = [cov_{11}(\mu)] \cdot [cov_{22}(\mu)]$ (es ist dann also $cov(\mu) = 1$)

Im Fall 1 ist $cov_{12}(\mu) = 0$, also $\mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\})$ Im Fall 2 ist $cov_{21}(\mu) = 0$, also $\mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\{\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\})$ Im Fall 3 ist $cov_{21}(\mu) = cov_{12}(\mu) \neq 0$, also $\mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\{\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\})$ Somt ist $(cov_{11}(\mu), cov_{21}(\mu))^T$ nicht proportional zu einander Vektoren $(0,1)^T$ oder $(1,0)^T$. Es ist $\mathcal{R}(cov(\mu)) = \mathcal{L}_{\mathbb{R}}(\{\begin{pmatrix}cov_{11}(\mu)\\cov_{21}(\mu)\end{pmatrix}\})$ Sei schließlich Rang$[cov(\mu)] = 0$. Nun ist $cov(\mu) = 0_{2\times 2}$ In diesem Fall ist nach Folgerung M.23.9.2 dann $\mu = \mathcal{E}_{\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_m}$

Satz M.23.9.11. Seien $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $l \in \mathbb{N}$, $A \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $a \in \mathbb{R}^l$. Die Abbildung $T_{A,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^l$ sei definiert gemäß $x \mapsto Ax + a$. Dann gilt:

(a) Es ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und es gilt $T_{A,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$

(b) Es gilt $\widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu)) = A \cdot [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] + a = (T_{A,a}\widetilde{\mathbb{M}})_1(\mu)))$

(c) Es gilt $cov(T_{A,a}(\mu)) = A \cdot cov(\mu) \cdot A^T$

Beweis.

(a)-(b) Dies folgt aus Teil (a) bzw. (b) von Satz M.23.9.2

(c) Aufgrund der Wahl von μ bzw. wegen (a) ergibt sich mittels Teil (c1) von Satz M.23.9.5 dann

$$cov(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \mu(dx) \tag{1}$$

bzw.

$$cov(T_{A,a}(\mu)) = int_{\mathbb{R}^l}[y - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))][y - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))]^T [T_{A,a}(\mu)](dy) \tag{2}$$

$$x \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

Unter Beachtung von (b) folgt dann

$$T_{A,a}(x) - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu)) = [Ax + a] - (A \cdot [\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)] + a) = A(x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)) \tag{4}$$

Unter Verwendung von (2), Teil (c) von Satz M.21.10.2, (3),(4), Teil (b) von Lemma M.23.9.2 sowie (1) folgt dann

$$\begin{aligned}
cov(T_{A,a}(\mu)) &\overset{(2)}{=} \int_{\mathbb{R}^l} [y - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))][y - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))]^T [T_{A,a}(\mu)](dy) \\
&\overset{S.M.21.10.2}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} [T_{A,a}(x) - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))][T_{A,a}(x) - \widetilde{\mathbb{M}}_1(T_{A,a}(\mu))]^T \mu(dx) \\
&\overset{(3),(4)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} [A(x-\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu))]\cdot[A(x-\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu))]^T \mu(dx) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} A[x-\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x-\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T A^T \mu(dx) \\
&\overset{\text{Lemma} M.23.9.2,(b)}{=} A \int\limits_{\mathbb{R}^m} [x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)][x - \widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]^T \mu(dx) A^T \overset{=}{(1)} A[cov(\mu)]A^T
\end{aligned}$$

■

Folgerung M.23.9.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $k \in \{1, ..., m\}$ und $(i_j)_{j=1}^k$ eine Folge von paarweisen verschiedenen Elementen aus $\{1, ..., m\}$. Es sei $\pi_{m;i_1,...i_k} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ def. gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_{i_1}, ..., x_{i_k})^T$ Dann gilt

(a) Es ist $\pi_{m;i_1,...i_k}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und es gilt $\pi_{m;i_1,...i_k}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(b) Es ist $\widetilde{\mathbb{M}}_1(\pi_{m;i_1,...i_k}(\mu)) = (\widetilde{\mathbb{M}}_{i_1}(\mu), ..., \widetilde{\mathbb{M}}_{i_k}(\mu))^T$

(c) Es ist $cov((\pi_{m;i_1,...i_k}(\mu)) = (cov_{i_r i_s}(\mu))_{r,s=1}^k$

Beweis. Für $l \in \{1, ..., m\}$ bezeichne $e_l^{(m)}$ den l-ten kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^m$.

Es sei $E_{m;i_1,...i_k} := \begin{pmatrix} [e_{i_1}^{(m)}]^T \\ \vdots \\ [e_{i_k}^{(m)}]^T \end{pmatrix}$ Dann ist $E_{m;i_1,...i_k} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt

$$\pi_{m;i_1,...i_k} = T_{E_{m;i_1,...i_k}, 0_{k\times 1}} \tag{1}$$

Wegen (1) ist die Behauptung von (a) bzw. (b) bzw. (c) eine unmittelbare Konsequenz aus Teil (a) bzw. (b) bzw. (c) von Satz M.23.9.11 ■

Definition M.23.9.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heiß t μ standarisiert, falls $\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu) = 0_{m\times 1}$ und $cov(\mu) = Id_m$ erfüllt sind.

Wir untersuchen nun eine m-dim Verallgemeinerung von Bemerkung M.23.4.2. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Satz M.23.9.12. Sei $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}_{\geqq}^{q\times q}$. Dann gibt es genau eine $B \in \mathbb{R}_{\geqq}^{q\times q}$ mit $B^2 = A$.

Satz M.23.9.12 führt uns zu folgender Begriffsbildung

Definition M.23.9.7. Sei $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}_{\geqq}^{q\times q}$. Es bezeichne B die eindeutig bestimmte Matrix aus $\mathbb{R}_{\geqq}^{q\times q}$ mit $B^2 = A$. Dann heißt B die positiv semidefinite Quadratwurzel aus A und wird mit $\sqrt{A}$ symbolisiert

Satz M.23.9.13. Sei $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}_{\geqq}^{q\times q}$. Dann gilt

(a) Das Spektrum von A ist in $[0, +\infty)$ enthalten

(b) Unter Beachtung von (a) bezeichne $(l_j(A))_{j=1}^q$ die absteigend geordnete Folge der unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A sowie $(u_j)_{j=1}^q$ eine zugehörige in $(\mathbb{R}^q, (\cdot,\cdot)_{E,\mathbb{R}^q})$ orthonomierte Folge von Eigenvektoren. Es sei $u := (u_1, ..., u_q)$. Dann gilt $\sqrt{A} = U \cdot [diag(\sqrt{l_1(A)}, ..., \sqrt{l_q(A)}) \cdot U^T$

Satz M.23.9.14. Sei $q \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$. Dann gilt:

(a) Es ist $det(A) \neq 0$ und $A^{-1} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$

(b) Es ist $det(\sqrt{A}) \neq=$ und es gilt $\sqrt{A^{-1}} = \sqrt{A}^{-1}$

Es folgt nun die gewünschte Verallgemeinerung von Bemerkung M.23.4.2.

Satz M.23.9.15. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ durch derart beschaffen, daß $cov(\mu) \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ erfüllt ist. Dann gilt:

(a) Es ist $det[\sqrt{cov(\mu)}] \neq= 0$

(b) Es ist $T_{\sqrt{cov(\mu)}^{-1}, -\sqrt{cov(\mu)}^{-1}[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung

(c) Es ist $T_{\sqrt{cov(\mu)}^{-1}, -\sqrt{cov(\mu)}^{-1}[\widetilde{\mathbb{M}}_1(\mu)]}(\mu)$ eine standardisiertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Beweis.

(a) Dies folgt aus Teil (b) von Satz M.23.9.14

(b) Dies folgt aus Teil (b) von Satz M.23.9.15

■

v89m
08.11.2010

M.24. Maße auf Produkten von meßbaren Räumen

M.24.1. Existenz und Konstruktion von Produktmaßen für endliche Folgen von Maßräumen

Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ die in Definition M.16.1 eingeführte Produkt-σ-Algebra der Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^n$. Im Mittelpunkt der Betrachtungen dieses Abschnitts steht dann die Diskussion einer Klasse von Maßen auf $\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$, welche in einer speziellen Beziehung zur Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$ stehen. Hiezu wird das in Definition M.1.6 eingeführte System $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ der zur Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^n$ gehörigen Rechteckmengen herangezogen. Zum Verständnis der nachfolgenden Betrachtungen sei daran erinnert, dass wegen Folgerung M.16.1 die Beziehung

$$\sigma_{\times_{k=1}^n \Omega_k}(\boxtimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k) = \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k$$

besteht, also insbesondere

$$\boxtimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k \subseteq \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k$$

erfüllt ist. Das nachfolgend eingeführte Objekt ist die zentrale Begriffsbildung dieses Abschnitts.

Definition M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen und $\pi \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$. Dann heißt π eine Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$, falls für alle $\times_{j=1}^n A_j \in \boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ die Beziehung

$$\pi(\times_{j=1}^n A_j) = \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j)$$

besteht.

Bemerkung M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\} und ((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Weiter sei π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann gilt:

(a) Es ist $\pi(\times_{j=1}^n \Omega_j) = \prod\limits_{j=1}^n \mu_j(\Omega_j)$.

(b) b1$\Leftrightarrow$b2

  (b1) Es ist π das Nullmaß auf $(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$.

  (b2) Es gibt ein $k \in \{1, ..., n\}$ für das μ_k das Nullmaß auf $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ ist.

(c) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $\pi \in \mathcal{M}_+^b(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$.

(d) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $\pi \in \mathcal{M}_+^1(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$.

(e) Sei $(\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)_{\pi,e} := \{E \in \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j : \pi(E) \in [0, \infty)\}$ sowie für $j \in \{1, ..., n\}$ zuden $(\mathfrak{A}_j)_{\mu_{j,e}} := \{E_j \in \mathfrak{A}_j : \mu_j(E_j) \in [0, \infty)\}$. Dann gilt $\boxtimes_{j=1}^n (\mathfrak{A}_j)_{\mu_{j,e}} \subseteq (\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)_{\pi,e}$.

(f) Sei $\times_{j=1}^n A_j \in \boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$. Dann sind f1$\Leftrightarrow$ f2.

(f1) Es ist $\times_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{N}_\pi$.

(f2) Es gibt ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $A_k \in \mathcal{N}_{\mu_k}$.

Beweis.

(a) Für $j \in \{1, ..., n\}$ ist $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j, also $\Omega_j \in \mathfrak{A}_j$. Hieraus sowie aus der Wahl von π folgt mittels Definition M.24.1.1 dann (a).

(b) Die Äquivalenz von b1 und b2 folgt aus (a) aus der Vereinbarung $0 \cdot +\infty = 0$.

(c)+(d) Dies folgt unmittelbar aus (a)

(e) Dies folgt aus Definition M.24.1.1

(f) Dies folgt aus $\pi(\times_{j=1}^{n} A_j) = \prod_{j=1}^{n} \mu(A_j)$ und der Vereinbarung $0 \times +\infty = 0$.

■

Unseer nächstes Ziel besteht nun darin eine Situation aufzuzeigen, in der höchstens ein Produktmaß existieren kann. Hierzu beweisen wir zunächst einen etwas allgemeineren Sachverhalt.

Satz M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^{n}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$, welcher eine isotone Folge $(E_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, für welchen $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{jk} = \Omega_{jk}$ erfüllt ist und welche $\forall k \in \mathbb{N}$ der Bedingung $\mu_j(E_{jk}) \in [0, +\infty)$ genügt. Dann gibt es höchstens ein Maß π auf $(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j)$, welchen $\forall \times_{j=1}^{n} E_j \in \boxtimes_{j=1}^{k}\mathcal{E}_j$ der Bedingung $\pi(\times_{j=1}^{n} E_j) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j)$ genügt.

Beweis. Unsere Beweisstrategie ist auf eine geeinete Anwendung von Satz M.10.3 orientiert. Wegen Satz M.16.2 gilt

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j) = \otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die $\cap$-Stabilität des Mengensystems $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j$. Sei

$$\{\times_{j=1}^{n} E_j, \times_{j=1}^{n} F_j\} \subseteq \boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j \tag{2}$$

Sei

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) gilt dann $\{E_j, F_j\} \subseteq \mathcal{E}_j$. Hieraus folgt wegen der $\cap$-Stabilität von $\mathcal{E}_j$ dann

$$E_j \cap F_j \in \mathcal{E}_j. \tag{4}$$

Weiterhin gilt:

$$(\times_{j=1}^{n} E_j) \cap (\times_{j=1}^{n} F_j) = \times_{j=1}^{n}(E_j \cap F_j). \tag{5}$$

Wegen (3)-(5) gilt dann:

$$(\times_{j=1}^{n} E_j) \cap (\times_{j=1}^{n} F_j) \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \tag{6}$$

Aus (1), (2) und (6) folgt nun: Es ist $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\otimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$. Wir zeigen nun die Identität $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\times_{j=1}^{n} E_{jk}) = \times_{j=1}^{n} \Omega_j$. Trivialerweise gilt:

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (\times_{j=1}^{n} E_{jk}) \subseteq \times_{j=1}^{n} \Omega_j.. \tag{7}$$

Sei nun

$$\{\omega_1, ..., \omega_n\} \in \times_{j=1}^{n} \Omega_j.. \tag{8}$$

$$j \in \{1, ..., n\}. \tag{9}$$

Wegen (3) gilt: $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{jk} = \Omega_j$ und es gibt also ein

$$k_j \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

und

$$\omega_j \in \mathbb{E}_j k. \tag{11}$$

Seien

$$l := max\{k_1, ..., k_n\}. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgend dann

$$l \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

und

$$k_j \leq l. \tag{14}$$

Aus (10), (13) und (14) und der Isotonie der Folge $(E_{js})_{s\in\mathbb{N}}$ folgt dann $E_{jk_j} \subseteq E_{jl}$. Hieraus folgt wegen (11) nun

$$\omega_j \in E_{jl}. \tag{15}$$

Aus (9) und (15) folgt nun

$$(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{j=1}^{n} E_{jl}. \tag{16}$$

Aus (13) und (16) folgt nun

$$(\omega_1, ..., \omega_n) \in \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \times_{j=1}^{n} E_{jl}. \tag{17}$$

Aus (8) und (17) folgt nun

$$\times_{j=1}^{n} \Omega_j \subseteq \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \times_{j=1}^{n} E_{jl}. \tag{18}$$

Wegen (7) und (8) folgt nun

$$\times_{j=1}^{n} \Omega_j = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} \times_{j=1}^{n} E_{jl}. \tag{19}$$

Seien

$$k \in \mathbb{N} \tag{20}$$

Nach Konstruktion gelten dann

$$\times_{j=1}^{n} E_{jk} \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \tag{21}$$

und

$$\prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_{jk}) \in [0, \infty). \tag{22}$$

Seien nun

$$\pi \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^{n} \Omega_j, \otimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j) \tag{23}$$

und

$$\pi' \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^{n} \Omega_j, \otimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j) \tag{24}$$

so beschaffen, dass für alle

$$\times_{j=1}^{n} E_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \tag{25}$$

Die Beziehung

$$\pi(\times_{j=1}^{n} E_j) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j) \tag{26}$$

und

$$\pi'(\times_{j=1}^{n} E_j) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_j) \tag{27}$$

bestehen. Aus (25)-(27) folgt dann.

$$Restr._{\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j} \pi = Restr_{\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j} \pi'. \tag{28}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Wegen (29),(20),(21), (25) und (26) gilt dann

$$\pi(\times_{j=1}^{n} E_{jk}) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(E_{jk}). \tag{30}$$

Wegen (29), (20), (22) und (30) gilt dann

$$\pi(\times_{j=1}^{n} E_{jk}) \in [0, +\infty). \tag{31}$$

Damit gilt nun $\pi = \pi'$ mit Hilfe von Satz M.10.3.

■

Lemma M.24.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Maßraum und sei $\mathfrak{A}_{\mu,e} := \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$. Dann gilt $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$.
Beweis. Wegen der Subadditivität von μ gelten $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}$ und $\mu(\bigcup_{j=1})^n A_j \subseteq \sum_{j=1}^n \mu(A_j)$. Hieraus folgt aufgrund der Wahl von $(A_j)_{j=1}^n$ dann $\mu(\bigcup_{j=1}^n A_j) \in [0, \infty)$. Es ist also $\bigcup_{j=1}^n A_j \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$. ■

Lemma M.24.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein σ-endlicher Maßraum und sei $\mathfrak{A}_{\mu,e} := \{A \in \mathfrak{A} : \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Dann gibt es eine isotone Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$ mit $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega$.
Beweis. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ gibt es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $P(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$.

(ii) Es gilt $\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n = \Omega$.

Seien
$$n \in \mathbb{N} \tag{1}$$
und
$$E_n := \bigcup_{k=1}^n A_k. \tag{2}$$
Da $(A_k)_{k=1}^n$ wegen (i) eine Folge aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$ ist, folgt wegen (1) und (2) mittels Lemma M.24.1.1 dann
$$E_n \in \mathfrak{A}_{\mu,e} \tag{3}$$
Aus (1) und (2) folgt sogleich
$$E_n \subseteq E_{n+1} \tag{4}$$
Unter Verwendung von (1) und (2) folgt weiterhin
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} (\bigcup_{k\in\mathbb{N}} A_k) = \bigcup_{s\in\mathbb{N}} A_s \tag{5}$$
Aus (5) und (ii) folgt nun
$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} E_n = \Omega \tag{6}$$
Damit ist alles gezeigt. ■

Satz M.24.1.2. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Dann gibt es höchstens eine Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$.
Beweis. Sei
$$j \in \{1, ..., n\} \tag{1}$$
und sei
$$\mathfrak{A}_{\mu_j,e} := \{A_j \in \mathfrak{A}_j : \mu_j(A_j) \in [0, +\infty)\} \tag{2}$$

Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_j gilt nach Lemma M.24.1.2 dann: (I)
Es gibt eine isotone Folge $(E_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_{\mu_j,e}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{jk} = \Omega_j$. Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, folgt unter Beachtung von Teil (b) von Satz M.4.1 und Teil (d) von Satz M.4.6 dann.
(II)
Es ist $\mathfrak{A}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$. Unter Beachtung von (I) und (II) und Definition M.24.1.1 folgt mittels Satz M.24.1.2 dann, dass es höchstens ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$ gibt. ■

Folgerung M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen. Dann gibt es höchstens eine Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$.
Beweis. Da $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ nach Bemerkung M.13.3 eine Folge von σ- endlichen Maßräumen ist, liefert Satz M.24.1.2 die Behauptung. ■

Satz M.24.1.3. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Weiter sei π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann ist $(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j, \pi)$ auch σ-endlich. v90m
Beweis. Sei 09.11.2010

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{1}$$

Weiter sei

$$\mathfrak{A}_{\mu_j,e} := \{A_j \in \mathfrak{A}_j : \mu_j(A_j) \in [0, +\infty)\} \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von μ_j gibt es wegen Lemma M.24.1.2 dann eine Folge $(A_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für alle $k \in \mathbb{N}$ ist $A_{jk} \in \mathfrak{A}_{\mu_j,e}$.

(ii) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_{jk} \subseteq A_{jk+1}$.

(iii) Es ist $\bigcup\limits_{k\in\mathbb{N}} A_{jk} = \Omega_j$.

Sei

$$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)_{\pi,e} := \left\{A \in \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j : \pi(A) \in [0, +\infty)\right\} \tag{3}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N} \tag{4}$$

Wegen (1) bis (4) und (i) folgt mittels Teil (c) von Bemerkung M.24.1.1 dann

$$\times_{j=1}^n A_{jk} \in \left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)_{\pi,e} \tag{5}$$

Wegen (1), (i) und (ii) folgt, wie im Beweis von Satz M.24.1.1 gezeigt wurde (vgl dort Formel (19)), dann

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} \left(\times_{j=1}^n A_{jk}\right) = \times_{j=1}^n \Omega_j \tag{6}$$

Wegen (4) bis (6) ist der Maßraum $\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j, \pi\right)$ dann σ-endlich. ■

Satz M.24.1.4. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen und $\left((\Omega_j', \mathfrak{A}_j')\right)_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Es sei π ein Produktmaß von μ_j. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $T_j \in A(\Omega_j, \Omega_j')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Die Abbildung $T : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{j=1}^n \Omega_j$ sei definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (T_1(\omega_1), ..., T_n(\omega_n))$. Dann ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j'\right)$-messbare Abbildung und $T(\pi)$ ist ein Produktmaß der Folge $(T_j(\mu_j))_{j=1}^n$. **Beweis.** Wegen Folgerung M.16.2 ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j'\right)$-messbare Abbildung. Sei

$$\times_{j=1}^n A_j' \in \times_{j=1}^n \mathfrak{A}_j' \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl von $(T_j)_{j=1}^n$ folgt dann

$$\times_{j=1}^n T_j^{-1}(A_j') \in \times_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \tag{2}$$

Da π ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$ ist, folgt aus (2) dann

$$\pi\left(\times_{j=1}^n T_j^{-1}(A_j')\right) = \prod_{j=1}^n \mu_j(T_j^{-1}(A_j')) \tag{3}$$

Aus der definition von T folgt sogleich

$$T^{-1}\left(\times_{j=1}^n (A_j')\right) = \times_{j=1}^n T_j^{-1}(A_j') \tag{4}$$

Unter Beachtung der Definition eines Bildmaßes sowie von (4) und (3) folgt nun

$$\begin{aligned}[T(\pi)]\left(\times_{j=1}^n (A_j')\right) &= \pi\left(T^{-1}\left(\times_{j=1}^n (A_j')\right)\right) \overset{(4)}{=} \pi\left(\times_{j=1}^n T_j^{-1}(A_j')\right) \\ &\overset{(3)}{=} \prod_{j=1}^n \mu_j(T_j^{-1}(A_j')) = \prod_{j=1}^n [T_j(\mu_j)](A_j')\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ist $T(\pi)$ dann ein Produktmaß von $(T_j(\mu_j))_{j=1}^n$. ■

Satz M.24.1.5. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale messbare Räume. Weiter seien I_1 bzw. I_2 ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\mu_j)_{j\in I_1}$ bzw. $(\nu_k)_{k\in I_2}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ bzw. $\mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie $(\alpha_j)_{j\in I_1}$ bzw. $(\beta_k)_{k\in I_2}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$. Für $(j, k) \in I_1 \times I_2$ sei π_{jk} ein Produktmaß von μ_j und ν_k. Dann gelten $\sum_{j\in I_1} \alpha_j\mu_j \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie $\sum_{k\in I_2} \beta_k\nu_k \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und, falls

$$\pi := \sum_{j\in I_1}\left(\sum_{k\in I_2} \alpha_j\beta_k\pi_{jk}\right)$$

gesetzt wird, so ist π ein Produktmaß von $\sum_{j\in I_1} \alpha_j\mu_j$ und $\sum_{k\in I_2} \beta_k\nu_k$ und es gilt:

$$\pi = \sum_{k\in I_2} \left(\sum_{j\in I_1} \alpha_j\beta_k\pi_{jk} \right)$$

Ausgangspunkt unserer folgenden Überlegungen sind zwei nichttriviale Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$. Dann besteht unsere Zielstellung darin, den nachweis der existenz eines Produktmaßes π von μ_1 und μ_2 zu erbringen. Hierzu ziehen wir den Halbring $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ der $(\mathfrak{A}_j)_{j=1}^2$-Rechteckmengen heran und zeigen, dass die Abbildung $\tilde{\pi} : \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty]$, welche gemäß

$$A_1 \times A_2 \mapsto [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)]$$

erklärt ist, ein Prämaß auf $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ darstellt. Hieran anknüpfend wird uns dann der grundlegende Fortsetzungssatz M.13.5 das gewünschte Resultat liefern. Da dieser Fortsetzungssatz jedoch auf die Heranziehung des zu $\tilde{pi}$ gehörigen äußeren Maßes $\tilde{\pi}^*$ auf $\Omega_1 \times \Omega_2$ vom Typ I basiert, erhalten wir dann keine besonders handliche Konstruktion eines Produktmaßes. Dieses Manko lässt sich allerdings in jener Situation überwinden, in der mindestens einer der beiden vorliegenden Maßräume σ-endlich ist. In diesem Fall stellen wir eine spezielle Methode zur Konstruktion von Prooduktmaßen vor, welche eine Adaption einer frühen geometrischen Überlegung von Bonaventura Cavalieri (1591-1647) auf die hier vorliegende abstrakte Situation darstellt. Das gesuchte Produktmaß wird nach dem Cavalieri-Prinzip bestimmt. Dieses besteht grob gesprochen darin, dass wir geeignete Schnittmengen bilden, die wir zunächst messen und dann aufintegrieren.
Wir beginnen nun mit der Bereitstellung des zur Cavalieri-Konstruktion von Produktmaßen benötigten Apperats. In einer frühen Stufe dieses Prozesses werden wir hierbei bereits jene Mittel erhalten, welche den als erstes Teilziel avisierten Nachweis der Existenz eines Produktmaßes ermöglichen. Wir wenden uns zunächst der Einführung der oben angesprochenen Schnittmengen zu.

Definition M.24.1.2. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen. Weiter sei $Q \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Für $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$ heißt die Menge

$$\Omega_{\omega_1 \bullet} := \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q\}$$

bzw.

$$\Omega_{\bullet \omega_2} := \{\tilde{\omega_1} \in \Omega_1 : (\tilde{\omega_1}, \omega_2) \in Q\}$$

der $\omega_1\bullet$-Schnitt bzw. $\bullet\omega_2$-Schnitt von Q.

Wir nehmen nun eine erste Untersuchung der in Definition M.24.1.2 eingeführten Schnittmengen vor.

Lemma M.24.1.3. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen. Weiter sei $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt:

(a) Sei $Q \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann gelten

$$((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash Q)_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2 \backslash Q_{\omega_1 \bullet}$$

bzw.

$$((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash Q)_{\bullet \omega_2} = \Omega_1 \backslash Q_{\bullet \omega_2}$$

(b) Sei $(Q_k)_{k \in I}$ eine Familie aus $\mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Dann gelten

$$\left(\bigcup_{k \in I} Q_k\right)_{\omega_1 \bullet} = \bigcup_{k \in I} (Q_k)_{\omega_1 \bullet}$$

bzw.

$$\left(\bigcup_{k \in I} Q_k\right)_{\bullet \omega_2} = \bigcup_{k \in I} (Q_k)_{\bullet \omega_2}$$

(c) Seien $A_1 \in \mathcal{P}(\Omega_1)$ und $A_2 \in \mathcal{P}(\Omega_2)$. Dann gelten

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} A_2 & , \text{ falls } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & , \text{ falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash A_1 \end{cases}$$

sowie

$$(A_1 \times A_2)_{\bullet \omega_2} = \begin{cases} A_1 & , \text{ falls } \omega_2 \in A_2 \\ \emptyset & , \text{ falls } \omega_2 \in \Omega_2 \backslash A_2 \end{cases}$$

Beweis.

(a) Es gilt

$$((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash Q)_{\omega_1 \bullet} = \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in ((\Omega_1 \times \Omega_2)\backslash Q)\}$$
$$\Omega_2 \backslash \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q\} = \Omega_2 \backslash Q_{\omega_1 \bullet}$$

Analog zeigt man die zweite Behauptung in (a).

(b) Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{k \in I} Q_k\right)_{\omega_1 \bullet} &= \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in \bigcup_{k \in I} Q_k\} \\ &= \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : \text{Es gibt ein } k_0 \in I \text{ mit } (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q_{k_0}\} \\ &= \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 : \text{Es gibt ein } k_0 \in I \text{ mit } \tilde{\omega_2} \in (Q_{k_0})_{\omega_1 \bullet}\} = \bigcup_{k \in I} (Q_k)_{\omega_1 \bullet} \end{aligned}$$

Analog ergibts sich die zweite Aussage.

(c) Dies folgt unmittelbar aus Definition M.24.1.2.

■

Wir studieren nun die Schnittmengen von Mengen aus der Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ zweier σ-Algebren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Wesentlich für unser weiteres Vorgehen wird die Tatsache sein, dass diese Schnittmengen zu $\mathfrak{A}_2$ bzw. $\mathfrak{A}_1$ gehören werden.

Lemma M.24.1.4. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale messbare Räume. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt:

(a) Sei
$$\mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) : A_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2\}$$
bzw.
$$\mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} := \{A \in \mathcal{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) : A_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2\}$$
Dann ist $\mathcal{C}_{\omega_1 \bullet}$ bzw. $\mathcal{C}_{\bullet \omega_2}$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ umfasst.

(b) Sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann gelten $Q_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2$ und $Q_{\bullet \omega_2} \in \mathfrak{A}_1$.

Beweis.

(a) Wegen teil (c) von Lemma M.24.1.3 gilt
$$(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega_1 \bullet} = \Omega \tag{1}$$
Da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, gilt
$$\Omega_2 \in \mathfrak{A}_2 \tag{2}$$
Aus (1) und (2) folgt nun
$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} \tag{3}$$
Sei
$$A \in \mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} \tag{4}$$
Wegen (4) ist dann $A_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, dann
$$\Omega_2 \backslash A_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2 \tag{5}$$
Wegen Teil (a) von Lemma M.24.1.3 gilt
$$([\Omega_1 \times \Omega_2] \backslash A)_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2 \backslash A_{\omega_1 \bullet} \tag{6}$$
Aus (5) und (6) folgt nun
$$[\Omega_1 \times \Omega_2] \backslash A \in \mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} \tag{7}$$
Für
$$k \in \mathbb{N} \tag{8}$$
sei
$$Q_k \in \mathcal{C}_{\omega_1 \bullet} \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt, dass $((Q_k)_{\omega_1\bullet})_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$ ist. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, dann

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} (Q_k)_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2 \tag{10}$$

Nach Teil (b) von Lemma M.24.1.3 gilt

$$\left(\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k\right)_{\omega_1\bullet} = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} (Q_k)_{\omega_1\bullet} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$\bigcup_{k\in\mathbb{N}} Q_k \in \mathcal{C}_{\omega_1\bullet} \tag{12}$$

Wegen (3), (4), (7), (8), (9) und (12) ist $\mathcal{C}_{\omega_1\bullet}$ dann eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Wir zeigen nun die Inklusion $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1\bullet}$. Sei hierzu

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \tag{13}$$

Wegen (13) folgt mittels Teil (c) von Lemma M.24.1.3 dann

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} = \begin{cases} A_2 & \text{, falls } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset & \text{, falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash A_1 \end{cases} \tag{14}$$

Wegen (13) gilt

$$A_2 \in \mathfrak{A}_2 \tag{15}$$

Da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, gilt nach Teil (a) von Satz M.4.1 dann

$$\emptyset \in \mathfrak{A}_2 \tag{16}$$

Wegen (14) bis (16) gilt dann $(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{A}_2$. Somit ist

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{C}_{\omega_1\bullet} \tag{17}$$

Wegen (13) und (17) gilt dann

$$\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1\bullet} \tag{18}$$

v91m
15.11.2010

Da $\mathcal{C}_{\omega_1\bullet}$ wie oben gezeigt wurde eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, folgt aus (18) mittels Teil (b) von Satz M.4.6 nun

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) \subseteq \mathcal{C}_{\omega_1\bullet} \tag{19}$$

Wegen Folgerung M.16.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

Damit ist die erste Bedingung von (a) gezeigt. Analog zeigt man, dass $\mathcal{C}_{\bullet\omega_2}$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist und $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{C}_{\bullet\omega_2}$

(b) Dies folgt mittels (a)

■

Wir betrachten nun zwei nichttriviale Maßräume unter Beachtung von Lemma M.24.1.4 können wir dann die entsprechenden Maße der Schnittmenge bilden. Wir untersuchen nun die hierdurch definierte Funktionen.

Lemma M.24.1.5. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßeräume. Für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sei die Funktion $s_{Q,\mu_2} : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ bzw. $t_{Q,\mu_1} : \Omega_2 \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $\omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1 \bullet})$ bzw. $\omega_2 \mapsto \mu_1(Q_{\bullet\omega})$. So gilt:

(a) Es ist $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und $s_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}$ bzw. $t_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1}$ ist die auf Ω_1 bzw. Ω_2 konstante Funktion mit Wert $\mu_2(\Omega_2)$ bzw. $\mu_1(\Omega_1)$

(b) sei μ_2 bzw. μ_1 endlich. Weiter sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. So gelten

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \backslash Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

sowie

$$s_{\Omega_1 \times \Omega_2 \backslash Q, \mu_2} = s_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} - s_{Q,\mu_2}$$

bzw.

$$t_{\Omega_1 \times \Omega_2 \backslash Q, \mu_1} = t_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_1} - t_{Q,\mu_1}$$

(c) Sei $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. So gelten:

$$\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

sowie

$$s_{\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \mu_2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{Q_n, \mu_2}$$

und

$$t_{\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \mu_1} = \sum_{n \in \mathbb{N}} t_{Q_n, \mu_1}$$

(d) Sei $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$. So gelten

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

sowie

$$s_{A_1 \times A_2, \mu_2} = [\mu_2(A_2)] 1_{A_1}$$

und

$$t_{A_1 \times A_2, \mu_1} = [\mu_1(A_1)] 1_{A_2}$$

Beweis. Sei $Q \in \mathfrak{A}_1$. Wegen Lemma M.24.1.4 gilt für $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$ und $Q_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2$ bzw. $Q_{\bullet \omega_2} \in \mathfrak{A}_1$. Somit sind s_{Q,μ_2} und t_{Q,μ_1} wohldefiniert. Wir zeigen jeweils die ersten Formeln in (a) bis (d). Die zweiten Formeln beweisen sich analog.

(a) Da $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$. Sei $\omega_1 \in \Omega_1$. Wegen Teil (c) von Lemma M.24.1.3 gilt $(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega\bullet} = \Omega_2$. Hieraus folgt $s_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}(\omega_1) = \mu_2((\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega_1 \bullet} = \mu_2(\Omega_2)$. Somit ist $s_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}$ die auf Ω_1 konstante Funktion mit Wert $\mu_2(\Omega_2)$

(b) Da $\mathfrak{A}_1 \times \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist und da $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ist, gilt

$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{1}$$

Wegen (1) gilt nach Teil (a) von Lemma M.24.1.3

$$((\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q)_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2 \backslash Q_{\omega_1 \bullet} \tag{2}$$

Da μ_2 endlich ist, ist μ_2 subtraktiv. Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (2), $Q_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2$ und (a) dann

$$s_{((\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q)} \omega_1 = \mu_2(((\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q)_{\omega_1 \bullet}) \overset{(2)}{=} \mu_2(\Omega_2 \backslash Q_{\omega_1 \bullet})$$

$$\mu_2(\Omega_2) - \mu_2(Q_{\omega_1 \bullet}) \overset{(a)}{=} s_{(\Omega_1 \times \Omega_2), \mu_2}(\omega_1) - s_{Q, \mu_2}(\omega_1) \tag{3}$$

Wegen (1), (3) gilt dann $s_{((\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q)} = s_{(\Omega_1 \times \Omega_2), \mu_2} - s_{Q, \mu_2}$

(c) Da $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $(\Omega_1 \times \Omega_2)$ und $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gilt $\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{4}$$

Wegen (4) gilt nach Teil (b) von Lemma M.24.1.3

$$(\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n)_{\omega_1 \bullet} = \cup_{n \in \mathbb{N}} (Q_n) \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass die folge $((Q_n)_{\omega_1 \bullet})_{n \in \mathbb{N}}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$. So gilt

$$Q_k \cap Q_l = \emptyset \tag{6}$$

Währe nun $(Q_k)_{\omega_1 \bullet} \cap (Q_l)_{\omega_1 \bullet} \neq \emptyset$, so gäbe es ein $\tilde{\omega_2} \in (Q_k)_{\omega_1 \bullet} \cap (Q_l)_{\omega_1 \bullet}$ Hieraus ergäbe sich aber $(\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q_k \cap Q_l$, was im Widerspruch zu (6) stünde. Somit ist $(Q_k)_{\omega_1 \bullet} \cap (Q_l)_{\omega_1 \bullet} = \emptyset$ Somit ist $(Q_n)_{\omega_1 \bullet})_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt bei Beachtung von (5) und der σ-Additivität von μ_2

$$s_{\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \mu_2}(\omega_1) = \mu_2((\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n)_{\omega_1 \bullet}) \overset{(5)}{=} \mu_2(\cup_{n \in \mathbb{N}} (Q_n)_{\omega_1 \bullet})$$

$$\sum_{n \in \mathbb{N}} \mu_2((Q_n)_{\omega_1 \bullet}) = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{Q_n, \mu_2} \tag{7}$$

Aus (4) und (7) folgt

$$s_{\cup_{n \in \mathbb{N}} Q_n, \mu_2} = \sum_{n \in \mathbb{N}} s_{Q_n, \mu_2}$$

(d) Wegen Folgerung M.16.1 gilt $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Hieraus golt $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{8}$$

wegen Teil (c) von Lemma M.24.1.3 gilt

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} A_2, & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ \emptyset, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash A_1 \end{cases}$$

Hieraus folgt dann

$$s_{A_1 \times A_2, \mu_2}(\omega_1) = \mu_2((\mathbb{A}_1 \times A_2)_{\omega_1 \bullet}) =$$

$$\begin{cases} \mu_2(A_2), & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ \mu_2(\emptyset), & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash A_1 \end{cases} = \begin{cases} \mu_2(A_2), & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ 0 \end{cases}$$

$$= [\mu_2(A_2)] 1_{A_1}(\omega_1) \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt nun $s_{A_1 \times A_2, \mu_2} = [\mu_2(A_2)] 1_{A_n}$

■

Wir wenden uns nun dem Nachweis der Existenz eines Produktmaßes zweier Maße zu. Hierzu benötigen wir noch eins kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.24.1.2. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. So ist $\mathfrak{A}$ ein Halbring in Ω **Beweis.** Wegen Teil (a) von Satz M.4.1 gilt

$$\emptyset \in \mathfrak{A} \tag{1}$$

Sei

$$\{A, B\} \subseteq \mathfrak{A} \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil (b) bzw. (c) von Satz M.4.1

$$A \cap B \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

bzw.

$$A \backslash B \in \mathfrak{A} \tag{4}$$

Wegen (1)-(4) liefert Bemerkung M.1.2, das $\mathfrak{A}$ ein Halbring in Ω ist. ■

Bemerkung M.24.1.3. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. So ist $\boxtimes_{j=1} n \mathfrak{A}_j$ ein Haalbring in $\times_{j=1} n \Omega_j$. **Beweis.** Wegen Bemerkung M.24.1.2 ist für $j \in \{1, ..., n\}$ $\mathfrak{A}_j$ ein Halbring in Ω_j. Hieraus ergibt sich mittels Satz M.1.4 die Behauptung. ■

Lemma M.24.1.6. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume. Weiter sei $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes f A_2$. So ist $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und falls die Abbildung $s_{A_1 \times A_2, \mu_2}$ bzw. $t_{A_1 \times A_2, \mu_1}$ wie in Lemma M.24.1.5 erklärt sind. So gelten $s_{A_1 \times A_2, \mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $\int_{\Omega_1} s_{A_1 \times A_2, \mu_2} d\mu_1 = [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)]$ bzw. $t_{A_1 \times A_2, \mu_1} \in cE^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $\int_{\Omega_2} t_{A_1 \times A_2, \mu_1} d\mu_2 = [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)]$ **Beweis.** Wegen Teil (d) von Lemma M.24.1.5 gelten $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und

$$s_{A_1 \times A_2, \mu_2} = [\mu_2(A_2)] 1_{A_1} \tag{1}$$

Wegen $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ liefern Bemerkung M.18.3 bzw. M.18.8

$$1_{A_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{2}$$

Wegen $\mu_2(A_2) \in [0, +\infty]$ und (2) folgen mittels Teil (a) von Satz M.21.3.2

$$[\mu_2(A_2)] 1_{A_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{3}$$

und

$$\int_{\Omega_1} [\mu_2(A_2)] 1_{A_1} d\mu_1 = [\mu_2(A_2)] \int_{\Omega_1} 1_{A_1} d\mu_1 \tag{4}$$

Wegen $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ liefert Bemerkung M.21.2.1

$$\int_{\Omega_1} 1_{A_1} d\mu_1 = \mu_1(A_1) \tag{5}$$

Wegen (1) und (3) gilt

$$s_{A_1 \times A_2, \mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \mathfrak{A}_1) \tag{6}$$

Unter Verwendung von (1), (4) und (5) folgt

$$\int_{\Omega_1} s_{A_1 \times A_2, \mu_2} d\mu_1 \overset{(1)(4)}{=} \mu_2(A_2) \int_{\Omega_1} 1_{A_1} d\mu_1 = \mu_1(A_1)$$

$$\overset{(5)}{=} [\mu_2(A_2)][\mu_1(A_1)] = [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)] \tag{7}$$

Wegen (6) und (7) ist der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil läßt sich analog zeigen. ■

Satz M.24.1.6. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume. So gilt

(a) Sei $\tilde{\pi} : \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $A_1 \times A_2 \mapsto [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)]$. So ist $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ ein Halbring in $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $\tilde{\pi}$ ein Prämaß auf $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$.

(b) Unter Beachtung von (a) bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ die Caratheodory- Fortsetzung von $\tilde{\pi}$. So ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2.

Beweis.

(a) Wegen Bemerkung M.24.1.3 ist $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ ein Halbring in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Aufgrund der Wahl von μ_1 bzw. μ_2 gilt $\mu_1(\emptyset) = 0$ bzw $\mu_2(\emptyset) = 0$. Hieraus folgt

$$\tilde{\pi}(\emptyset) = \tilde{\pi}(\emptyset \times \emptyset) = \mu_1(\emptyset)\mu_2(\emptyset) = 0 \tag{1}$$

Wir zeigen nun die σ-Additivität von $\tilde{\pi}$. Sei Hierzu $(A_{1,n} \times A_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $A_{1,n} \times A_{2,n} \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$

(II) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $(A_{1,k} \times A_{2,k}) \cap (A_{1,l} \times A_{2,l}) = \emptyset$

(III) Es gilt $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_{1,n} \times A_{2,n}) \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$

Wegen (III) gibt es ein

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \tag{2}$$

mit

$$\cup_{n\in\mathbb{N}} (A_{1,n} \times A_{2,n}) = A_1 \times A_2 \tag{3}$$

Wegen (III) , (3) und (2) gilt dann

$$\tilde{\pi}(\cup_{n\in\mathbb{N}} A_{1,n} \times A_{2,n}) \overset{(3)}{=} \tilde{\pi}(A_1 \times A_2) \tag{4}$$

Wegen (2) gelten nach Lemma M.24.1.6dann

$$s_{A_1\times A_2,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{5}$$

sowie

$$\tilde{\pi}(A_1 \times A_2) = \int_{\Omega_1} s_{A_1\times A_2,\mu_2} d\mu_1 \tag{6}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{7}$$

Wegen (6) und Lemma (I)? gelten nach Lemma M.24.1.6 dann

$$s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{8}$$

sowie

$$\tilde{\pi}(A_{1,n} \times A_{2,n}) = \int_{\Omega_1} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} d\mu_1 \tag{9}$$

Wegen (7) und (8) liefert Folgerung M.21.3.4 (die auf den Satz von der monotonen Konvergenz basiert)

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{10}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1} (\sum_{n\in\mathbb{N}} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2}) d\mu_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} d\mu_1 \tag{11}$$

Wegen $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, (I) und (II) folgen mittels Teil (c) von Lemma M.24.1.5 weiterhin $\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_{1,n} \times A_{2,n}) \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und

$$s_{\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_{1,n}\times A_{2,n}),\mu_2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \tag{12}$$

Unter Verwendung von (4), (6), (3), (12), (11), (7) und (9) folgt

$$\begin{aligned}\tilde{\pi}(\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_{1,n} \times A_{2,n})) &\overset{(4)}{=} \tilde{\pi}(A_1 \times A_2) \overset{(6)}{=} \int_{\Omega_1} s_{A_1\times A_2,\mu_2} d\mu_1 \\ &\overset{(3)}{=} \int_{\Omega_1} s_{\cup_{n\in\mathbb{N}}(A_{1,n}\times A_{2,n}),\mu_2} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} d\mu_1 \\ &\overset{(11)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} s_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} d\mu_1 \overset{(7),(9)}{=} \sum_{n\in\mathbb{N}} \tilde{\pi}(A_{1,n} \times A_{2,n}) \end{aligned} \tag{13}$$

Wegen (1), (I)-(III) , (13) ist $\tilde{\pi}$ dann ein Prämaß auf $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$

(b) Wegen Folgerung M.16.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_1}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{14}$$

Wegen (a), Definition M.16.1, Teil (c) von Satz M.16.5 und (14) ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ für das

$$Rstr._{\mathfrak{A}_1\boxtimes\mathfrak{A}_2}\mu_1 \otimes \mu_2 = \tilde{\pi}$$

erfüllt ist. Hieraus folgt bei Beachtung der Definition von $\tilde{\pi}$ sowie Definition M.24.1.1, dass $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2 ist.

■

Satz M.24.1.6 führt auf folgende Begriffsbildung

Definition M.24.1.3. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichtstriviale Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das in Teil (b) von satz M.24.1.6 konstruierte Produktmaß von μ_1 und μ_2. So heißt $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Caratheodorysche Produktmaß von μ_1 und μ_2.

v92m
16.11.2010

Nachdem wir nun die Existenz eines Produktmaßes zweier Maße nachgewiesen haben, richten wir jetzt unsere Aufmerksamkeit auf die eingestellte Konstruktion eines Produktmaßes nach dem Cavalierschen Prinzip. Wichtig für unser weiteres Vorgehen ist die Borel-Meßbarkeit der beiden in Lemma M.24.1.5 definierten Funktionen s_{a,μ_2} und t_{a,μ_1}. Hierbei wird sich herausstellen, dass wir die gewünschte Meßbarkeitsaussage nicht im allg. Fall nachweisen können. Allerdings werden sich entsprechende σ-Endlichkeitsvorraussetzungen als hinreichend erweisen. WIr stellen noch eine kleine Beobachtung voran.

Bemerkung M.24.1.4. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann gilt:

(a) Für $g \in \{1, ..., n\}$ seien $A_j \in \mathcal{P}(\Omega_j)$ und $B_j \in \mathcal{P}(\Omega_j)$. Dann gilt

$$(\times_{j=1}^n A_j) \cap (\times_{j=1}^n B_j) = (\times_{j=1}^n A_j \cap B_j)$$

(b) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei α_j ein $\cap$-stabilies System von Teilmengen von Ω'_j. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^n \alpha_j$ ein $\cap$- stabilies System von Teilmengen von $\times_{j=1}^n \Omega_j$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus der Definition des kartesischen Produkts.

(b) Dies folgt aus (a).

■

Bemerkung M.24.1.5. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttriv. meß. Räumen. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^n$
$f A_j$ ein $\cap$- stabilies System System von Teilmengen von $\times_{j=1}^n \Omega_j$.
Beweis. Wegen Teil (b) von Satz M.4.1 ist für $j \in \{1, ..., n\}$ um $\mathfrak{A}_j$ ein $\cap$- stabilies System von Teilmengen von $\mathfrak{A}_j$. Hieraus folgt mittels Teil (b) von Bemerkung M.24.1.4 die Behauptung ■

Satz M.24.1.7. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriv. meß. Maßräume. Weiter Sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ Dann gilt

(a) Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor. Weiter sei die Abb. $s_{Q,\mu_2} : \Omega \to [0, \infty]$ definiert gemäß $\omega_1 \mapsto \mu_2(Q_{\omega_1} \cdot)$. Dann gilt

$$s_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$$

(b) Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor. Weiter sei die Abb. $t_{Q,\mu_1} : \Omega \to [0, \infty]$ def gemäß $\omega_1 \mapsto \mu_1(Q_{\omega_2} \cdot)$. Dann gilt

$$t_{Q,\mu_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$$

Beweis.

(a) Wir betrachten zunächst den Fall

$$\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{1}$$

Es sei

$$\mathfrak{D}_{\mu_2} := \{D \in \mathfrak{A}_1 \bigotimes \mathfrak{A}_2 : s_{D,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)\} \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{D}_{\mu_2}$ ein Dynkin-System $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, welches $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ umfasst. Sei

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \tag{3}$$

Wegen (3) nach Lemma M.24.1.6 dann

$$s_{A_1 \times A_2, \mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{4}$$

Wegen $\subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ folgt aus (3) dann $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ Hieraus folgt in Verbindung mit (2) und (4) nun
$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{5}$$
Aus (3) und (5) folgt dann
$$\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{6}$$
Dann $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ eine σ- Algebra in Ω_1 bzw. Ω_2 ist, gilt $\Omega_1 \in \mathfrak{A}_1$ bzw. $\Omega_2 \in \mathfrak{A}_2$ Somit ist
$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \tag{7}$$
Aus (6) und (7) folgt dann
$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{D}_{mu_2} \tag{8}$$
Sei nun
$$D \in \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{9}$$
Wegen (9) und (2) gilt dann
$$s_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{10}$$
Wegen (8) und (2) gilt
$$s_{\Omega_1 \times \Omega_2,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{11}$$
Wegen (1) gilt nach Teil (b) von Lemma M.24.1.5 dann
$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus D \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{12}$$
sowie
$$s_{(\Omega_1 \times \Omega_2)\setminus D,\mu_2} = s_{(\Omega_1 \times \Omega_2),\mu_2} - s_{D,\mu_2} \tag{13}$$
Nach Definition von $\mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ gilt
$$\mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) = M(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}) \cap A(\Omega, [0, +\infty]) \tag{14}$$
Aus (10), (11) und (14) folgt dann
$$\{s_{D,\mu_2}, s_{\Omega_1 \times \Omega_2,\mu_2}\} \subseteq M(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}) \tag{15}$$
Wegen (15) und der Wohldefiniertheit von $s_{(\Omega_1 \times \Omega_2),\mu_2} - s_{D,\mu_2}$ folgt mittels Teil (b) von Satz M.17.6 dann $s_{(\Omega_1 \times \Omega_2),\mu_2} - s_{D,\mu_2} \in M(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}})$ Hieruas folgt wegen (13)
$$s_{(\Omega_1 \times \Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in M(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}) \tag{16}$$
Nach Konstruktion gilt
$$s_{(\Omega_1 \times \Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in A(\Omega, [0, +\infty]) \tag{17}$$
Aus (14), (16) und (17) folgt nun
$$s_{(\Omega_1 \times \Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mu_1) \tag{18}$$
Wegen (2), (12) und (18) gilt dann
$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus D \in \mathfrak{D}_{mu_2} \tag{19}$$
Sei nun $(D_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}((\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit folg. Eigenschaften:

(I) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $D_n \in \mathfrak{D}_{\mu_2}$

(II) $\forall k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gitl $D_k \cap D_l = \emptyset$ Wegen (I) und (2) gelten für

$$n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

dann

$$D_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{21}$$

und

$$s_{D_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{22}$$

Wegen (20),(21), (23) liefert Teil (e) von Lemma M.24.1.5 weiterhin

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{23}$$

und

$$s_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n,\mu_2} = \sum_{n\in\mathbb{N}} s_{D_n,\mu_2} \tag{24}$$

Wegen (20),(22), (25) ergibt sich mittels Lemma M.18.5 dann

$$s_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} D_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{25}$$

Wegen (2),(23), (25) gilt dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} D_n \in \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{26}$$

Wegen (8),(9), (19), (26), (I), (II) ist $\mathfrak{D}_{\mu_2}$ dann ein Dynkin-System in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Kombiniert man dies mit (6), so ergibt sich mittels Teil (b) von Satz M.9.5 dann

$$\mathfrak{D}_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{27}$$

Die $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ wegen Bemerkung M.24.1.5 ein $\cap$-stabiles System von Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, folgt mittels Satz dann

$$\mathfrak{D}_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) = \sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) \tag{28}$$

Wegen Folgerung M.16.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{29}$$

Unter Beachtung von (28),(29), (27) folgt nun

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2} \tag{30}$$

Wegen (30),(2) gilt für

$$Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{31}$$

dann

$$s_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{32}$$

Wegen (1),(31), (32) ist für den Fall eines endlichen Maßes μ_2 dann alles gezeigt. Sei nun μ_2 lediglich σ-endlich. Unter Beachtung von $\Omega_2 \neq \emptyset$ erbringt Lemma M.24.1.2 dann die Existenz einer Folge $(\mathbb{B}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{P}(\Omega_2)$ mit folgenden Eigenschaften

(III) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{B}_n \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{\emptyset\}$

(IV) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbb{B}_n \subseteq \mathbb{B}_{n+1}$

(V) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu_2(\mathbb{B}_n) \in [0, +\infty)$

(VI) Es ist $\times_{n\in\mathbb{N}} B_n = \Omega_2$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{33}$$

Es sei $\mu_{2,n} : \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty]$ def gemäß

$$A_2 \mapsto \mu_2(A_2 \cap B_n) \tag{34}$$

Da μ_2 ein Maß mit $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ist, folgt aus (III), (33), (34) mittels Teil (a) von Satz M.6.4. Das $\mu_{2,n}$ in Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ist, für dass wegen Teil (b) von Satz M.6.4 zu dem $\mu_{2,n}(\Omega_2) = \mu_2(B_n)$ erfüllt ist. Hieraus folgt bei Beachtung von (V) dann

$$\mu_{2,n} \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{35}$$

Sei

$$Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{36}$$

Unter Beachtung von (35), (36) folgt aus soeben bewiesenen, dann

$$s_{Q,\mu_{2,n}} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{37}$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{38}$$

Unter beachtung von (38), (34) folgt nun

$$s_{Q,\mu_{2,n}} \in (\omega_1) = \mu_{2,n}(Q_{\omega_1\bullet}) = \mu_2(Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n) \tag{39}$$

Wegen (33) und (IV) gilt

$$(Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n) \subseteq (Q_{\omega_1\bullet} \cap B_{n+1}) \tag{40}$$

Unter Beachtung von (VI) folgt

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n) = Q_{\omega_1\bullet} \cap (\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = Q_{\omega_1\bullet} \cap \Omega_2 = Q_{\omega_1\bullet} \tag{41}$$

Unter Beachtung von (33), (40) der Unterhalbstetigkeit von μ_2 sowie von (41) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n) = \mu_2(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} (Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n)) = \mu_2(Q_{\omega_1\bullet}) \tag{42}$$

Unter Verwendung von (39) und (42) ergibt sich dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_{Q,\mu_{2,n}}(\omega_1) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_2(Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n) = \mu_2(Q_{\omega_1\bullet}) = s_{Q,\mu_{2,n}}(\omega_1) \tag{43}$$

Wegen (38) und (43) ist dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_{Q,\mu_{2,n}} = s_{Q,\mu_2} \tag{44}$$

Wegen (31),(37), (44) liefert Lemma M.18.5 dann

$$s_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{45}$$

Wegen (36) und (45) ist dann (a) bewiesen

(b) Dies läßt sich analog zu (a) zeigen

■

Wir sind nun in der Lage, im Fall zweier nichtrivialer Maßräume, von denen mindestens einer σ - endlich ist, zwei auf der Grundlage des Cavalierschen Prinzips vorgenommene Konstruktion von Produktmaßen vorzunehmen

Satz M.24.1.8. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichtrivialer Maßräume. Dann gilt

(a) Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor. Weiter sei $\pi_{1\bullet} : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty]$ für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ unter Verwendung der in Teil (a) von Satz M.24.1.7 eingeführten Abbildung S_{Q,μ_2} definiert gemäß $Q \mapsto \int_{\Omega_1} s_{Q,\mu_2} d\mu_1$ Dann ist $\pi_{1\bullet}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2

(b) Es liege σ- Endlichkeit von μ_1 vor. Weiter sei $\pi_{\bullet 2} : \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty]$ für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ unter Verwendung der in Teil (a) von Satz M.24.1.7 eingeführten Abb. T_{Q,μ_1} def. gemäß $Q \mapsto \int_{\Omega_2} t_{Q,\mu_1} d\mu_2$ Dann ist $\pi_{\bullet 2}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2

Beweis.

(a) Wegen Teil (a) von Satz M.24.1.7 gilt für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ dann $s_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ Somit ist die Abb $\pi_{1\bullet}$ wohldefiniert. Wir zeigen zunächst, daß $\pi_{1\bullet}$ ein Maß auf $(\omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ ist. Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{1}$$

Dann ist $\emptyset_{\omega_1\bullet} = \emptyset$, also

$$S_{\emptyset,\mu_2}(\omega_1) = \mu_2(\emptyset_{\omega_1\bullet}) = \mu_2(\emptyset) = 0 = 1_\emptyset(\omega_1) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$S_{\emptyset,\mu_2} = 1_\emptyset \tag{3}$$

Unter Verwendung von (3) und Beispiel M.21.2.1 folgt dann

$$\pi_{1\bullet}(\emptyset) = \int_{\Omega_1} s_{Q,\mu_2} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} 1_\emptyset d\mu_1 = 0 \tag{4}$$

Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit folg. Eigenschaften

(I) $\forall n \in \mathbb{N}$ gilt $Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$

(II) $\forall k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $Q_k \cap Q_l = \emptyset$

Wegen (I) und (II) ergeben sich mittels Teil (c) von Lemma M.24.1.5 dann

$$\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{5}$$

und

$$S_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n,\mu_2} = \sum S_{Q_n,\mu_2} \tag{6}$$

Aus (5) und der Definition von π_n folgt

$$\pi_{1\bullet}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n) = \int_{\Omega_1} S_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n,\mu_2} d\mu_1 \tag{7}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{8}$$

Wegen (8) und (I) folgt mittels Teil (a) von Satz M.24.1.7 dann

$$s_{Q_1,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{9}$$

Wegen (8), (I) und der Defintion von $\pi_{1\bullet}$ gilt

$$\pi_{1\bullet}(Q_n) = \int_{\Omega_1} s_{Q_n,\mu_2} d\mu_1 \tag{10}$$

Wegen (8) und (9) liefert Folgerung M.21.3.4 dann $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}} s_{Q_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie

$$\int_{\Omega_1} (\sum_{n\in\mathbb{N}} s_{Q_n,\mu_2}) d\mu_1 = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} s_{Q_n,\mu_2} d\mu_1 \tag{11}$$

Unter Verwendung von (6), (8) (7), (10), (11) folgt nun

$$\pi_{1\bullet}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} Q_n) = \int_{\Omega_1} S_{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}} Q_n,\mu_2} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} (\sum_{n\in\mathbb{N}} s_{Q_n,\mu_2}) d\mu_1$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} s_{Q_n,\mu_2} d\mu_1 = \sum \pi_{1\bullet}(Q_n) \tag{12}$$

Wegen (4), (I), (II) und (1) gilt dann

$$\pi_{1\bullet} \in \mathcal{M}_+(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \tag{13}$$

Wir zeigen nun noch, dass $\pi_{1\bullet}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2 ist. Sei

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{14}$$

Wegen (14) folgen mittels Lemma M.24.1.6 dann $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und

$$\pi_{1\bullet}(A_1 \times A_2) = \int_{\Omega_1)} s_{A_1\times A_2,\mu_2} d\mu_1 = [\mu_1(A_1)][\mu_2(A_2)] \tag{15}$$

Wegen (13), (15) ist $\pi_{1\bullet}$ dann ein Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann ist (a) bewiesen

(b) Dies zeigt man analog zu (a)

■

v93m 22.11.2010

Satz M.24.1.8 führt auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.24.1.4. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttrivialer Maßräume. Es lieg σ- Endlichkeit von μ_2 bzw. μ_1 vor. Dann heißt das in Satz M.24.1.8 konstruierte Produktmaß $\pi_{1\bullet}$ bzw. $\pi_{\bullet 2}$ von μ_1 bzw. μ_2 das erste bzw. zweite Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2.

Satz M.24.1.9. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ jeweils nichttriviale σ-endliche Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Caratheodorysche Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ das einzige Produktmaß von μ_1 und μ_2.

(b) Es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ bzw. $\pi_{\bullet 2}$ das erste bzw. zweite Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann gelten $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{1\bullet}$ und $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{\bullet 2}$.

(c) Das Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist σ-endliche

Beweis.

(a) Wegen Definition M.24.1.3 und Satz M.24.1.6 ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2. Aufgrund von σ-Endlichkeit von μ_1 und μ_2 ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ wegen Satz M.24.1.2 dann das einzige Produktmaß von μ_1 und μ_2.

(b) Dies folgt sogleich durch Kombination von (a) mit Satz M.24.1.8.

(c) Dies folgt sogleich aus Satz M.24.1.3.

■

Wir wenden uns nun dem Cavalierischen Prinzip zur Bestimmung des Volumens von Körpern zu. Dieses wurde 1629 von Bonaventura Cavalieri, ein Schüler Galileos formuliert.

Cavalierisches Prinzip:
Zwei Körper, die zwischen zwei parallelen Ebenen liegen, haben gleiches Volumen, wenn sie in gleichen Abständen von einer dieser Ebenen flächegleichen Querschnitte besitzen.

Wir betrachten nun eine abstrakte Version des Cavalierischen Prinzips.

Satz M.24.1.10. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ jeweils nichttriviale σ-endliche Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Caratheodorysche Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sein die Mengen $Q, R \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ so beschaffen, dass mit den Bezeichnungen von Lemma M.24.1.5 eine der Beziehungen $\{s_{Q,\mu_2} \neq s_{R,\mu_2}\} \in \mathcal{N}_{\mu_1}, (\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(R)$.

Beweis. Wegen Teil (a) bzw (b) vo Satz M.24.1.7 gilt

$$\{s_{Q,\mu_2}, s_{R,\mu_2}\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{1}$$

bzw

$$\{t_{Q,\mu_2}, t_{R,\mu_2}\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{2}$$

Es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ bzw. $\pi_{\bullet 2}$ das erste bzw zweite Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von Teil (b) von Satz M.24.1.9 sowie der Defintion von $\pi_{1\bullet}$ bzw $\pi_{\bullet 2}$ folgt dann:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = \pi_{1\bullet}(Q) = \int\limits_{\Omega_1} s_{Q,\mu_2}\, d\mu_1 \tag{3}$$

und

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(R) = \pi_{1\bullet}(R) = \int\limits_{\Omega_1} s_{R,\mu_2}\, d\mu_1 \tag{4}$$

bzw.

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = \pi_{\bullet 2}(Q) = \int\limits_{\Omega_2} t_{Q,\mu_1}\, d\mu_2 \tag{5}$$

und

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(R) = \pi_{\bullet 2}(R) = \int\limits_{\Omega_2} t_{R,\mu_1}\, d\mu_2 \tag{6}$$

Falls

$$\{s_{Q,\mu_2} \neq s_{R,\mu_2}\} \in \mathcal{N}_{\mu_1} bzw. \{t_{Q,\mu_1} \neq t_{R,\mu_1}\} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$$

erfüllt ist, so folgt wegen (1) bzw (2) mittels Teil (a) von Satz M.21.6.3 dann

$$\int\limits_{\Omega_1} s_{Q,\mu_2}\, d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} s_{R,\mu_2}\, d\mu_1$$

bzw.

$$\int\limits_{\Omega_2} t_{Q,\mu_1}\, d\mu_2 = \int\limits_{\Omega_2} t_{R,\mu_1}\, d\mu_2$$

Also wegen (3) und (4) bzw (5) und (6) jeweils

$$(\mu_1 \otimes \mu_2)(Q) = (\mu_1 \otimes \mu_2)(R)$$

■

Unsere nachfolgenden Überlegungen sind nun auf die Konstruktion eines Produktmaßes einer beliebigen endlichen Folge von Maßen orientiert.

Bemerkung M.24.1.6. Seinen $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie $(\Omega_j)_{j=1}^{n_1+n_2}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann ist die Abbildung:

$$R_{n_1,n_2} : (\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j) \times (\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j) \to \times_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j,$$

$$((\omega_1, ..., \omega_{n_1}), (\omega_{n_1+1}, ..., \omega_{n_1+n_2})) \mapsto (\omega_1, ..., \omega_{n_1}, \omega_{n_1+1}, ..., \omega_{n_1+n_2})$$

definiert ist, eine Bijektion zwischen $(\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j) \times (\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j)$ und $\times_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j$

Vereinbarung 1: Seine $n_1, n_1 \in \mathbb{N}$ sowie $(\Omega_j)_{j=1}^{n_1+n_2}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann vereinbaren wir, künftigt via der in Bemerkung M.24.1.6 eingeführten Bijektion R_{n_1,n_2} eine Identifizierung zwischen den Mengen $(\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j) \times (\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j)$ und $\times_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j$ vorzunehmen.

Vereinbarung 2: Sei $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Dann setzen wir

$$\boxtimes_{j=1}^{1}\mathfrak{A}_j := \mathfrak{A}_1 \text{ und } \otimes_{j=1}^{1}\mathfrak{A}_j := \mathfrak{A}_1.$$

Bemerkung M.24.1.7. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^{n}$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger $\otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ und falls für $k \in \mathbb{N}$ die Setzung $E_k := \times_{j=1}^{n}\Omega_j$ angenommen wird, so ist $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ für welche $\cup_{k\in\mathbb{N}}E_k = \times_{j=1}^{n}\Omega_j$ erfüllt ist **Beweis.** Im Fall $n = 1$ folgt die Behauptung sogleich und aus Teil (b) von Satz M.4.1 und Teil (d) von Satz M.4.6. Im Fall $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ist $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ wegen Folgerung M.16.1 ein Erzeuger von $\otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$, welcher wegen Bemerkung M.24.1.5 zudem $\cap$-stabil ist Die Behauptung über $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind offensichtlich. ■

Das nächste Resultat zeigt, dass die Bildung der Produkt-σ-Algebra in natürlicher Weise an die oben getroffenen Vereinbarungen angepasst ist.

Lemma M.24.1.7. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^{n_1+n_2}$ eine Folge von nichttrivialen meßbaren Räumen. Dann gilt:

$$(\otimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j) \otimes (\otimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j) = \otimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Wegen Bemerkung M.24.1.7 gelten

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j}(\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j) = \otimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j \tag{1}$$

$$\sigma_{\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j}(\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j) = \otimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j \tag{2}$$

und

$$\sigma_{\times_{j=n_1}^{n_1+n_2}\Omega_j}(\boxtimes_{j=n_1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j) = \otimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j \tag{3}$$

Wegen Bemerkung M.24.1.7 liefert Satz M.16.2 zudem

$$\begin{aligned}&[\sigma_{\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j}(\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j)] \otimes [\sigma_{\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j}(\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j)] \\ &= \sigma_{(\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j)\times(\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j)}([\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j] \boxtimes [\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j])\end{aligned} \tag{4}$$

Aufgrund unserer Vereinbarungen gilt nun

$$(\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j) \times (\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j) = \times_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j \tag{5}$$

sowie

$$[\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j] \boxtimes [\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j] = \boxtimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j \tag{6}$$

Unter Verwendung von (1),(2), (4), (5) und (6) folgt dann

$$(\otimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j) \otimes (\otimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j) = \otimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j$$

■

Bemerkung M.24.1.8. Seien $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^3$ nichttriviale meßbare Räume. Dann gilt

$$(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \otimes \mathfrak{A}_3 = \mathfrak{A}_1 \otimes (\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}_3).$$

Beweis. Wegen Lemma M.24.1.7 gelten $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \otimes \mathfrak{A}_3 = \otimes_{j=1}^3\mathfrak{A}_j = \mathfrak{A}_1 \otimes (\mathfrak{A}_2 \otimes \mathfrak{A}_3)$. ■

Beispiel M.24.1.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von nichtleeren höchstens abzählbaren Mengen. Dann gilt*

$$\otimes_{j=1}^n\mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}(\times_{j=1}^n\Omega_j).$$

Beweis. *Wir führen vollständige Induktion über n durch. Für $n = 2$ folgt die Behauptung aus Beispiel M.16.1 Sei nun $n \in \{3, 4...\}$ und sei die Behauptung für $s \in \{2, ..., n-1\}$ bereits gezeigt. Dann gilt also insbesondere*

$$\otimes_{j=1}^{n-1}\mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}(\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j) \tag{1}$$

Als kartesisches Produkt höchstens abzählbaren Mengen sind $\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j$ höchstens abzählbar. Hieraus folgt mittels Beispiel M.16.1 dann

$$\mathfrak{P}([\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j] \times \Omega_n) = [\mathfrak{P}(\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j)] \otimes \mathfrak{P}(\Omega_n) \tag{2}$$

Aufgrund unserer Vereinbarung gilt

$$[\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j] \times \Omega_n = \times_{j=1}^n\Omega_j \tag{3}$$

Wegen Lemma M.24.1.7 gilt

$$[\otimes_{j=1}^{n-1}\mathfrak{P}(\Omega_j)] \otimes [\mathfrak{P}(\Omega_n)] = \otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{P}(\Omega_j) \tag{4}$$

Unter Verwendung von (4),(1) *und* (3) *folgt dann*

$$\otimes_{j=1}^{n}\mathfrak{P}(\Omega_j) = [\otimes_{j=1}^{n-1}\mathfrak{P}(\Omega_j)] \otimes [\mathfrak{P}(\Omega_n)] = [\mathfrak{P}(\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j)] \otimes [\mathfrak{P}(\Omega_n)]$$

$$= \mathfrak{P}([\times_{j=1}^{n-1}\Omega_j] \times \Omega_n) = \mathfrak{P}(\times_{j=1}^{n}\Omega_j)$$

■

Satz M.24.1.11. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Dann gilt:

(a) Sei $\tilde{\pi}_n : \boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \to [0, +\infty], \times_{j=1}^n A_j \mapsto \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j)$. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^n \Omega_j$ und $\tilde{\pi}_n$ ein Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$.

(b) Es bezeichne $\otimes_{j=1}^n \mu_j$ die Caratheodorysche-Fortsetzung von $\tilde{\pi}_n$. Dann ist $\otimes_{j=1}^n \mu_j$ ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$.

Beweis.

(a) Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n durch. Für $n = 2$ folgt aus (a) aus Teil (a) von Satz M.24.1.6. Sei nun $n > 2$ und sei die Behauptung von (a) für $n \leq n - 1$ gezeigt. Dann ist also $\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j$ und $\tilde{\pi}_{n-1}$ ein Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$. Sei $\eta_n : (\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j) \boxtimes \mathfrak{A}_n \to [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$(\times_{j=1}^{n-1} A_j) \times A_n \mapsto [\tilde{\pi}_{n-1}(\times_{j=1}^{n-1} A_j)][\mu_n(A_n)] \tag{1}$$

Nach Teil (a) von Satz M.24.1.6 ist dann $(\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j) \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j \times \Omega_n$ und η_n ein Prämaß auf $(\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j) \boxtimes \mathfrak{A}_n$ Aufgrund unserer Vereinbarungen gelten

$$\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j \times \Omega_n = \times_{j=1}^{n} \Omega_j \tag{2}$$

und

$$(\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j) \boxtimes \mathfrak{A}_n = \boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \tag{3}$$

sowie für

$$\times_{j=1}^{n} A_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \tag{4}$$

dann

$$(\times_{j=1}^{n-1} A_j) \times A_n \in (\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j) \boxtimes \mathfrak{A}_n \tag{5}$$

und unter Beachtung von (1) weiterhin

$$\eta_n[(\times_{j=1}^{n-1} A_j) \times A_n] = [\tilde{\pi}_{n-1}(\times_{j=1}^{n-1} A_j)][\mu_n(An)]$$

$$= [\prod_{j=1}^{n-1} \mu(A_j)][\mu_n(An)] = \prod_{j=1}^{n} \mu(A_j) = \tilde{\pi}_n(\times_{j=1}^n A_n) \tag{6}$$

Wegen (2)-(6) ist dann $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^n \Omega_j$ und $\tilde{\pi}_n$ am Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$.

(b) Dies zeigt man analog zum Beweis von Teil (b) von Satz M.24.1.6.

■

Satz M.24.1.11 führt uns auf folgende Begriffsbildung. v94m 23.11.2010

Definition M.24.1.5. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ das in Teil (b) von Satz M.24.1.11 eingeführte Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann heißt $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ das Carathéodorische Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$.

Das nachfolgende Resultat beschreibt die Ausnahmestellung des Carathéodorischen Produktmaßes in der Menge aller Produktmaße.

Satz M.24.1.12. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ das Carathéodorische Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Weiter sei π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann gilt:

$$\pi \leq \bigotimes_{j=1}^n \mu_j$$

Beweis. Wegen Folgerung M.16.1 gilt

$$\sigma_{\times_{j=1}^n \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \tag{1}$$

Sei $\tilde{\pi_n} : \boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \to [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$\times_{j=1}^n A_j \mapsto \prod_{j=1}^n \mu_j(A_j) \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil (a) von Satz M.24.1.11 dann:

(I) Es ist $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^n \Omega_j$ und $\tilde{\pi_n}$ ein Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$.

(II) Aufgrund der Wahl von π gelten

$$\pi \in \mathcal{M}_+ \left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \right) \tag{3}$$

sowie

$$Rstr._{\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j} \pi = \tilde{\pi}_n \tag{4}$$

Da nun $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ die Carathéodory-Fortsetzung von $\tilde{\pi}_n$ ist, folgt bei Beachtung von (1) bis (4) mittels Satz M.13.6 dann $\pi \leq \bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ ■

Satz M.24.1.13. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ das Carathéodorische Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann gilt:

(a) Es gibt genau ein Produktmaß π von $(\mu_j)_{j=1}^n$, nämlich $\pi = \bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$.

(b) Das Maß $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ ist σ-endlich.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Teil (b) von Satz M.24.1.11 und Satz M.24.1.2.

(b) Dies folgt aus Satz M.24.1.3.

■

Satz M.24.1.14. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$ das Carathéodorische Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Dann gilt:

(a) Es gibt genau ein Produktmaß π von $(\mu_j)_{j=1}^n$, nämlich $\pi = \bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j$.

(b) Es ist $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^b \left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \right)$.

(c) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann ist $\bigotimes\limits_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^1 \left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j \right)$.

Beweis.

(a) Dies ergibt sich aus Teil (b) von Satz M.24.1.11 und Folgerung M.24.1.1.

(b)-(c) Die Behauptungen von (b) bzw. (c) folgt sogleich aus Teil (c) bzw. (d) von Bemerkung M.24.1.1.

■

Die Sätze M.24.1.13 und M.24.1.14 führen uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.24.1.6. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es liege eine der beiden folgenden Situationen vor:

(I) Es ist $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen.

(II) Es ist $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen.

Dann wird das Carathéodorische Produktmaß $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ von $(\mu_j)_{j=1}^n$ auch kurz als Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$ bezeichnet.
Der Maßraum $\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j, \bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)$ heißt auch das Produkt der Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ und wird auch mit dem Symbol $\bigotimes_{j=1}^n (\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)$ bezeichnet.

Wir nehmen nun eine Spezifizierung von Satz M.24.1.4 vor.

Satz M.24.1.15. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ bzw $((\Omega'_j, \mathfrak{A}'_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen bzw. nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $T_j \in A(\Omega_j, \Omega'_j)$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung. Dann gilt:

(a) Sei $k \in \{1, ..., n\}$. Dann gilt $T_k(\mu_k) \in \mathcal{M}_+^b(\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k)$.

(b) Sei $T : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{j=1}^n \Omega'_j$ definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (T_1(\omega_1), ..., T_n(\omega_n))$. Dann ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung und es gibt

$$T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n T_j(\mu_j)$$

Beweis.

(a) Wegen $\mu_k \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ liefert Satz M.15.10 dann $T_k(\mu_k) \in \mathcal{M}_+^b(\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k)$.

(b) Da $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$ ist, folgt mittels Satz M.24.1.4 dann, dass T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung und $T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)$ ein Produktmaß der Folge $(T_j(\mu_j))_{j=1}^n$ ist. Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass wegen (a) nach Teil (a) von Satz M.24.1.14 nun $\bigotimes_{j=1}^n T_j(\mu_j)$ das einzige Produktmaß der Folge $(T_j(\mu_j))_{j=1}^n$ ist, so folgt dann

$$T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n T_j(\mu_j)$$

■

Satz M.24.1.16. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(m_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum_{j=1}^n m_j$. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}$ das Carathéodorische Produktmaß der Folge $(\lambda^{(m_j)})_{j=1}^n$. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}$ das einzige Produktmaß der Folge $(\lambda^{(m_j)})_{j=1}^n$ und es gilt

$$\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)} = \lambda^{(m)}$$

Beweis. Es ist $(\lambda^{(m_j)})_{j=1}^n$ eine Folge von σ-endlichen Maßen. Somit ist $\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}$ nach Teil (a) von Satz M.24.1.13 dann das einzige Produktmaß der Folge $(\lambda^{(m_j)})_{j=1}^n$. Nach Konstruktion gilt:

$$\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)} \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^n \mathbb{R}^{m_j}, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_{m_j}\right) \tag{1}$$

Nach Vereinbarung gilt

$$\mathbb{R}^m = \times_{j=1}^n \mathbb{R}^{m_j} \tag{2}$$

Wegen Satz M.16.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_{m_j} \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) gilt dann

$$\lambda^{(m)} \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^n \mathbb{R}^{m_j}, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_{m_j}\right) \tag{4}$$

Wegen Satz M.14.1 und Bemerkung M.14.1 gilt:

(I) Für $j \in \{1, ..., n\}$ ist $I_{m_j,l}$ ein $\cap$-stabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}_{m_j}$, welcher eine isotone Folge $(E_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{k\in\mathbb{N}} E_{jk} = \mathbb{R}^{m_j}$ enthält.

Aus der Definition des Lebesgue-Borel-Maßes folgt:

(II) Für $j \in \{1, ..., n\}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda^{(m_j)}(E_{jk}) \in [0, +\infty)$.

Sei

$$\times_{j=1}^{n} A_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} I_{m_j,l} \tag{5}$$

Aus Definition M.24.1.1 und der Definition des Lebesgue-Borel-Maßes folg dann

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}\right) \left(\times_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \lambda^{m_j}(A_j) = \lambda^{(m)} \left(\times_{j=1}^{n} A_j\right) \tag{6}$$

Wegen (I), (II), (1), (4), (5) und (6) liefert Satz M.24.1.1 dann

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)} = \lambda^{m}$$

■

Folgerung M.24.1.2. Sei $m \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$. Dann gilt $\lambda^{(m)} = \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \lambda^{(1)}$.

Beispiel M.24.1.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \backslash \{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^{n}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\omega_j \in \Omega_j$. Dann gilt:*

$$\epsilon_{(\omega_1,...,\omega_n), \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j} = \bigotimes_{j=1}^{n} \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}_j}$$

Beweis. *Sei*

$$\times_{j=1}^{n} A_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \tag{1}$$

Aus der Definition der Beteiligten Maße folgt sogleich

$$\epsilon_{(\omega_1,...,\omega_n), \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j} \left(\times_{j=1}^{n} A_j\right) = \begin{cases} 1 & , \text{falls } (\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{j=1}^{n} A_j \\ 0 & , \text{falls } (\omega_1, ..., \omega_n) \in \left(\times_{j=1}^{n} \Omega_j\right) \backslash \left(\times_{j=1}^{n} \mathbb{A}_j\right) \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1 & , \text{falls für alle } j \in \{1, ..., n\} \text{ gilt } \omega_j \in A_j \\ 0 & , \text{falls nicht für alle } j \in \{1, ..., n\} \text{ gilt } \omega_j \in A_j \end{cases} = \prod_{j=1}^{n} \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}_j}(A_j) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann, dass $\epsilon_{(\omega_1,...,\omega_n), \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j}$ ein Produktmaß der Folge $(\epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}_j})_{j=1}^{n}$ ist. Hieraus folgt, bei Beachtung der Tatsache, dass $(\epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}_j})_{j=1}^{n}$ eine Folge von endlichen Maßen ist, mittels Teil (a) von Satz M.24.1.14 dann

$$\epsilon_{(\omega_1,...,\omega_n), \bigotimes\limits_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j} = \bigotimes_{j=1}^{n} \epsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}_j}$$

■

Beispiel M.24.1.3. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(m_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum_{j=1}^{n} m_j$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $x_j \in \mathbb{R}^{m_j}$. Weiterhin sei $x = (x_1, ..., x_n)^T$. Dann gilt:*

$$\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m} = \bigotimes_{j=1}^{n} \epsilon_{x_j,\mathfrak{B}_{m_j}}$$

Beweis. *Wegen Satz M.16.5 gilt*

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{m_j} \tag{1}$$

Wegen (1) ist die Behauptung dann eine unmittelbare Konsequenz aus Beispiel M.24.1.2 und unseren Vereinbarungen. ■

Beispiel M.24.1.4. *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei Ω_j eine nichtleere höchstens abzählbare Menge und es bezeichne ν_j das Zählmaß auf $\mathcal{P}(\Omega_j)$. Weiterhin bezeichne ν das Zählmaß auf $\mathcal{P}\left(\times_{j=1}^n \Omega_j\right)$. Dann ist $((\Omega_j, \mathcal{P}(\Omega_j), \nu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von σ-endlichen Maßräumen und es gelten die Beziehungen*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{P}(\Omega_j) = \mathcal{P}\left(\times_{j=1}^n \Omega_j\right)$$

und

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \nu_j = \nu$$

Beispiel M.24.1.5. *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei Ω_j eine nichtleere endliche Menge und es bezeichne P_j die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_j, \mathcal{P}(\Omega_j))$. Weiterhin bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf $\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \mathcal{P}\left(\times_{j=1}^n \Omega_j\right)\right)$. Dann gelten*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{P}(\Omega_j) = \mathcal{P}\left(\times_{j=1}^n \Omega_j\right)$$

und

$$\bigotimes_{j=1}^{n} P_j = P$$

Beispiel M.24.1.6. *Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und seien die $\mathbb{R}^m$-Vektoren $a = (a_1, ..., a_m)^T$ und $b = (b_1, ..., b_m)^T$ so gewählt, dass $a < b$ erfüllt ist. Sei $\Delta := [a, b]$ sowie für $j \in \{1, ..., m\}$ weiterhin $\Delta_j = [a_j, b_j]$. Dann gilt:*

(a) Es ist $\Delta \in \mathfrak{B}_m$ sowie $\lambda^{(m)}(\Delta) = \prod_{j=1}^{m} (b_j - a_j) \in (0, +\infty)$.

(b) Sei $k \in \{1, ..., m\}$. Dann gelten $\Delta_k \in \mathfrak{B}_1$ sowie $\lambda^{(1)}(\Delta_k) = b_j - a_j \in (0, +\infty)$.

(c) Unter Beachtung von (a) bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Unter Beachtung von (b) bezeichne für $j \in \{1, ..., m\}$ weiterhin μ_{Δ_j} die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ_j. Dann ist $(\mu_{\Delta_j})_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt $\bigotimes_{j=1}^n \mu_{\Delta_j} = \mu_\Delta$.

Es folgen nun noch einige Beobachtungen zur Arithmetik der Bildung des Produktmaßes.

Vereinbarung: Sei $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann setzen wir $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j := \mu_1$.

Satz M.24.1.17. Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^{n_1+n_2}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Dann gilt:

$$\bigotimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mu_j = \left[\bigotimes_{j=1}^{n_1} \mu_j\right] \bigotimes \left[\bigotimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mu_j\right]$$

Folgerung M.24.1.3. Sei $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^3$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Dann gilt:

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3)$$

Satz M.24.1.18. Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Es sei

$$\begin{pmatrix} 1 & \cdots & n \\ i_1 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Menge $\{1, ..., n\}$. Weiter sei $\pi_{i_1,...,i_n} : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{j=1}^n \Omega_{i_j}$ definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_n})$. Dann ist $\pi_{i_1,...,i_n}$ eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_{i_j}\right)$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{i_1,...,i_n}\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n \mu_{i_j}$$

Satz M.24.1.19. Es sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von W-Räumen. Weiter seien $m \in \{1, .., n\}$ und $i_1, ..., i_m$ paarweise verschiedene Zahlen aus $\{1, ..., n\}$. Es sei $\pi_{i_1,...,i_m} : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{k=1}^m \Omega_{i_k}$ definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m})$. Dann ist $\pi_{i_1,...,i_n}$ eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{k=1}^m \mathfrak{A}_{i_k}\right)$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{i_1,...,i_m}\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \bigotimes_{k=1}^m \mu_{i_k}$$

v95m
29.11.2010

M.24.2. ?????????????????????????????????????? Titel?

Gegenstand des vorliegenden Abschnitts ist die Integration von nichtnegativen Funktionen bzgl. eines cavalierischen Produktmaßes. Unsere nachfolgende Überlegung sind auf die Herleitung des zentalen Resultats gerichtet. Hierbei handelt handelt es sich um den Satz von Tonelli, welcher die Integration bzgl. eines cavalierischen Produktmaßes auf eine endliche Folge iterativer Integration bzgl. der Faktoren dieses Produktmaßes zurückführt. Wir bgeinnen mit den entsprechenden Detailbetrachtungen.

Definition M.24.2.1. Seien Ω_1, Ω_2, Ω' sowie $f \in \mathcal{A}(\Omega_1 \times \Omega_2, \Omega')$. Weiterhin sei $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. Es sei $f_{\omega_1 \bullet} : \Omega_2 \to \Omega'$ bzw. $f_{\bullet \omega_2} : \Omega_1 \to \Omega'$ definiert gemäß $\tilde{\omega_2} \mapsto f((\omega_1, \tilde{\omega_2}))$ bzw. $\tilde{\omega_1} \mapsto f((\tilde{\omega_1}, \omega_2))$. So heißt $f_{\omega_1 \bullet}$ bzw. $f_{\bullet \omega_2}$ der $\omega_1\bullet$-Schnitt bzw. $\bullet\omega_2$-Schnitt von f.

Wir betrachten nun die in Definition M.24.2.1 eingeführten Bildung für den Spezialfall von Indikatorfunktionen.

Bemerkung M.24.2.1. Seien $\Omega_1, \Omega_2 \neq \emptyset$ sowie $Q \in P(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1, \omega_2 \in \Omega_2$. So gelten

$$(1_Q)_{\omega_1 \bullet} = 1_{Q_{\omega_1 \bullet}}$$

bzw.

$$(1_Q)_{\bullet \omega_2} = 1_{Q_{\bullet \omega_2}}$$

Beweis. Sei

$$\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 \tag{1}$$

So gilt

$$(1_Q)_{\omega_1 \bullet}(\tilde{\omega_2}) = 1_Q((\omega_1, \tilde{\omega_2})) \begin{cases} 1, & \text{falls } (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q \\ 0, & \text{falls } (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in (\Omega_1 \times \Omega_2) \backslash Q \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{falls } (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in Q_{\omega_1 \bullet} \\ 0, & \text{falls } (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in \Omega_1 \backslash Q_{\omega_1 \bullet} \end{cases} = 1_{Q_{\omega_1 \bullet}}(\tilde{\omega_2}) \tag{2}$$

aus (1) und (2) folgt $(1_Q)_{\omega_1 \bullet} = 1_{Q_{\omega_1 \bullet}}$. ■

Wir weisen die nötige Meßbarkeitseigenschaft der in Definition M.24.2.1 eingeführten Schnittabbildung nach. Hierzu bedarf es einer Vorbereitung.

Bemerkung M.24.2.2. Seien $\Omega_1, \Omega_2, \Omega' \neq \emptyset$, $f \in \mathcal{A}(\Omega_1 \times \Omega_2, \Omega')$ und $A' \in \mathcal{P}(\Omega')$. Seien $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. So gilt

$$(f_{\omega_1 \bullet})^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))_{\omega_1 \bullet}$$

bzw.

$$(f_{\bullet \omega_2})^{-1}(A') = (f^{-1}(A'))_{\bullet \omega_2}$$

Beweis. Es ist

$$(f_{\omega_1 \bullet})^{-1}(A) = \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 | f_{\omega_1 \bullet}(\tilde{\omega_2}) \in A'\} = \{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 | f((\omega_1, \tilde{\omega_2})) \in A'\}$$

$$\{\tilde{\omega_2} \in \Omega_2 | (\omega_1, \tilde{\omega_2}) \in f^{-1}(A')\} = (f^{-1}(A'))_{\omega_1 \bullet}$$

■

Lemma M.24.2.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2), (\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume sowie $f \in \mathcal{A}(\Omega_1 \times \Omega_2, \Omega')$ eine $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) - \mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Weiter sei $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. So ist $f_{\omega_1 \bullet}$ bzw. $f_{\bullet \omega_2}$ eine $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}'-$ bzw. $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}'-$ meßbare Abbildung.
Beweis. Sei

$$A' \in \mathfrak{A}' \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl von f folgt

$$f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Teil (b) von Lemma M.24.1.4

$$(f^{-1}(A'))_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2 \tag{3}$$

und

$$(f^{-1}(A'))_{\bullet \omega_2} \in \mathfrak{A}_1 \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.24.2.2 gelten

$$f^{-1}_{\omega_1 \bullet}(A') = (f^{-1}(A'))_{\omega_1 \bullet} \tag{5}$$

und

$$f^{-1}_{\bullet \omega_2}(A') = (f^{-1}(A'))_{\bullet \omega_2} \tag{6}$$

Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) folgt

$$f^{-1}_{\omega_1 \bullet}(A') \in \mathfrak{A}_2 \tag{7}$$

und

$$f^{-1}_{\bullet \omega_2}(A') \in \mathfrak{A}_1 \tag{8}$$

Aus (1) sowie (7) und(8) folgt die $\mathfrak{A}_2 - \mathfrak{A}'-$ und die $\mathfrak{A}_1 - \mathfrak{A}'-$ meßbarkeit von $f^{-1}_{\omega_1 \bullet}$ und $f_{\bullet \omega_2}$. ■

Lemma M.24.2.2. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale meßbare Räume sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$, so gilt $f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $f_{\bullet \omega_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. **Beweis.** Nach Wahl von f gelten

$$f \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \overline{\mathbb{R}}) \tag{1}$$

$$f \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, [0, +\infty]) \tag{2}$$

Wegen (1) folgen aus Lemma M.24.2.1

$$f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{M}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}) \tag{3}$$

und

$$f_{\bullet \omega_2} \in \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}) \tag{4}$$

Wegen (2) gelten

$$f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{A}(\Omega_2, [0, +\infty]) \tag{5}$$

und

$$f_{\bullet \omega_2} \in \mathcal{A}(\Omega_1, [0, +\infty]) \tag{6}$$

aus (3), (5) bzw. (4), (6) folgt $f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $f_{\bullet \omega_2} \in \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ ■

Der nachfolgende Satz, welcher in einem generischen Spezialfall auf den itialienischen Mathematiker Leonida Tonelli (1885-1946) zurückgeht, ist von entscheidener Bedeutung für weite Bereiche von Analysis und Stochastik.

Satz M.24.2.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1), (\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume, sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. So gilt

(a) Es liege $\sigma - \mathit{Endlichkeit}$ von μ_2 und es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung $g_{1,f} : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} d\mu_2$. So gelten $g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1$$

(b) Es liege $\sigma - \mathit{Endlichkeit}$ von μ_1 und es bezeichne $\pi_{\bullet 2}$ das zweite cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung $g_{2,f} : \Omega_2 \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\bullet \omega_2} d\mu_1$. So gelten $g_{2,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\pi_{1\bullet_2} = \int_{\Omega_2} g_{2,f} d\mu_2$$

Beweis.

(a) Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ gilt $\omega_1 \in \Omega_1$ nach Lemma M.24.2.2 $f_{\omega_1 \bullet}$. Somit ist $g_{1,f}$ wohldefiniert. wir betrachten zunächst den Fall
$$f \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \tag{1}$$
Wegen (1) gilt

(I) $\exists n \in \mathbb{N}$ sowie Folgen $(\alpha_k)_{k=1}^n$ bzw. $(Q_k)_{k=1}^n$ aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, mit $f = \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{Q_k}$.

Wegen (I) liefert Folgerung M.21.2.1
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} (\sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{Q_k}) d\pi_{1\bullet} = \sum_{k=1}^n \alpha_k [\pi_{1\bullet}(Q_k)] \tag{2}$$
Sei
$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{3}$$
Unter Beachtung von (3) und (I) ergibt sich mittels Bemerkung M.24.2.1
$$f_{\omega_1 \bullet} = (\sum_{k=1}^n \alpha_l 1 Q_k)_{\omega_1 \bullet} = \sum_{k=1}^n \alpha_k (1_{Q_k})_{\omega_1 \bullet} \overset{M.24.2.1}{=} \sum_{k=1}^n \alpha_k 1_{(Q_k)_{\omega_1 \bullet}} \tag{4}$$
Da $(Q_k)_{k=1}^n$ wegen (I) eine Folge aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, liefert Teil (b) von Lemma M.24.1.4

(II) Es ist $((Q_k)_{\omega_1 \bullet})_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$.

Wegen (II) und der Tatsache, dass $(\alpha_k)_{k=1}^n$ wegen (I) eine Folge aus $[0,+\infty)$ ist, liefert Folgerung M.21.2.1, dass

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{(Q_k)_{\omega_1 \bullet}} \in \mathcal{E}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{5}$$

somit

$$\int_{\Omega_2} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{(Q_k)_{\omega_1 \bullet}}) d\mu_2 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [\mu_2((Q_k)_{\omega_1 \bullet})] \tag{6}$$

Wegen (4) und (5) gilt

$$f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{7}$$

Unter Beachtung von (4) und (6) ergibt sich bei Verwendung der in Lemma M.24.1.5 eingeführten Funktionenfolge $(s_{Q_k,\mu_2})_{k=1}^n$

$$\begin{aligned} g_{1,f}(\omega_1) &= \int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} d\mu_2 \overset{(4)}{=} \int_{\Omega_2} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{(Q_k)_{\omega_1 \bullet}}) d\mu_2 \\ &\overset{(6)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [\mu_2((Q_k)_{\omega_1 \bullet})] = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [s_{Q_k,\mu_2}(\omega_1)] \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (3) und (8) folgt

$$g_{1,f} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [s_{Q_k,\mu_2}] \tag{9}$$

Da $(Q_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und μ_2 zudem $\sigma - endlich$ ist, liefert Teil (a) von Satz M.24.1.7

(III) Es ist $(s_{Q_k,\mu_2})_{k=1}^n$ eine Folgt aus $\mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$

Wegen (III) und der Tatsache, dass $(\alpha_k)_{k=1}^n$ eine Folge aus $[0,+\infty)$ ist, liefern die Teil (a) und (b) von Satz M.21.3.2

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_{Q_k,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{10}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1} (\sum_{k=1}^{n} \alpha_k s_{Q_k,\mu_2}) d\mu_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\Omega_1} s_{Q_k,\mu_2} d\mu_1 \tag{11}$$

Aus (9) und (10) bzw. (11) folgen

$$g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{12}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\Omega_1} s_{Q_k,\mu_2} d\mu_1 \tag{13}$$

Sei
$$k \in \{1, ..., n\} \tag{14}$$
Wegen (14) folgt (I) $Q_k \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt mittels Teil (a) von Definition M.24.1.4
$$\pi_{1\bullet}(Q_k) = \int_{\Omega_1} s_{Q_k,\mu_2} d\mu_1 \tag{15}$$
Unter Verwendung von (2), (14), (15) und (13) folgt
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d\pi_{1\bullet} \overset{(2)}{=} \sum_{k=1}^{n} \alpha_k [\pi_{1\bullet}(Q_k)]$$
$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int_{\Omega_1} s_{Q_k,\mu_2} d\mu_1 \overset{(13)}{=} \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 \tag{16}$$
Wegen (1), (12), (16) ist im Fall $f \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ alles bewiesen. Sein nun
$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \tag{17}$$
Wegen (17) gibt es nach Satz M.18.1 eine folge $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathcal{A}(\Omega_1 \otimes \Omega_2, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

(IV) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \in \mathcal{E}(\Omega_1 \otimes \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$

(V) Für alle $n \in \mathbb{N}$: $f_n \leq f_{n+1}$

(VI) Es ist $sup_{n \in \mathbb{N}} f_n = f$

Wegen (17) sowie (IV)- (VI) ergibt sich mittel Definition M.21.3.1
$$\int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f d\pi_{1\bullet} = sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega_1 \otimes \Omega_2} f d\pi_{1\bullet} \tag{18}$$
Sei
$$n \in \mathbb{N} \tag{19}$$
Wegen (19), (IV) folgen aus dem gezeigten (vgl. (1), (12), (16))
$$g_{1,f_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{20}$$
und
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} g_{1,f_n} d\mu_1 \tag{21}$$
Sei
$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{22}$$
Wegen wegen (19), (IV), (1), (3), (7) folgt
$$(f_n)_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{23}$$

Aus (IV) folgt sogleich

$$(f_n)_{\omega_1\bullet} \leq (f_{n+1})_{\omega_1\bullet} \tag{24}$$

Wegen (19), (23) und (24) folgt mittels Teil (c) von Satz M.21.2.1

$$\int_{\Omega_2} (f_n)_{\omega_1\bullet} = \int_{\Omega_2} (f_{n+1})_{\omega_1\bullet} d\mu_2$$

Hieraus folgt aufgrund der Definition von g_{1,f_n} und $g_{1,f_{n+1}}$

$$g_{1,f_n}(\omega_1) \leq g_{1,f_{n+1}}(\omega_1) \tag{25}$$

Wegen (VI) gilt

$$sup_{n\in\mathbb{N}}[(f_n)_{\omega_1\bullet}] = f_{\omega_1\bullet} \tag{26}$$

Wegen $f_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ folgt bei Beachtung von (19), (23), (24), und (26) mittels Definition M.21.3.1

$$\int_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet} d\mu_2 = sup_{n\in\mathbb{N}} g_{1,f_n}(\omega_1) \tag{27}$$

Aufgrund der Defintion von $g_{1,f}$ und der Folge $(g_{1,f_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich aus (7) dann v96m 30.11.2010

$$g_{1,f}(\omega_1) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_{1,f_n}(\omega_1) \tag{28}$$

Aus (22), (28) folgt dann , dass

$$g_{1,f} = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_{1,f_n} \tag{29}$$

Wegen (19), (25), (20), (29) liefert der Satz von der monotonen Konvergenz (vgl. M.21.3.3) dann

$$g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{30}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} (\sup_{n\in\mathbb{N}} g_{1,f_n}) d\mu_1 = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} g_{1,f_n} d\mu_1 \tag{31}$$

Unter Verwendung (8), (9), (21), (31) nun

$$\begin{aligned}\int_{\Omega_1\times\Omega_2} f d\pi_{1\bullet} &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n d\pi_{1\bullet} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega_1} g_{1,f_n} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 \end{aligned} \tag{32}$$

(b) Dies läßt sich analog zum Beweis (a) zeigen.

■

Satz M.24.2.2. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriv. Maßräume sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

(a) Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor und es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ und Lemma M.24.2.2 sei die Funktion von $g_{1,|f|} : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ def gemäß $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_1} |f|_{\omega_{1\bullet}} d\mu_2$. Dann gilt

(a1) Es gelten $g_{1,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} g_{1,|f|} d\mu_1$

(a2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist $\pi_1 1\bullet$-integrierbar.

(ii) $g_{1,|f|}$ ist μ_1-integrierbar.

(b) Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor und es bezeichne $\pi_{\bullet 2}$ das erste Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ und Lemma M.24.2.2 sei die Funktion von $g_{2,|f|} : \Omega_2 \to [0, +\infty]$ def gemäß $\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_2} |f|_{\omega_{\bullet 1}} d\mu_1$. Dann gilt

(b1) Es gelten $g_{2,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie $\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| d\pi_{\bullet 2} = \int_{\Omega_2} g_{2,|f|} d\mu_2$

(b2) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) f ist $\pi_1 \bullet 2$-integrierbar

(iv) $g_{2,|f|}$ ist μ_2- integrierbar

Beweis.

(a1) Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}})$ liefert Bemerkung M.18.9 dann $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Hieraus folgt mittels Teil (a) von Satz M.24.2.1 die Behauptung von (a1)

(a2) Wegen (a1) ist (ii) äquivalent zu: (i) $|f|$ ist $\pi_{1\bullet}$-integrierbar. Aufgrund der Wahl von f ist (i) nach Teil (a) von Satz M.21.5.1 dann äquivalent zu: (i'). Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenvon (i) und (ii)

(b) Dies läßt sich analog zu zeigen

■

Wir werden uns nun einem für die Anwendungen besonders wichtigem Fall zu

Satz M.24.2.3 (Satz von Torelli). Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Dann gilt

(a) Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung $g_{1,f} : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ bzw. $g_{2,f} : \Omega_2 \to [0, +\infty]$ def gemäß $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_{1\bullet}} d\mu_2$ bzw. $\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} f_{\omega_{\bullet 2}} d\mu_1$. Dann gilt $g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ bzw. $g_{2,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$

(b) Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann gelte

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1$$

und
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} fd(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{\Omega_2} g_{2,f}d\mu_2$$

Beweis. Aufgrund der Wahl von μ_1 und μ_2 gelten nach Satz M.24.1.9 dann $\mu_1\otimes\mu_2 = \pi_{1\bullet}$ und $\mu_1\otimes\mu_2 = \pi_{\bullet 2}$. Hieraus folgen dann in Verbindung mit Satz M.24.2.1 dann alle Behauptungen. ■

Satz M.24.2.4. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega_1\times\Omega_2, \mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

(a) Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung $g_{1,|f|}: \Omega_1 \to [0,+\infty]$ bzw. $g_{2,|f|}: \Omega_2 \to [0,+\infty]$ def gemäß $\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} |f|_{\omega_1\bullet} d\mu_2$ bzw. $\omega_2 \mapsto \int_{\Omega_1} |f|_{\omega_\bullet 2} d\mu_1$. Dann gilt $g_{1,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ bzw. $g_{2,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{\Omega_1} g_{1,|f|}d\mu_1$$
und
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} |f|d(\mu_1\otimes\mu_2) = \int_{\Omega_2} g_{2,|f|}d\mu_2$$

(b) Folg. Aussagen sind äquivalent:
  (i) f ist $(\mu_1\otimes\mu_2)$-integrierbar.
  (ii) $g_{1,|f|}$ ist μ_1-integrierbar.
  (iii) $g_{2,|f|}$ ist μ_2-integrierbar.

Beweis. Aufgrund der Wahl von μ_1 und μ_2 gelten nach Teil (a) von Satz M.24.1.9 dann $\mu_1\otimes\mu_2 = \pi_{1\bullet}$ und $\mu_1\otimes\mu_2 = \pi_{\bullet 2}$. Hieraus folgen dann in Verbindung mit Satz M.24.2.2 dann alle Behauptungen. ■

Wir stellen nun einige Meßbarkeitsaussagen bereit.

Lemma M.24.2.3. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k=1}^n$ eine Folge von nichtriv. meß. Räumen und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichtrivialer meßbarer Raum. Weiterhin seien $j \in \{1,...,n\}$ sowie $f_j \in \mathfrak{A}(\Omega_j, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'$-meß. Abb. Seien $g_j : \times_{k=1}^n \Omega_k \to \Omega_j$ definiert gemäß $(\omega_1,...,\omega_n) \mapsto f_j(\omega_j)$ Dann gilt

(a) Sei $p_j : \times_{k=1}^n \Omega_k \to \Omega_j$ def gemäß $(\omega_1,...,\omega_n) \mapsto \omega_j$ Dann gitl $g_j = f_j \circ p_j$

(b) g_j ist $(\otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$-meßbar

Beweis.

(a) Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

(b) Wegen Def. M.16.1 und Teil (a) von Satz M.15.4 ist p_j dann ist $(\otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$-meßbar. Hieraus und aus der $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'$-Meßbarkeit von f_j folgt mittels Satz M.15.3 die $(\otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$- Meßbarkeit von $f_j \circ p_j$. Hieraus folgt wegen (a) dann die Behauptung von (b).

■

Lemma M.24.2.4. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k=1}^n$ eine Folge von nichtrivialen meßbaren Räumen und $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$

(a) Sei $j \in \{1, ..., n\}$ und $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; K)$. Sei $g_j : \times_{k=1}^n \Omega_k \to K$ definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto f_j(\omega_j)$. Dann gilt $g_j \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k; K)$

(b) Sei $j \in \{1, ..., n\}$ und $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $g_j \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$

Beweis.

(a) Dies folgt aus Teil (b) von Lemma M.24.2.3.

(b) Nach Definition gilt

$$\mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j) = \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \overline{\mathbb{R}} \cap A(\Omega_j, [0, +\infty]) \tag{1}$$

Wegen $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ folgen aus (1) dann

$$f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \overline{\mathbb{R}}) \tag{2}$$

und

$$f_j \in A(\Omega_j, [0, +\infty]) \tag{3}$$

Wegen (2) folgt aus (a) dann

$$g_j \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}}) \tag{4}$$

Aus (3) und der Def. von g_j folgt

$$g_j \in A(\times_{k=1}^n \Omega_j, [0, +\infty]) \tag{5}$$

Aus (4),(5) und der Definition von $\mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$ folgt dann $g_j \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$

■

Definition M.24.2.2. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ seine Ω_j eine nichtleere Menge und $f_j \in A(\Omega_j, \overline{\mathbb{R}})$ Es sei $f : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \bar{\mathbb{R}}$ die gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto \prod_{i=1}^n f_j(\omega_j)$ Dann heißt f das Tensorprodukt der Folge $(f_i)_{j=1}^n$

Satz M.24.2.5. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichtriv. meß. Räumen. Dann gilt

(a) Sei $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; K)$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $(f_j)_{j=1}^n$. Dann gilt $f \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n, \otimes_{k=1}^n; K)$

(b) Für $j \in \{1, ..., n\}$ sei $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $f \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$

Beweis. Sei
$$j \in \{1, ..., n\} \tag{1}$$
Weiter sei $g_j : \Omega_j \to K$ def gemäß
$$\omega_j \mapsto f_j(\omega_j) \tag{2}$$
Aufgrund der Wahl von f_j folgt im Fall (a) bzw. (b) mittels Teil (a) bzw. (b) von Lemma M.24.2.4
$$g_j \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n, \otimes_{k=1}^n; K) \tag{3}$$
bzw.
$$g_j \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k) \tag{4}$$
Aus (1),(2) und der Def. von f folgt
$$f = \prod_{j=1}^n g_j \tag{5}$$
Unter Beachtung von (1),(3), (4),(5) ergibt sich mittels Satz M.17.8 und Satz M.17.9 bzw. Teil (c) von Lemma M.18.3 dann $f \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n, \otimes_{k=1}^n; K)$ bzw. $f \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$
■

Wir betrachten nun für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ von nichttriv. σ- endlichen Maßräumen. Wir studieren hierbei die Integration bzgl. des Caratheodorischen Produktmaßes $\otimes_{j=1}^n \mu_j$ der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$ für eine besonders gut an die Struktir von $\times_{j=1}^n \Omega_j$ angepaßte Klasse von Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$

Satz M.24.2.6. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ eine Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ von nichttriv. σ- endlichen Maßräumen. Für $k \in \{1, ..., n\}$ sei $f_k?in\mathcal{E}^*(\Omega_k, \mathfrak{A}_k$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $(f_k)_{j=1}^n$. Dann ist $f \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$ und es gilt $\int_{\times_{k=1}^n \Omega_k} f d(\otimes_{k=1}^n \mu_k) = \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f d(\mu_k)$ **Beweis.** Wegen Teil (b) von Satz M.24.2.5 gilt
$$f \in \mathcal{E}^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k) \tag{1}$$
Die Integralformel zeigt man durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 2$. Wir wenden nun Satz M.24.2.3 an. Unter Beachtung von (1) und Lemma M.24.2.2 sei die Abb. $g_{1,f} : \Omega_1 \to [0, +\infty]$ def gemäß
$$\omega_1 \mapsto \int_{\Omega_2} f_{1\bullet} d\mu_2 \tag{2}$$
Wegen (2) folgen aus Satz M.24.2.3 dann
$$g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{3}$$
sowie
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 \tag{4}$$

Sei
$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{5}$$
Aus der Konstruktion von f folgt dann
$$f_{\omega_1\bullet} = [f_1(\omega_1)]f_2 \tag{6}$$
Unter Beachtung von (2),(6), $f_1(\omega_1) \in [0,+\infty]$ und $f_2 \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ergibt sich mittels Teil (a) von Satz M.21.3.2 dann
$$g_{1,f} = (\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet} d\mu_2 = \int_{\Omega_2} [f_1(\omega_1)] f_2 d\mu_2 = [f_1(\omega_1)] \int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2 \tag{7}$$
Unter Beachtung (4),(5),(7) sowie nochmals Teil (a) von Satz M.21.3.2 folgt dann
$$\int_{\Omega_1\times\Omega_2} fd(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\Omega_1} g_{1,f} d\mu_1 = \int_{\Omega_1} f_1 [\int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2] d\mu_1 = [\int_{\Omega_1} f_1 d\mu_1] \cdot [\int_{\Omega_2} f_2 d\mu_2]$$
Damit ist die Behauptung für n=2 bewiesen. Der Induktionsschritt wird dann unter Beachtung der nach Satz M.24.1.17 für $n \in \{3,4,...\}$ gültigen Beziehung $\otimes_{k=1}^n \mu_k = (\otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k) \otimes \mu_k$ vollzogen ■

Beispiel M.24.2.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0,+\infty)$. Weiter sei $g_{\alpha;m} : \mathbb{R}^m \to (0,+\infty)$ definiert gemäß $x \mapsto exp\{-[|x|_{E,\mathbb{R}^m}]^\alpha\}$ Dann gilt*

(a) *Es ist $g_{\alpha;m} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt $\int_{\mathbb{R}^m} g_{\alpha;m} d\lambda^{(m)} \in (0,+\infty)$*

(b) *Sei $x = (x_1, ..., x_n)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $g_{2;m}(x) = \prod_{j=1}^n g_{2;1}(x_j)$*

(c) *Es ist $g_{2;m} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ also insbesondere $g_{2;1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt*
$$\int_{\mathbb{R}^m} g_{2;1} d\lambda^{(m)} = [\int_{\mathbb{R}^1} g_{2;1} d\lambda^{(1)}]^m$$

v97m
06.12.2010

Satz M.24.2.7. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k))_{k=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Für $k \in \{1,...,n\}$ sei $f_k \in \epsilon^*(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$. Es bezeichne f das Tensorprodukt von $(f_k)_{k=1}^n$ sowie $\mu := \otimes_{k=1}^n \mu_k$ das Carathéodorische Produktmaß von $(\mu_k)_{k=1}^n$. Dann gilt

(a) Es ist $f \in \epsilon^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$ und μ_f ein Produktmaß der Folge $((\mu_k)_{f_k})_{k=1}^n$.

(b) Für $k \in \{1,...,n\}$ sei $\{f_k = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_k}$. Dann ist $((\mu_k)_{f_k})_{k=1}^n$ eine Folge von σ-endlichen Maßen und es gilt $\mu_f = \otimes_{k=1}^n (\mu_k)_{f_k}$.

Beweis.

(a) Wegen Teil (b) von Satz M.24.2.5 gilt

$$f \in \epsilon^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k) \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil (a) von Satz M.21.3.4 dann

$$\mu_f \in \mathcal{M}_+(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k) \tag{2}$$

Sei

$$\times_{k=1}^n A_k \in \boxtimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k \tag{3}$$

Weiter sei

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt dann

$$A_j \in \mathfrak{A}_j \tag{5}$$

Wegen (4), (5) und $f_j \in \epsilon^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ folgt mittels Bemerkung M.18.11

$$1_{A_j} f_j \in \epsilon^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j) \tag{6}$$

Sei

$$(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{k=1}^n \Omega_k \tag{7}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\left(1_{\times_{k=1}^n A_k} f\right)((\omega_1, ..., \omega_n)) &= \left[1_{\times_{k=1}^n A_k}((\omega_1, ..., \omega_n))\right]\left[f((\omega_1, ..., \omega_n))\right] \\ &= \left[\prod_{k=1}^n 1_{A_k}(\omega_k)\right]\left[\prod_{k=1}^n f_k(\omega_k)\right] \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (4), (6), (7) und (8) folgt mittels Satz M.24.2.6 dann

$$1_{\times_{k=1}^n A_k} f \in \epsilon^*(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$$

und

$$\int_{\times_{k=1}^n A_k} \left(1_{\times_{k=1}^n A_k} f\right) d\mu = \int_{\times_{k=1}^n A_k} \left(1_{\times_{k=1}^n A_k} f\right) d\left(\otimes_{k=1}^n \mu_k\right) = \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} 1_{A_k} f_k \, d\mu_k \tag{9}$$

Unter Beachtung von (9) ergibt sich nun

$$\mu_f\left(\times_{k=1}^n A_k\right) = \int_{\times_{k=1}^n A_k} \left(1_{\times_{k=1}^n A_k} f\right) d\left(\otimes_{k=1}^n \mu_k\right) \overset{(9)}{=} \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} 1_{A_k} f_k \, d\mu_k = \prod_{k=1}^n (\mu_k)_{f_k}(A_k) \tag{10}$$

Wegen (2), (3) und (10) ist μ_f dann ein Produktmaß von $((\mu_k)_{f_k})_{k=1}^n$.

(b) Für $k \in \{1, ..., n\}$ ist wegen $\{f_k = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_k}$ dann $(\mu_k)_{f_k}$ ein σ-endliches Produktmaß auf $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$. Hieraus folgt mittels Teil (a) von Satz M.24.1.13, dass das Carathéodorisch Produktmaß $\otimes_{k=1}^n (\mu_k)_{f_k}$ das einzige Produktmaß von $((\mu_k)_{f_k})$ ist. Hieraus folgt wegen (a) dann $\mu_f = \otimes_{k=1}^n (\mu_k)_{f_k}$. ■

M.24.3. Der Satz von Fubini

Das Ziel des vorliegenden Abschnitts besteht im Studium der Integrierbarkeit numerischer Funktionen bezüglich eines Cavalierischen Produktmaßes. Dies läuft auf eine geeignete Verallgemeinerung von Satz M.24.2.1 hinaus. Die klassische Version dieser Aufgabenstellung, welche auf eine Verallgemeinerung des Tonellischen Satzes M.24.2.3 hinausläuft, wurde von dem italienischen Mathematiker Guido Fubini (1879-1943) bearbeitet. Unsere nachfolgenden Überlegungen sind auf die Herleitung des brühmten Fubinischen Satzes und seine Verallgemeinerung auf Cavalierische Produktmaße gerichtet.

Bemerkung M.24.3.1. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen sowie $f \in A(\Omega_1 \times \Omega_2, \bar{\mathbb{R}})$. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt

(a) Es ist $|f|_{\omega_1 \bullet} = |f_{\omega_1 \bullet}|$ und $|f|_{\bullet \omega_2} = |f_{\bullet \omega_2}|$.

(b) Es gilt $(f^+)_{\omega_1 \bullet} = (f_{\omega_1 \bullet})^+$ und $(f^+)_{\bullet \omega_2} = (f_{\bullet \omega_2})^+$.

(c) Es gilt $(f^-)_{\omega_1 \bullet} = (f_{\omega_1 \bullet})^-$ und $(f^-)_{\bullet \omega_2} = (f_{\bullet \omega_2})^-$.

Satz M.24.3.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume. Dann gilt

(a) Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor und es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \pi_{1\bullet}; \bar{\mathbb{R}})$. Es bezeichne $B_{1,f}$ die Menge aller derjenigen $\omega_1 \in \Omega_1$, für welche μ_2-Integrierbarkeit von $f_{\omega_1 \bullet}$ vorliegt. Dann gilt

  (a1) Es ist $b_{1,f} = B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-}$ sowie $\Omega_1 \backslash B_{1,f} \in \mathcal{N}_{\mu_1}$.

  (a2) Sei $h_{1,f} : \Omega_1 \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$h_{1,f} := \begin{cases} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \, d\mu_2 & , \text{falls } \omega_1 \in B_{1,f} \\ 0 & , \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash B_{1,f} \end{cases}$$

  Dann gelten $h_{1,f} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R})$ sowie

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} h_{1,f} \, d\mu_1$$

(b) Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor und es bezeichne $\pi_{\bullet 2}$ das zweite Cavalierische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \pi_{\bullet 2}; \bar{\mathbb{R}})$. Es bezeichne $B_{2,f}$ die Menge aller derjenigen $\omega_2 \in \Omega_2$, für welche μ_1-Integrierbarkeit von $f_{\bullet \omega_2}$ vorliegt. Dann gilt

  (b1) Es ist $B_{2,f} = B_{2,f^+} \cap B_{2,f^-}$ sowie $\Omega_2 \backslash B_{2,f} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$.

  (b2) Sei $h_{2,f} : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$h_{2,f} := \begin{cases} \int_{\Omega_1} f_{\bullet \omega_2} \, d\mu_1 & , \text{falls } \omega_2 \in B_{2,f} \\ 0 & , \text{falls } \omega_2 \in \Omega_2 \backslash B_{2,f} \end{cases}$$

  Dann gelten $h_{2,f} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R})$ sowie

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\pi_{\bullet 2} = \int_{\Omega_2} h_{2,f} \, d\mu_2$$

Beweis.

(a1) Als $\pi_{1\bullet}$-integrierbare Funktion ist f insbesondere $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$-$\bar{\mathfrak{B}}_1$-messbar. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.9 dann

$$\{f^+, f^-\} \subseteq \epsilon^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2) \tag{1}$$

Definieren wir unter Beachtung von (1) und Lemma M.24.2.2 nun die Funktionen g_{1,f^+} und g_{1,f^-} wie in Teil (a) von Satz M.24.2.1, so liefert Teil (a) von Satz M.24.2.1 dann

$$\{g_{1,f^+}, g_{1,f^-}\} \subseteq \epsilon^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{2}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ \, d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} g_{1,f^+} \, d\mu_1 \tag{3}$$

und

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- \, d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} g_{1,f^-} \, d\mu_1 \tag{4}$$

Da f laut Voraussetzung $\pi_{1\bullet}$-integrierbar ist, gilt dies nach Intergraldefinition auch für f^+ und f^-. Hieraus folgt bei Beachtung von (2) sowie (3) bzw. (4) dann

$$g_{1,f^+} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \bar{\mathbb{R}}) \tag{5}$$

bzw.

$$g_{1,f^-} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \bar{\mathbb{R}}) \tag{6}$$

Wegen (5) bzw. (6) ergibt sich mittels Teil (a) von Satz M.21.6.5 nun

$$\{g_{1,f^+} = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_1} \tag{7}$$

bzw.

$$\{g_{1,f^-} = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_1} \tag{8}$$

Aus der Definition der entsprechenden Größen folgt sogleich

$$\{g_{1,f^+} = +\infty\} = \Omega_1 \backslash B_{1,f^+} \tag{9}$$

und

$$\{g_{1,f^-} = +\infty\} = \Omega_1 \backslash B_{1,f^-} \tag{10}$$

Für

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{11}$$

gelten nach Bemerkung M.24.3.1 nun

$$(f^+)_{\omega_1\bullet} = (f_{\omega_1\bullet})^+ \tag{12}$$

und

$$(f^-)_{\omega_1\bullet} = (f_{\omega_1\bullet})^- \tag{13}$$

Aus der Definition des Integrals sowie (12) und (13) folgt nun

$$B_{1,f} = \{\omega_1 \in \Omega_1 : \ f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \bar{\mathbb{R}})\}$$
$$= \{\omega_1 \in \Omega_1 : \ \{(f_{\omega_1 \bullet})^+, (f_{\omega_1 \bullet})^-\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \bar{\mathbb{R}})\}$$
$$\overset{(12),(13)}{=} \{\omega_1 \in \Omega_1 : \ \{(f^+)_{\omega_1 \bullet}, (f^-)_{\omega_1 \bullet}\} \subseteq \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \bar{\mathbb{R}})\} = B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-} \quad (14)$$

Unter Verwendung von (14), (9) und (10) folgt dann

$$\Omega_1 \backslash B_{1,f} \overset{(14)}{=} \Omega_1 \backslash (B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-})$$
$$= \Omega_1 \backslash B_{1,f^+} \cap \Omega_1 \backslash (B_{1,f^-} \overset{(9),(10)}{=} \{g_{1,f^+} = +\infty\} \cup \{g_{1,f^-} = +\infty\} \quad (15)$$

Wegen (7), (8) und (15) folgt mittels Teil (c) von Satz M.5.1 dann

$$\Omega_1 \backslash B_{1,f} \in \mathcal{N}_{\mu_1} \quad (16)$$

Wegen (14) und (16) ist dann (a1) bewiesen.

(a2) Sei

$$\omega_1 \in B_{1,f} \quad (17)$$

Wegen (17) gilt dann

$$f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \bar{\mathbb{R}}) \quad (18)$$

Unter Verwendung von (18), Definition M.21.5.1 sowie (12) und (13) folgt dann

$$h_{1,f}(\omega_1) = \int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet}\, d\mu_2 \overset{D.M.21.5.1}{=} \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1 \bullet})^+\, d\mu_2 - \int_{\Omega_2} (f_{\omega_1 \bullet})^-\, d\mu_2$$
$$\overset{(12),(13)}{=} \int_{\Omega_2} (f^+)_{\omega_1 \bullet}\, d\mu_2 - \int_{\Omega_2} (f^-)_{\omega_1 \bullet}\, d\mu_2 = g_{1,f^+} - g_{1,f^-} \quad (19)$$

Aus (17), (19) und der Definition von $h_{1,f}$ folgt dann

$$h_{1,f} = 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} - 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \quad (20)$$

Wegen (16) gilt insbesondere

$$\Omega_1 \backslash B_{1,f} \in \mathfrak{A}_1 \quad (21)$$

Es ist

$$B_{1,f} = \Omega_1 \backslash (\Omega_1 \backslash B_{1,f}) \quad (22)$$

Da $\mathfrak{A}_1$ eine σ-Algebra in Ω_1 ist, folgt aus (21) und (22) dann

$$B_{1,f} \in \mathfrak{A}_1 \quad (23)$$

Wegen (23) und (2) liefert Teil (a) von Bemerkung M.18.11 dann

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\} \subseteq \epsilon^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \quad (24)$$

Nach Definition von B_{1,f^+} bzw. B_{1,f^-} gilt

$$B_{1,f^+} = \{g_{1,f^+} \in \mathbb{R}\} \tag{25}$$

bzw.

$$B_{1,f^-} = \{g_{1,f^-} \in \mathbb{R}\} \tag{26}$$

Aus (14), (25) und (26) folgt nun

$$B_{1,f} \overset{(14)}{=} B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-} \overset{(25),(26)}{\subseteq} \{g_{1,f^+} \in \mathbb{R}\} \cap \{g_{1,f^-} \in \mathbb{R}\} \tag{27}$$

Aus (27) folgt dann

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\} \subseteq A(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{28}$$

Wegen $\epsilon^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \bar{\mathbb{R}})$ folgt aus (24) dann

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \bar{\mathbb{R}}) \tag{29}$$

Wegen (28) und (29) folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \mathbb{R}) \tag{30}$$

Unter Beachtung von (20) und (30) folgt mittels Satz M.17.7 nun

$$h_{1,f} \in \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \mathbb{R}) \tag{31}$$

Es gelten

$$0 \leq 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \leq g_{1,f^+} \tag{32}$$

sowie

$$0 \leq 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \leq g_{1,f^-} \tag{33}$$

Unter Beachtung von (5), (32) und (30) bzw. (6), (33) und (30) folgt mittels Teil (a) von Satz M.21.5.1 dann

$$1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{34}$$

bzw.

$$1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{35}$$

Wegen (34), (35) und (20) folgt mittels Teid (d) von Satz M.21.5.5 dann

$$h_{1,f} \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{36}$$

sowie

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} h_{1,f}\, d\mu_1 &\overset{(20)}{=} \int_{\Omega_1} (1_{B_{1,f^+}} g_{1,f^+} - 1_{B_{1,f^+}} g_{1,f^-})\, d\mu_1 \\ &\overset{(34),(34),S.M.24.2.5(d)}{=} \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f^+}} g_{1,f^+}\, d\mu_1 - \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f^+}} g_{1,f^-}\, d\mu_1 \end{aligned} \tag{37}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \neq g_{1,f^+}\} \subseteq \Omega_1 \backslash B_{1,f} \tag{38}$$

und

$$\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \neq g_{1,f^-}\} \subseteq \Omega_1 \backslash B_{1,f} \tag{39}$$

Wegen (2), (24) und der Inklusion $\epsilon^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \subseteq \mathcal{M}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \bar{\mathbb{R}})$ folgt mittels Satz M.17.5 dann

$$\{\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \neq g_{1,f^+}\}, \{1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \neq g_{1,f^-}\}\} \subseteq \mathfrak{A}_1 \tag{40}$$

Wegen (16), (38), (39) und (40) liefert Teil (b) von Satz M.5.1 nun

$$\{\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \neq g_{1,f^+}\}, \{1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \neq g_{1,f^-}\}\} \subseteq \mathcal{N}_{mu_1} \tag{41}$$

Wegen (2), (24) und (41) folgen mittels Teil (a) von Satz M.21.6.3 nun

$$\int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} g_{1,f^+} \, d\mu_1 \tag{42}$$

und

$$\int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \, d\mu_1 = \int_{\Omega_1} g_{1,f^-} \, d\mu_1 \tag{43}$$

Aus (3) und (42) bzw (4) und (43) folgt nun

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ \, d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \, d\mu_1 \tag{44}$$

bzw.

$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- \, d\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \, d\mu_1 \tag{45}$$

Unter Verwendung von Definition M.21.5.1, (44), (45), (42), (43) und (37) folgt nun

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \, d\pi_{1\bullet} &\overset{D.M.21.5.1}{=} \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ \, d\pi_{1\bullet} - \int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- \, d\pi_{1\bullet} \\
&\overset{(44),(45)}{=} \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \, d\mu_1 - \int_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \, d\mu_1 \\
&\overset{(42),(43)}{=} \int_{\Omega_1} g_{1,f^+} \, d\mu_1 - \int_{\Omega_1} g_{1,f^-} \, d\mu_1 \overset{(37)}{=} \int_{\Omega_1} h_{1,f} \, d\mu_1
\end{aligned} \tag{46}$$

Wegen (36) und (46) ist dann (a2) bewiesen.

(b) Dies kann analog zu (a) gezeigt werden.

■

Wir wenden uns nun dem generischen Spezialfall von Satz M.24.3.1 zu. v98m 07.12.2010

Satz M.24.3.2 (Satz von Fubini)**.** Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale σ-endliche Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das Caratheodorische Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sei $f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2; \overline{\mathbb{R}})$ und es bezeichne $B_{1,f}$ bzw. $B_{2,f}$ die Menge aller $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$, für welche $f_{\omega_1,\bullet} \in\in f \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \overline{\mathbb{R}})$ bzw. $f_{\bullet,\omega_2} \in f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \overline{\mathbb{R}})$ erfüllt ist. Dann gilt:

(a) Es gelten $B_{1,f} = B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-}$ und $\Omega_1 \backslash B_{1,f} \in \mathcal{N}_{\mu_1}$ sowie $B_{2,f} = B_{2,f^+} \cap B_{2,f^-}$ und $\Omega_2 \backslash B_{2,f} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$.

(b) Sei $h_{1,f} \Omega_1 \to \mathbb{R} bzw h_{2,f} : \Omega_2 \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$h_{1,f}(\omega_1) := \begin{cases} \int\limits_{\Omega_1} f_{\omega_1,\bullet} d\mu_1 & \text{, falls } \omega_1 \in B_{1,f} \\ 0 & \text{, falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash B_{1,f} \end{cases}$$

bzw.

$$h_{2,f}(\omega_2) := \begin{cases} \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_2,\bullet} d\mu_2 & \text{, falls } \omega_2 \in B_{2,f} \\ 0 & \text{, falls } \omega_2 \in \Omega_2 \backslash B_{2,f} \end{cases}$$

Dann gelten $h_{1,f} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R})$ und

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} h_{1,f} d\mu_1$$

sowie: $h_{2,f} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R})$ und

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \times \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} h_{2,f} d\mu_2$$

sowie: **Beweis.** Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_1 und μ_2 gelten wegen Teil (b) von Satz M.24.1.9 dann $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{1\bullet}$ und $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{\bullet 2}$. Hieraus folgen in Verbindung mit Satz M.24.3.1 dann alle Behauptungen. ■

Wir geben nun ein Beispiel an, welches zeigt, dass die Ausnahmemenge $\Omega_1 \backslash B_{2,f}$ aus Satz M.24.3.1 durchaus nichtleer sein kann.

Beispiel M.24.3.1. *Wir betrachten den Maßraum $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2, \lambda^{(2)})$. Wegen Satz M.16.5 bzw. Folgerung M.24.1.2 gelten dann*

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_1 \tag{1}$$

bzw.

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(1)} \tag{2}$$

Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ und $\lambda^{(1)}$ ein stetiges Maß ist, gilt

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(1)}} \tag{3}$$

Wegen $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}_1$ folgt unter Beachtung von (1)-(3) mittels Teil (f) von Bemerkung M.24.1.1 dann

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(2)}} \tag{4}$$

Wegen (4) ergibt sich unter Beachtung von Bemerkung M.21.2.1 dann $1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$ und

$$\int_{\mathbb{R}^2} 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} d\lambda^{(2)} = \lambda^{(2)}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = 0 \tag{5}$$

Sei

$$f := 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \tag{6}$$

Weiter sein

$$\omega_1 \in \mathbb{R} \tag{7}$$

Wegen (7) folgt mittels Teil (c) von Lemma M.24.1.3 dann

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} \mathbb{R} & , \textit{falls } \omega_1 \in \mathbb{R} \\ \emptyset & , \textit{sonst} \end{cases} \tag{8}$$

Unter Beachtung von (6), Bemerkung M.24.2.1 und (8) folgt dann

$$f_{\omega_1 \bullet} = (1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}})_{\omega_1 \bullet} = 1_{(\mathbb{Q}\times\mathbb{R})_{\omega_1 \bullet}} = \begin{cases} \mathbb{R} & , \textit{falls } \omega_1 \in \mathbb{R} \\ \emptyset & , \textit{sonst} \end{cases} \tag{9}$$

Wegen $\{\mathbb{R}, \emptyset\} \subseteq \mathfrak{B}_1$ folgt aus (9) und $f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie unter Beachtung von Bemerkung M.21.2.1 weiterhin

$$\int_{\mathbb{R}} f_{\omega_1 \bullet} d\lambda^{(1)} = \begin{cases} \lambda^{(1)}(\mathbb{R}) & , \textit{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q} \\ \lambda^{(1)}(\emptyset) & , \textit{sonst} \end{cases} = \begin{cases} +\infty & , \textit{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q} \\ 0 & , \textit{sonst} \end{cases} \tag{10}$$

Wegen (10) gelten mit den Bezeichnugnen von Satz M.24.3.1 dann $B_f = \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R} \setminus B_f = \mathbb{Q}$.

Das nachfolgende Resultat knüpft an die Thematik von Satz M.24.2.6 an.

Satz M.24.3.3. Seien $K \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}, p \in (0, \infty), n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k))_{k=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Für $k \in \{1, ..., n\}$ sei $f_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, K)$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $(f_k)_{k=1}^n$ sowie $\otimes_{k=1}^n \mu_k$ das Caratheodorische Produktmaß der Folge $(\mu_k)_{k=1}^n$. Dann gilt:

(a) Es ist $f \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, K)$.

(b) Es gilt $N_{p, \otimes_{k=1}^n \mu_l}(f) = \prod_{k=1}^n N_{p,\mu_k}(f_k)$.

(c) i und ii sind äquivalent.

(i) Es ist $f \in \mathcal{M}_0(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, K)$.

(ii) Es gibt ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $f_k \in \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; K)$.

(d) $\forall k \in \{1, ..., n\}$ sei $f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K)$. Dann ist

$$f \in \mathcal{L}^p(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^n \mu_k; K)$$

. und im Fall p=1 gilt überdies:

$$\int_{\times_{k=1}^n \Omega_k} f \, d(\otimes_{k=1}^n \mu_k) = \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} f_k \, d\mu_k$$

.

(e) Sei $f \in \mathcal{L}^p(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^n \mu_k; K)$ und sei $N_{p, \otimes_{k=1}^n \mu_k}(f) \neq 0$. Weiter sei $k \in \{1, ..., n\}$ Dann gilt

$$f \in \mathcal{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K) \setminus \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K).$$

Beweis.

(a) Dies folgt aus Teil (a) von Satz M.24.2.5.

(b) Für

$$k \in \{1, .., n\} \tag{1}$$

folgt wegen $f_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k)$ mittels Bemerkung M.18.9 dann

$$|f_k|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega_k, \mathfrak{A}_k). \tag{2}$$

Für

$$(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{k=1}^n \Omega_k. \tag{3}$$

gilt aufgrund der Konstruktion von f dann

$$|f|^p((\omega_1, ..., \omega_n)) = |f((\omega_1, ..., \omega_n))|^p = |\prod_{k=1}^n f_k(\omega_k)|^p$$

$$= [\prod_{k=1}^n (f_k(\omega_k))]^p = \prod_{k=1}^n [|f_k(\omega_k)|^p] = \prod_{k=1}^n |f_k|^p(\omega_k). \tag{4}$$

Wegen (1)-(4) liefert Satz M.24.2.6 dann

$$\int_{\times_{k=1}^n \Omega_k} |f|^p \, d(\otimes_{k=1}^n \mu_k) = \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} |f_k|^p \, d\mu_k$$

. Hieraus folgt dann

$$[N_{p,\otimes_{k=1}^n \mu_k}]^p = \int\limits_{\times_{k=1}^n \Omega_k} |f|^p \, d(\otimes_{k=1}^n \mu_k) = \prod_{k=1}^n \int\limits_{\Omega_k} |f_k|^p \, d\mu_k = \prod_{k=1}^n ([N_{p,\mu_k}(f_k)]^p) = (\prod_{k=1}^n N_{p,\mu_k}(f_k))^p$$

. Damit ist also $[N_{p,\otimes_{k=1}^n \mu_k}]^p = (\prod_{k=1}^n N_{p,\mu_k}(f_k))^p$.

(c) Wegen Teil (b) von Bemerkung M.24.1.2 ist (i) bzw. (ii) äquivalent zu

i' Es ist $N_{p,\otimes_{k=1}^n \mu_k}(f) = 0$ bzw.

ii' Es gibt ein $k \in \{1, ..., n\}$ mit $N_{p,\mu_k}(f_k) = 0$.

Aus (b) erkennt man sogleich die Äquivalenz von (i') und (ii')- Hieraus folgt dann die Äquivalenz von (i) und (ii).

(d) $\forall k \in \{1, ..., n\}$ gilt wegen $f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K)$ nach Bemerkung M.21.7.3 dann $N_{p,\mu_k}(f_k) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen (g) dann $N_{p,\otimes_{k=1}^n \mu_k}(f) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt bei Beachtung der nach (a) gültigen Beziehung $f \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, K)$ mittels Bemerkung M.21.7.3 dann

$$f \in \mathcal{L}^p(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, K) \tag{5}$$

.

(e) Sei nun speziell

$$p = 1. \tag{6}$$

Weiter sei zunächst

$$K = \mathbb{R}. \tag{7}$$

Wir führen vollständige Induktion über n durch und betrachten zunächst $n = 2$. Wegen (7) und der Wahl von f_1 und f_2 gilt dann

$$f_1 \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{8}$$

und

$$f_2 \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wir streben nun die Anwendung von Satz M.24.3.2 an. Sei hierzu

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{10}$$

Aufgrund der Konstruktion von f gilt dann

$$f_{\omega_1 \bullet} = [f_1(\omega_1)] f_2 \tag{11}$$

Wegen (8) gilt

$$f_1(\omega_1) \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Wegen (12), (9) und (11) folgt mittels Satz M.21.5.5 dann

$$f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R}) \tag{13}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_2} [f_1(\omega_1)] d_2 d\mu_2 = [f_1(\omega_1)] \int\limits_{\Omega_2} f_2 \partial \mu_2. \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) gilt mit den Bezeichnungen von Satz M.24.3.2 dann

$$k_{1,f}(\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} d\mu_1 = [f_1(\omega_1)] \int\limits_{\Omega_2} f_2 \partial \mu_2. \tag{15}$$

Aus (10) und (15) folgt dann

$$k_{1,f} = (\int\limits_{\Omega_2} f_2 d\mu_2) f_1 \tag{16}$$

Wegen (8) ,(9) und (16) folgen mittels Teil (d) von Satz M.21.5.5 dann $k_{1,f} \in \mathcal{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R})$ und

$$\int\limits_{\Omega_1} k_{1,f} d\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} (\int\limits_{\Omega_2 f_2 d\mu_2}) f_1 d\mu_1 = \prod_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k. \tag{17}$$

Wegen (8) und (9) folgt aus dem schon gezeigen (vlg (5)) dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2; \mathbb{R}) \tag{18}$$

Wegen (18) ergibt sich mittels Satz M.24.3.2 und (17) dann

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} k_{1,f} d\mu_1 = \prod_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k. \tag{19}$$

Im Fall $n = 2$ ist damit alles gezeigt. Sei nun $n \in \{3, 4, ...\}$ und sei die Behauptung für $s \in \{2, ..., n-1\}$ schon gezeigt. Bezeichnet dann g das Tensorprodukt der Folge $(f_k)_{k=1}^{n-1}$, so gelten also

$$g \in \mathcal{L}^1(\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k, \otimes_{k=1}^{n-1} \mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^{n-1} \mu_k; \mathbb{R}) \tag{20}$$

und

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k} g d(\otimes_{k=1}^{n-1} \mu_k) = \prod_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k. \tag{21}$$

Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen erkennt man, dass f das Tensorprodukt von g und f_n ist. Hieraus erkennt man bei Beachtung von (20) und $f_n \in \mathcal{L}^1\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n; \mathbb{R}$ aus dem schon für $n = 2$ gezeigten (vgl. (18) und (19)) dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\times_{k=1}^{n-1}\Omega_k \times \Omega_n, \otimes_{k=1}^{n-1}\mathfrak{A}_k \otimes \mathfrak{A}_n, \otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k \otimes \mu_n; \mathbb{R}) \tag{22}$$

sowie

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1}\Omega_k \times \Omega_n} f d(\otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k \otimes \mu_n) = [\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1}\Omega_k} g d(\otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k)][\int\limits_{\Omega_n} f_n d\mu_n]. \tag{23}$$

Aufgrund unserer Vereinbahrung gilt

$$\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k \times \Omega_n = \times_{k=1}^{n}\Omega_k. \tag{24}$$

Wegen Lemma M.24.1.7 gilt

$$\otimes_{k=1}^{n-1} \mathfrak{A}_k \otimes \mathfrak{A}_n = \otimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k. \tag{25}$$

Wegen Satz M.24.1.17 gilt

$$\otimes_{k=1}^{n-1} \mu_k \otimes \mu_n = \otimes_{k=1}^{n}\mu_k. \tag{26}$$

Wegen (24)-(26) folgt aus (22) dann

$$f \in \mathcal{L}^1(\times_{k=1}^{n}\Omega_k, \otimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^{n}\mu_k; \mathbb{R}). \tag{27}$$

sowie aus (23) und (21) weiterhin

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k} f d(\otimes_{k=1}^{n}\mu_k) = \int\limits_{\times_{k=1}^{n-1}\Omega_k \times \Omega_n} f d(\otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k \otimes \mu_n) = [\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1}\Omega_k} g d(\otimes_{k=1}^{n-1}\mu_k)][\int\limits_{\Omega_n} f_n d\mu_n]$$

$$= [\prod_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k][\int\limits_{\Omega_n} f_n d\mu_n] = \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k. \tag{28}$$

Wegen (27) und (28) ist dann der Induktionsschritt vollzoge. Im Fall $K = \mathbb{R}$ ist somit alle bewiesen. Sei nun

$$K = \overline{\mathbb{R}}. \tag{29}$$

Weiter sei

$$k \in \{1, ..., n\}. \tag{30}$$

Wegen (29) und (30) ist

$$f_k \in \mathcal{L}^1(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k : \overline{\mathbb{R}}). \tag{31}$$

Sei

$$c_k := \{|f_k| = +\infty\}. \tag{32}$$

Wegen (31) und (32) folgt mittels Teil (a) von Satz M.21.6.5

$$c_k \in \mathcal{N}_{\mu_k}. \tag{33}$$

Wegen (33) gilt dann $c_k \in \mathfrak{A}_k$ und somit, da $\mathfrak{A}_k$ eine σ-Algebra in Ω ist, dann

$$\Omega_k \backslash c_k \in \mathfrak{A}_k. \tag{34}$$

Seien

$$\tilde{f}_k := 1_{\Omega_k \backslash c_k} \bullet f_k. \tag{35}$$

Wegen $f_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}})$ sowie (34) und (35) folgt mittels Bemerkung M.17.5 nun

$$\tilde{f}_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}}). \tag{36}$$

Aus (32) und (35) folgt

$$\{f_k \neq \tilde{f}_k\} = c_k. \tag{37}$$

Aus (33) und (37) folgt

$$\{f_k \neq \tilde{f}_k\} \in \mathcal{N}_{\mu_k}. \tag{38}$$

Wegen (31),(36) und (38) folgen mittels Teil (b) von Satz M.21.6.3 dann

$$\tilde{f}_k \in \mathcal{L}^1(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \overline{\mathbb{R}}) \tag{39}$$

und

$$\int\limits_{\Omega_k} f_k d\mu_k = \int\limits_{\Omega_k} \tilde{f}_k d\mu_k. \tag{40}$$

Wegen (32) und (35) gilt

$$\tilde{f}_k \in A(\Omega_k, \mathbb{R}). \tag{41}$$

Aus (39) und (41) folgt nun

$$\tilde{f}_k \in \mathcal{L}^1(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{R}). \tag{42}$$

Es bezeichne $\tilde{f}$ das Tensorprodukt der Folge $(\tilde{f}_k)_{k=1}^n$. Wegen (30) und (42) folgt aus dem schon Gezeigten (vgl (27) und (28)) dann

$$\tilde{f}_k \in \mathcal{L}^1(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^n \mu_k; \mathbb{R}) \tag{43}$$

sowie

$$\int\limits_{\times_{k=1}^n \Omega_k} \tilde{f} d(\otimes_{k=1}^n \mu_k) = \prod_{k=1}^n \int_{\Omega_k} \tilde{f}_k d\mu_k. \tag{44}$$

Wir zeigen nun, dass die linke Seite von (44) mit dem analogen Integral von f übereinstimmt.

v99m
13.12.2010

Sei hierzu

$$k \in \{1, .., n\} \tag{45}$$

$$j \in \{1,..,n\} \tag{46}$$

sei

$$A_{jk} := \begin{cases} \Omega_j, & j \in \{1,...,n\}\backslash k \\ C_k, & k = j \end{cases} \tag{47}$$

Da für $j \in \{1,..,n\}$ $\mathfrak{A}_j$ eine $\sigma - Algebra$ in Ω_j, gilt $\Omega_j \in \mathfrak{A}_j$. Hieraus folgt in Verbindung mit (46), (47) und (33)

$$\times_{j=1}^{n} A_{jk} \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \tag{48}$$

Wegen (45), (47), (30), (33) folgt mittels Teil (f) von Bemerkung M.24.1.1

$$\times_{j=1}^{n} A_{jk} \in \mathcal{N}_{\otimes_{j=1}^{n} \mu_j} \tag{49}$$

Wegen (45), (49) liefert Teil (c) von Satz M.5.1

$$\cup_{k=1}^{n} (\times_{j=1}^{n}) \in \mathcal{N}_{\otimes_{j=1}^{n} \mu_j} \tag{50}$$

Unter Beachtung von (37), (45), (46), (47) folgt

$$\begin{aligned} \{f \neq \tilde{f}\} &= \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{j=1}^{n} \Omega_j | \prod_{k=1}^{n} f_k(\omega_k) \neq \prod_{k=1}^{n} \tilde{f}_k(\omega_k)\} \\ &\subseteq \{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{j=1}^{n} \Omega_j | \exists k \in \{1, ...n\} \text{mit} f_k(\omega_k) \neq \tilde{f}_k(\omega_k)\} \\ &\{(\omega_1, ..., \omega_n) \in \times_{j=1}^{n} | \exists k \in \{1, ..., n\} \text{mit} \omega_k \in C_k\} = \cup_{k=1}^{n} (\times_{j=1}^{n} A_{jk}) \end{aligned} \tag{51}$$

Wegen (30), (36) folgt mittels Teil(a) von Satz M.24.2.5

$$\tilde{f} \in \mathcal{M}(\times_{k=1}^{n} \Omega_k, \otimes_{k=1}^{n} \mu_k; \overline{\mathbb{R}}) \tag{52}$$

Wegen (a), (52) liefert Satz M.17.5

$$\{f \neq \tilde{f}\} \in \otimes_{k=1}^{n} \mu_k \tag{53}$$

Wegen (50), (51), (53) liefert Teil (b) von Satz (M.5.1)

$$\{f \neq \tilde{f}\} \in \mathcal{N}_{\otimes_{k=1}^{n} \mu_k} \tag{54}$$

Wegen (43), (a) und (54) folgen mittels Teil (b) von Satz M.21.6.3

$$f \in \mathcal{L}^1(\times_{k=1}^{n} \Omega_k, \otimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k, \otimes_{k=1}^{n} \mu_k; \overline{\mathbb{R}}) \tag{55}$$

und

$$\int_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} f d(\otimes_{k=1}^{n} \mu_k) = \int_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} \tilde{f} d(\otimes_{k=1}^{n} \mu_k) \tag{56}$$

Unter Verwendung von von (56), (44), (30), (40) folgt

$$\begin{aligned} \int_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} f d(\otimes_{k=1}^{n} \mu_k) &\overset{(56)}{=} \int_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} \tilde{f} d(\otimes_{k=1}^{n} \mu_k) \\ &\overset{(44)}{=} \prod_{k=1}^{n} \int_{\Omega_k} \tilde{f}_k d\mu_k \overset{(30),(40)}{=} \prod_{k=1}^{n} \int_{\Omega_k} f_k d\mu_k \end{aligned} \tag{57}$$

Wegen (55) und (57) ist dann (d) bewiesen.

(e) Aufgrund der Wahl von f ergibt sich mittels (b) $\mathcal{N}_{P,\mu_k}(f_k) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen Bemerkung M.21.7.3 $f_k \in \mathcal{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K)$ sowie wegen Teil (b) von Bemerkung M.21.7.2 zu dem $f \notin \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; K)$.

■

Es folgen nun erste Anwendungen von Satz M.24.3.3, welche auf die Berechnung der Potenzmomente eines Potenzmaßes ausgerichtet sind.

Satz M.24.3.4. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(k_1, ..., k_m) \in \mathbb{N}_0^n$ und $(\mu_j)_{j=1}^m$ eine Folge von $\sigma-$endlichen Maßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Es bezeichne $\otimes_{j=1}^m \mu_j$ das Caratheodorische Produktmaß von $(\mu_{j=1}^m$. So gilt:

(a) Es ist $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \prod_{j=1}^m \mu_{k_j}(\mu_j)$.

(b) Für alle $j \in \{1, ..., m\}$ sei $\mathcal{M}_{k_j}(\mu_j) \in [0, +\infty)$. So ist

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \in [0, +\infty) \text{ und es gilt } \mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \prod_{j=1}^m \mathcal{M}_{k_j}(\mu_j)$$

Beweis.

(a) Sei $P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, ..., x_m)^T \mapsto \prod_{j=1}^m (x_j)^{k_j} \tag{1}$$

Sei

$$(x_1, ..., x_m)^T \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m}((x_1, ..., x_m)^T) = \prod_{j=1}^m P_{k_j,\mathbb{R}^m}(x_j) \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt weiterhin

$$|P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m}((x_1, ..., x_m)^T)| = \prod_{j=1}^m |P_{k_j,\mathbb{R}^m}|(x_j) \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt für

$$j \in \{1, .., n\} \tag{5}$$

nun

$$|P_{k_j,\mathbb{R}^m} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{6}$$

Wegen Satz M.16.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \otimes_{j=1}^m \mathfrak{B}_1 \tag{7}$$

Wegen (4) -(7) ergibt sich mittels Satz M.24.2.6

$$|P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m}((x_1,...,x_m)^T)| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{8}$$

sowie

$$\int_{\mathbb{R}^m} |P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m}((x_1,...,x_m)^T)| d(\otimes_{j=1}^m \mu_k) = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} |P_{k_j,\mathbb{R}^m}| d\mu_j \tag{9}$$

Wegen Definition M.23.2.1 folgt aus (9)

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \prod_{j=1}^m \mathcal{M}_{k_j}(\mu_j) \tag{10}$$

(b) Wegen (10) gilt

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \in [0, +\infty) \tag{11}$$

Sei

$$j \in \{1, ..., m\} \tag{12}$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$\mathcal{M}_{k_j}(\mu_j) \in [0, +\infty) \tag{13}$$

Wegen (13) folgt bei Beachtung von Definition M.23.2.1

$$P_{k_j,\mathbb{R}} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_1, \mu_k; \mathbb{R}) \tag{14}$$

und

$$\mathcal{M}_{k_j}(\mu_j) = \int_{\mathbb{R}} P_{k_j;\mathbb{R}} d\mu_j \tag{15}$$

Wegen (2), (3), (7), (12), (14) folgt mittels Teil (b) von Satz M.24.3.3

$$\mathbb{P}_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \otimes_{j=1}^m \mu_j; \mathbb{R})$$

und

$$\int_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m} d(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \prod_{j=1}^m \int_{\mathbb{R}^m} P_{k_j,\mathbb{R}} d\mu_j \tag{16}$$

Wegen Definition M.23.2.1 gilt

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^n \mu_j) = \int_{\mathbb{R}} P_{(k_1,...,k_m),\mathbb{R}^m} d(\otimes j = 1^m \mu_j) \tag{17}$$

aus (15) -(17) folgt

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \prod_{j=1}^m \mu_{k_j}(\mu_j) \tag{18}$$

Wegen (11) und (18) ist dann (b) bewiesen.

■

Satz M.24.3.5. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(\mu_j)_{j=1}^m$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. So gilt

(a) Seien $s \in \{1, ..., m\}$, $k \in \mathbb{N}_0$. Für $j \in \{1, ..., m\}$ sei $k_j = \begin{cases} k, & j = s \\ 0, & j \in \{1, ..., m\}\backslash\{s\} \end{cases}$ So gilt

(a1) Es ist $\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \mathcal{M}_k(\mu_s)$

(a2) Sei $\mathcal{M}_k(\mu_s) \in [0, +\infty)$. So ist $\mathcal{M}_{(k_1,....,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \in [0, +\infty)$ und es gilt

$$\mathcal{M}_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \mathcal{M}_k(\mu_s)$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. So gilt folgende Äquivalenz

(i) Für alle $j \in \{1, ..., m\}$ gilt $\mu_j \in \mathcal{M}_j^{1,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

(ii) Es ist $\otimes_{j=1}^m \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(c) Sei $(\mu_j)_{j=1}^m$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. So ist $\otimes_{j=1}^m \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gelten

$$\tilde{\mathcal{M}}_1(\otimes_{j=1}^m) = (\mathcal{M}_1(\mu_1), ..., \mathcal{M}_m(\mu_m))^T$$

sowie

$$Cov(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = diag(var(\mu_1), ..., var(\mu_m))$$

(d) Sei $(\mu_j)_{j=1}^m$ eine standardisiert Folge aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. So ist

$$\otimes_{j=1}^m \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

und es gelten

$$\tilde{\mathcal{M}}_1(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = 0_{m\times 1} \text{ und } cov(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = I_m$$

Beweis.

(a) Sei

$$j \in \{1, ..., m\} \tag{1}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil (a) von Bemerkung M.23.2.2

$$\mathcal{M}_0(\mu_j) = \mu_j(\mathbb{R}) = 1 \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teils (b) von Bemerkung M.23.3.2 zudem

$$M_0(\mu_j) = \mathcal{M}_0(\mu_j) = 1 \tag{3}$$

(a1) Unter Beachtung von Teil (a) von Satz M.24.3.4 sowie (1), (2) folgt

$$\mathcal{M}_{(k_1,...k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \overset{M.24.3.4}{=} \prod_{k=1}^n \mathcal{M}_{kj}(\mu_j) = [\mathcal{M}_{ks}(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{s\}} \mathcal{M}_{kj}(\mu_j)]$$

$$= [\mathcal{M}_k(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{s\}} \mathcal{M}_0(\mu_j)] = [\mathcal{M}_k(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,n\}\backslash\{s\}} 1] = \mathcal{M}_k(\mu_s)$$

(a2) Wegen $\mathcal{M}_k(\mu_s) \in [0, +\infty)$ sowie (1), (2) folgt für

$$j \in \{1, .., m\} \tag{4}$$

$$\mathcal{M}_{kj}(\mu_j) \in [0, +\infty) \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) folgt mittels Teil (b) von Satz M.24.3.4 sowie zusätzlicher Beachtung von (1) und (3)

$$M_{(k_1,...,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \overset{M.24.3.4}{=} \prod_{j=1}^m M_{kj}(\mu_j) = [M_k(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{s\}} M_{kj}(\mu_j)]$$

$$[M_k(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,\}\backslash\{s\}} M_0(\mu_j)] = [M_k(\mu_s)][\prod_{j\in\{1,...,m\}\backslash\{s\}} 1] = M_k(\mu_s)$$

(b) Dies folgt sogleich aus (a1).

(c) Wegen (b) folgt sogleich

$$\otimes_{j=1}^m \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{6}$$

Wegen (6) folgt mittels M.23.5.1

$$\otimes_{j=1}^m \mu_j \in \mathcal{M}^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{7}$$

Sei

$$s \in \{1, ..., m\} \tag{8}$$

und sei $\tilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_s \tag{9}$$

Unter Beachtung von (7) -(9) setzen wir wir Satz M.23.9.1

$$\tilde{M}_s(\otimes_{j=1}^m \mu_j) := \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} d(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \tag{10}$$

Für $j \in \{1, ..., \}$ sei nun

$$k_j := \begin{cases} 1, & \text{falls } j = s \\ 0, & \text{falls } j \in \{1, ..., m\}\backslash\{s\} \end{cases} \tag{11}$$

Unter Beachtung von (7)- (11), Definition M.23.2.1, (a2) folgt dann

$$\tilde{M}_s(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = M_{(k_1,\dots,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \stackrel{(a2)}{=} M_1(\mu_s) \tag{12}$$

Aus (8) und (12) folgt

$$\tilde{M}_1(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = M_{(k_1,\dots,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \stackrel{(8),(12)}{=} (M_1(\mu_1), ..., M_m(\mu_m))^T \tag{13}$$

Sei

$$(r, s) \in \{1, ..., m\} \times \{1, .., m\} \tag{14}$$

Wegen (6), (4) gilt nach Teil (b1) von Satz M.23.9.3

$$\tilde{P}_{r,1;\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \otimes_{j=1}^m \mu_j; \mathbb{R}) \tag{15}$$

Unter Beachtung von (15) setzen wir

$$\tilde{M}_{rs}(\otimes_{j=1}^m \mu_j \mu_j) = \int_{\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{r,1;\mathbb{R}^m} \tilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} d(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \tag{16}$$

Wegen Definition M.23.9.3 gilt

$$cov_{rs}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = \tilde{M}_{rs}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) - [\tilde{[}M]_r(\otimes_{j=1}^m \mu_j)][\tilde{M}_s(\otimes_{j=1}^m \mu_j)] \tag{17}$$

Sei

$$r \neq s \tag{18}$$

Für $j \in \{1, ..., m\}$ sei

$$k_j = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \{r, s\} \\ 0, & \text{falls } j \in \{1, ..., m\} \backslash \{r, s\} \end{cases} \tag{19}$$

Unter Beachtung von (16), (17), (18) sowie Defintion M.23.9.1 und Teil (b) von Satz M.24.3.4 folgt nun

$$\tilde{M}_{rs}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = M_{(k_1,\dots,k_m)}(\otimes_{j=1}^m \mu_j) \stackrel{M.24.3.4}{=} \prod_{j=1}^m M_{kj}(\mu_j) \tag{20}$$

Wegen (19), (3) gilt für

$$j \in \{1, ..., m\} \tag{21}$$

$$M_{kj}(\mu_j) = \begin{cases} M_1(\mu_r), & \text{falls } j = r \\ M_1(\mu_s), & \text{falls } j = s \\ M_0(\mu_j), & \text{falls } j \in \{1, ..., m\} \backslash \{r, s\} \end{cases}$$

$=$

$$\begin{cases} M_1(\mu_r), & \text{falls } j = r \\ M_1(\mu_s), & \text{falls } j = s \\ 1, & \text{falls } j \in \{1, ..., m\} \backslash \{r, s\} \end{cases} \tag{22}$$

Aus (20)- (22) folgt nun

$$\tilde{M}_{rs}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = [M_1(\mu_r)][M_1(\mu_s)] \tag{23}$$

Unter Verwendung von (17), (23), (8), (12) folgt

$$\begin{aligned} cov_{rs}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) &\overset{(17)}{=} \tilde{M}_{rs}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) - [\tilde{M}_r(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j)][\tilde{M}_s(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j)] \\ &\overset{(23),(8),(12)}{=} [M_1(\mu_r)][M_1(\mu_s)] - [M_1(\mu_r)][M_1(\mu_s)] = 0 \end{aligned} \tag{24}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.3 und (24) folgt dann

$$cov(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = (cov_{rs}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j))_{r,s=1}^{m} \overset{(24)}{=} diag(cov_{11}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j), ..., cov_{mm}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j)) \tag{25}$$

Sei

$$s \in \{1, ..., m\} \tag{26}$$

Weiter sei $\pi_{m,s} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, ..., x_m)^T \mapsto x_s \tag{27}$$

Unter Beachtung von (b), (26) und (27) folgt unter Beachtung von Teil (a) von Satz M.23.9.6, dass $\pi_{m,s}$ eine $\mathfrak{B}_m - \mathfrak{B}_1$-meßbare Abbildung ist und $\pi_{m,s}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ erfüllt ist, sowie mittels Teils (c) von Satz M.23.9.6

$$cov_{ss}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = var(\pi_{m;s}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j)) \tag{28}$$

Da $(\mu_j)_{j=1}^{m}$ eine Folge von W-Maßen ist, folgt mittels Satz M.24.1.19

$$\pi_{m,s}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = \mu_s \tag{29}$$

Aus (28) und (29) ergibt sich nun

$$cov_{ss}(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = var(\mu_s) \tag{30}$$

Aus (25) und (30) ergibt sich

$$cov(\otimes_{j=1}^{m}\mu_j) = diag(var(\mu_1), ..., var(\mu_m)) \tag{31}$$

Wegen (b), (13) und (31) ist dann (c) bewiesen.

(d) Wegen (c) gilt

$$\otimes_{j=1}^{m}\mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{32}$$

$$s \in \{1, .., m\} \tag{33}$$

Wegen (33) und der Wahl von μ_s gelten nach Definition M.23.4.5

$$M_1(\mu_s) = 0 \tag{34}$$

und

$$var(\mu_s) = 1 \tag{35}$$

Wegen (32) sowie (34) bzw. (35) folgen aus (13) bzw. (31)

$$\tilde{M}_1(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = 0_{m\times 1} \tag{36}$$

bzw.

$$cov(\otimes_{j=1}^m \mu_j) = I_m \tag{37}$$

Wegen (32), (36) und (37) ist dann (d) bewiesen.

■

v102m
03.01.2011

Beispiel M.24.3.2. *Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und seien die $\mathbb{R}^n$-Vektoren $a = (a_1, ..., a_n)^T$ und $b = (b_1, ..., b_m)^T$ so gewählt, dass $a < b$ erfüllt. Es sei $\Delta := [a, b]$ und es bezeichne μ_Δ. Dann gilt:*

(a) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist $\mu_\Delta \in \mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Es gelten $\mathbb{M}_1(\mu_\Delta) = \frac{1}{2}(a+b)$ sowie $cov(\mu_\Delta) = \frac{1}{12}diag((b_1-a_1)^2, ..., (b_m-a_m)^2)$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu_\Delta) = 0_{m\times m}$ und $cov(\mu_\Delta) = I_m$.

(ii) Es ist $a = -\sqrt{3}\cdot 1_m$ und $b = \sqrt{3}\cdot 1_m$.

Beweis. *Sei*

$$j \in \{1, ..., m\} \tag{1}$$

und

$$\Delta_j := [a_j, b_j] \tag{2}$$

es bezeichne μ_Δ. Wegen Teil (a) von Satz M.23.7.1 gilt

$$\mu_{\Delta_j} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{3}$$

Wegen Teil (c) von Satz M.23.7.1 gelten weiterhin

$$M_1(\mu_{\Delta_j}) = \frac{1}{2}(a_j + b_j) \tag{4}$$

sowie

$$var(\mu_{\Delta_j}) = \frac{1}{12}(b_j - a_j)^2 \tag{5}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil (c) von Beispiel (M.24.1.6) nun

$$\mu_\Delta = \otimes_{j=1}^m \mu_\Delta \tag{6}$$

(a) Wegen (1),(3) und (6) folgt mittels Teil (b) von Satz M.24.3.5 dann $\mu_{Delta} \in \mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) *Wegen (a) und (b) folgen mittels Teil (c) von Satz M.24.3.5 dann*

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu_\Delta) = \tilde{\mathbb{M}}_1(\otimes_{j=1}^m \mu_{\Delta_j}) = (M_1(\mu_{\Delta_1}), ..., M_m(\mu_{\Delta_m}))^T \quad (7)$$

und

$$cov(\mu_\Delta) = cov(\otimes_{j=1}^m \mu_{\Delta_j}) = diag(var(\mu_{\Delta_1}), ..., var(\mu_{\Delta_m})) \quad (8)$$

Unter Beachtung von (7),(1) und (4) bzw (8), (1) und (5) folgt dann

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mu_\Delta) = (\frac{1}{2}(a_1 + b_1), ..., \frac{1}{2}(a_m + b_m))^T = \frac{1}{2}(a + b)$$

bzw.

$$cov(\mu_\Delta) = diag(\frac{1}{12}(b_1 - a_1)^2, ..., \frac{1}{12}(b_m - a_m)^2) = \frac{1}{12} diag((b_1 - a_1)^2, ..., (b_m - a_m)^2)$$

(c) *Wegen Definition M.23.4.5 sowie (7) und (8) ist (i) äquivalent zu: i'$\forall j \in \{1, ..., m\} ist \mu_{\Delta_j}$ standardisiert.*
Wegen Teil (d) von Satz M.23.7.1 ist (i') äquivalent zu (ii') $\forall j \in \{1, ..., m\}$ gilt $\Delta_j = [-\sqrt{3}, \sqrt{3}]$. Da nun offensichtlich (ii') äquivalent zu (ii) ist ist alles gezeigt.

■

M.24.4. Die m-dimensionale Normalverteilung

Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Bereitstellung eines geeigneten mehrdimensionelen Analogons der in Abschnitt 21.14 eingeführten Familie von Normalverteilungen.

Bemerkung M.24.4.1. Seien $m \in \mathbb{N}, a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m \times m}_>$. Es seien

$$f_{a,\Sigma} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty) : x \mapsto (2\pi)^{-\frac{m}{2}} [det\Sigma]^{-\frac{1}{2}} \cdot exp\{-\frac{1}{2}(x - a)^T \Sigma^{-1}(x - a)\}$$

. Dann gilt

(a) Es ist $f_{a,\Sigma} \in C((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \cap \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Sei $A \in \mathbb{R}^{m \times m}$ so gewählt, dass die Beziehung $AA^T = \Sigma$ besteht.

Beweis.

(a) Aus der Definition von $f_{a,\Sigma}$ erkennt man sogleich, dass

$$f_{a,\Sigma} \in C((\mathbb{R}^m, \rho_{E,\mathbb{R}^m}), (\mathbb{R}, \rho_{E,\mathbb{R}})) \quad (1)$$

und

$$f_{a,\Sigma} \in A(\mathbb{R}^m, [0, \infty]) \quad (2)$$

wegen (1) erbringt Satz M.15.8 dann $f_{1,\Sigma} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.17.4 dann

$$f_{a,\Sigma} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \overline{\mathbb{R}}) \quad (3)$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$f_{a,\Sigma} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \quad (4)$$

Wegen (1) und (4) ist dann (a) bewiesen.

(b) Wegne $AA^T = \Sigma$ gilt

$$\det\Sigma = \det AA^T = \det A \det A^T = \det A^2 \tag{5}$$

wegen $\det\Sigma \neq 0$ folgt aus (5) dann

$$\det A \neq 0 \tag{6}$$

sowie unter Beachtung von $AA^T = \Sigma$ weiterhin

$$\Sigma^{-1} = (AA^T)^{-1} = (A^T)^{-1}A^{-1} = (A^{-1})^T A^{-1} \tag{7}$$

Sei

$$x \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (7) folgt dann

$$\begin{aligned}(x-a)^T\Sigma^{-1}(x-a) &= [A^{-1}(x-a)]^T[A^{-1}(a-x)] \\ &= [A^{-1}(x-a) - 0_{m\times 1}]^T(I_m)^{-1}[A^{-1}(a-x) - 0_{m\times 1}]\end{aligned} \tag{9}$$

Unter Beachtung von (5) und (9) folgt nun

$$\begin{aligned}&[\frac{1}{|\det A|}(f_{0_{m\times 1},I_m} \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a})](x) \\ &= (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}[(f_{0_{m\times 1},I_m} \circ T_{A^{-1}}, -A^{-1}a)(x)] \\ &= (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}[(f_{0_{m\times 1},I_m}(T_{A^{-1}}, -A^{-1}a)(x))] \\ &= (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}[(f_{0_{m\times 1},I_m}(A^{-1}x - A^{-1}a)] \\ &= (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}[(f_{0_{m\times 1},I_m}(A^{-1}(x-a)] \\ &= (\det\Sigma)^{-\frac{1}{2}}[(2\pi)^{-\frac{m}{2}}(detI_m)^{-\frac{1}{2}}\exp\{-\frac{1}{2}[A^{-1}(x-a)-0_{m\times 1}]^T I_m^{-1}[A^{-1}(x-a)-0_{m\times 1}]\}] \\ &= f_{a,\Sigma}(x).\end{aligned} \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt dann

$$f_{a,\Sigma} = \frac{1}{|\det A|}(f_{0_{m\times 1},I_m} \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}) \tag{11}$$

Wegen (6) und (11) ist dann (b) bewiesen

■

Teil (a) von Bemerkung M.24.4.1 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung:

Definition M.24.4.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, a \in \mathbb{R}$ und $\Sigma \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$. Es sei $f_{a,\Sigma}$ die in Bemerkung M.24.4.1 eingeführte Abbildung aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $\mathcal{N}_{a,\Sigma} := (\lambda^{(m)})_{f_{a,\Sigma}}$. Dann heißt $\mathcal{N}_{a,\Sigma}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern a und Σ. Insbesondere wird $\mathcal{N}_{0_{m\times 1}, I_m}$ auch als m-dimensionale Standardnormalverteilung bezeichnet.

Bemerkung M.24.4.2. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}, (m_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum\limits_{j=1}^n m_j$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ seien $a_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ und $\Sigma_j \in \mathbb{R}_{>}^{m_j \times m_j}$.
Weiterhin seien $a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$ sowie $\Sigma := diag(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$. Dann gelten $a \in \mathbb{R}^n$ sowie $\Sigma \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ und mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.24.4.1 ist $f_{a,\Sigma}$ das Tensorprodukt der Folge $(f_{a_j,\Sigma_j})_{j=1}^n$.
Beweis. Aus der Definition der beteiligten Größen folgen sogleich $a \in \mathbb{R}^n$ und $\Sigma \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$. Es ist

$$det\Sigma = det\Sigma[diag(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)] = \prod_{j=1}^n det\Sigma_j \tag{1}$$

sowie

$$\Sigma^{-1} = [diag(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)]^{-1} = diag(\Sigma_1^{-1}, ..., \Sigma_n^{-1}) \tag{2}$$

Sei

$$x \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

wobei

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{4}$$

hierbei

$$x_j \in \mathbb{R}^{m_j} \tag{5}$$

gewählt wurde. unter beachtung von (2)-(5) folgt dann

$$\begin{aligned}(x-a)^T\Sigma^{-1}(x-a) &= \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix}^T [diag(\Sigma_1^{-1}, ..., \Sigma_n^{-1})] \begin{pmatrix} x_1 - a_1 \\ \vdots \\ x_n - a_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^n (x_j - a_j)^T \sum_{j=1}^n (x_j - a_j) \end{aligned} \tag{6}$$

Unter Beachtung von (1), der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion sowie von (6) folgt dann

$$\prod_{j=1}^n f_{a_j,\Sigma_j}(x_j) = \prod_{j=1}^n (2\pi)^{\frac{m}{2}} (det\Sigma_j)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x_j - a_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_j - a_j)\}$$

$$= (2\pi)^{\frac{m}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j} (\prod_{j=1}^{n} det\Sigma_j)^{-\frac{1}{2}} [\prod_{j=1}^{n} \exp\{-\frac{1}{2}(x_j - a_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_j - a_j)\}$$

$$= (2\pi)^{\frac{m}{2}} (det\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n}(x_j - a_j)^T \Sigma_j^{-1}(x_j - a_j)\}$$

$$= (2\pi)^{\frac{m}{2}} (det\Sigma)^{-\frac{1}{2}} \exp\{-\frac{1}{2}(x - a)^T \Sigma^{-1}(x - a)\} = f_{a,\Sigma}(x) \quad (7)$$

Wegen (3)-(3) und (7) ist $f_{a,\Sigma}$ das Tensorprodukt von $(f_{a_j,\Sigma_j})_{j=1}^n$. ■

Lemma M.24.4.1. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m}$ die m-dimensionale Standardnormalverteilung sowie $\mathcal{N}_{0,1}$ die Standardnormalverteilung. Dann gilt

(a) Es gelten $\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, sowie $\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m} = \otimes_{j=1}^m \mathcal{N}_{0,1}$.

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m} \in \mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Es gelten $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m}) = 0_{m\times1}$, sowie $cov(\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m}) = I_m$.

Beweis.

(a) Wegen Teil (a) von Satz M.21.14.2 gilt

$$f_{0,1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \quad (1)$$

Wegen Definition M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} = (\lambda^{(1)})_{f_{0,1}} \quad (2)$$

Wegen Teil (6) von Satz M.21.14.2 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \quad (3)$$

Wegen Satz M.16.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \otimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_1 \quad (4)$$

Wegen Bemerkung M.24.4.2 ist $f_{0_{m\times1},I_m}$ das Tensorprodukt on Exemplaren $f_{0,1}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (4) mittels Teil (b) von Satz M.24.2.5 dann erneut $f_{0_{m\times1},I_m} \in \mathcal{E}*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, sowie unter Beachtung von $f_{0,1} \in A(\mathbb{R}, \mathbb{R})$ mittels Teil (b) von Satz M.24.2.7 weiterhin

$$\otimes_{j=1}^m (\lambda^{(1)})_{f_{0,1}} = (\otimes_{j=1}^m \lambda^{(1)})_{f_{0_{m\times1},I_m}} \quad (5)$$

Wegen Folgerung M.24.1.2 gilt

$$\lambda^{(m)} = \otimes_{j=1}^m \lambda^{(1)} \quad (6)$$

Unter Beachtung von Definition M.24.4.1, (5), (5) und(2) folgt dann

$$\mathcal{N}_{0_{m\times1},I_m} = (\lambda^{(m)})_{f_{0_{m\times1},I_m}} = (\otimes_{j=1}^m \lambda^{(1)})_{f_{0_{m\times1},I_m}} = \otimes_{j=1}^m (\lambda^{(1)})_{f_{0,1}} = \otimes_{j=1}^m \mathcal{N}_{0,1} \quad (7)$$

Wegen (3) und (7) ist dann (a) bewiesen.

(b) Wegen Teil (a) von Satz M.23.7.2 gilt $\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Somit ist also insbesondere

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) folgt mit Teil (b) von Satz M.24.2.5 dann (b).

(c) Wegen Teil(d) von Satz M.23.7.2 ist $\mathcal{N}_{0,1}$ ein standardisiertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,b}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt mittels Teil (d) von Satz M.24.2.5 dann die Behauptung von c.

■

Unsere nächste Zielstellung besteht nun darin, unter Zugrundeleung von Lemma M.24.4.1 verschiedene Resultate für die allgemeine m-dimensionale Normalverteilung herzuleiten. Hierzu benötigen wir noch einige vorbereitende Resultate zur Bildung von Bildmaßen.

Satz M.24.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Weiterhin sei $T \in A(\Omega, \Omega')$ eine Bijektion, welche $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbar ist und für welche die Umkehrabbildung T^{-1} zudem $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-meßbar ist. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $f \circ T^{-1} \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A})$ sowie $T(\mu_f) = [T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}$.

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{E}^*\Omega, \mathfrak{A}$ sowie der $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-Meßbarkeit von T^{-1} liefert Teil (b) von Folgerung M.21.10.1 (angewandt auf $T(\mu)$ und T^{-1} statt μ und T) dann

$$f \circ T^{-1} \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}') \tag{1}$$

sowie

$$T^{-1}([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}) = (T^{-1}[T(\mu)])_f. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von T und T^{-1} ist $T^{-1} \circ T$ nach Satz M.15.11 dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbar und es gilt

$$(T^{-1}T)(\mu) = [T^{-1}(T(\mu))] \tag{3}$$

nach Konstruktion gilt

$$T^{-1} \circ T = Id_\Omega \tag{4}$$

Wegen Beispiel M.15.4 ist Id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-meßbare Abbildung und es gilt:

$$(Id_\Omega)(\mu) = \mu \tag{5}$$

Unter Verwendung von (5), (4) und (3) folgt nun

$$\mu = (Id_\Omega)(\mu) = (T^{-1} \circ T)(\mu) = T^{-1}[T(\mu)] \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann

$$T^{-1}([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}) = \mu_f \tag{7}$$

Aufgrund der Wahl von T und T^{-1} ist $T \circ T^{-1}$ nach Satz M.15.11 dann $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}'$-meßbar und es gilt

$$(T \circ T^{-1})([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}) = T[T^{-1}([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}})] \tag{8}$$

Nach Konstruktion gilt

$$T \circ T^{-1} = Id_\Omega. \tag{9}$$

Wegen Beispiel M.15.4 ist Id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-meßbare Abbildung und es gilt

$$(Id_\Omega)([T_\mu]_{f\circ T^{-1}}) = [T(\mu)]_{f\circ T^{-1}} \tag{10}$$

Unter Beachtung von (7), (8), (9) und (10) folgt nun

$$\begin{aligned} T(\mu_f) &= T[T^{-1}([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}})] = (T\circ T^{-1})([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}) \\ &= Id_{\Omega'}([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}) = [T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}. \end{aligned}$$

Damit ist alles gezeigt. ■

v103m
04.01.2011

Satz M.24.4.2. Seien $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Es sei $T_{A,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $x \mapsto Ax + a$. Dann ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{A,a}(\lambda^{(m)}) = \frac{1}{|\det A|}\lambda^{(m)}$$

Beweis. Siehe z.B. Elstrudt, Kapitel 2, § 2, Satz 5 oder H. Bauer: Maß- und Integrationstheorie, Satz 8.4 ■

Lemma M.24.4.2. Seien $k, l, m \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{R}^{l\times m}$, $B \in \mathbb{R}^{k\times l}$, $a \in \mathbb{R}^l$ und $b \in \mathbb{R}^k$. Dann gilt

$$T_{B,b} \circ T_{A,a} = T_{BA,Ba+b}$$

Beweis. Sei $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\begin{aligned} (T_{B,b} \circ T_{A,a})(x) &= T_{B,b}\left(T_{A,a}(x)\right) = T_{B,b}(Ax + a) = B(Ax + a) + b \\ &= BAx + (Ba + b) = T_{BA,Ba+b} \end{aligned}$$

■

Lemma M.24.4.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann ist $T_{A,a}$ bijektiv und es gilt

$$(T_{A,a})^{-1} = T_{A^{-1},-A^{-1}a}$$

Beweis. Unter Beachtung von Lemma M.24.4.2 ergeben sich

$$T_{A,a} \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a} = T_{AA^{-1},A(-A^{-1}a)+a} = T_{I_m,0_{m\times 1}} \tag{1}$$

und

$$T_{A^{-1},-A^{-1}a} \circ T_{A,a} = T_{A^{-1}A,A^{-1}a-A^{-1}a} = T_{I_m,0_{m\times 1}} \tag{2}$$

Aus der Definition von $T_{I_m,0_{m\times 1}}$ folgt sogleich, dass

$$T_{I_m,0_{m\times 1}} = Id_{\mathbb{R}^m} \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgen dann alle Behauptungen. ■

Satz M.24.4.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \epsilon^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

(a) Es ist $(\lambda^{(m)})_f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(b) Seien $a \in \mathbb{R}^m$ und $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Unter Beachtung von $\det A \neq 0$ sei

$$g_{A,a} := \frac{1}{|\det A|}(f \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a})$$

Dann gilt $g_{A,a} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

(c) Es ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$- messbare Abbildung und es gilt $T_{A,a}((\lambda^{(m)})_f) = (\lambda^{(m)})_{g_{A,a}}$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Teil (a) von Satz M.21.3.4.

(b) Wegen $\det A \neq 0$ ist $T_{A,a}$ nach Lemma M.24.4.3 bijektiv und es gilt

$$(T_{A,a})^{-1} = T_{A^{-1},-A^{-1}a} \tag{1}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 und (1) sind $T_{A,a}$ und $(T_{A,a})^{-1}$ dann jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Damit ergeben sich mittels Satz M.24.4.1 dann

$$f \circ (T_{A,a})^{-1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{2}$$

und

$$T_{A,a}((\lambda^{(m)})_f) = [T_{A,a}(\lambda^{(m)})]_{f\circ(T_{A,a})^{-1}} \tag{3}$$

Wegen Satz M.24.4.2 gilt

$$T_{A,a}(\lambda^{(m)}) = \frac{1}{|\det A|}\lambda^{(m)} \tag{4}$$

Wegen (2) und $\frac{1}{|\det A|} \in [0, +\infty)$ ist nach Satz M.21.3.5 dann

$$\frac{1}{|\det A|}(f \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}) \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{5}$$

und es gilt

$$(\lambda^{(m)})_{\frac{1}{|\det A|}(f\circ T_{A^{-1},-A^{-1}a})} = \left(\frac{1}{|\det A|}\lambda^{(m)}\right)_{f\circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}} \tag{6}$$

Aufgrund der Definition von $g_{A,a}$ folgen aus (5) bzw. (6) dann

$$g_{A,a} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{7}$$

bzw.

$$(\lambda^{(m)})_{g_{A,a}} = \left(\frac{1}{|\det A|}\lambda^{(m)}\right)_{f\circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}} \tag{8}$$

Unter Verwendung von (3), (1), (4) und (8) folgt dann

$$T_{A,a}((\lambda^{(m)})_f) \overset{(3)}{=} [T_{A,a}(\lambda^{(m)})]_{f\circ(T_{A,a})^{-1}} \overset{(8)}{=} [T_{A,a}(\lambda^{(m)})]_{f\circ(T_{A^{-1},-A^{-1}a})^{-1}}$$
$$\overset{(4)}{=} (\frac{1}{|\det A|}\lambda^{(m)})_{f\circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}} \overset{(8)}{=} (\lambda^{(m)})_{g_{A,a}} \tag{9}$$

Wegen (7) und (9) sind dann auch (b) und (c) bewiesen. ■

Satz M.24.4.4. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\Sigma}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern a und Σ. Dann gilt

(a) Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so gewählt, dass die Beziehung $AA^T = \Sigma$ besteht. Weiter sei $T_{A,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ gemäß $x \mapsto Ax + a$ erklärt. Dann ist $T_{A,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt
$$T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = \mathcal{N}_{a,\Sigma}$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{N}_{a,\Sigma} \in \mathcal{M}^{1,k}_{+}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Es gelten $\tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = a$ und $Cov(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \Sigma$

Beweis.

(a) Wegen Teil (a) von Bemerkung M.24.4.1 gelten
$$\det A \neq 0 \tag{1}$$
und
$$f_{a,\Sigma} = \frac{1}{|\det A|}(f_{0_{m\times 1},I_m} \circ T_{A^{-1},-A^{-1}a}) \tag{2}$$
Wegen $0_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m$ und $I_m \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ gilt nach Teil (a) von Bemerkung M.24.4.1 dann
$$f_{0_{m\times 1},I_m} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{3}$$
Wegen (1) bis (3) gilt nach Teil (b) von Satz M.24.4.3 dann $f_{a,\Sigma} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ während Teil (b) von Satz M.24.4.3 die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $T_{A,a}$ sowie die Beziehung
$$T_{A,a}((\lambda^{(m)})_{f_{0_{m\times 1},I_m}}) = (\lambda^{(m)})_{f_{a,\Sigma}} \tag{4}$$
liefert. Wegen Definition M.24.4.1 gelten nun
$$\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m} = (\lambda^{(m)})_{f_{0_{m\times 1},I_m}} \tag{5}$$
und
$$\mathcal{N}_{a,\Sigma} = (\lambda^{(m)})_{f_{a,\Sigma}} \tag{6}$$
Aus (4) bis (6) folgt nun
$$T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = \mathcal{N}_{a,\Sigma} \tag{7}$$
Damit ist (a) bewiesen.

(b) Wegen Teil (b) von Lemma M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m} \in \mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) ergibt sich mittels Satz M.15.11 dann

$$\mathcal{N}_{a,\Sigma} \in \mathcal{M}_+^{1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{9}$$

Wegen (7), (8) und (9) ergibt sich mittels Teil (a) von Satz M.23.9.2 dann

$$\mathcal{N}_{a,\Sigma} \in \mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

(c) Wegen (8) gilt insbesondere

$$\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{10}$$

Wegen Teil (c) von Lemma M.24.4.1 gelten

$$\tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = 0_{m\times 1} \tag{11}$$

und

$$Cov(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = I_m \tag{12}$$

Wegen (7), (10) und (11) bzw. (12) ergibt sich mittels Teil (b) bzw (c) von Satz M.23.9.11 dann

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) &\overset{(7)}{=} \tilde{\mathbb{M}}_1(T_(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}))\\ &= A[\tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m})] + a \overset{(11)}{=} A0_{m\times 1} + a = a \end{aligned} \tag{13}$$

bzw.

$$\begin{aligned}Cov(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) &\overset{(7)}{=} Cov(T_(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}))\\ &= A[Cov(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m})]A^T \overset{(7)}{=} AI_mA^T = AA^T = \Sigma \end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) ist dann alles gezeigt.

■

Folgerung M.24.4.1. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien die geordneten Paare (a_1, Σ_1) und (a_2, Σ_2) aus $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_>^{m\times m}$ so beschaffen, dass die Beziehung $\mathcal{N}_{a_1,\Sigma_1} = \mathcal{N}_{a_2,\Sigma_2}$ besteht. Dann gelten

$$a_1 = a_2$$

und

$$\Sigma_1 = \Sigma_2$$

Beweis. Unter Beachtung von Teil (c) von Satz M.24.4.4 ergeben sich

$$a_1 = \tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{a_1,\Sigma_1}) = \tilde{\mathbb{M}}_1(\mathcal{N}_{a_2,\Sigma_2}) = a_2$$

sowie

$$\Sigma_1 = Cov(\mathcal{N}_{a_1,\Sigma_1}) = Cov(\mathcal{N}_{a_2,\Sigma_2}) = \Sigma_2$$

■

Satz M.24.4.5. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(m_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m = \sum_{j=1}^n m_j$. Für $j \in \{1, ..., n\}$ seien $a_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ und $\Sigma_j \in \mathbb{R}_>^{m_j \times m_j}$. Weiter seien

$$a := \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

sowie $\Sigma := diag(\Sigma_1, ..., \Sigma_n)$. Dann gelten $a \in \mathbb{R}^m$, $\Sigma \in \mathbb{R}_>^{m \times m}$ und $\mathcal{N}_{a,\Sigma} = \otimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a_j,\Sigma_j}$.
Beweis. Wegen Bemerkung M.24.4.2 gelten $a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}_>^{m \times m}$. Sei

$$j \in \{1, ..., n\} \tag{1}$$

Sei f_{a_j,Σ_j} wie in Bemerkung M.24.4.1 eingeführt. Wegen Teil (a) von Bemerkung M.24.4.1 gilt dann

$$f_{a_j,\Sigma_j} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}) \tag{2}$$

Wegen Definition M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{a_j,\Sigma_j} = (\lambda^{(m)})_{f_{a_j,\Sigma_j}} \tag{3}$$

Wegen Satz M.16.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \otimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{m_j} \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.24.4.2 ist mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.24.4.1 dann $f_{a,\Sigma}$ das Tensorprodukt der Folge $(f_{a_j,\Sigma_1})_{j=1}^n$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1), (2) und (4) mittels Teil (b) von Satz M.24.2.5 dann

$$f_{a,\Sigma} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

sowie unter Beachtung der Reellwertigkeit der Abbildungen $(f_{a_j,\Sigma_j})_{j=1}^n$ mittels Teil (b) von Satz M.24.2.7 weiterhin

$$\otimes_{j=1}^n (\lambda^{(m_j)})_{f_{a_j,\Sigma_j}} = \left(\otimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}\right)_{f_{a,\Sigma}} \tag{5}$$

Wegen Satz M.24.1.16 gilt

$$\lambda^{(m)} = \otimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)} \tag{6}$$

Unter Beachtung von Definition M.24.4.1, (6), (5) und (3) folgt dann

$$\mathcal{N}_{a,\Sigma} \overset{DM.24.4.1}{=} (\lambda^{(m)})_{f_{a,\Sigma}} \overset{(6)}{=} \left(\otimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}\right)_{f_{a,\Sigma}}$$

$$\overset{(5)}{=} \otimes_{j=1}^n (\lambda^{(m_j)})_{f_{a_j,\Sigma_j}} \overset{(3)}{=} \otimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a,\Sigma}$$

■

Wir studieren nun das Transformationsverhalten von m-dimensionalen Normalverteilungen unter affinen Abbildungen $T_{A,a}$ des $\mathbb{R}^m$ mit regulärem A. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Lemma M.24.4.4. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann gilt

$$B\Sigma B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$$

Beweis. Wegen $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ gilt $\Sigma^T = \Sigma$. Hieraus folgt nun

$$(B\Sigma B^T)^T = (B^T)^T \Sigma^T B^T = B\Sigma B^T \tag{1}$$

Sei

$$x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0_{m\times 1}\} \tag{2}$$

Wegen $\det B^T = \det B$ gilt $\det B^T \neq 0$. Hieraus folgt wegen (2) nun

$$B^T x \in \mathbb{R}^m \backslash \{0_{m\times 1}\} \tag{3}$$

Wegen $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ folgt aus (3) dann

$$(B^T x)^T \Sigma (B^T x) \in (0, +\infty) \tag{4}$$

Es ist

$$(B^T x)^T \Sigma (B^T x) = x^T (B\Sigma B^T) x \in (0, +\infty) \tag{5}$$

Wegen (1), (2) und (5) gilt dann $B\Sigma B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. ∎

Satz M.24.4.6. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Weiter seien $b \in \mathbb{R}^m$ und $B \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann ist $T_{B,b}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten $Ba + b \in \mathbb{R}^m$, $B\Sigma B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ sowie

$$T_{B,b}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{Ba+b, B\Sigma B^T}$$

Beweis. Aus der Wahl von B, a und b folgt

$$Ba + b \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

Wegen Lemma M.24.4.4 gilt

$$B\Sigma B^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>} \tag{2}$$

Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so gewählt, dass

$$AA^T = \Sigma \tag{3}$$

erfüllt ist. Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{A,a}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar und wegen (3) gilt nach Teil (a) von Satz M.24.4.4 dann

$$T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1}, I_m}) = \mathcal{N}_{a,\Sigma} \tag{4}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{B,b}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Aus (4) folgt nun

$$T_{B,b}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = T_{B,b}[T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m})] \tag{5}$$

Wegen Satz M.15.11 ist $T_{B,b} \circ T_{A,a}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar und es gilt

$$(T_{B,b} \circ T_{A,a})(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = T_{B,b}[T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m})] \tag{6}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{B,b} \circ T_{A,a} = T_{BA,Ba+b} \tag{7}$$

Wegen (3) gilt

$$(BA)(BA)^T = B(AA^T)B^T \overset{(3)}{=} B\Sigma B^T \tag{8}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{BA,Ba+b}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar und wegen (1), (2) und (8) gilt nach Teil (a) von Satz M.24.4.4 dann

$$T_{BA,Ba+b}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) = \mathcal{N}_{Ba+b,B\Sigma B^T} \tag{9}$$

Unter Verwendung von (5), (6), (7) und (9) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{B,b}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) &\overset{(5)}{=} T_{B,b}[T_{A,a}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m})] \overset{(6)}{=} (T_{B,b} \circ T_{A,a})(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) \\ &\overset{(7)}{=} T_{BA,Ba+b}(\mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}) \overset{(9)}{=} \mathcal{N}_{Ba+b,B\Sigma B^T} \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen (1), (2) und (10) ist dann alles gezeigt. ■

Folgerung M.24.4.2. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Dann ist $\sqrt{\Sigma}$ eine reguläre Matrix aus $\mathbb{R}^{m\times m}$, $T_{\sqrt{\Sigma}^{-1},-\sqrt{\Sigma}^{-1}a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{\sqrt{\Sigma}^{-1},-\sqrt{\Sigma}^{-1}a}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}$$

Beweis. Wegen $\sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma} = \sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}^T = \Sigma$ folgt aus Bemerkung M.24.4.1 dann

$$\det \sqrt{\Sigma} \neq 0 \tag{1}$$

sowie unter Beachtung von $(\sqrt{\Sigma}^{-1})^T = (\sqrt{\Sigma}^T)^{-1} = \sqrt{\Sigma}^{-1}$ weiterhin

$$\begin{aligned} \sqrt{\Sigma}^{-1}\Sigma(\sqrt{\Sigma}^{-1})^T &= \sqrt{\Sigma}^{-1}\sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}^{-1} \\ (\sqrt{\Sigma}^{-1}\sqrt{\Sigma})(\sqrt{\Sigma}\sqrt{\Sigma}^{-1}) &= I_m I_m = I_m \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{\sqrt{\Sigma}^{-1},-\sqrt{\Sigma}^{-1}a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Wegen (1) ergeben sich mittels Satz M.24.4.6 sowie zusätzlicher Beachtung von (2) dann

$$\sqrt{\Sigma}^{-1}\Sigma(\sqrt{\Sigma}^{-1})^T \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$$

und

$$T_{\sqrt{\Sigma}^{-1},-\sqrt{\Sigma}^{-1}a}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{\sqrt{\Sigma}^{-1}a-\sqrt{\Sigma}^{-1}a,\sqrt{\Sigma}^{-1}\Sigma(\sqrt{\Sigma}^{-1})^T} \overset{(2)}{=} \mathcal{N}_{0_{m\times 1},I_m}$$

■

v104m
10.01.2011

Folgerung M.24.4.3. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a = (a_1, .., a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma = ... \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ und die Abbildung $\pi : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$, sei definiert gemäß $(x_1, .., x_m)^T \mapsto (x_{i_1}, ..., x_{i_m})^T$.. Dann ist $\pi_{i_1,..i_m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-meßbare Abildung und mit der Setzungen $a_{i_1,...,i_m} := (a_{i_1}, .., a_{i_m})^T$ und — gelten $a_{i_1,..,i_m} \in \mathbb{R}^m, - - - - \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ sowie $- - -$ **Beweis.** Es bezeichne $(e_j)_{j=1}^m$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Es sei $E_{i_1,..,i_m} - - - - -$ ■

Unsere nächste Überlegung ist nun darauf gerichtet, Bildmaße m-dimensionaler Normalverteilungen unter speziellen affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^m$ zu berechnen. Hierzu stellen wir zunächst einige matrizentheoretische Resultate von eigenständigen Interesse bereit.

Satz M.24.4.7. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. Weiter seien $A_{11} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, $A_{12} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}$, $A_{21} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1}$, und $A_{22} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$. Es sei $A := \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{pmatrix}$. Dann gilt:

(a1) Es ist $A = \big(- - -\big)^* [diag(A_{11}, A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} A_{12})] * \big(- - -\big)$.

(a2) Es ist $diag(A_{11}, A_{22} - A_{21} * A_{11}^{-1} A_{12}) = - - - - -$

(a3) Es ist $detA = detA_{11}det(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

(a4) Es gilt $RangA = RangA_{11} + Rang(A_{22} - A_{21}A_{11}^{-1}A_{12})$.

(b) Sei $detA_{22} \neq 0$. Dann gilt:

(b1) Es ist $- - - - - -$

(b2) Es ist
$$diag(A_{11} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{22}) = - - - - -$$

(b3) Es gilt $detA = det(A_{11} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{21})detA_{22}$

(b4) Es gilt $RangA = Rang(A_{11} - A_{21}A_{22}^{-1}A_{21}) + RangA_{22}$

Folgerung M.24.4.4. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ sowie $X \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}$. Dann gelten $- - - - - - -$ sowie $- - - - - - -$

Satz M.24.4.8. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}, a_1 \in \mathbb{R}^{m_1}, a_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ und $a := - - - -$. Weiter seien die Matrizen $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}, \Sigma_{12} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}, \Sigma_{21} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1}$ und $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$ so gewählt, dass mit den Setzungen $m := m_1 + m_2$ und $- - - - - - -$ die Bezeichnung $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ besteht. Dann gilt:

(a) Es gelten $\Sigma_{11} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}_{>}$ und $det\Sigma_{11} \neq 0$ sowie $\Sigma_{22} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}_{>}$ und $det\Sigma_{22} \neq 0$,

(b) Sei $- - - - - - - - - -$. Dann gilt

(b1) Es ist $\det C = 1$

(b2) Es ist $T_{C,0_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m - \mathfrak{B}_m$-meßbare Abbildung und es gelten $diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma 11^{-1}\Sigma_{12}) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ sowie $T_{C,0_{m\times 1}}(\mathcal{N}_{a,\Sigma} = \mathcal{N}_{-----}, diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma 11^{-1}\Sigma_{12})$???

(b3) Sei $E_{m_1,m_2} := (I_{m_1}, 0_{m_1 \times m2})$. Dann ist $T_{E_{m_1,m_2}, 0_{m_1 \times m_1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_1}$-meßbare Abbildung und es gilt

$$-----------$$

(c) Sei $D := --------$. Dann gilt:

(c1) Es ist $\det D = 1$

(c2) Es ist $T_{D,0_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-meßbare Abbildung und es gelten $diag(\Sigma_{22} - \Sigma_{12}\Sigma 22^{-1}\Sigma_{12}, \Sigma_{11},) \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ sowie $T_{D,0_{m\times 1}}(\mathcal{N}_{a_1,\Sigma} = \mathcal{N}_{-----}, diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma 11^{-1}\Sigma_{12})$???

Beweis.

(a) Dies sind bekannte Eigenschaften von positiv definiten Matrizen.

(b1) Dies folgt aus der Gestalt von C.

(b2) Wegen (b1) folgt mittels Satz M.24.4.6, dass $T_{C,0_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$- meßbare Abbildung ist sowie das die Beziehung $Ca + 0_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m$,

$$C\Sigma C^T \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m} \tag{1}$$

und

$$T_{C,0_{m\times 1}}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{Ca+0_{m\times 1}, C\Sigma C^T} \tag{2}$$

bestehen. Es ist

$$Ca + 0_{m\times 1} = -------------------------- \tag{3}$$

Wegen $\Sigma \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ gilt $\Sigma = \Sigma^T$. Hieraus folgen

$$\Sigma_{11}^T = \Sigma_{11} \tag{4}$$

und

$$\Sigma_{21}^T = \Sigma_{12} \tag{5}$$

Aus (5) und (4) folgt nun

$$\begin{aligned}(-\Sigma 21\Sigma 11^{-1})^T = -(\Sigma 21\Sigma 11^{-1})^T = -(\Sigma_{11}^{-1})^T \Sigma 21^T = \\ -(\Sigma_{11}^T)^{-1}\Sigma 21^T = -\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6) folgt nun

$$-- \tag{7}$$

Unter Verwendung von (7) sowie Teil (a2) von Satz M.24.4.7 folgt nun

$$C\Sigma C^{-1} = -------------- = diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma 12) \tag{8}$$

Aus (1) und (8) folgt dann

$$diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma 12) \in \mathbb{R}_{>}^{m \times m} \tag{9}$$

Aus (2), (3) und (8) folgt weiterhin

$$T_{C,0_{m\times 1}}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = - - - - - - - - - - - - - - - - - \tag{10}$$

Damit ist (b2) bewiesen.

(b4) Wegen (9) gilt

$$diag(\Sigma_{11}, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma 12) \in \mathbb{R}_{>}^{m_2 \times m_2} \tag{11}$$

Wegen $\Sigma_1 1 \in \mathbb{R}_{>}^{m_1 \times m_1}$ und (11) folgt mittels Satz M.24.4.5 dann

$$- \tag{12}$$

Wegen Teil (b) von Satz M.24.4.4 gelten

$$\mathcal{N}_{a_1,\Sigma_{11}} \in \mathcal{M}_{+}^{1}(\mathbb{R}^{m_1}, \mathfrak{B}_1) \tag{13}$$

und

$$\mathcal{N}_{a_2 - \Sigma 21 \Sigma 11^{-1} a_1, \Sigma_{22} - \Sigma 21 \Sigma 11^{-1} \Sigma 12} \in \mathcal{M}_{m}^{1}(\mathbb{R}^{m_2}, \mathfrak{B}_{m_2}) \tag{14}$$

Unter Beachtung der Identifikation von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ erkennt man, dass $T_{E_{m_1,m_2},0_{m\times 1}}$ gerade die Projektion von $\mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^{m_1}$ vermittelt. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich wegen (12)-(14) mittels Satz M.24.1.19 dann die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_1}$-Meßbarkeit von $T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}}$ sowie

$$T_{E_{m_1},m_2,0_{m_1}\times 1}(\mathcal{N}_{a_1,\Sigma_{11}} \otimes \mathcal{N}_{a_2 - \Sigma_{21}\Sigma^{-1}a_1, \Sigma_{22} - \Sigma_{21}\Sigma_{11}^{-1}\Sigma_{12}}) = \mathcal{N}_{a_1,\Sigma_{11}} \tag{15}$$

Aus der Defintion der beteiligten Matrizen folgt sogleich

$$E_{m_1,m_2}C = (I_{m_1}, O_{m_1 \times m_2}) * - - - - - - - - - - = (I_{m_1}, 0_{m_1 \times m_2}) = E_{m_1 \times m_2} \tag{16}$$

Unter Verwendung von Lemma M.24.4.3 und (16) ergibt sich nun

$$T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}} T_{C,o_{m\times 1}} = T_{E_{m_1,m_2} * C, E_{m_1,m_2} * O_{m\times 1} + O_{m_1 \times 1}} = T_{E_{m_1,m_2} * C, 0_{m_1\times 1}} = T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}} \tag{17}$$

Unter Verwendung von (17), der nach Satz M.15.11 vorliegenden Transitivität der Bildung von Bildmaßen sowie von (10), (12) und (15) folgt nun

$$T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = (T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}} \circ T_{C,0_{m\times 1}})(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = T_{E_{m_1,m_2},0_{m_1\times 1}}[- - - - - - - - - - - -] = T_{E_{m_1,m}}$$

Damit ist (b3) bewiesen.

(c) Der Beweis von (c1)-(c3) kann in Analogie zum Beweis von (b1)-(b3) geführt werden

■

Folgerung M.24.4.5. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a = (a_1, .., a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma = (T_{jk})_{j,k=1}^m \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Weiter seien $s \in \{1, ..., m-1\}$, $(i_j)_{j=1}^s$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, ..., m\}$. Die Abbildung $\pi_{m;i_1,...,i_s} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^s$ sei definiert gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_{i_1}, ..., x_{i_s})^T$. So ist $\pi_{m;i_1,...,i_s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-messbare Abbildung und mit den Setzungen $a_{m;i_1,...,i_s} := (a_{i_1}, ..., a_{i_s})^T$ sowie $\Sigma_{m;i_1,...,i_s} := (T_{i_j i_k})_{j,k=1}^s$ gelten $a_{m;i_1,...,i_s} \in \mathbb{R}^s$, $\Sigma_{m;i_1,...,i_s} \in \mathbb{R}_>^{s\times s}$ und $\pi_{m;i_1,...,i_s}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{a_{m;i_1,...,i_s},\Sigma_{m;i_1,...,i_s}}$. **Beweis.** Seien $i_{s+1}, ..., i_m$ die $m-s$ paarweise verschiedenen Elemente der Folge $(i_j)_{j=1}^m$ aus $\{1, ..., m\}\backslash\{i_1, ..., i_s\}$. Weiter seien $\pi_{i_1,...,i_m} := (a_{i_1}, ..., a_{i_m})$ und $\Sigma_{i_1,...,i_m} := (T_{i_j i_k})_{j,k=1}^m$. Die Abbildung $\pi_{i_1,...,i_m} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ sei definiert gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_{i_1}, ..., x_{i_m})$. Wegen Folgerung M.24.4.3 liegt dann $\}fB_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\pi_{i_1,...,i_m}$ vor und es gelten $\pi_{i_1,...,i_m} \in \mathbb{R}^m$,

$$\Sigma_{i_1,...,i_m} \in \mathbb{R}^{m\times m} \tag{1}$$

sowie

$$\pi_{i_1,...,i_m}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{a_{i_1,...,i_m},\Sigma_{i_1,...,i_m}} \tag{2}$$

v105m
11.01.2011

Setzen wir jetzt $b := (a_{i_{s+1}}, ..., a_{i_m})$, so ist

$$a_{i_1,...,i_m} = \begin{pmatrix} a_{m;i_1,...,i_s} \\ b \end{pmatrix} \tag{3}$$

Sei $E_{s,m-s} := (I_s, 0_{s\times m-s})$. So ist

$$E_{s,m-s}\Sigma_{i_1,...,i_m}(E_{s,m-s})^T = \Sigma_{m;i_1,...,i_s} \tag{4}$$

d.h. es ist $\Sigma_{m;i_1,...,i_s}$ gerade der $s \times s$-Block in der linken oberen Ecke von $\Sigma_{i_1,...,i_m}$. Wegen (1) folgt mittels Teil (a) von Satz M.24.4.8

$$\Sigma_{m;i_1,...,i_s} \in \mathbb{R}_>^{s\times s} \tag{5}$$

Wegen Teil (b3) von Satz M.24.4.8 ergibt sich $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-Messbarkeit von $T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}}$ sowie unter Beachtung von (3) und (4) weiterhin

$$T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}}(\mathcal{N}_{a_{i_1,...,i_m},\Sigma_{i_1,...,i_m}}) = \mathcal{N}_{a_{m;i_1,...,i_s}\Sigma_{m;i_1,...,i_s}} \tag{6}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\pi_{m;i_1,...,i_s} = T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}} \circ \pi_{i_1,...,i_m} \tag{7}$$

Unter Beachtung von (7), Satz M.15.11, (2) und (6) ergeben sich die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-Messbarkeit von $\pi_{m;i_1,...,i_s}$ sowie

$$\begin{aligned}\pi_{m;i_1,...,i_s}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) &\overset{(7)}{=} T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}} \circ \pi_{i_1,...,i_m}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) \overset{S.M.15.11}{=} T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}}[\pi_{i_1,...,i_m}(\mathcal{N}_{a,\Sigma})] \\ &\overset{(2)}{=} T_{E_{s,m-s},0_{s\times 1}}(\mathcal{N}_{a_{i_1,...,i_m},\Sigma_{i_1,...,i_m}}) \overset{(6)}{=} \mathcal{N}_{a_{m;i_1,...,i_s},\Sigma_{m;i_1,...,i_s}}\end{aligned}$$

■

Folgerung M.24.4.6. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $n \in \{2, ..., m\}$, $(m_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^n m_j = m$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}^m$, $\Sigma \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Wir betrachten die Blockeinteilungen

$$a = \begin{pmatrix} a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{pmatrix}$$

in der für $j \in \{1, ..., n\}$ gerade $a_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde, sowie $\Sigma = (\Sigma_{jk})_{j,k=1}^n$, in der für $(j,k) \in \{1, ..., n\} \times \{1, ..., n\}$ gerade $\Sigma_{jk} \in \mathbb{R}^{m_j \times m_k}$ gewählt wurde. Sei $s \in \{1, ..., n\}$ und sei $\widetilde{\pi}_{m,s} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^{m_s}$ definiert gemäß $x = (x_1, ..., x_n)^T \mapsto x_s$, wobei hier für $j \in \{1, ..., n\}$ gerade $x_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde. So ist $\widetilde{\pi}_{m,s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_s}$-messbare Abbildung und es gelten $(a_s, \Sigma_{ss}) \in \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}_>^{m_s \times m_s}$ sowie $\widetilde{\pi}_{m,s}(\mathcal{N}_{a,\Sigma}) = \mathcal{N}_{a_s,\Sigma_{ss}}$.

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Folgerung M.24.4.5. ∎

M.24.5. Marginalmaße

Wir betrachten in diesem Abschnitt zu vorgegebenem $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ eine Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ von nichttrivialen messbaren Räumen. Ist nun $\nu \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$, so interessieren wir uns für die Bildmaße von ν, welche sich unter den Projektionsabbildungen auf entsprechende Teilkomponenten ergeben. Wir präzisieren nun diesen Gedankengang und stellen zunächst einen Sachverhalt bereit, der zur Einführung der entscheidenden Begriffsbildungen benötigt wird.

Satz M.24.5.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j=1}^n$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Weiter seien $m \in \{1, ..., n\}$ und $(i_k)_{k=1}^m$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, ..., n\}$. Die Abbildung $\pi_{i_1,...,i_m} : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{k=1}^m \Omega_{i_k}$ sei definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m})$. So gilt

(a) Es ist $\pi_{i_1,...,i_m} = \otimes_{k=1}^m \pi_{i_k}$.

(b) Für alle $j \in \{1, ..., n\}$ sei $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j. So ist $\pi_{i_1,...,i_m}$ eine $(\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$-$(\otimes_{k=1}^m \mathfrak{A}_{i_k})$-messbare Abbildung.

Beweis.

(a) Dies folgt aus der Definition der Produktabbildung (vgl. Definition M.16.2) und dem Bildungsgesetz für $\pi_{i_1,...,i_m}$ sowie $\pi_{i_1}, ..., \pi_{i_m}$.

(b) Wegen Definition M.16.1 gilt

$$\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = T_{\times_{j=1}^n \Omega_j}(\otimes_{j=1}^n \pi_j^{-1}(\mathfrak{A}_j))$$

Hieraus folgt für $k \in \{1, ..., m\}$ nun $\pi_{i_k}^{-1}(\mathfrak{A}_{i_k}) \subseteq \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$, also die $(\otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$-$(\otimes_{k=1}^m \mathfrak{A}_{i_k})$-Messbarkeit von $\otimes_{k=1}^m \pi_{i_k}$. Daraus folgt unter Beachtung von (a) die Behauptung (b).

■

Definition M.24.5.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen sowie $\nu \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$. Weiterhin seien $m \in \{1, ..., n\}$ und $(i_k)_{k=1}^m$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, ..., n\}$. Es sei $\pi_{i_1,...,i_m} : \times_{j=1}^n \Omega_j \to \times_{k=1}^m \Omega_{i_k}$ definiert gemäß $(\omega_1, ..., \omega_n) \mapsto (\omega_{i_1}, ..., \omega_{i_m})$. So heißt das Bildmaß $\pi_{i_1,...,i_m}(\nu)$ das zur Folge $(i_k)_{k=1}^m$ gehörige Marginalmaß von ν.

Sei $k \in \{1, ..., n\}$. So hat die Menge $\{1, ..., n\}$ genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen. Somit gibt es genau $k!\binom{n}{k}$ geordnete k-Tupel, welche ohne Wiederholung aus den Elementen von $\{1, ..., n\}$ zusammengestellt werden können. Dies impliziert, dass jedes Maß $\nu \in \mathcal{M}_+(\times_{k=1}^n \Omega_k, \otimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$ genau $\sum\limits_{k=1}^n k!\binom{n}{k}$ Mrginalmaße besitzt.

Es erwächst nun in natürlicher Weise die Frage, inwieweit das Maß ν durch gewisse Teile dieser Marginalmaße bestimmt ist. Die oben aufgezeigte Struktur des Systems der Marginalmaße eines Maßes macht berets deutlich, dass es schwierig erscheint ein Maß aus gewissen Marginalmaßes zu rekonstruieren. Wir formulieren hier exemplarisch das einfachste inverse Marginalproblem. Dies heißt kanonisches inverses Marginalproblem.

Kanonisches inverses Marginalproblem

Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. So ist die Menge $\mathcal{K}((\mu_j)_{j=1}^n)$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+(\times_{j=1}^n \Omega_j, \otimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j)$ anzugeben, welche für alle $j \in \{1, ..., n\}$ der Bedingung $\pi_j(\mu) = \mu_j$ genügen.

Bemerkung M.24.5.1. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j=1}^n$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. So gilt

(a) $\otimes_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{K}((\mu_j)_{j=1}^n)$.

(b) Es ist $\mathcal{K}((\mu_j)_{j=1}^n) \neq \emptyset$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Satz M.24.1.19.

(b) Dies folgt aus (a).

■

Bemerkung M.24.5.2. Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $k \in \{1, ..., m\}$ sowie $(i_j)_{j=1}^k$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\{1, ..., m\}$. Es sei $\pi_{m;i_1,...,i_k} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^k$ definiert gemäß $(x_1, ..., x_m)^T \mapsto (x_{i_1}, ..., x_{i_k})^T$. Weiter bezeichne $(e_j^{(m)})_{j=1}^m$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$ und es sei

$$E_{m;i_1,...,i_k} := \begin{pmatrix} (e_{i_1}^{(m)})^T \\ \vdots \\ (e_{i_k}^{(m)})^T \end{pmatrix}.$$

So gilt

$$\pi_{m;i_1,...,i_k} = T_{E_{m;i_1,...,i_k}, 0_{k\times 1}}.$$

Beweis. Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen. ■

Wir geben nun ein Beispiel zweier verschiedener W-Maße aus $\mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$ an, welche dieselben eindimensionalen Marginalmaße besitzen.

Beispiel M.24.5.1. *Seien*

$$\mu := \frac{1}{4}\left(\epsilon_{(0,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \epsilon_{(0,1)^T,\mathfrak{B}_2} + \epsilon_{(1,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \epsilon_{(1,1)^T,\mathfrak{B}_2}\right)$$

sowie

$$\nu := \frac{1}{2}\left(\epsilon_{(0,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \epsilon_{(1,1)^T,\mathfrak{B}_2}\right).$$

So gilt:

(a) *Es gelten $\{\mu, \nu\} \subseteq \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$ sowie $\mu \neq \nu$.*

(b) *Sei $\pi_2, 1 : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ bzw. $\pi_{2,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definiert gemäß $(x_1, x_2)^T \mapsto x_1$ bzw. $(x_1, x_2)^T \mapsto x_2$. So sind $\pi_{2,1}$ und $\pi_{2,2}$ jeweils $\mathfrak{B}_2$-$\mathfrak{B}_1$-messbar und es gelten $\pi_{2,1}(\mu) = \pi_{2,1}(\nu)$ sowie $\pi_{2,2}(\mu) = \pi_{2,2}(\nu)$. Und zwar ist $\pi_{2,1}(\mu) = \frac{1}{2}(\epsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \epsilon_{1,\mathfrak{B}_1})$ sowie $\pi_{2,2}(\mu) = \frac{1}{2}(\epsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \epsilon_{1,\mathfrak{B}_1})$.*

(c) *Es gelten $\frac{1}{2}(\epsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \epsilon_{1,\mathfrak{B}_1}) \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie*

$$\mu = \frac{1}{2}(\epsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \epsilon_{1,\mathfrak{B}_1}) \otimes \frac{1}{2}(\epsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \epsilon_{1,\mathfrak{B}_1}).$$

Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $a \in \mathbb{R}^m$ und $\Sigma \in \mathbb{R}^{m\times m}_+$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\Sigma}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern a und Σ. Blicken wir dann nochmals auf die Folgerungen M.24.4.3 und M.24.4.5 zurück, so liefern so liefern diese uns das vollständige System aller Marginalmaße von $\mathcal{N}_{a,\Sigma}$. Inbesondere erhalten wir also, dass jedes Marginalmaß von $\mathcal{N}_{a,\Sigma}$ selbst eine Normalverteilung ist. Die Umkehrung hiervon gilt nicht, denn es gibt von den Normalverteilungen verschiedene W-Maße $\mu \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ deren eindimensionalen Marginalmaße sämtlich Normalverteilungen sind. Wir behandeln nun eine Fragestellung vom inversen Typ.

Beispiel M.24.5.2. *Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $a_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $a_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $a := (a_1, a_2)^T$, $\Sigma_1 \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}_>$ und $\Sigma_2 \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}_>$. Weiter sei*

$$\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2) := \left\{X \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1} : \begin{pmatrix}\Sigma_1 & X^T \\ X & \Sigma_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)}_+\right\}.$$

Sei $Z \in \mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2)$. So gilt

$$\mathcal{N}_{a,\begin{pmatrix}\Sigma_1 & Z^T \\ Z & \Sigma_2\end{pmatrix}} \in \mathcal{K}((\mathcal{N}_{a_j,\Sigma_j})_{j=1}^2).$$

Beweis. *Die Behauptung folgt unmittelbar aus den Teilen (b3) und (c3) von Satz M.24.4.8.* ∎

Satz M.24.5.2. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ sowie

$$\mathbb{D}_{m_2\times m_1;\mathbb{R}} := \{X \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1} : I_{m_2} - XX^T \in \mathbb{R}_{+}^{m_2\times m_2}\}.$$

Weiter seien $\Sigma_1 \in \mathbb{R}_{>}^{m_1\times m_1}$, $\Sigma_2 \in \mathbb{R}_{>}^{m_2\times m_2}$ und es sei $\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2)$ wie in Beispiel M.24.5.2 definiert. Dann gilt

$$\mathcal{L}(\Sigma_1, \Sigma_2) = \{\sqrt{\Sigma_2}K\sqrt{\Sigma_1} : K \in \mathbb{D}_{m_2\times m_1;\mathbb{R}}\}.$$

v109.1m
25.01.2011

M.25. Über die Faltung im $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Das Faltungskonzept ist von großer Bedeutung für weite Teile von Analysis und Stochastik. Unsere Zielrichtung ist auf eine Anwendung der Faltungsoperation in der Stochastik ausgerichtet. In verschiedenen Kontexten der W-Theorie spielen endliche Summen von s.u. $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-ZV auf einem W-Raum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ eine signifikante Rolle. Bei der Berechnung der Verteilung einer solchen Summe wird man natürlicher Weise auf die Faltung einer endl. Folge von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ geführt. Eines der Hauptteile dieses Kapitels ist es, der Nachweis dafür zu erbringen, daß $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit der Faltungsoperation zu einer kommutativen Halbgruppe mit Einselement wird. Weiterhin werden wir interessante Unterhalbgruppen hiervon diskutieren.

M.25.1. Einige Grundlegende Aussagen über Kernabbildungen zwischen meßbaren Räumen

Die im vorliegenden Abschnitt eingeführte Begriffsbildung einer Kernabbildung zwischen meßbaren Räumen spielt eine Schlüsselrolle in weiteren Berechnungen der Stochastik und fungiert darüber hinaus als Bindeglied an der Nahtstelle zwischen Stochastik und Potentialtheorie. Wir beschränken uns in diesem Abschnitt lediglich auf eine erste Einführung in die Theorie der Kernabbildungen unter dem Aspekt ihrer Anwendungen auf die Faltungsoperation in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

v110m
31.01.2011

Definition M.25.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume. Weiterhin sei $K : \Omega \times \mathfrak{A}' \to [0, +\infty]$ eine Abbildung mit folgenden Eigenschaften:

(i) Für jedes $A' \in \mathfrak{A}'$ gilt $K_{\bullet A'} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $K_{\omega\bullet} \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$.

Dann heißt K ein Kern von $(\Omega, \mathfrak{A})$ nach $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Im Fall $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\Omega', \mathfrak{A}')$ spricht man auch kurz von einem Kern auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Definition M.25.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale meßbare Räume, sowie K eine Kern von $(\Omega, \mathfrak{A})$ nach $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann heißt K markovsch bzw submarkovsch, falls für alle $\omega \in \Omega$ gilt $K((\omega, \Omega')) = 1$ bzw. $K((\omega, \Omega')) \in [0, 1]$.

Beispiel M.25.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum. Es sei die Abbildung $I : \Omega \times \mathfrak{A} \to [0, +\infty] : (\omega, A) \mapsto \epsilon_{\omega,\mathfrak{A}}(A)$. Dann gilt:*

(a) *Sei* $A \in \mathfrak{A}$. *Dann gilt* $I_{\bullet A} = 1_A$.

(b) *Sei* $\omega \in \Omega$. *Dann gilt* $I_{\omega \bullet} = \epsilon_{\omega, \mathfrak{A}}$.

(c) *Es ist* I *ein Markov-Kern auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beispiel M.25.1.1 führt nun auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.25.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer meßbarer Raum und bezeichne I den in Beispiel M.25.1.1 eingeführten kern auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt I der einheitskern auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Wir betrachten nun zwei nichttriviale meßbare Räume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$, einen Kern K von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Das Ziel unserer nächsten Überlegung besteht darin, eine Möglichkeit aufzuzeigen, mit deren Hilfe das Maß $\mu \in \mathcal{M}_1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ mittels K in natürlicher Weise in ein Maß $\mu^{(K)} auf (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ überführt werden kann.

Satz M.25.1.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale meßbare Räume sowie K eine Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Dann gilt:

(a) Sei $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Dann gilt $K_{\bullet A_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Unter Beachtung von (a) sei die Abbildung

$$\mu^{(K)} : \mathfrak{A}_2 \to [0, +\infty] : A_2 \mapsto \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} d\mu.$$

Dann gilt $\mu^{(K)} \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$.

Beweis.

(a) Dies folgt aus Definition M.25.1.1.

(b) Sei

$$\omega_1 \in \Omega \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl von K folgt

$$K_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$K_{\omega \bullet}(\emptyset) = 0 \tag{3}$$

Nach Konstruktion gilt

$$K_{\bullet \emptyset}(\omega_1) = K((\omega_1, \emptyset)) = K_{\omega_1 \bullet}(\emptyset). \tag{4}$$

Aus (1), (2) und (4) folgt dann

$$K_{\bullet \emptyset} = 1_\emptyset \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) und Beispiel M.21.2.1 folgt nun

$$\mu^{(K)}(\emptyset) = \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet\emptyset} d\mu = \int\limits_{\Omega_1} 1_\emptyset = 0 \tag{6}$$

Sei nun $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_2$. Wegen (1) und (2) gilt dann

$$K_{\omega_1\bullet}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\omega_1\bullet}(B_n) \tag{7}$$

Nach Konstruktion gelten nun

$$K_{\bullet\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = K((\omega_1, \bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n)) = K_{\omega_1\bullet}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) \tag{8}$$

sowie für

$$n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

weiterhin

$$K_{\bullet B_n}(\omega_1) = K((\omega_1, B_n)) = K_{\omega_1\bullet}(B_n) \tag{10}$$

Aus (1) sowie (7)-(10) folgt dann

$$K_{\bullet\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} = \sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\bullet B_n} \tag{11}$$

Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$ ist, ist $(K_{\bullet B_n})_{n\in\mathbb{N}}$ nach (a) eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Hieraus ergeben sich mittels Folgerung M.21.3.4 dann

$$\sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\bullet B_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{12}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} (\sum_{n\in\mathbb{N}} K_{\bullet B_n}) d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet B_n} d\mu. \tag{13}$$

Wegen (11) folgt aus (12) bzw (13) dann

$$K_{\bullet\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$$

. sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n} d\mu = \sum_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet B_n} d\mu \tag{14}$$

Unter Verwendung der Definition von μ und (14) folgt nun

$$\mu^{(K)}(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} B_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} \mu^{(K)}(B_n).$$

Somit ist $\mu^{(K)}$ also σ-additiv. Hieraus folgt in Verbindung mit (6) dann die Behauptung.

■

Wir spezifizieren nun die Konstruktion von Satz M.25.1.1.

Folgerung M.25.1.1. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale meßbare Räume, K ein Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie $\omega_1 \in \Omega_1$. Mit den Bezeichnungen von Satz M.25.1.1 gilt dann

$$(\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1})^{(K)} = K_{\omega_1, \bullet}.$$

Beweis. Sei

$$A_2 \in \mathfrak{A}_2 \tag{1}$$

wegen (1) gilt nach Teil (a) von Satz M.25.1.1 dann

$$K_{\bullet A_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1). \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Beispiel M.21.3.2 dann

$$\int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} d\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1} = K_{\bullet A_2}(\omega_1) \tag{3}$$

Unter Beachtung der Definition von $(\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1})^{(K)}$ sowie (3) folgt dann

$$(\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1})^{(K)} = \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} d\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1} = K_{\bullet A_2}(\omega_1) = K((\omega_1, A_2)) = K_{\omega_1 \bullet}(A_2) \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt dann die Behauptung. ■

Interpretation von Satz M.25.1.1: Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttriviale meßbare Räume sowie K ein Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Dann wir die Integrationsprozedur von Satz M.25.1.1 als ein durch den Kern K gesteuerten Diffusionsvorgang interpretiert, in dessen Ergebnis ein gegebenes Maß μ auf $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ in ein Maß $\mu^{(K)}$ auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ überführt wird. In Fortsetzung dieses Gedankengans erlaubt Folgerung M.25.1.1 eube Interpretation des Kerns K selbst. Für eine gegebenes $\omega_1 \in \Omega_1$, beschreibt nämlich $K_{\omega_1, \bullet}$ genau jenes Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$, in welchem das Dirac Maß $\epsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1}$ durch den von K gesteuerten Diffusionsvorgang überführt wird.

M.26. Definition und erste Eigenschaften der Faltung in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Wir betrachten in diesem Abschnitt bei vorgegebenen $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ Folgen $(\mu_j)_{j=1}^n$ aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unser Ziel besteht darin in der Konstruktion und ersten Diskussion einer speziellen Bildmaßes des Caratheodorischen Produktmaßes $\otimes_{j=1}^n \mu_j$ der Folge $(\mu_j)_{j=1}^n$. Unsere Konstruktion basiert auf der folgenden Beobachtung.

Bemerkung M.26.0.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $A_{m,n} : \mathbb{R}^{n \times m} \to \mathbb{R}^m$ sei folgendermaßen definiert. Wir unterteilen $x \in \mathbb{R}^{n-m}$ in $m \times 1$- Blöcke gemäß $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$ und definieren $A_{m,n}(x) = \sum\limits_{j=1}^{n} x_j$. Dann gilt:

(a) Sei $E_{m,n} := (I_m, ..., I_m) \in \mathbb{R}^{m \times n-m}$. Dann gilt $A_{m,n} = T_{E_{m,n},0_{m\times 1}}$.

(b) Es ist $A_{m,n}$ eine $\mathfrak{B}_{n-m}$-$\mathfrak{B}_m$-meßbare Abbildung.

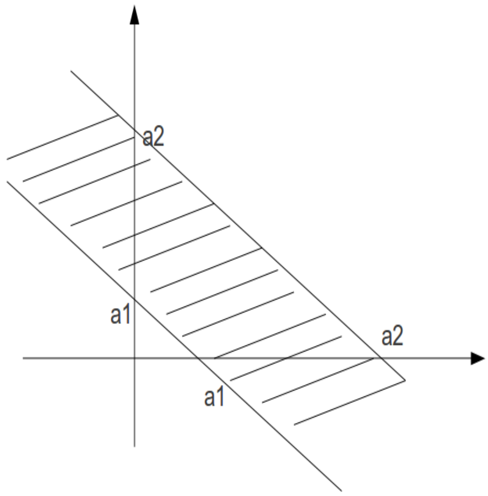
Beweis.

(a) Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

(b) Dies folgt wegen (a) aus Teil (b) von Satz M.15.9

■

Skizze: Seien $a_1 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \in (a_1, +\infty)$. Dann ist $[a_1, a_2] \in \mathfrak{B}_1$ und $A_{1,2}^{-1}([a_1, a_2])$ ist der schraffierte Streifen ind er folgenden Abbildung:



$A_{1,2}^{-1}([a_2, a_2]) = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 \in [a_1, a_2]\} = \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : a_1 \leq x_1 + x_2 \leq a_2\} =$
$\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \geq -x_1 + a_1\} \cap \{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_2 \leq -x_1 + a_2\}$

Die Bemerkung führt zur Begriffsbildung:

Definition M.26.0.1. Seien $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\mu_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\otimes_{j=1}^n$ das Caratheodorische Produktmaß von $(\mu_j)_{j=1}^n$. Weiterhin bezeichne $A_{m,n}$ die in Bemerkung M.26.0.1 eingeführte $\mathfrak{B}_{1,m}$-$\mathfrak{b}_m$-meßbare Abbildung. Dann bezeichne man das Bildmaß $A_{m,n}(\otimes_{j=1}^n \mu_j)$ als Faltungsprodukt oder auch Faltung von $(\mu_j)_{j=1}^n$. und symbolisiert das durch $\star_{j=1}^n \mu_j$ oder auch $\mu_1 \star ... \star \mu_n$.

Bemerkung M.26.0.2. Seien $m \in \mathbb{N}, n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\mu_j)_{j=1}^n$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

(a) Es ist $(\star_{j=1}^n \mu_j)(\mathbb{R}^m) = \prod_{j=1}^n \mu_j(\mathbb{R}^m)$

(b) Es ist $\star_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_n)$

(c) o_m sei das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind äquivalent (i) und (ii).

  (i) Es ist $\star_{j=1}^n \mu_j = o_m$.

  (ii) Es gibt ein $j \in \{1, ..., n\}$ mit $\mu_j = o_m$.

(d) Sei $(\mu_j)_{j=1}^n$ eie Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\star_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beweis.

(a) Unter Beachtung von Satz M.15.10 und Teil (a) von Bemerkung M.24.1.1 folgt dann

$$\begin{aligned}(\star_{j=1}^n \mu_j)(\mathbb{R}^m) &= [A_{m,n}(\otimes_{j=1}^n \mu_j)](\mathbb{R}^m) = (\otimes_{j=1}^n \mu_j)(\mathbb{R}^{n-m}) \\ &= (\otimes_{j=1}^n \mu_j)(\times_{j=1}^n \mathbb{R}^m) = \prod_{j=1}^n \mu_j(\mathbb{R}^m).\end{aligned}$$

(b)-(d) Folgt aus (a)

∎

Unsere nächste Überlegungen sind dem Studium der Integration von nichtnegativen Funktionen bzgl. des Faltungsprodukts zweier Maße gewidmet.

Satz M.26.0.1. Seien $m \in \mathbb{N} f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiterhin sei $A_{m,2} : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^m : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mapsto x_1 + x_2$ definierte $\mathfrak{b}_{2m}$-$\mathfrak{B}_m$-meßbare Abbildung. Dann gilt:

(a) Sei $F := f \circ A_{m,2}$. Dann gelten $F \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m})$ sowie

$$\int_{\mathbb{R}^{2m}} F d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^m} f d(\mu_1 \star \mu_2).$$

(b) Sei $x_2 \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $F_{x_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Unter Beachtung von (b) sei die Abbildung $g_{1,F} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $x_1 \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} F_{x_1 \bullet} d\mu_2$. Dann ist $g_{1,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d(\mu_1 \star \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^m} g_{1,F} d\mu_2.$$

(d) Sei $x_2 \in \mathbb{R}^m$ dann gilt $F_{\bullet x_2} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(e) Unter Beachtung von (d) sei die Abbildung $g_{2,F} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $x_2 \mapsto \int_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet x_2} d\mu$. Dann ist $g_{2,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{R}^m} f d(\mu_1 \star \mu_2) = \int_{\mathbb{R}^m} g_{2,F} d\mu_1.$$

Beweis.

(a) Wegen $f \in \mathcal{E} * (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie Teil (b) von Bemerkung M.26.0.1 gilt nach Satz M.21.10.1 dann $F \in \mathcal{E} * (\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m})$ sowie unter zusätzlicher Beachtung von Definition M.26.0.1 weiterhin

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f d(\mu_1 \star \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f d[A_{m,2}(\mu_1 \otimes \mu_2)] = \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} (f \circ A_{m,2}) d(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} F d(\mu_1 \otimes \mu_2)$$

(b)-(e) Mit Satz M.24.2.3 und (a) folgt das.

■

Unser nächstes Ziel ist : Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann möchten wir einen Kern $K_{\mu_2,\star}$ auf dem meßbaren Raum $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ konstruieren, welcher die Eigenschaft besitzt, dass für ein beliebiges Maß $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Faltung $\mu_1 \star \mu_2$ gerade in der durch Satz M.25.1.1 sugerierten Weies aus $K_{\mu_1,\star}$ und μ_1 gewonnen wird, also für $B \in \mathfrak{B}_m$ die Beziehung

$$(\mu_1 \star \mu_2)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,\star})_{\bullet B} d\mu_1$$

besteht. Hierzu ist noch eine kleine Vorbereitung nötig. v111m 01.02.2011

Bemerkung M.26.0.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $B \in \mathfrak{B}_m$ und $a \in \mathbb{R}^m$. Es sei $T_{I_m,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $x \mapsto x + a$ und weiter sei $B - a := \{x - a : x \in B\}$. Dann gilt:

(a) Es sit $B - a = (T_{I_m,a})^{-1}(B)$.

(b) Es ist $B - a \in \mathfrak{B}_m$.

(c) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $T_{I_m,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten

$$T_{I_m,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

sowie

$$[T_{I_m,a}(\mu)](B) = \mu(B - a)$$

Beweis.

(a) Wegen $\det I_m \neq 0$ ist nach Lemma M.24.4.3 die Abbildung $T_{I_m,a}$ bijektiv und es gilt

$$(T_{I_m,a})^{-1} = T_{(I_m)^{-1},-(I_m)^{-1}a} = T_{I_m,-a} \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) folgt nun

$$B - a = \{x - a : x \in B\} = \{T_{I_m,-a}(x) : x \in B\} = T_{I_m,-a}(B) \overset{(1)}{=} (T_{I_m,a})^{-1}(B)$$

(b) Wegen Teil (b) von Satz M.15.9 ist $T_{I_m,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Somit ist $(T_{I_m,a})^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_m$, also wegen (a) dann $B - a \in \mathfrak{B}_m$.

(c) Wegen Satz M.15.10 ist $T_{I_m,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Wegen (a) folgt nun

$$[T_{I_m,a}(\mu)](B) = \mu((T_{I_m,a})^{-1}(B)) \overset{(a)}{=} \mu(B-a)$$

■

Satz M.26.0.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unter Beachtung von Teil (b) von Bemerkung M.26.0.3 sei die Abbildung $K_{\mu_2,*} : \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $(x, B) \mapsto \mu_2(B - x)$. Dann gilt

(a) Es ist $K_{\mu_2,*}$ ein Kern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und für $(x, B) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m$ gilt

$$K_{\mu_2,*}((x, B)) = [T_{I_m,x}(\mu_2)](B)$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $K_{\mu_2,*}((x, \mathbb{R}^m)) = \mu_2(\mathbb{R}^m)$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $K_{\mu_2,*}$ markovsch.

(ii) Es ist $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(d) Folgende Aussagen sind äquvalent

(iii) Es ist $K_{\mu_2,*}$ submarkuvsch.

(iv) Es ist $\mu_2(\mathbb{R}^m) \in [0, 1]$.

(e) Sei $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $B \in \mathfrak{B}_m$. Dann ist $(K_{\mu_2,*})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt

$$(\mu_1 * \mu_2)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,*})_{\bullet B} \, d\mu_1$$

Beweis.

(a) Sei

$$(x, B) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) und Teil (c) von Bemerkung M.26.0.3 ergibt sich

$$K_{\mu_2,*}((x, B)) = \mu_2(B - x) = [T_{I_m,x}(\mu_2)](B) \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$(K_{\mu_2,*})_{x\bullet} = T_{I_m,x}(\mu_2) \tag{3}$$

Wegen Satz M.15.10 ist $T_{I_m,x}(\mu_2) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt mit (3) nun

$$(K_{\mu_2,*})_{x\bullet} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{4}$$

Wegen (1) folgt aufgrund der Bemerkungen M.18.3 und M.18.8 für

$$f := 1_B \tag{5}$$

dann

$$f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{6}$$

Sei

$$F := f \circ A_{m,2} \tag{7}$$

Weiter sei

$$x_1 \in \mathbb{R}^m \tag{8}$$

Wegen (6) bis (8) liefert Teil (b) von Satz M.26.0.1 dann

$$F_{x_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{9}$$

Unter Beachtung von (9) sei die Abbildung $g_{1,F} : \mathbb{R}^m \to [0, +\infty]$ gemäß

$$x_1 \mapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{x_1 \bullet} \, d\mu_2 \tag{10}$$

definiert. Wegen $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie (6) bis (10) folgt mittels Teil (c) von Satz M.26.0.1 dann

$$g_{1,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{11}$$

Wir berechnen nun die Funktion $g_{1,F}$. Sei hierzu

$$x_1 \in \mathbb{R}^m \tag{12}$$

Wegen (12) folgt mittels Teil (c) von Bemerkung M.26.0.3 dann

$$(T_{I_m, x_1})^{-1}(B) = B - x_1 \tag{13}$$

Sei

$$x_2 \in \mathbb{R}^m \tag{14}$$

Unter Beachtung von (7), (5) und (13) folgt dann

$$\begin{aligned}
F_{x_1 \bullet}(x_2) = F\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) \overset{(7)}{=} (f \circ A_{m,2})\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f\left[A_{m,2}\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right)\right] \\
= f(x_1 + x_2) = f(T_{I_m, x_1}(x_2)) \overset{(5)}{=} 1_B(T_{I_m, x_1}(x_2)) \\
= \begin{cases} 1 & \text{, falls } T_{I_m, x_1}(x_2) \in B \\ 0 & \text{, falls } T_{I_m, x_1}(x_2) \in \mathbb{R}^m \backslash B \end{cases} \\
= \begin{cases} 1 & \text{, falls } x_2 \in (T_{I_m, x_1})^{-1}(B) \\ 0 & \text{, falls } x_2 \in \mathbb{R}^m \backslash [(T_{I_m, x_1})^{-1}(B)] \end{cases} \\
= 1_{(T_{I_m, x_1})^{-1}(B)}(x_2) \overset{(13)}{=} 1_{B - x_1}(x_2)
\end{aligned} \tag{15}$$

Wegen (14) und (15) gilt also

$$F_{x_1 \bullet} = 1_{B - x_1} \tag{16}$$

Wegen (1) gilt nach Teil (b) von Bemerkung M.26.0.3

$$B - x_1 \in \mathfrak{B}_m \tag{17}$$

Unter Beachtung von (10), (16), (17) und Bemerkung M.21.2.1 folgt dann

$$\begin{aligned} g_{1,F}(x_1) &\overset{(10)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{x_1\bullet}\, d\mu_2 \overset{(16)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{B-x_1}\, d\mu_2 \overset{(17),B.M.21.2.1}{=} \mu_2(B - x_1) \\ &= K_{\mu_2,*}((x_1, B)) = (K_{\mu_2,*})_{\bullet B}(x_1) \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen (12) und (18) gilt also

$$g_{1,F} = (K_{\mu_2,*})_{\bullet B} \tag{19}$$

Wegen (11) und (19) ist dann

$$(K_{\mu_2,*})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{20}$$

Wegen (1), (4) und (20) ist $K_{\mu_2,*}$ dann ein Kern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Damit ist unter Beachtung von (1) und (2) dann (a) bewiesen.

(b) Wegen (1), (2) und Satz M.15.10 ergibt sich

$$K_{\mu_2,*}((x, \mathbb{R}^m)) = [T_{I_m,x}(\mu_2)](\mathbb{R}^m) \overset{S.M.15.10}{=} \mu_2(\mathbb{R}^m)$$

(c)(d) Dies folgt sogleich aus (b) und Definition M.25.1.2.

(e) Unter Verwendung von Bemerkung M.21.2.1, (1), (5), (6) bis (10), Teil (c) von Satz M.26.0.1 sowie (19) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mu_1 * \mu_2)(B) &\overset{B.M.21.2.1}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B\, d(\mu_1 * \mu_2) \overset{(1),(5)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f\, d(\mu_1 * \mu_2) \\ &\overset{(6)-(10),S.M.26.0.1(c)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{1,F}\, d\mu_1 \overset{(13)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,*})_{\bullet B}\, d\mu_1 \end{aligned}$$

■

Satz M.26.0.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.26.0.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es sei $K_{\mu_2,*} : \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m \to [0, +\infty]$ definiert gemäß $(x, B) \mapsto \mu_2(B - x)$. Dann heißt $K_{\mu_2,*}$ der durch μ_2 erzeugte Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Wir studieren nun die Rolle der Dirac-Maße im Faltungskalkül.

Satz M.26.0.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $a \in \mathbb{R}^m$. Es sei $T_{I_m,a} : \mathbb{R}^m \to \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $x \mapsto x + a$. Dann ist $T_{I_m,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten $T_{I_m,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie $\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \mu = T_{I_m,a}(\mu)$. **Beweis.** Wegen Teil (c) von Bemerkung M.26.0.3 ist $T_{I_m,a}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt $T_{I_m,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $K_{\mu,*}$ den durch μ erzeugten Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Sei

$$B \in \mathfrak{B}_m \tag{1}$$

Wegen (1) folgen mittels Teil (e) von Satz M.26.0.2 dann

$$(K_{\mu,*})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{2}$$

sowie bei Beachtung von $\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zudem

$$(\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \mu)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,*})_{\bullet B} \, d\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} \tag{3}$$

Wegen (2) liefert Beispiel M.21.3.2 nun

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,*})_{\bullet B} \, d\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} = (K_{\mu,*})_{\bullet B}(a) \tag{4}$$

Wegen Teil (a) von Satz M.26.0.2 gilt

$$K_{\mu,*}((a, B)) = [T_{I_m,a}(\mu)](B) \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3), (4) und (5) folgt nun

$$(\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \mu)(B) \overset{(3)}{=} \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,*})_{\bullet B} \, d\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} \overset{(4)}{=} (K_{\mu,*})_{\bullet B}(a)$$

$$= K_{\mu,*}((a, B)) \overset{(5)}{=} [T_{I_m,a}(\mu)](B) \tag{6}$$

Aus (1) und (6) folgt dann $\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \mu = T_{I_m,a}(\mu)$. ∎

Folgerung M.26.0.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

$$\epsilon_{0_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} * \mu = \mu$$

Beweis. Wegen Satz M.26.0.3 gilt

$$\epsilon_{0_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} * \mu = T_{I_m,0_{m\times 1}}(\mu) \tag{1}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt

$$T_{I_m,0_{m\times 1}} = Id_{\mathbb{R}^m} \tag{2}$$

Wegen Beispiel M.15.4 ist $Id_{\mathbb{R}^m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$Id_{\mathbb{R}^m}(\mu) = \mu \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann

$$\epsilon_{0_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} * \mu = \mu$$

∎

Folgerung M.26.0.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $a, b \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \epsilon_{b,\mathfrak{B}_m} = \epsilon_{a+b,\mathfrak{B}_m}$$

Beweis. Wegen Satz M.26.0.3 gilt

$$\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \epsilon_{b,\mathfrak{B}_m} = T_{I_m,a}(\epsilon_{b,\mathfrak{B}_m}) \tag{1}$$

Wegen Teil (b) von Beispiel M.15.5 gilt

$$T_{I_m,a}(\epsilon_{b,\mathfrak{B}_m}) = \epsilon_{T_{I_m,a}(b),\mathfrak{B}_m} = \epsilon_{a+b,\mathfrak{B}_m} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\epsilon_{a,\mathfrak{B}_m} * \epsilon_{b,\mathfrak{B}_m} = \epsilon_{a+b,\mathfrak{B}_m}$$

■

Bemerkung M.26.0.4. Seien $m, l \in \mathbb{N}$ sowie $A, B \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $a, b \in \mathbb{R}^l$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$[T_{A,a}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m})] * [T_{B,b}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m})] = T_{A+B,a+b}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m})$$

Beweis. Wegen Teil (b) von Beispiel M.15.5 gelten

$$T_{A,a}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m}) = \epsilon_{T_{A,a}(x),\mathfrak{B}_m} \tag{1}$$

und

$$T_{B,b}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m}) = \epsilon_{T_{B,b}(x),\mathfrak{B}_m} \tag{2}$$

Wegen Folgerung M.26.0.2 gilt

$$\epsilon_{T_{A,a}(x),\mathfrak{B}_m} * \epsilon_{T_{B,b}(x),\mathfrak{B}_m} = \epsilon_{T_{A,a}(x)+T_{B,b}(x),\mathfrak{B}_m} \tag{3}$$

Weiterhin gilt

$$T_{A,a}(x) + T_{B,b}(x) = (Ax + a) + (Bx + b) = (A + B)x + (a + b) = T_{A+B,a+b}(x) \tag{4}$$

Aus (1) bis (4) folgt dann

$$[T_{A,a}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m})] * [T_{B,b}(\epsilon_{x,\mathfrak{B}_m})] = \epsilon_{T_{A+B,a+b}(x),\mathfrak{B}_m}$$

■

Index