Stochastik

Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematische Statistik

Prof. Dr. Bernd Kirstein

LaTeX-Version erstellt von
Kai Lanzendorf und Nico Uhlig

Vorwort

Grundlage dieses Skripts ist eine 5-semestrige Vorlesung beginnend im Sommersemester 2012 zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Mathematischen Statistik bei Prof. Dr. Bernd Kirstein an der Universität Leipzig.

Das Skript besteht aus den Teilen „Stochastik“ und „Maß- und Integrationstheorie“. Im Teil „Maß- und Integrationstheorie“ werden maßtheoretische Grundlagen und Ergänzungen für die theoretischen Grundlagen im Teil „Stochastik“ zur Verfügung gestellt. Verwendete Sätze, Lemmata, Definitionen, Beispiele und Bemerkungen sind ebenso wie die Gleichungsnummern innerhalb der Beweise mit Querverweisen ausgestattet, so dass eine leichtere Navigation möglich ist.

Verwendete Bezeichnungen werden im Symbolverzeichnis am Ende des Dokuments aufgelistet und erklärt. Es wurde zur besseren Lesbarkeit darauf geachtet, Matrizen und Vektoren **fett** zu schreiben. Zudem enden Bemerkungen stets mit dem Symbol „♣“, um eine bessere Trennung der einzelnen Umgebungen zu erreichen. Bekannte Persönlichkeiten wurden an den entsprechenden Stellen mit ihren Lebensdaten und ihren wichtigsten Beiträgen zur Mathematik in Fußnoten vermerkt.

Trotz aller Sorgfalt können sich noch Fehler im Skript befinden. Dieses Skript stellt keinen Ersatz für den Besuch der Vorlesung dar.

Leipzig, den 19. September 2014
Kai Lanzendorf und *Nico Uhlig*

Inhaltsverzeichnis

I. Stochastik **1**

1. Zufall und Wahrscheinlichkeit **3**
1.1. Einführung und Motivation . . . 3
1.2. Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit . . . 4
1.3. Geometrische Wahrscheinlichkeit . . . 11
1.4. Kolmogorovsche Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie . . . 12

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit **15**
2.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit . . . 15
2.2. Stochastisch unabhängige Ereignisse . . . 25
2.3. Ungekoppelte Zufallsexperimente vom Produkttyp . . . 39
2.4. Mehrstufige Zufallsexperimente mit endlich vielen Versuchsausgängen . . . 46

3. Einführende Betrachtungen über Markovsche dynamische Ketten **59**
3.1. Stochastische Matrizen . . . 59
3.2. Definitionen und Beispiele von Markovschen Systemen . . . 61
3.3. Beispiele zur Untersuchung des Langzeitverhaltens von Markovschen dynamischen Systemen . . . 65

4. Zufallsvariable und ihre Verteilung **69**
4.1. Definition und Eigenschaften . . . 69
4.2. Degenerierte- und P-fast sicher konstante Zufallsvariablen . . . 80
4.3. Diskrete Zufallsvariablen . . . 82
4.4. $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen mit $\lambda^{(m)}$-stetigen Verteilungen . . . 84
4.5. Lebensdauerverteilungen . . . 90

5. Numerische Charakteristika von Zufallsvariablen **95**
5.1. Erwartungswert . . . 95
5.2. Varianz und Kovarianz . . . 99
5.3. Momente von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen . . . 121
5.4. Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren . . . 125

6. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen **177**
6.1. Stochastisch unabhängige Ereignissysteme . . . 177
6.2. Definition und Eigenschaften von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen . . . 190
6.3. Konsequenzen des Kolmogorovschen Null-Eins-Gesetzes . . . 208
6.4. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen auf der Grundlage ihrer Verteilungen . . . 219
6.5. Produkte von stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen . . . 233
6.6. Endliche Summen von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen . . . 243

6.7. Summen einer zufälligen Anzahl von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen 254

7. Empirische Mittel und empirische Kovarianzmatrizen 269
7.1. Einleitung 269
7.2. Aussagen über empirische Mittel und empirische Kovarianzmatrizen 271
7.3. Empirische Mittel und empirische Varianz von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen 290

8. Lineare Modelle und Regressionsanalyse 303
8.1. Einleitung 303
8.2. Methode der kleinsten Quadrate im schwach sphärischen linearen Modell 304

9. Die Gesetze der großen Zahlen 321
9.1. Einleitung 321
9.2. Definitionen und Zusammenhänge 322
9.3. Das schwache Gesetz der großen Zahlen 325
9.4. Weitere Aussagen zu Null-Eins-Gesetzen 337

II. Maß- und Integrationstheorie M-1

Grundlagen der Maßtheorie M-3
M.1. Ringe und Halbringe von Mengen M-3
M.2. Inhalte und Prämaße auf Halbringen M-6
M.3. Inhalte und Prämaße auf Ringen M-8
M.4. Sigma-Algebren M-10
M.5. Maße M-12
M.6. Operationen mit Maßen M-15
M.7. Maße auf total atomar messbaren Räumen M-18
M.8. Absolutstetigkeit und Singularität von Maßen M-24
M.9. Dynkin-Systeme M-26
M.10. Eindeutigkeitssätze für Maße M-31
M.11. Äußere Maße M-33
M.12. Konstruktion äußerer Maße M-39
M.13. Fortsetzung von Prämaßen auf Halbringen zu Maßen M-42
M.14. Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ M-47
M.15. Einige diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-62
M.16. Messbare Abbildungen und Bildmaße M-69
M.17. Produkte von σ-Algebren M-77

Lebesguesche Integrationstheorie M-85
M.18. Borel-Messbarkeit numerischer Funktionen M-85
M.19. Borel-Messbarkeit von nichtnegativen numerischen Funktionen M-95
M.20. Klassen von Borel-messbaren Funktionen, welche mit einem Maßraum assoziiert sind M-102
M.21. μ-wesentlich beschränkte Funktionen M-105
M.22. Integrationstheorie M-107
M.22.1. Das Integral von $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen M-107
M.22.2. Das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen M-109
M.22.3. Ungleichungen von Tschebyschov und Markov M-121

M.22.4. Integration numerischer Funktionen M-123
M.22.5. Die Rolle der μ-Nullmengen in der Integrationstheorie M-133
M.22.6. p-fach μ-integrierbare Funktionen M-144
M.22.7. Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski sowie Anwendungen . . M-148
M.22.8. Grundlegende Konvergenzsätze der Integrationstheorie M-157
M.22.9. Integration bezüglich eines Bildmaßes M-171
M.22.10. Zusammenhänge zwischen den Integrationstheorien von Riemann und Lebesgue M-175
M.22.11. $\lambda^{(1)}$-stetige Maße aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-188
M.22.12. Die Eulersche Gammafunktion M-189
M.22.13. Die Familie der Normalverteilungen auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-196
M.22.14. Einige Beispiele von $\lambda^{(1)}$-stetigen Maßen aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-197

Weiterführende Maßtheorie **M-203**
M.23. Momente und weitere numerische Charakteristika von Maßen M-203
M.23.1. Allgemeine Momentenprobleme M-203
M.23.2. Potenzmomente von Maßen auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ M-204
M.23.3. Potenzmomente von Maßen auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-208
M.23.4. Erwartungswert und Varianz eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-210
M.23.5. Maße von k-ter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ M-213
M.23.6. Potenzmomente von Maßen aus $\mathcal{M}_+^{1,d}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-226
M.23.7. Potenzmomente markanter $\lambda^{(1)}$-stetiger Maße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ . . . M-230
M.23.8. Hamburgersches Momentenproblem M-239
M.23.9. Maße zweiter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ M-251
M.24. Maße auf Produkten von messbaren Räumen M-280
M.24.1. Existenz und Konstruktion von Produktmaßen für endliche Folgen von Maßräumen M-280
M.24.2. Der Satz von Tonelli M-315
M.24.3. Der Satz von Fubini M-329
M.24.4. Die m-dimensionale Normalverteilung M-352
M.24.5. Marginalmaße M-370
M.25. Die Faltung in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ M-374
M.25.1. Kernabbildungen zwischen messbaren Räumen M-374
M.25.2. Definition und Eigenschaften der Faltung in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ M-377
M.25.3. Faltung von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$ M-402
M.25.4. Das Faltungsprodukt von $\lambda^{(m)}$-stetigen Maßen M-410
M.25.5. Unbeschränkt teilbare Maße in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ M-425
M.25.6. Faltungshalbgruppen in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ M-437
M.25.7. Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen M-442
M.25.8. Stabile Maße aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ M-453
M.26. Sphärische und schwach sphärische Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ M-460
M.27. Konvergenzkonzepte für Borel-messbare reellwertige Funktionen M-475
M.27.1. Die μ-fast überall Konvergenz M-475
M.27.2. Die μ-fast überall gleichmäßige Konvergenz M-478
M.27.3. Die μ-fast gleichmäßige Konvergenz M-479
M.27.4. Die μ-stochastische- und stark μ-stochastische Konvergenz M-485

Symbolverzeichnis **M-500**

Literaturverzeichnis **M-501**

Teil I.

Stochastik

1. Zufall und Wahrscheinlichkeit

1.1. Einführung und Motivation

Im Mittelpunkt steht in dieser Vorlesung der Zufall. Hierbei versuchen wir, Gesetzmäßigkeiten des Zufalls zu finden und zu studieren. Dies ist die Grundaufgabe der Stochastik, die sich zusammensetzt aus:

(I) **Wahrscheinlichkeitstheorie** (Modelle für das Studium eines vom Zufall gesteuerten Geschehens, Theorie der möglichen Ereignisse und Wahrscheinlichkeit ihres Auftretens)

(II) **Mathematische Statistik** (Gewinnung allgemeiner Aussagen aus beschränkten Datenmaterial, das heißt Stichproben und a priori Informationen)

Mengentheoretische Operation	Bedeutung
$A = B$	A ist gleichbedeutend mit B
$A \subseteq B$	A impliziert B
$\Omega \backslash B$	nicht B
$A \cap B$	A und B
$A \cup B$	A oder B
$A \backslash B = A \cap (\Omega \backslash B)$	A aber nicht B
Ω	die stets wahre Aussage
$\varnothing$	die stets falsche Aussage
$\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$	alle A_n gleichzeitig
$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$	mindestens ein A_n
$\liminf_{n\to\infty} A_n \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} [\bigcap_{m=n}^{\infty} A_n]$	Eintreten aller A_n, mit Ausnahme höchstens endlich vieler
$\limsup_{n\to\infty} A_n \coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} [\bigcup_{m=n}^{\infty} A_n]$	Eintreten unendlich vieler A_n

Tabelle 1.1.: Übersicht von Verknüpfungen von Ereignissen

Einfachste mathematische Beschreibung des Sammelns von Erfahrungen ist das Zählen. Wir betrachten ein Zufallsexperiment Z mit Grundraum Ω von möglichen Versuchsausgängen. Es werde Z genau n-mal unter gleichen Komplex von Bedingungen durchgeführt. Wir betrachten ein solches zufälliges Ereignis $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ von dem entscheidbar ist, ob es bei jedem der Versuche eingetreten ist oder nicht.

Es sei das zufällige Ereignis A genau $N_n(A)$-mal bei unseren Versuchen eingetreten. Dann gibt uns die relative Häufigkeit

$$H_n(A) \coloneqq \frac{N_n(A)}{n}.$$

einen gewissen Aufschluss darüber, wie sicher das Eintreten von A ist. Eine Bewertungsfunktion für die Wahrscheinlichkeit sollte sich an folgenden Eigenschaften der relativen Häufigkeit orientieren:

Für jedes zufällige Ereignis A gilt

(a) $0 \leq H_n(A) \leq 1$.

(b) Es ist $H_n(\Omega) = 1$.

(c) Es ist $H_n(\varnothing) = 0$.

(d) Falls $A \cap B = \varnothing$, so ist $H_n(A \cup B) = H_n(A) + H_n(B)$.

Diese Überlegungen führen uns auf die Betrachtung einer Mengenalgebra $\mathfrak{A}$ in einer Menge Ω und eines Inhaltes $P\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,1]$ für den $P(\Omega) = 1$ erfüllt ist. Es hat sich jedoch bereits in der Anfangsphase der axiomatischen Wahrscheinlichkeitstheorie gezeigt, dass diese Begriffsbildungen noch keine zufriedenstellende Beschreibung liefern. Es zeigt sich nämlich, dass die Forderung an einen Inhalt zu wenig ist. Man benötigt tatsächlich σ-Additivität - also ein Maß P.

1.2. Klassische Definition der Wahrscheinlichkeit

In diesem Abschnitt betrachten wir die Zufallsexperimente des einfachsten Typs nach Pierre Simon Laplace[1)], der den Begriff der Wahrscheinlichkeit auf Gleichmöglichkeit zurückführt.

Wir betrachten ein Experiment mit endlich vielen Versuchsausgängen $\omega_1, \ldots, \omega_n$, also

$$\Omega = \{\omega_1, \ldots, \omega_n\}.$$

Für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ wird

$$P(A) := \frac{\operatorname{card} A}{n} = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega}$$

definiert. Damit wird für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ dem Elementarereignis ω_j die Wahrscheinlichkeit $P(\{\omega_j\}) = \frac{1}{n}$ zugeordnet. Die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse ist also gleich. Es ist also P ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ mit $P(\Omega) = 1$.

Definition 1.2.1 (diskrete Gleichverteilung und Zählmaß)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie Ω_n eine n-elementige Menge.

(a) Sei P ein Maß auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$ mit

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{n}.$$

für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega_n)$, also $P(\Omega_n) = 1$. Dann heißt P *diskrete Gleichverteilung* und wird mit P_n bezeichnet.

(b) Sei andererseits P ein Maß auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$ derart, dass für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega_n)$ stets

$$P(A) = \operatorname{card} A.$$

Dann heißt P das *Zählmaß* auf Ω_n und wird mit ν_n bezeichnet.

Definition 1.2.2 (Laplaceexperiment)**.** Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie Ω_n eine n-elementige Menge und bezeichne P_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$. Das Tripel $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), P_n)$ heißt dann das *zu* Ω *gehörige Laplaceexperiment.*

[1)] Pierre Simon Laplace (∗28.03.1749; †05.03.1827) war ein französischer Mathematiker, Physiker und Astronom. Er beschäftigte sich unter anderem mit der Wahrscheinlichkeitstheorie und Differentialgleichungen.

Beispiel 1.2.1. Das Experiment Z bestehe im gleichzeitigen Werfen zweier homogener, unterscheidbarer Würfel. Hier empfiehlt sich die Wahl des Grundraums

$$\Omega = \mathbb{N}_{1,6} \times \mathbb{N}_{1,6}$$

mit

$$\operatorname{card} \Omega = 36.$$

Der Ereignisaussage „die Augensumme ist kleiner als 5" entspricht dann dem Ereignis

$$A = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}.$$

Es ist also $\operatorname{card} A = 6$ und damit

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Die Behandlung von Laplace-Experimenten erfordert Kombinatorik. Wir geben eine Liste von grundlegenden Formeln von k-Tupeln aus genau n verschiedenen Ereignissen (siehe Tabelle 1.2).

Tupel/Auswahl	mit Wiederholung	ohne Wiederholung
geordnet	Anzahl der Variationen mit Wiederholungen von n Elementen zur k-ten Klasse: n^k	Anzahl der Variationen ohne Wiederholungen von n Elementen zur k-ten Klasse: $\frac{n!}{(n-k)!}$
ungeordnet	Anzahl der Kombinationen mit Wiederholungen von n Elementen zur k-ten Klasse: $\binom{n+k-1}{k}$	Anzahl der Kombinationen ohne Wiederholungen von n Elementen zur k-ten Klasse: $\binom{n}{k}$

Tabelle 1.2.: Übersicht kombinatorischer Grundformeln

Beispiel 1.2.2 (Übereinstimmung von Geburtstagen)**.** Es mögen k Studenten zu einer Studiengruppe gehören. Bekannt ist, dass keiner am 29.02 Geburtstag hat. Wir treffen die Annahme, dass alle anderen Tage gleichberechtigt dafür sind, als Geburtstag in Erscheinung zu treten. Welche Wahrscheinlichkeit besitzt das Ereignis, welches der Ereignisaussage „Mindestens zwei Studenten der Gruppe haben am gleichen Tag Geburtstag" entspricht?

Lösung. Es liegt eine Auswahl geordneter k-Tupel mit Wiederholungen vor. Hierbei ist $n = 365$. Wir wählen den Grundraum $\Omega = \mathbb{N}_{1,365}^k$. Hierbei legt die Überlegung zugrunde, dass die von 29. Februar verschiedenen 365 Tage eines Jahres wie auch die k Studenten durchnummeriert haben. Das Elementarereignis $(\omega_1, \ldots, \omega_k) \in \Omega$ entspricht der Ereignisaussage „Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,k}$ hat der Student j am Tag ω_j Geburtstag".
Hier ist es nun günstig, das Komplementärereignis $\Omega \backslash A$, welches der Ereignisaussage „Alle Studenten der Gruppe haben an verschiedenen Tagen Geburtstag" entspricht, zu betrachten. Es ist $\operatorname{card} \Omega = 365^k$, sowie $\operatorname{card} \Omega = 365 \cdot 264 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)$. Somit ist

$$P(A) = 1 - P(\Omega \backslash A) = 1 - \frac{\operatorname{card}(\Omega \backslash A)}{\operatorname{card} \Omega} = 1 - \frac{365 \cdot 364 \cdot \ldots \cdot (365 - k + 1)}{365^k}.$$

k	4	16	22	23	40	64
$P(A)$	0,016	0,284	0,467	0,507	0,891	0,997

Tabelle 1.3.: Einige Wahrscheinlichkeiten in Abhängigkeit von k

Beispiel 1.2.3 (Grundmodelle der statistischen Physik)**.** Seien $k, n \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $k \leq n$. Vorgegeben sind n Fächer und k Teilchen, wobei jedes der k Teilchen mit gleicher Wahrscheinlichkeit sich in einem der n Fächer befinden kann.

Gesucht sind dann die Wahrscheinlichkeiten folgender Ereignisse A bzw. B, welche den Ereignisaussagen „In k ausgewählten Fächern befindet sich je ein Teilchen" bzw. „In beliebigen k Fächern befindet sich je ein Teilchen" entsprechen.

Lösung. Es liegt ein Grundproblem der statistischen Physik vor. Je nachdem wie die vollständige Gruppierung der als gleichwahrscheinlich angesehenen Ereignisse festgelegt wird, kommt man zu verschiedenen Statistiken:

1) **Maxwell[2)]-Boltzmann[3)]-Statistik**: Zwei beliebig denkbare Verteilungen werden als gleichwahrscheinlich angesehen. Dies wird beispielsweise bei Gasmolekülen angenommen. Jedes der k Teilchen lässt sich dann in eines der n Fächer legen. Es bestehen also für jedes Teilchen n Möglichkeiten. Die Anzahl der Möglichkeiten, die k Teilchen auf die n Fächer zu verteilen ist daher n^k. Wir erhalten damit

$$P(A) = \frac{k!}{n^k}.$$

Bezüglich der Berechnung von $P(B)$ ist zu vermerken, dass wir hier noch die Möglichkeit besitzen, genau k der n Fächer auszuwählen. Dies kann auf $\binom{n}{k}$ Arten geschehen. Es ist daher

$$P(B) = \binom{n}{k} P(A) = \frac{n!k!}{k!\,(n-k)!n^k} = \frac{n!}{(n-k)!n^k}.$$

2) **Bose[4)]-Einstein[5)]-Statistik**: Hierbei sollen zwei Verteilungen, bei denen die Anzahl der Teilchen in jedem Fach übereinstimmt, als gleich angesehen werden. Dies kann auch dadurch ausgedrückt werden, dass die Teilchen nicht unterscheidbar sind. Dies wird beispielsweise bei Photonen angenommen. Wir bestimmen nun die Anzahl der möglichen Verteilungen.
Dies lässt sich durch folgendes Gedankenexperiment realisieren: Wir repräsentieren die k Teilchen durch k Punkte auf einer Geraden. Zwischen den k Punkten ziehe man auf

[2)] James Clerk Maxwell (∗13.06.1831; †05.11.1879) war ein schottischer Physiker, welcher einen Satz von Gleichungen (die Maxwellschen Gleichungen) entwickelte, welche die Grundlagen der Elektrizitätslehre und des Magnetismus bilden.

[3)] Ludwig Eduard Boltzmann (∗20.02.1844; †05.09.1906) war ein österreichischer Physiker und Philosoph. Das Lebenswerk Boltzmanns war die Neuaufstellung der Thermodynamik. Dabei begründete er mit James Clerk Maxwell die Statistische Mechanik - auch Boltzmann-Statistik genannt - und deutete die Entropie als eine mikroskopische Größe.

[4)] Satyendranath Bose (∗01.01.1894; †04.02.1974) war ein indischer Physiker, der wichtige Beiträge zur mathematischen und statistischen Physik lieferte. Insbesondere ist seine Zusammenarbeit mit Albert Einstein zur Gasförmigkeit der elektromagnetischen Strahlung anerkannt worden

[5)] Albert Einstein (∗14.03.1879; †18.04.1955) war ein theoretischer Physiker. Seine Forschungen zur Struktur von Materie, Raum und Zeit sowie dem Wesen der Gravitation veränderten maßgeblich das physikalische Weltbild. Er gilt daher als einer der größten Physiker aller Zeiten.

beliebige Weise $(n-1)$-Striche. Dabei symbolisieren die $(n-1)$-Striche gerade die $(n-1)$-Trennwände zwischen den $(n-1)$-Fächern. Die Anzahl der Punkte vor dem ersten bzw. nach dem $(n-1)$. Strich bedeutet die Anzahl der Teilchen im ersten bzw. n-ten Fach. Die Anzahl der Punkte zwischen aufeinanderfolgenden Strichen bedeutet die Anzahl der Teilchen im Fach mit dem durch die Striche markierten Zwischenwänden. Die gesuchte Anzahl möglicher Verteilungen entspricht dann also der Anzahl der Verteilungen von k Dingen auf $n+k-1$ Plätze, sie beträgt also $\binom{n+k-1}{k}$. Es ist dann

$$P(A) = \frac{1}{\binom{n+k-1}{k}}$$

und ähnlich wie in der Maxwell-Boltzmann-Statistik dann

$$P(B) = \binom{n}{k} P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n+k-1}{k}}.$$

3) **Fermi[6]-Dirac[7]-Statistik**: Die Teilchen werden als nicht unterscheidbar angesehen und überdies wird das Pauli[8]sche Ausschliessungsprinzip zugrunde gelegt. Dieses besagt, dass jedes Fach mit höchstens einem Teilchen belegt sein kann. Dies ist beispielsweise bei Elektronen, Protonen und Neutronen der Fall. Die Anzahl der möglichen Verteilungen entspricht also der Anzahl der Verteilungen von k Dingen auf n Plätze, also

$$P(A) = \frac{1}{\binom{n}{k}}$$

und wieder

$$P(B) = \binom{n}{k} P(A) = \frac{\binom{n}{k}}{\binom{n}{k}} = 1.$$

Wir stellen nun ein wichtiges kombinatorisches Resultat bereit, welches eine ganze Klasse von Aufgaben zum Laplaceschen Wahrscheinlichkeitsmodell löst. Dabei handelt es sich um Koinzidenzphänome (auch Rencontreprobleme genannt).

Satz 1.2.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}_{1,n}$. Weiterhin bezeichne E_n die Menge aller derjenigen $f \in \mathfrak{S}_n$, welche für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ der Bedingung $f(j) \neq j$ genügen. Dann gilt*

$$\operatorname{card}(E_n) = n! \cdot \left(\sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!} \right)$$

und

$$\operatorname{card}(\mathfrak{S}_n \setminus E_n) = n! \cdot \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k!} \right).$$

[6] Enrico Fermi (∗29.09.1901; †28.11.1954) war einer der bedeutendsten Kernphysiker des 20. Jahrhunderts. 1938 erhielt er den Nobelpreis für Physik.

[7] Paul Adrien Maurice Dirac (*08.08.1902; †20.10.1984) war britischer Physiker. Eine seiner wichtigsten Entdeckungen war die nach ihm benannte Diracgleichung, mit der die Einsteinsche Spezielle Relativitästheorie und die Quantenmechanik zusammengebracht werden konnten.

[8] Wolfgang Ernst Pauli (∗25.04.1900; †15.12.1958) war ein österreichischer Wissenschaftler und Nobelpreisträger, der zu den bedeutendsten Physikern des 20. Jahrhunderts zählt. Er formulierte 1925 das später nach ihm benannte Pauli-Prinzip, welches eine quantentheoretische Erklärung des Aufbaus eines Atoms darstellt und weitreichende Bedeutung auch für größere Strukturen hat.

Beweis. Wir berechnen zunächst $\operatorname{card}(\mathfrak{S}_n \backslash E_n)$. Hierzu verwenden wir Folgerung M.3.1. Es bezeichne ν_n das Zählmaß auf $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{P}(\mathfrak{S}_n))$. Wegen $\nu_n(\mathfrak{S}_n) = n!$ ist ν_n ein endliches Maß auf $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{P}(\mathfrak{S}_n))$, also insbesondere ein endlicher Inhalt auf $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{P}(\mathfrak{S}_n))$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne A_j die Menge aller $f \in \mathfrak{S}_n$ mit $f(j) = j$. Nach Definition von E_n ist dann

$$\mathfrak{S}_n \backslash E_n = \bigcup_{j=1}^{n} A_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ austauschbar bezüglich ν_n ist. Sei hierzu $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und es bezeichne

$$\tau_{n,m} = \left\{(i_1, \ldots, i_m) \in \mathbb{N}_{1,n}^m \mid 1 \leq i_1 \leq i_2 \leq \ldots \leq i_m\right\}.$$

Sei nun $\{k_1, \ldots, k_m\} \in \tau_{n,m}$. Dann gilt

$$\bigcap_{s=1}^{m} A_{k_s} = \{f \in \mathfrak{S}_n \mid f(k_s) = k_s \text{ für alle } s \in \mathbb{N}_{1,m}\}.$$

Hieraus folgt dann

$$\nu_n\left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{k_s}\right) = \operatorname{card}\left(\bigcap_{s=1}^{m} A_{k_s}\right) = (n-m)!. \tag{2}$$

Somit ist die Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ austauschbar bezüglich ν_n. Hieraus folgt, dass ν_n ein endlicher Inhalt auf $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{P}(\mathfrak{S}_n))$ ist. Mittels Folgerung M.3.1 und zusätzlicher Beachtung von (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(\mathfrak{S}_n \backslash E_n) &= \nu_n(\mathfrak{S}_n \backslash E_n) \\
&= \nu_n\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \binom{n}{m} (n-m)! \\
&= \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \frac{n!}{m!\,(n-m)!} (n-m)! \\
&= n! \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!}.
\end{aligned} \tag{3}$$

Aus (3) folgt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}(E_n) = &\quad \operatorname{card}\mathfrak{S}_n - \operatorname{card}(\mathfrak{S}_n \backslash E_n) \\
= &\quad n! - n! \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^{m+1}}{m!} \\
= &\quad n! \left(1 + \sum_{m=1}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}\right) \\
= &\quad n! \sum_{m=0}^{n} \frac{(-1)^m}{m!}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung 1.2.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}_{1,n}$. Weiter sei $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und es bezeichne $E_{m,n}$ die Menge aller $f \in \mathfrak{S}_n$, für welche es genau m verschiedene Zahlen $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_{1,n}$ gibt, welche Fixpunkte von f sind. Dann gilt*

$$\operatorname{card} E_{m,n} = \frac{n!}{m!} \sum_{k=0}^{n-m} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Beweis. Die genau m verschiedenen Fixpunkte eines Elements von $E_{n,m}$ lassen sich auf genau $\binom{n}{m}$ Arten wählen. Haben wir uns dann jeweils für m konkrete Fixpunkte entschieden, so ist dann dafür zu sorgen, dass keiner der restlichen $(n-m)$-Punkte Fixpunkte sind. Hierfür gibt es mit der Vereinbarung $\operatorname{card} E_0 \coloneqq 1$, dann genau $\operatorname{card} E_{n-m}$ Möglichkeiten. Unter Beachtung von Satz 1.2.1 folgt nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{card} E_{n,m} &= \binom{n}{m} (n-m)! \sum_{k=0}^{m-n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \frac{n!}{m!\,(n-m)!} (n-m)! \sum_{k=0}^{m-n} \frac{(-1)^k}{k!} \\
&= \frac{n!}{m!} \sum_{k=0}^{m-n} \frac{(-1)^k}{k!}.
\end{aligned}$$

□

Wir präsentieren nun einen alternativen Zugang zu solchen Aufgaben mittels Satz 1.2.1.

Definition 1.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Falls $n > 0$, bezeichnet E_n die Menge der fixpunktfreien Permutationen der Menge $\mathbb{N}_{1,n}$. Dann heißt die gemäß

$$D_n \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } n = 0, \\ \operatorname{card} E_n, & \text{falls } n > 0 \end{cases}$$

definierte Zahl die n-te *Rencontre-Zahl*.

Satz 1.2.2 (*von* Euler)**.** *Es bezeichne $(D_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der Rencontre-Zahlen. Dann gelten*

$$\begin{aligned}
D_0 &\coloneqq 1, \\
D_1 &\coloneqq 0, \\
D_{n+1} &= n \cdot (D_n + D_{n-1}) \quad \textit{für } n \geq 1.
\end{aligned}$$

Beispiel 1.2.4. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $m \geq n$ erfüllt ist. Dann stelle man sich folgende Situation vor:

An einer Theaterkasse stehen $m + n$ Menschen einer zufällig entstandenen Reihe an. Hierbei haben m Leute nur Fünfeuroscheine und die restlichen n Leute nur Zehneuroscheine. Zu Beginn des Kartenverkaufs ist in der Kasse kein Geld vorhanden. Jeder Käufer nimmt eine Karte zu 5 Euro. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welche der Ereignisaussage *„Die Käufer können hintereinander abgefertigt werden, ohne auf Wechselgeld warten zu müssen"* entspricht?

Lösung. Alle möglichen Anordnungen der Käufer sind gleichwahrscheinlich. Uns interessieren aber nicht die Anordnungen der Käufer überhaupt, sondern nur die Käufer, die Fünfeuroscheine und die Käufer, die Zehneuroscheine haben. Zur Lösung der Aufgabe betrachten wir das folgende geometrische Verfahren, welches wir für den Fall $n \leq m$ in einer Skizze veranschaulichen:

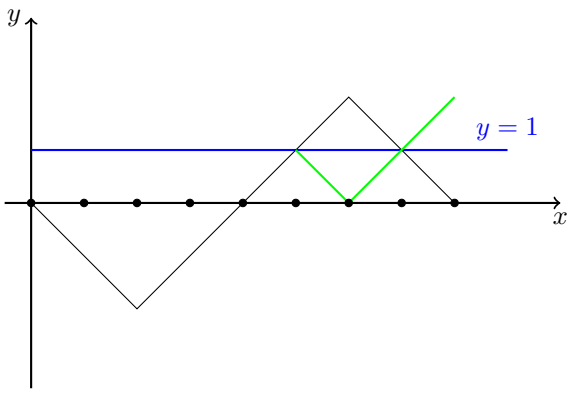


Abbildung 1.1.: Skizze für $m = n = 4$ und der Spiegelung einer beliebigen Trajektorie an der Geraden $y = 1$.

Wir betrachten die xy-Ebene und zeichnen auf der Abszissenachse die Punkte $1, 2, \ldots, m+n$ in dieser Reihenfolge ein. Im Koordinatenursprung liegt die Kasse. Jeder Person mit Zehneuroschein wird die Ordinate „$+1$", jeder Person mit Fünfeuroschein die Ordinate „-1" zugeordnet. Nun summieren wir von links nach rechts die so definierten Ordinaten in den Punkten $1, 2, \ldots, m+n$ und zeichnen in jedem dieser Punkte die erhaltene Summe ein.

Wegen $n\,(+1) + m\,(-1) = n - m$ hat diese Summe im Punkt $m + n$ den Wert $n - m$. Wir verbinden jetzt die so erhaltenen einander benachbarten Punkte durch Strecken und den Koordinatenursprung mit dem ersten dieser Punkte von links gerechnet. Den so gewonnenen Streckenzug nennen wir eine *Trajektorie*. Diese verbindet dann den Punkt $(0, 0)$ mit dem Punkt $(m+n, n-m)$. Die Anzahl der verschiedenen möglichen Trajektorien ist gleich der Anzahl von Abwärtsbewegungen unter $m+n$ Ab- und Aufwärtsbewegungen und hat folglich den Wert $\binom{m+n}{m}$. Für das uns interessierende Ereignis sind genau jene Trajektorien günstig, die nirgends über der Abszissenachse $y = 0$ verlaufen, denn sonst kommt einmal ein Käufer mit einem Zehneuroschein, während in der Kasse kein Wechselgeld vorhanden ist. Folglich sind genau jene Trajektorien ungünstig, welche wenigstens einmal die Gerade $y = 1$ schneiden oder erreichen.

Wir berechnen nun deren Anzahl. Falls eine ungünstige Trajektorie vorliegt, so konstruieren wir folgendermaßen eine neue Trajektorie. Bis zur ersten Berührung mit der Geraden $y = 1$ fällt die neue Trajektorie mit der alten zusammen und vom ersten Berührungspunkt ab, ist die neue Trajektorie das Spiegelbild der alten- an der Geraden $y = 1$. Die neue Trajektorie verbindet also den Punkt $(0, 0)$ mit dem Spiegelpunkt (u, v) von $(m + n, n - m)$ an der Geraden $y = 1$. Für diesen gilt dann

$$u = m + n$$

sowie $v - 1 = 1 - (n - m)$, also

$$v = m - n + 2.$$

Betrachten wir nun eine Trajektorie, die $(0, 0)$ mit $(m + n, m - n + 2)$ verbindet. Wegen $m \geq n$, also $m - n + 2 > 1$ berührt oder schneidet diese dann die Gerade $y = 1$ mindestens einmal. Wir konstruieren nun aus dieser Trajektorie mit demselben Spiegelungsprozess wie oben eine neue Trajektorie. Diese verbindet dann $(0, 0)$ mit $(m + n, n - m)$ und berührt oder schneidet die Gerade $y = 1$ mindestens einmal, ist also eine ungünstige Trajektorie. Es gibt also genau soviel ungünstige Trajektorien, wie es Trajektorien gibt, die $(0, 0)$ mit $(m + n, m - n + 2)$ verbindet.

Es bezeichne r bzw. s die Anzahl der Auf- bzw. Abwärtsbewegungen einer Trajektorie, die $(0,0)$ mit $(m+n, m-n+2)$ verbindet. Dann gilt also $r+s = m+n$ sowie $r-s = m-n+2$. Hieraus folgt dann $2r = 2m+2$ bzw.

$$r = m+1$$

und

$$s = m+n-r = m+n-(m+1) = n-1.$$

Eine solche Trajektorie ist also dadurch gekennzeichnet, dass sie genau $m+1$ Aufwärtsbewegungen und $n-1$ Abwärtsbewegungen enthält. Somit gibt es genau $\binom{m+n}{m+1}$ derartiger Trajektorien. Die Anzahl der günstigen Fälle ist also

$$\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1}$$

und es ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A) &= \frac{\binom{m+n}{m} - \binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} = 1 - \frac{\binom{m+n}{m+1}}{\binom{m+n}{m}} = 1 - \frac{\frac{(m+n)!}{(m+1)!(n-1)!}}{\frac{(m+n)!}{m!n!}} \\ &= 1 - \frac{m!n!}{(m+1)!\,(n-1)!} = 1 - \frac{n}{m+1} = \frac{m+1-n}{m+1}. \end{aligned}$$

1.3. Geometrische Wahrscheinlichkeit

Man stellte schon früh fest, dass das LAPLACEsche Wahrscheinlichkeitsmodell nur begrenzt gültig ist. Folgendes Phänomen wird zum Beispiel nicht erfasst:

Seien in einer gewissen Ebene G ein Gebiet g enthalten. Auf G wird nun „auf gut Glück“ ein Punkt geworfen und man fragt sich wie groß die Wahrscheinlichkeit dafür ist, dass der Punkt in das Gebiet g fällt. Dem Ausdruck „der Punkt wird auf gut Glück in das Gebiet G geworfen“ kommt dabei folgender Sinn zu: Der geworfene Punkt kann auf einen beliebigen Punkt des Gebietes G fallen. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er auf ein beliebiges Teilgebiet von G fällt, ist der Maßzahl dieses Teilgebietes (Flächeninhalt) proportional und hängt nicht von dessen Länge und Form ab. Damit ist definitionsgemäß die Wahrscheinlichkeit $P(g)$ dafür, dass eine auf gut Glück in das Gebiet G der Ebene geworfener Punkt in das Teilgebiet g von G fällt, gleich:

$$P(g) = \frac{\text{Flächeninhalt von } g}{\text{Flächeninhalt von } G}.$$

Definition 1.3.1. Sei $m \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathfrak{B}_m$ die BORELsche σ-Algebra des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$, wobei $|\cdot|$ die EUKLIDische Metrik des $\mathbb{R}^m$ bezeichne. Sei weiter $\Omega \in \mathfrak{B}_m$ so gewählt, dass $\lambda^{(m)}(\Omega) \in (0, +\infty)$ gilt. Es bezeichne $\mathfrak{B}_{m,\Omega}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{B}_m$ in Ω. Wir definieren $P\colon \mathfrak{B}_m \longrightarrow [0, +\infty]$ gemäß

$$P(A) \coloneqq \frac{\lambda^{(m)}(A)}{\lambda^{(m)}(\Omega)}.$$

Satz 1.3.1. *Die obige definierte Abbildung P ist ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{B}_{m,\Omega})$.*

Beispiel 1.3.1. Ein ungeübter Fallschirmspringer S versucht auf einer Insel zu landen, die approximiert als Kreis K mit Radius r angenommen wird. Es gelte als sicher, dass S in dem den Kreis K umfassenden Quadrat Q mit Seitenlänge $2r$ landet. Es sei jeder Punkt des Quadrats als Landungspunkt gleichberechtigt.

Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(Q\backslash K)$ dafür, dass S im Wasser landet?
Man erkennt nun, dass sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit gemäß

$$P(Q\backslash K) = \frac{\text{Fläche von } Q\backslash K}{\text{Fläche von } Q} = \frac{(2r)^2 - \pi r^2}{(2r)^2} = 1 - \frac{\pi}{4} \approx 0,21.$$

Beispiel 1.3.2. Die Koeffizienten der quadratischen Gleichung x^2+px+q werden auf gut Glück im Intervall $[0,1]$ gewählt. *Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Lösungen der Gleichung $x^2+px+q=0$ reell sind?*

Lösung. Die möglichen Versuchsausgänge sind hier die Punkte des Quadrates $[0,1]\times[0,1]$, wobei p bzw. q die erste- bzw. die zweite Komponente repräsentiert. Günstig dafür, dass die betrachtete Gleichung reelle Lösungen hat, ist dann genau die Menge

$$A = \left\{ (p,q)^T \in [0,1]\times[0,1] \,\middle|\, \frac{p^2}{4} \geq q \right\}.$$

Somit ergibt sich die gesuchte Wahrscheinlichkeit gemäß

$$P(A) = \frac{\text{Flächeninhalt von } A}{\text{Flächeninhalt von } [0,1]\times[0,1]} = \frac{\int_0^1 \frac{p^2}{4}\mathrm{d}p}{1} = \left[\frac{1}{12}p^3\right]_{p=0}^{1} = \frac{1}{12}.$$

1.4. Kolmogorovsche Axiomatik der Wahrscheinlichkeitstheorie

In der Auswertung der Wahrscheinlichkeits-Modelle aus den Abschnitten 1.2 und 1.3 war man bestrebt ein umfassendes, allgemeines Modell zu konstruieren. Ein solches Modell wurde 1933 von A.N.Kolmogorov[1)] als Grundlage für den Aufbau der Wahrscheinlichkeitstheorie vorgeschlagen.

Mit jedem Zufallsexperiment ist ein Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ assoziiert, welches folgenden Axiomen unterworfen ist:

Axiom 1: *Gegeben seien eine nichtleere Menge Ω, der so genannte Grundraum. Die Elemente von Ω heißen* Elementarereignisse.

Axiom 2: *Es ist eine σ-Algebra $\mathfrak{A}$ von Teilmengen von Ω ausgezeichnet, deren Elemente als* zufällige Ereignisse *bezeichnet werden.*

Axiom 3: *Auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist ein Maß P ausgezeichnet, welches der Bedingung $P(\Omega) = 1$ genügt.*

Beachte: Ein Elementarereignis ist nicht notwendigerweise ein zufälliges Ereignis.

Definition 1.4.1. Seien Ω eine nichtleere Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $P \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein *Wahrscheinlichkeitsraum.*

Wir präsentieren nun ein Grundbeispiel von Wahrscheinlichkeitsräumen, welche insbesondere die in den Abschnitten 1.2 und 1.3 behandelten Situationen umfassen:

[1)] Andrej Nikolaevič Kolmogorov (∗25.04.1903; †20.10.1987) war einer der bedeutendsten Mathematiker des 20. Jahrhunderts. Kolmogorov leistete wesentliche Beiträge auf den Gebieten der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Topologie, er gilt als der Gründer der Algorithmischen Komplexitätstheorie. Seine bekannteste mathematische Leistung war die Axiomatisierung der Wahrscheinlichkeitstheorie.

Beispiel 1.4.1. Seien $N \in \mathbb{N}$ und Ω ein Menge bestehend aus den N Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_N$. Es sei $(p_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum_{j=1}^{N} p_j = 1$. Weiter seien $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie

$$P := \sum_{j=1}^{N} p_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}.$$

Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Interpretation (von Beispiel 1.4.1). Seien $r, s \in \mathbb{N}$. Liege nun eine Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln vor. Aus dieser werden zufällig nacheinander zwei Kugeln gezogen, wobei die erste gezogene Kugel zurückgelegt wird. Wir wählen den Grundraum $\Omega := \{0,1\} \times \{0,1\}$ und die σ-Algebra $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist Ω eine vierelementige Menge mit Elementen $\omega_1 = (1,1), \omega_2 = (1,0), \omega_3 = (0,1)$ und $\omega_4 = (0,0)$. Hierbei symbolisiert eine 1 bzw. 0 in der ersten Komponente, dass beim ersten Zug eine rote bzw. eine schwarze Kugel gezogen wurde. Weiterhin symbolisiert eine 1 bzw. 0 in der zweiten Komponente, dass beim zweiten Zug eine rote bzw. schwarze Kugel gezogen wurde.
Bezeichnet P das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ so ist aufgrund der Versuchsbedingungen dann

$$\begin{aligned}
P(\{\omega_1\}) &= \frac{r}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} = \left(\frac{r}{r+s}\right)^2, \\
P(\{\omega_2\}) &= \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s}, \\
P(\{\omega_3\}) &= \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s}, \\
P(\{\omega_4\}) &= \frac{s}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} = \left(\frac{s}{r+s}\right)^2.
\end{aligned}$$

Es ist also

$$P = \left(\frac{r}{r+s}\right)^2 \varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s} \varepsilon_{\omega_2,\mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s} \varepsilon_{\omega_3,\mathfrak{P}(\Omega)} + \left(\frac{s}{r+s}\right)^2 \varepsilon_{\omega_4,\mathfrak{P}(\Omega)}.$$

♣

Beispiel 1.4.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \setminus \{\mathfrak{o}\}$. Weiter sei $P := \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu$, dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

Beispiel 1.4.2 umfasst insbesondere die Situation von dem Abschnitt 1.2. Die Wahl von $\mathfrak{P}(\Omega)$ als σ-Algebra des Wahrscheinlichkeitsraumes ist besonders einfach, beinhaltet aber *starke* Einschränkungen an das Wahrscheinlichkeitsmaß. So hat zum Beispiel jedes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$ eine ganz spezielle Struktur, welche in vielen Anwendungen nicht zutrifft. Dies ist ein berühmter Satz[2] von Stanislaw Ulam[3].

Wir diskutieren nun einige Grundtypen von Wahrscheinlichkeitsräumen:

Satz 1.4.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine n-elementige Menge mit den Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Dann gilt:*

[2] Dieser besagt: Sei μ ein Maß auf $(\mathbb{R}, \mathfrak{P}(\mathbb{R}))$, so dass für alle $x \in \mathbb{R}$ dann $\mu(\{x\}) = 0$ gilt. Für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt dann $\mu(A) = 0$.

[3] Stanislaw Ulam (∗13.04.1909; †13.05.1984) war ein polnisch-US-amerikanischer Mathematiker. Er beschäftigte sich hauptsächlich mit Fragen aus Maßtheorie, Topologie und Logik.

(a) *Sei P ein Inhalt auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ mit $P(\Omega) = 1$. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es gilt*

$$P = \sum_{j=1}^{n} P(\{\omega_j\})\, \varepsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$$

sowie

$$\sum_{j=1}^{n} P(\{\omega_j\}) = 1.$$

(b) *Sei $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum_{j=1}^{n} p_j = 1$. Weiter sei $P := \sum_{j=1}^{n} p_j \varepsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}$. Dann ist P ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ und für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $P(\{\omega_j\}) = p_j$.*

Satz 1.4.2. *Sei Ω eine abzählbar unendliche Menge und sei $(\omega_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus Ω, für welche $\bigcup_{n=1}^{\infty} \{\omega_n\} = \Omega$ erfüllt ist. Dann gilt:*

(a) *Sei $P \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann gelten*

$$P = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\})\, \varepsilon_{\omega_n, \mathfrak{P}(\Omega)}$$

sowie

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(\{\omega_n\}) = 1.$$

(b) *Sei $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$. Weiter sei $P := \sum_{n=1}^{\infty} p_n \varepsilon_{\omega_n, \mathfrak{P}(\Omega)}$. Dann ist $P \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ und für $n \in \mathbb{N}$ gilt $P(\{\omega_n\}) = p_n$.*

Beispiel 1.4.3. Wir präsentieren nun eine praktische Anwendung, welche auf einen Wahrscheinlichkeitsraum mit abzählbar unendlicher Grundmenge führt. Hierzu betrachten wir für ein fixiertes radioaktives Präparat die zufallsabhängige Anzahl der Teilchen, die in einer Zeiteinheit in die Zählkammer eines Geigerzählers eindringen. Diese Anzahl ist natürlich endlich. Es scheint jedoch unmöglich eine feste obere Schranke für die potenziell beobachtbare Teilchenzahl anzugeben. Aus diesem Grunde wählt man für das vorliegende Zufallsexperiment den Grundraum $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, wobei jedes Elementarereignis $\omega \in \Omega$ als die Anzahl der beobachtbaren Teilchen interpretiert wird. Vor dem Hintergrund dieses Zufallsexperiment geben wir nun eine Motivierung, der in Axiom 3 gestellten σ-Additivitätsforderung. Aus der in Abschnitt 1.1 geäußerten Absicht die Eigenschaften einer Wahrscheinlichkeitsbewertung an den Eigenschaften der relativen Häufigkeit zu orientieren, würde man streng genommen darauf geführt, dass Axiom 3 durch die Forderung zu ersetzen, dass P ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$ ist. Wir werden nun begründen, warum dies unzureichend ist:

Sei also P ein Inhalt auf $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$, welcher kein Maß ist. Betrachten wir die antitone Mengenfolge $(\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}_{1,k})_{k \in \mathbb{N}_0}$, so ist aus Isotoniegründen dann $(P(\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}_{1,k}))_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine monoton fallende Folge. Sei

$$\alpha := \inf_{k \in \mathbb{N}_0} P(\mathbb{N} \backslash \mathbb{N}_{1,k}).$$

Da P *kein* Maß auf $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ ist, lässt sich dann aber nicht nachweisen, dass $\alpha = 0$ ist. Ist jedoch $\alpha > 0$, so würde dies bedeuten, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Anzahl der beobachtbaren Teilchen größer als n ist, niemals die positive Zahl α unterschreiten würde. Dies ist jedoch eine Tatsache, welche den durch empirische Beobachtungen geprägten Vorstellungen völlig widersprechen würde.

2. Bedingte Wahrscheinlichkeit und stochastische Unabhängigkeit

2.1. Bedingte Wahrscheinlichkeit

Die Untersuchung der wechselseitigen Beeinflussung von verschiedenen zufälligen Vorgängen gehört zu den bedeutendsten Aufgabenstellungen der Wahrscheinlichkeitstheorie. Den elementaren aber grundlegenden Ansatz zum Studium solcher Phänomene liefert die bedingte Wahrscheinlichkeit. Wir studieren in diesem Abschnitt, welchen Einfluss das Vorliegen von Zusatzinformationen auf den Ausgang von Zufallsexperimenten ausübt.

Wir betrachten zwei motivierende Beispiele:

Beispiel 2.1.1. Als Zufallsexperiment wird das zweimalige Werfen eines homogenen Würfels betrachtet. Gesucht ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welche der Ereignisaussage *„die Augensumme ist größer als* 6*"* entspricht.

Lösung. Wir wählen den Grund $\Omega = \mathbb{N}_{1,6}^2$ und die σ-Algebra $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist $\operatorname{card}\Omega = 36$. Wir legen P gemäß der klassischen Definition der Wahrscheinlichkeit als die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ fest. Es ist dann

$$A = \left\{ \begin{array}{r} (1,6), (2,5), (2,6), (3,4), (3,5), (3,6), (4,3), (4,4), (4,5), (4,6), (5,2), (5,3), \\ (5,4), (5,5), (5,6), (6,1), (6,2), (6,3), (6,4), (6,5), (6,6) \end{array} \right\}.$$

Somit ist $\operatorname{card} A = 21$. Die gesuchte Wahrscheinlichkeit ist als

$$P(A) = \frac{\operatorname{card} A}{\operatorname{card}\Omega} = \frac{21}{36} = \frac{7}{12}$$

berechenbar. Wir verändern das Experiment in dem Sinne, dass wir annehmen, schon zu wissen, dass beim ersten Wurf ein 1 erscheint. Die „bedingte Wahrscheinlichkeit" von A unter der Voraussetzung, dass der erste Wurf eine 1 war, beträgt dann $\frac{1}{6}$, da von den möglichen Paare $(1,1), (1,2), (1,3), (1,4), (1,5)$ und $(1,6)$ nur noch $(1,6)$ günstig ist.

Beispiel 2.1.2. Seien $r, s \in \mathbb{N}$. Es liege eine Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln vor. Aus dieser wird willkürlich eine Kugel gezogen. Für das Ereignis B, welches der Ereignisaussage *„eine rote Kugel wird gezogen"* entspricht, gilt dann

$$P(B) = \frac{r}{r+s}.$$

Die Wahrscheinlichkeit für das Ereignis, welches der Ereignisaussage *„die zweite gezogene Kugel ist rot"* unter der Voraussetzung, dass die erste gezogene Kugel rot war und *nicht* zurückgelegt wurde, ist dann

$$\frac{r-1}{r+s-1}.$$

Wir sehen als, dass Zusatzinformationen die Wahrscheinlichkeit gewisser Ereignisse beeinflussen können. Diese Betrachtungen führen uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 2.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Für $A \in \mathfrak{A}$ heißt dann

$$P(A \mid B) := \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

die *bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B.*

Bemerkung 2.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_p$. Dann gelten $A \cup B \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$, $P(A \cap B|B) = P(A|B)$,

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)}$$

und

$$P(A \cap B \mid A \cup B) \leq P(A \cap B \mid B). \qquad \clubsuit$$

Beispiel 2.1.3. Es möge eine Lotterie mit 100 Losen vorliegen, unter denen sich genau zwei Preise A und B befinden. Herr X kauft vier Lose. Er teilt seinem Freund Herrn Y den Kauf dieser vier Lose mit und verrät weiterhin, dass er den Preis B gewonnen hat.
Herr Y stellt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Herr X beide Preise gewonnen hat. Es ergibt sich

$$P(B) = \frac{\binom{1}{1}\binom{99}{3}}{\binom{100}{4}} = \frac{1\frac{99!}{3!96!}}{\frac{100!}{4!96!}} = \frac{4}{100} = \frac{1}{25}$$

und

$$P(A \cap B) = \frac{\binom{2}{2}\binom{98}{2}}{\binom{100}{4}} = \frac{1\frac{98!}{2!96!}}{\frac{100!}{4!96!}} = \frac{4 \cdot 3}{100 \cdot 99} = \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{33}.$$

Damit ergibt sich

$$P(A \cap B \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{33}}{\frac{1}{25}} = \frac{1}{33}.$$

Etwas später trifft Herr X dann noch seinen Freund Herrn Z und informiert ihn darüber, dass er vier Lose gekauft hat und einen Gewinn erzielt hat. Auch Herr Z stellt sich nun die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit Herr X beide Preise gewonnen hat. Aus Symmetriegründen gilt nun

$$P(A) = P(B) = \frac{1}{25}.$$

Weiterhin ergibt sich

$$\begin{aligned} P(A \cup B) &= P(A) + P(B) - P(A \cap B) \\ &= \frac{1}{25} + \frac{1}{25} - \frac{1}{25} \cdot \frac{1}{33} \\ &= \frac{13}{5 \cdot 33}. \end{aligned}$$

Damit ergibt sich

$$P(A \cap B \mid A \cup B) = \frac{P(A \cap B)}{P(A \cup B)} = \frac{\frac{1}{25} \cdot \frac{1}{33}}{\frac{13}{5 \cdot 33}} = \frac{1}{5 \cdot 13} = \frac{1}{65}.$$

Beispiel 2.1.4 (Gestörter Nachrichtenkanal)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$ und $n \geq 2$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Ein Person I_0 überbringt einer Person I_1 eine Nachricht, deren Inhalt sich durch 0 oder 1 symbolisieren lässt. I_1 gibt dann eine Nachricht dergleichen Art an eine Person I_2 weiter. I_2 dann an I_3 und so fort bis schließlich als letzter Empfänger I_n eine Nachricht dieser Art von Person I_{n-1} erhält. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n-1}$ sei die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Person I_j die von I_{j-1} empfangene Nachricht an I_{j+1} weiterleitet, eine Zahl $p \in (0,1)$. Für $n \in \mathbb{N}$ ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür gesucht, dass I_n die von I_0 an I_1 übermittelte Nachricht erhält.

Ein geeignetes Modell für dieses Zufallsexperiment ist der messbare Raum $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ mit $\Omega = \bigtimes_{j=0}^{n-1} \{0,1\}$. Ist hierbei $(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \in \Omega$, so soll die j-te Komponente ω_j die von I_j an I_{j+1} übermittelte Nachricht repräsentieren. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ stellt dann

$$E_j \coloneqq \{(\omega_0, \ldots, \omega_{n-1}) \mid \omega_0 = \omega_{j-1}\}$$

gerade das zur Ereignisaussage *„I_j empfängt die richtige Nachricht"* gehörige Ereignis dar. Es bezeichne P das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann ist also

$$p_n = P(E_n).$$

Wir werden die gesuchte Wahrscheinlichkeit nun rekursiv bestimmen: Offensichtlich ist

$$p_1 = 1 \tag{1}$$

sowie

$$p_2 = p. \tag{2}$$

Für $n \geq 2$ gilt unter Beachtung, dass $1-p$ die Wahrscheinlichkeit ist, dass I_{n-1} das Gegenteil, der von I_{n-2} empfangenen Nachricht an I_n weiterleitet sowie

$$E_n = (E_n \cap E_{n-1}) \cup (E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}])$$

und

$$(E_n \cap E_{n-1}) \cap (E_n \cap [\Omega \backslash E_n]) = \varnothing$$

folgt nun

$$\begin{aligned}
P(E_n) &= P([E_n \cap E_{n-1}] \cup [E_n \cap (\Omega \backslash E_{n-1})]) \\
&= P(E_n \cap E_{n-1}) + P(E_n \cap [\Omega \backslash E_{n-1}]) \\
&= P(E_n | E_{n-1})\, P(E_{n-1}) + P(E_n | \Omega \backslash E_{n-1})\, P(\Omega \backslash E_{n-1}) \\
&= p \cdot P(E_{n-1}) + (1-p) \cdot P(\Omega \backslash E_{n-1}) \\
&= p \cdot P(E_{n-1}) + (1-p)(1 - P(E_{n-1})) \\
&= (2p-1) \cdot P(E_{n-1}) + 1 - p.
\end{aligned}$$

Also unter Beachtung von $P(E_n) = p_n$ bzw. $P(E_{n-1}) = p_{n-1}$ dann

$$p_n = (2p-1)\, p_{n-1} + 1 - p. \tag{3}$$

Wir zeigen nun per vollständiger Induktion, dass

$$p_n = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2} \tag{4}$$

gilt. Für $n = 1$ gilt wegen (1) zunächst

$$\frac{1}{2}(2p-1)^{1-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 = p_1.$$

Sei nun $n \in \mathbb{N}$ und sei für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ bereits gezeigt, dass

$$p_k = \frac{1}{2}(2p-1)^{k-1} + \frac{1}{2}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) und (3) folgt nun

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= (2p-1)\,p_n + 1 - p \\ &= (2p-1)\left[\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}\right] + 1 - p \\ &= \frac{1}{2}(2p-1)^{(n+1)-1} + \frac{1}{2}2p - \frac{1}{2} + 1 - p \\ &= \frac{1}{2}(2p-1)^{(n+1)-1} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Damit ist induktiv gezeigt, dass (4) für $n \in \mathbb{N}$ gilt.

Im Fall $p = \frac{1}{2}$ gilt für $n \in \mathbb{N}$ insbesondere

$$p_n = \frac{1}{2}\left(2\frac{1}{2} - 1\right)^{n-1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wegen $p \in (0,1)$ gilt $2p-1 \in (-1,1)$, also $\lim_{n\to\infty}(2p-1)^n = 0$. Hieraus folgt unmittelbar

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left[\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}\right] = \frac{1}{2}.$$

Das bedeutet, der Empfänger einer Nachricht kann annehmen, dass diese nahezu mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ falsch ist, wenn er weiß, dass diese über eine große Anzahl von Zwischenträgern jeweils mit Wahrscheinlichkeit $p \in (0,1)$ richtig weitergegeben wurde. Insbesondere schließt dies den Fall ein, in dem p beliebig nah bei 1 liegt.

Nun könnte man sich zusätzlich fragen, mit welcher Wahrscheinlichkeit I_1 die richtige Nachricht weitergeleitet hat, falls I_n die richtige Nachricht empfangen hat.
Mit den obigen Bezeichnungen ist dann $P(E_2 \mid E_n)$ gesucht. Wegen (2) gilt

$$p(E_2) = p_2 = p. \tag{6}$$

Aufgrund der bisherigen Betrachtungen gilt

$$P(E_n \mid E_2) = P(E_{n-1}) = \frac{1}{2}(2p-1)^{n-2} + \frac{1}{2}. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (6) und (7) und der obigen Formel für $P(E_n)$ folgt dann

$$\begin{aligned} P(E_2 \mid E_n) &= \frac{P(E_2 \cap E_n)}{P(E_n)} \\ &= \frac{P(E_n \mid E_2)\,P(E_2)}{P(E_n)} \\ &= \frac{\left[\frac{1}{2}(2p-1)^{n-2} + \frac{1}{2}\right]p}{\frac{1}{2}(2p-1)^{n-1} + \frac{1}{2}} \\ &= \frac{\left[(2p-1)^{n-2} + 1\right]p}{(2p-1)^{n-1} + 1}. \end{aligned}$$

Satz 2.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Es sei $P_A \colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $B \longmapsto P(B|A)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $P(A) \in (0, +\infty)$, dann ist P_A gerade die P-Gleichverteilung auf A.*

(b) *Es gilt $P_A \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{N}_{P_A}$ und $\mathcal{N}_P \subseteq \mathcal{N}_{P_A}$.*

(c) *Sei $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$P_A(B) \geq 1 - \frac{P(\Omega \setminus B)}{P(A)}.$$

Beweis.

Zu *(c)*: Wegen der Endlichkeit von P gilt

$$1 - \frac{P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A) - P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A) - (1 - P(B))}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(A)}. \tag{1}$$

Weiterhin ist $P(A) + P(B) - P(A \cap B) = P(A \cup B) \leq P(\Omega) = 1$ und somit also

$$P(A) + P(B) - 1 \leq P(A \cap B). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$1 - \frac{P(\Omega \backslash B)}{P(A)} = \frac{P(A) + P(B) - 1}{P(A)} \leq \frac{P(A \cap B)}{P(A)} = P(B \mid A) = P_A(B). \qquad \square$$

Folgerung 2.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $A_1, A_2 \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Es sei P_{A_1} bzw. P_{A_2} die P-Gleichverteilung auf A_1 bzw. A_2. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $P_{A_1} = P_{A_2}$.*

(ii) *$A_1 \triangle A_2 \in \mathcal{N}_P$.*

(b) *Es gilt $\{A_1 \cup A_2, A_1 \cap A_2\} \subseteq \mathfrak{A}$ und, falls* (i) *erfüllt ist, so gilt auch $P(A_1) = P(A_2) = P(A_1 \cup A_2) = P(A_1 \cap A_2)$ sowie $P_{A_1} = P_{A_2} = P_{A_1 \cap A_2} = P_{A_1 \cup A_2}$.*

Mitunter ist es auch günstig, den Wahrscheinlichkeitsraum aus Satz 2.1.1 so anzupassen, dass $A \in \mathfrak{A}$ zum sicheren Ereignis wird.

Satz 2.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Es seien P_A die P-Gleichverteilung auf A sowie $\mathfrak{A}_A$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in A. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_A$ eine σ-Algebra in A mit $\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}$.*

(b) *Sei $\widetilde{P}_A \coloneqq P_A \restriction \mathfrak{A}_A$. Dann gilt $\widetilde{P}_A \in \mathcal{M}_+^1(A, \mathfrak{A}_A)$.*

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Wegen der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit 2.1.1, gilt dann $P(B \cap A) = P(A)\, P(B \mid A)$. Wir wollen nun die Verallgemeinerung dieser Formel für den Durchschnitt einer endliche Folge von Ereignissen herleiten.

Satz 2.1.3 (Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten)**.** *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien* $n \in \mathbb{N}$ *und* $(A_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,n-1}}$ *eine Folge aus* $\mathfrak{A}$ *mit* $\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_P$*. Dann gilt:*

(a) *Für* $k \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$ *ist* $\bigcap_{j=0}^{k} A_j \in \mathfrak{A}$ *und zudem gilt*

$$P(A_0) \geq P(A_0 \cap A_1) \geq \ldots \geq P\left(\bigcap_{j=0}^{n-1} A_j\right) > 0.$$

(b) *Sei* $A_n \in \mathfrak{A}$*. Dann gilt*

$$P\left(\bigcap_{j=0}^{n} A_j\right) = P(A_0)\, P(A_1 \mid A_0)\, P(A_2 \mid A_0 \cap A_1) \cdots P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j\right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Isotonie von P.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* ist

$$P(A_0)\, P(A_1 \mid A_0)\, P(A_2 \mid A_0 \cap A_1) \cdot \ldots \cdot P\left(A_n \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{n-1} A_j\right)$$

wohldefiniert. Wir zeigten die Behauptung mittels vollständiger Induktion über n.
Für $n = 1$ folgt *(b)* aus der Definition der bedingten Wahrscheinlichkeit. Sei nun $k \in \mathbb{N}$ und sei für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann *(b)* bereits gezeigt. Dann ergibt sich

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=0}^{k+1} A_j\right) &= P\left(\left[\bigcap_{j=0}^{k} A_j\right] \cap A_{k+1}\right) \\ &= P\left(A_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{k} A_j\right) P\left(\bigcap_{j=0}^{k} A_j\right) \\ &= P\left(A_{k+1} \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{k} A_j\right) P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=0}^{k-1} A_j\right) \cdot \ldots \cdot P(A_1|A_0)\, P(A_0). \end{aligned}$$

Damit ist dann alles gezeigt. □

Beispiel 2.1.5. Bei einem Lernversuch hat eine Versuchsperson eine Aufgabe zu lösen. Löst sie die Aufgabe nicht, erhält sie eine Hilfestellung und versucht wiederholt die Aufgabe zu lösen. Die Erfahrungen besagen: Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass die Aufgabe beim 1. bzw. 2. bzw. 3. bzw. 4. Versuch gelöst wird beträgt $0,5$ bzw. $0,65$ bzw. $0,75$ bzw. $0,8$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit $P(A)$ des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage *„Die Aufgabe wird nach höchstens* 4 *Versuchen gelöst"* entspricht?

Lösung. Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ einen hier nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum, der unseres Experiment adäquat beschreibt. Für $j \in \mathbb{N}_{1,4}$ bezeichne A_j das zur Ereignisaussage *„die Aufgabe wird im j-ten Versuch richtig gelöst"* zugehörige Ereignis. Dann ist

$$A = \bigcup_{j=1}^{4} A_j.$$

Wegen dem Multiplikationssatz für bedingte Wahrscheinlichkeiten (Satz 2.1.3) gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{4} A_j\right) = P\left(\Omega\backslash\left[\Omega\backslash\bigcup_{j=1}^{4} A_j\right]\right) = P(\Omega) - P\left(\bigcap_{j=1}^{4}[\Omega\backslash A_j]\right) \\ &= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{4}[\Omega\backslash A_j]\right) \\ &= 1 - P(\Omega\backslash A_1)\, P(\Omega\backslash A_2 \,|\, \Omega\backslash A_1) \cdot \ldots \cdot P(\Omega\backslash A_4 \,|\, [\Omega\backslash A_1] \cap [\Omega\backslash A_2] \cap [\Omega\backslash A_3]) \\ &= 1 - (1-0,5)\cdot(1-0,65)\cdot(1-0,75)\cdot(1-0,8) \\ &= 0,99125. \end{aligned}$$

Alternativ präsentieren wir nun eine stärker formalisierte Behandlung der Lösung dieser Aufgabe, welche eine explizite Angabe eines Wahrscheinlichkeitsraumes beinhaltet, der das Experiment adäquat beschreibt.

Wir wählen als Grundraum $\Omega = \{1, (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1), (0,0,0,0)\}$ sowie die σ-Algebra $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,4}$ bezeichne hierbei eine 1 bzw. 0 in der j-ten Komponente der entsprechenden Tupel, dann dass die Aufgabe richtig gelöst bzw. nicht gelöst wird. Man überlegt sich dann leicht, dass durch

$$P \coloneqq 0,5\cdot\varepsilon_{1,\mathfrak{A}} + 0,65\cdot\varepsilon_{(0,1),\mathfrak{A}} + 0,75\cdot\varepsilon_{(0,0,1),\mathfrak{A}} + 0,8\cdot\varepsilon_{(0,0,0,1),\mathfrak{A}} + 0,5\cdot 0,35\cdot 0,25\cdot 0,2\cdot\varepsilon_{(0,0,0,0),\mathfrak{A}}$$

ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ gegeben ist, welches unseren Versuch adäquat beschreibt. Es ist nun

$$A = \{1, (0,1), (0,0,1), (0,0,0,1)\} = \Omega\backslash\{(0,0,0,0)\}.$$

Damit ergibt sich

$$P(A) = P(\Omega\backslash\{(0,0,0,0)\}) = 1 - P(\{0,0,0,0\}) = 1 - 0,5\cdot 0,35\cdot 0,25\cdot 0,2 = 0,99125.$$

Unsere nächsten Überlegungen sind darauf ausgerichtet, eine Vorschrift anzugeben, mit welcher aus gegebenen bedingten Wahrscheinlichkeiten, gewöhnliche - also nicht bedingte Wahrscheinlichkeiten - berechnet werden können.

Definition 2.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$[1)]. Dann heißt $(H_j)_{j\in I}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$ ein *vollständiges Ereignissystem* bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$, falls folgende Bedingungen erfüllt sind:

(I) Es ist $\bigcup_{j\in I} H_j = \Omega$.

(II) Für alle $j, k \in I$ mit $j \neq k$ gilt $H_j \cap H_k = \varnothing$.

[1)] I heißt ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, falls für ein gewisses $n \in \mathbb{N}$ dann $I = \mathbb{N}_{1,n}$ oder $I = \mathbb{N}$ gilt.

Satz 2.1.4 (Formel von der totalen Wahrscheinlichkeit)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(H_j)_{j\in I}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter $I' \coloneqq \{j \in I \mid H_j \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P\}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $I' \neq \varnothing$.*

(b) *Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$P(A) = \sum_{j\in I'} P(A \mid H_j)\, P(H_j).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt aufgrund der Additivität bzw. σ-Additivität von P

$$\sum_{j\in I} P(H_j) = P\left(\bigcup_{j\in I} H_j\right) = P(\Omega) = 1.$$

Somit existiert mindestens ein $j_0 \in I$, so dass $P(H_{j_0}) \neq 0$. Andernfalls wäre $\sum_{j\in I} P(H_j) = 0$.

Zu *(b)*: Sei $H \coloneqq \bigcup_{j\in I'} H_j$, dann ist

$$\Omega\backslash H = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } I\backslash I' = \varnothing, \\ \bigcup_{j\in I\backslash I'} H_j, & \text{falls } I\backslash I' \neq \varnothing. \end{cases}$$

Hieraus folgt mittels Satz M.5.1 dann

$$\Omega\backslash H \in \mathcal{N}_P. \tag{1}$$

Wegen $A \in \mathfrak{A}$ und (1) gilt $A \cap [\Omega\backslash H] \in \mathfrak{A}$ und wegen Satz M.5.1 zudem

$$A \cap [\Omega\backslash H] \in \mathcal{N}_P. \tag{2}$$

Unter Beachtung von $A = [A \cap H] \cup [A \cap (\Omega\backslash H)]$ und $(A \cap H) \cap (A \cap [\Omega\backslash H]) = \varnothing$ sowie von (2) folgt dann

$$P(A) = P(A \cap H) + P(A \cap [\Omega\backslash H]) = P(A \cap H). \tag{3}$$

Weiterhin gilt

$$A \cap H = A \cap \left[\bigcup_{j\in I'} H_j\right] = \bigcup_{j\in I'} [A \cap H_j]$$

und die Folge $(A \cap H_j)_{j\in I'}$ ist eine paarweise disjunkte Folge aus $\mathfrak{A}$. Damit folgt

$$P(A \cap H) = P\left(\bigcup_{j\in I'} [A \cap H_j]\right) = \sum_{j\in I'} P(A \cap H_j) = \sum_{j\in I'} P(A \mid H_j)\, P(H_j).$$

Hieraus folgt wegen (3) nun

$$P(A) = \sum_{j\in I'} P(A \mid H_j)\, P(H_j).$$

□

Beispiel 2.1.6 (Chemisches Analogon)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Es seien n Gefäße $H_1, \ldots, H_n$ gegeben, in denen verschiedene Lösungen desselben Salzes in den Konzentrationen $P(A \mid H_1)$, $P(A \mid H_2)$, $\ldots$, $P(A \mid H_n)$ vorliegen mögen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $P(H_j)$ das Flüssigkeitsvolumen im j-ten Gefäß H_j. Ferner möge insgesamt 1 Liter Flüssigkeit vorliegen – also

$$\sum_{j=1}^{n} P(H_j) = 1.$$

Gießt man nun alle n Salzlösungen zusammen, so hat die entstehende Salzlösung die Konzentration

$$P(A) = \sum_{j=1}^{n} P(A \mid H_j)\, P(H_j)$$

Beispiel 2.1.7. In einem Betrieb arbeiten 3 Automaten an der Herstellung des gleichen Erzeugnisses. Hierbei stellt sich die Situation wie folgt dar: Automat 1 bzw. 2 bzw. 3 fertigt 40% bzw. 35% bzw. 25% der Gesamtproduktion, wovon 4% bzw. 5% bzw. 3% Ausschuss sind. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage *„Ein willkürlich herausgegriffenes Erzeugnis ist Ausschuss"* entspricht?

Lösung. Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ einen hier nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum, welcher das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreiben möge. Für $j \in \mathbb{N}_{1,4}$ bezeichne H_j das der Ereignisaussage *„das Erzeugnis wurde vom j-ten Automaten gefertigt"* entsprechende Ereignisse. Dann ist $(H_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,3}}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Nach dem Satz 2.1.4 gilt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= P(A \mid H_1)\, P(H_1) + P(A \mid H_2)\, P(H_2) + P(A \mid H_3)\, P(H_3) \\ &= 0.4 \cdot 0.4 + 0.05 \cdot 0.35 + 0.03 \cdot 0.25 \\ &= 0.041. \end{aligned}$$

Wir wollen nun eine gewisse inverse Problemstellung behandeln:

Hierzu betrachten wir einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, einen Abschnitt I von $\mathbb{N}$ und ein vollständiges Ereignissystem $(H_j)_{j \in I}$ bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es sei bekannt, dass ein Ereignis $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$ eingetreten ist. Dann stellt sich die Frage, wie groß für jedes $j \in I$ in dieser Situation dann die Wahrscheinlichkeit der „Hypothese" H_j ist - das heißt wir sind an der bedingten Wahrscheinlichkeit $P(H_j \mid A)$ interessiert. Thomas Bayes[2)] gab eine Antwort darauf.

Satz 2.1.5 (Formel von Bayes)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(H_j)_{j \in I}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $A \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Weiterhin sei $I' := \{j \in I \mid H_j \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P\}$. Dann ist $I' \neq \varnothing$ und für $j \in I'$ bzw. $j \in I \setminus I'$ gilt*

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j) \cdot P(H_j)}{\sum_{k \in I'} P(A \mid H_k) \cdot P(H_k)} \quad \text{bzw.} \quad P(H_j \mid A) = 0.$$

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz 2.1.4 gilt $I' \neq \varnothing$. Sei zunächst $j \in I \setminus I'$. Dann ist $H_j \in \mathcal{N}_P$. Es bezeichne P_A das in Satz 2.1.1 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Wegen Teil *(b)* von Satz 2.1.1 gelten dann

$$\mathcal{N}_P \subseteq \mathcal{N}_{P_A}$$

[2)] Thomas Bayes (∗1701; †07.04.1761) war ein englischer Mathematiker und presbyterianischer Pfarrer. Nach ihm ist der Satz von Bayes benannt, der in der Wahrscheinlichkeitsrechnung große Bedeutung hat.

also auch

$$H_j \in \mathcal{N}_{P_A}$$

und daher

$$P(H_j \mid A) = P_A(H_j) = 0.$$

Sei nun andererseits $j \in I'$. Unter Beachtung von Definition 2.1.1 und Satz 2.1.4 folgt nun:

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(H_j \cap A)}{P(A)} = \frac{P(A \mid H_j)\, P(H_j)}{\sum_{k \in I'} P(A \mid H_k)\, P(H_k)}.$$ □

Beispiel 2.1.8 (Chemisches Analogon)**.** Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann möge erneut die im chemischen Analogon von Beispiel 2.1.6 beschriebene Situation vorliegen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ ist dann derjenige Anteil $P(H_j \mid A)$ an der gesamten Salzmenge, der sich im j-ten Gefäß befindet, gegeben durch

$$P(H_j \mid A) = \frac{P(A \mid H_j)\, P(H_j)}{\sum_{k=1}^{n} P(A \mid H_k)\, P(H_k)}.$$

Beispiel 2.1.9. Für ein Konzert werden an drei verschiedenen Verkaufsstellen Karten angeboten. Sei nun $j \in \mathbb{N}_{1,3}$. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich ein Interessent an die j-te Verkaufsstelle wendet, hängt von der Lage ab und werde mit $p_j \in (0,1)$ bezeichnet. Die Wahrscheinlichkeit dafür, dass nach 2 Stunden nach gleichzeitigen Verkaufsbeginn an der j-ten Kasse alle Karten verkauft sind sei π_j mit $\pi_j \in (0,1)$.

Ein Interessent kaufte 2 Stunden nach dem Verkaufsbeginn eine Karte. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit dafür, dass er an der ersten Kasse kaufte?

Lösung. Es bezeichne $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ einen nicht näher spezifizierten Wahrscheinlichkeitsraum, der das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreibt. Sei A das der Ereignisaussage *„der Interessent erhält eine Karte"* entsprechende Ereignis. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei H_j das der Ereignisaussage *„der Interessent wandte sich an die j-te Kasse"* entsprechende Ereignis. Für $j \in \mathbb{N}_{1,3}$ ist dann $P(H_j) = p_j$ und $P(\Omega \backslash A_j \mid H_j) = \pi_j$. Hieraus folgt mittels Satz 2.1.1 dann

$$P(A \mid H_j) = P_{H_j}(A) = 1 - P_{H_j}(\Omega \backslash A) = 1 - P(\Omega \backslash A \mid H_j) = 1 - \pi_j.$$

Da $(H_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,3}}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ist, folgt mittels der Formel von Bayes (Satz 2.1.5) dann

$$P(H_1 \mid A) = \frac{(1-\pi_1)\, p_1}{(1-\pi_1)\, p_1 + (1-\pi_2)\, p_2 + (1-\pi_3)\, p_3}.$$

Beispiel 2.1.10 (Multiple-Choice-Verfahren)**.** Einem Studenten wird während einer Prüfung eine Frage vorgelegt, zu der es n mögliche Antworten gibt, von denen genau eine richtig ist.

Sei $p \in (0,1)$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass sich der Student sich auf die Prüfung vorbereitet hat. Hat sich der Student vorbereitet, so kann er die gestellte Frage richtig beantworten. Andernfalls wählt er eine der n Antwort willkürlich aus.

Wir berechnen nun die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Student sich auf die Prüfung vorbereitet hat, falls er die Frage richtig beantwortet, in Abhängigkeit von n und p. Sei hierzu $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ ein nicht näher spezifizierter Wahrscheinlichkeitsraum, der das vorliegende Zufallsexperiment adäquat beschreibt. Es bezeichne A bzw. B das Ereignis, welches der Ereignisaussage

„der Student beantwortet die Frage richtig" bzw. *„der Student hat sich auf die Prüfung vorbereitet"* entspricht.

Aufgrund der Versuchsbedingungen ist dann

$$\begin{aligned} P(B) &= p, \\ P(A \mid B) &= 1, \\ P(A \mid \Omega \backslash B) &= \frac{1}{n} \end{aligned}$$

und wir können $P(A) \neq 0$ annehmen. Unter Verwendung der Formel von Bayes (Satz 2.1.5) folgt dann

$$\begin{aligned} P(B \mid A) &= \frac{P(A \mid B)\, P(B)}{P(A \mid B)\, P(B) + P(A \mid \Omega \backslash B)\, P(\Omega \backslash B)} \\ &= \frac{1 \cdot p}{1 \cdot p + \frac{1}{n}(1-p)} \\ &= \frac{p}{p + \frac{1}{n}(1-p)}. \end{aligned}$$

Mit wachsenden n geht also $P(B \mid A) \to 1$, was den Erfahrungen entspricht.

2.2. Stochastisch unabhängige Ereignisse

Ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist auf Grund seiner Definition ein Objekt der Maßtheorie. Käme nun keine weitere spezifische Begriffsbildung hinzu, wäre die Stochastik ein Teil der Maßtheorie. Dass dies *nicht* so ist, wird im vorliegenden Abschnitt verdeutlicht. Der nachfolgende Begriff der stochastischen Unabhängigkeit spielt eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeit. Er ist es nämlich, der diese aus dem allgemeinen Konzept der Maßtheorie heraus hebt und zu einem eigenständigen Zweig der Mathematik macht.

Wir betrachten einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie gewisse $A \in \mathfrak{A}$ und $B \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$. Dann ist es natürlich zu sagen, dass A in *keiner* Weise von B abhängt, falls

$$P(A \mid B) = P(A). \tag{1}$$

Aus (2) folgt sogleich

$$P(A \cap B) = P(A)\, P(B). \tag{2}$$

Falls auch $A \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P$, so kann (1) auch als

$$P(B \mid A) = P(B) \tag{3}$$

geschrieben werden. Aus (3) folgt dann auch (2). Wir kommen somit zu folgender Begriffsbildung:

Definition 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann heißen A und B *stochastisch unabhängig bezüglich* P, falls $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$. Andernfalls heißen A und B *stochastisch abhängig bezüglich* P.

Satz 2.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $A \in \mathfrak{A}$ sowie $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist* $P(A \mid B) = P(A)$.

Beispiel 2.2.1. Wir wählen den naheliegenden Grundraum $\Omega := \mathbb{N}_{1,6} \times \mathbb{N}_{1,6}$ und die σ-Algebra $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$. Hierbei symbolisiert die erste- bzw. die zweite Komponenten von $(\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ das Ergebnis des roten- bzw. gelben Würfels. Als Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wählen wir die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Es bezeichne A bzw. B bzw. C das der Ereignisaussage *„roter Würfel liefert 2"* bzw. *„Augensumme beider Würfel ist gerade"* bzw. *„Augensumme beider Würfel ist höchstens 4"* entsprechende Ereignis. Dann ist

$$A = \{(2,1), \ldots, (2,6)\}$$

und es gilt

$$P(A) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Weiter ist $\Omega \backslash B$ das der Ereignisaussage *„Augensumme beider Würfel ist ungerade"* entsprechende Ereignis. Dies entsteht genau dadurch, dass einer der beiden Würfel eine gerade- und der andere eine ungerade Zahl liefert. Hierfür gibt es genau $2 \cdot \binom{3}{1}\binom{3}{1} = 2 \cdot 3 \cdot 3 = 18$ verschiedene Möglichkeiten. Folglich ist

$$P(\Omega \backslash B) = \frac{18}{36} = \frac{1}{2}$$

also

$$P(B) = 1 - P(\Omega \backslash B) = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}.$$

Wegen

$$C = \{(1,1), (1,2), (1,3), (2,1), (2,2), (3,1)\}$$

gilt

$$P(C) = \frac{6}{36} = \frac{1}{6}.$$

Ferner ist $A \cap B = \{(2,2), (2,4), (2,6)\}$, also $P(A \cap B) = \frac{3}{36} = \frac{1}{12}$. Hieraus ergibt sich

$$P(A \cap B) = \frac{1}{12} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{2} = P(A)\, P(B).$$

Somit sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.

Schließlich ist $A \cap C = \{(2,1), (2,2)\}$, also $P(A \cap C) = \frac{2}{36} = \frac{1}{18}$. Hieraus ergibt sich

$$P(A \cap C) = \frac{1}{18} \neq \frac{1}{36} = \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{6} = P(A)\, P(C).$$

Somit sind A und C stochastisch *abhängig* bezüglich P.

Stochastische Unabhängigkeit von A und B bezüglich P drückt aus, dass A und B wahrscheinlichkeitstheoretisch in dem Sinn keinen Einfluss aufeinander haben, dass die Informationen *„A geschieht"*, wenn sie überhaupt positive P-Wahrscheinlichkeit hat, nichts an der Wahrscheinlichkeit von B ändert. Dies muss man genau von *realer* Beeinflussung unterscheiden. Stochastische Unabhängigkeit ist ein in A und B *symmetrischer* Begriff. Bei realer Beeinflussung ist dieser sicher *nicht* der Fall. Stochastische Unabhängigkeit kann selbst dann vorliegen, wenn real das Eintreten von B davon abhängt, ob A geschieht.

In Beispiel 2.2.1 etwa sind A und B stochastisch unabhängig, obwohl A mitbestimmt ob B eintritt oder nicht.

Bei der Anwendung wahrscheinlichkeitstheoretischer Modelle wird stochastische Unabhängigkeit von Ereignissen vielfach postuliert, beispielsweise bei den Ereignissen *„Automat produziert Erzeugnis an einem Freitag"* und *„Erzeugnis ist fehlerfrei"*.

Satz 2.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *A und $\Omega \setminus B$ sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(iii) *$\Omega \setminus A$ und $\Omega \setminus B$ sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(iv) *$\Omega \setminus A$ und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(b) *Sei $P(B) = 0$. Dann sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(c) *Sei $P(B) = 1$ Dann sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Es gilt $A = (A \cap B) \cup (A \cap [\Omega \backslash B])$ sowie $(A \cap B) \cap (A \cap [\Omega \backslash B]) = \varnothing$, also

$$P(A) = P(A \cap B) + P(A \cap [\Omega \backslash B]).$$

Hieraus sowie aus *(i)* folgt nun

$$\begin{aligned} P(A \cap [\Omega \backslash B]) &= P(A) - P(A \cap B) \\ &= P(A) - P(A) P(B) \\ &= P(A) [1 - P(B)] \\ &= P(A) P(\Omega \backslash B). \end{aligned}$$

das heißt es gilt *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(iii)*****:** Aus *(ii)* und der schon bewiesenen Inklusion *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* ergibt sich sofort, dass $\Omega \backslash A$ und $\Omega \backslash B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind, also *(iii)*.

(iii) $\Rightarrow$ ***(iv)*****:** Aus *(iii)* und der schon bewiesenen Implikation *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* ergibt sich, dass $\Omega \backslash A$ und $\Omega \setminus (\Omega \backslash B) = B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind, also *(iv)*.

(iv) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Aus *(iv)* und der schon bewiesenen Implikation *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)* ergibt sich, dass $\Omega \setminus (\Omega \backslash A)$ und B stochastisch unabhängig bezüglich P sind, also *(i)*.

Zu *(b)*: Wegen $A \cap B \in \mathfrak{A}$ und $A \cap B \subseteq B$ folgt aus $P(B) = 0$ und der Isotonie von P dann sofort $P(A \cap B) = 0$. Damit

$$P(A \cap B) = 0 = P(A) \cdot 0 = P(A) P(B).$$

Somit sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.

Zu *(c)*: Wegen $P(B) = 1$ ist $P(\Omega \backslash B) = 1 - P(B) = 0$. Hieraus und aus *(b)* folgt, dass A und $\Omega \backslash B$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Damit und wegen $B = \Omega \setminus (\Omega \backslash B)$ folgt mittels *(a)*, dass A und B stochastisch unabhängig bezüglich P sind. □

Satz 2.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $C \in \mathfrak{A}$ mit $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \setminus C \in \mathcal{N}_P$. Sei $B \in \mathfrak{A} \setminus \mathfrak{A}_{P,0}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\{B, \Omega \setminus B\} \subseteq \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P$.*

(b) *Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es gilt $P(A \mid B) = P(A \mid (\Omega \setminus B))$.*

Satz 2.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $A, C \in \mathfrak{A}$ derart gewählt, dass $C \subseteq A$ erfüllt ist und zudem jeweils stochastische Unabhängigkeit von A und B bzw. B und C bezüglich P vorliegt. Dann gilt $A \setminus C \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $A \setminus C$ und B bezüglich P vor.*

(b) *Seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in I}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $j \in I$ stochastische Unabhängigkeit von A_j und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcup_{j \in I} A_j \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $\bigcup_{j \in I} A_j$ und B bezüglich P vor.*

(c) *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ stochastische Unabhängigkeit von A_n und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ und B bezüglich P vor.*

(d) *Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine antitone Folge aus $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ stochastische Unabhängigkeit von A_n und B bezüglich P vorliegt. Dann ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ und es liegt stochastische Unabhängigkeit von $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n$ und B bezüglich P vor.*

Satz 2.2.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a) *Es seien $P(A) > 0$ und $P(B) > 0$ mit $A \cap B = \varnothing$. Dann sind A und B stochastisch abhängig bezüglich P.*

(b) *Es seien $P(A) > 0$ und $P(B) < 1$ mit $A \subseteq B$. Dann sind A und B stochastisch abhängig bezüglich P.*

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$P(A \cap B) = P(\varnothing) = 0 < P(A) \cdot P(B).$$

Zu *(b)*: Es ist

$$P(A \cap B) = P(A) = P(A) \cdot 1 > P(A) \cdot P(B). \qquad \square$$

Folgerung 2.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A, B \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass $A \subseteq B$ erfüllt ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) *A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(b) *Es ist $P(A) = 0$ oder $P(B) = 1$.*

Beweis.

(a) $\Rightarrow$ ***(b)*:** Wäre *(b)* falsch, so ergibt sich aus der Tatsache, dass P Werte aus $[0, 1]$ annimmt, dass $P(A) > 0$ und $P(B) < 1$ sein muss. Hieraus und aus Teil *(b)* von Satz 2.2.5 ergäbe sich dann, dass A und B stochastisch abhängig bezüglich P sind, was im Widerspruch zu *(a)* stünde.

(b) $\Rightarrow$ ***(a)*:** Dies folgt sogleich aus den Teilen *(b)* und *(c)* von Satz 2.2.4. $\square$

Wir wenden uns nun jener Klasse von Wahrscheinlichkeitsräumen zu, in denen die stochastische Unabhängigkeit auf die minimal mögliche Variante reduziert wird.

Definition 2.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *frei von stochastischer Unabhängigkeit*, falls jedes geordnete Paar (A, B) von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen mindestens eines der Ereignisse $\varnothing$ oder Ω enthält.

Bemerkung 2.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, für den $\mathfrak{A} = \{\varnothing, \Omega\}$ erfüllt ist. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ frei von stochastischer Unabhängigkeit. ♣

Bemerkung 2.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $C \in \mathfrak{A}$ mit $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \setminus C \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \{A \in \mathfrak{A} \mid \text{Es ist } P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}.$$ ♣

Bemerkung 2.2.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, welcher frei von stochastischer Unabhängigkeit ist, und bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $C \in \mathfrak{A}$ mit $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \setminus C \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \{\varnothing, \Omega\}.$$ ♣

Beispiel 2.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\Omega_n := \mathbb{N}_{1,n}$ und ν_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$. Dann gilt:

(a) Es ist $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \nu_n)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich ν_n.

(ii) kEs ist $n \cdot \operatorname{card}(A \cap B) = \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B$.

(c) Sei n keine Primzahl und seien k und l dann existierende Zahlen aus $\mathbb{N}_{2,n}$ mit $k \cdot l = n$. Weiterhin seien $A_k := \mathbb{N}_{1,k}$ sowie $B := \{r \cdot k \mid r \in \mathbb{N}_{1,l}\}$. Dann gilt

$$\{A, B\} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega_n) \setminus \{\varnothing, \Omega_n\}$$

und es liegt stochastische Unabhängigkeit von A und B bezüglich ν_n vor.

(d) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n), \nu_n)$ ist frei von stochastischer Unabhängigkeit.

(iv) Es ist n eine Primzahl.

Wir erweitern nun den Begriff der stochastischen Unabhängigkeit auf beliebige Familie von Ereignissen.

Definition 2.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine nichtleere Indexmenge. Dann heißt eine Familie $(A_j)_{j \in I}$ von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P, falls für jede nichtleere endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ die Gleichung

$$P\left(\bigcap_{j \in I'} A_j\right) = \prod_{j \in I'} P(A_j)$$

gilt. Andernfalls heißt die Familie *stochastisch abhängig bezüglich* P.

Bemerkung 2.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine nichtleere Indexmenge und $(A_j)_{j\in I}$ eine Familie von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei τ eine Bijektion auf I. Dann ist auch $\left(A_{\tau(j)}\right)_{j\in I}$ eine Familie von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. ♣

Bemerkung 2.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine nichtleere Indexmenge und $(A_j)_{j\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $(A_j)_{j\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(ii) Für jede nichtleere Teilmenge $I' \subseteq I$ ist $(A_j)_{j\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(iii) Für jede nichtleere endliche Teilmenge $I'' \subseteq I$ ist die Folge $(A_j)_{j\in I''}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Satz 2.2.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, sowie $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind $A_1 \cup A_2$ und A_3 stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Satz 2.2.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ sowie*

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k\right).$$

Beweis. Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ ist, gilt $\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir definieren

$$B_n \coloneqq \bigcap_{k=1}^{n} A_k.$$

Es ist dann $B_n \in \mathfrak{A}$ und es gilt $B_n \supseteq B_{n+1}$. Weiter gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{k=1}^{n} A_n\right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mittels der Oberhalbstetigkeit des *endlichen* Maßes P sowie der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gilt dann

$$P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} A_n\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} P\left(A_k\right).$$ □

Wir demonstrieren nun anhand ausgewählter Beispiele verschiedene, im Zusammenhang mit stochastischer Unabhängigkeit, auftretende Phänomenen. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Gemäß Definition 2.2.3 und der Tatsache, dass eine n-elementige Menge genau $2^n - 1$ nichtleere Teilmengen besitzt, besagt die stochastische Unabhängigkeit der Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P dann, das Bestehen von $2^n - 1$ Gleichungen. Berücksichtigt man hierbei, dass das Bestehen dieser Gleichungen für die einelementigen Teilmengen trivialerweise gegeben ist, so erkennt man, dass die stochastische Unabhängigkeit noch auf $2^n - (n + 1)$ Gleichungen führt, von denen im Allgemeinen keine eine Konsequenz der anderen ist.

Bemerkung 2.2.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine nichtleere Indexmenge. Ist dann $(A_j)_{j\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$, welche paarweise stochastisch unabhängig bezüglich P ist, also für alle $j, k \in I$ mit $j \neq k$ sind A_j und A_k stochastisch unabhängig bezüglich P, so muss $(A_j)_{j\in I}$ nicht notwendigerweise stochastisch unabhängig bezüglich P sein. ♣

Beispiel 2.2.3. Seien Ω eine vierelementige Menge mit den Elementen ω_1, ω_2, ω_3, ω_4 und $\mathfrak{A} \coloneqq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei P die diskrete Gleichverteilung $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Hierdurch wird etwa ein zweifacher fairer Münzwurf wird hier durch modelliert. Es sei $A_1 \coloneqq \{\omega_1, \omega_2\}$, $A_2 \coloneqq \{\omega_1, \omega_3\}$ sowie $A_3 \coloneqq \{\omega_1, \omega_4\}$. Dann gilt

$$P(A_1) = P(A_2) = P(A_3) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}.$$

Weiter ergibt sich

$$A_1 \cap A_2 = A_1 \cap A_3 = A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\},$$

also

$$P(A_1 \cap A_2) = P(A_1 \cap A_2) = P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4}.$$

Somit sind A_1, A_2 und A_3 paarweise stochastisch unabhängig bezüglich P. Es gilt aber

$$A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{\omega_1\},$$

also

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = \frac{1}{2^3} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Somit ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$ *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P.

Bemerkung 2.2.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} P(A_j).$$

Dann folgt hieraus *nicht* notwendig die stochastische Unabhängigkeit der Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P. ♣

Beispiel 2.2.4 (Fortsetzung von Beispiel 2.2.1)**.** Seien $A_1 \coloneqq \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in \{1, 2, 5\}\}$ und $A_2 \coloneqq \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 \in \{4, 5, 6\}\}$ sowie $A_3 \coloneqq \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 + \omega_2 = 9\}$, dass heißt also $A_3 \coloneqq \{(3, 6), (4, 5), (5, 4), (6, 3)\}$. Es gelten

$$P(A_1) = P(A_2) = \frac{1}{2} \quad \text{und} \quad P(A_3) = \frac{1}{9}.$$

Es ist $A_1 \cap A_2 = \{(\omega_1, \omega_2) \in \Omega \mid \omega_1 = 5\}$, dass heißt es ist $P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6}$. Es ist also

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{6} \neq \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(A_1) \cdot P(A_2).$$

Weiter ist $A_1 \cap A_3 = \{(5, 4)\}$, also

$$P(A_1 \cap A_3) = \frac{1}{36} \neq \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_1) \cdot P(A_3).$$

Ferner gilt $A_2 \cap A_3 = \{(4,5), (5,4), (6,3)\}$, also

$$P(A_2 \cap A_3) = \frac{1}{12} \neq \frac{1}{18} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Somit ist *keines* aus den Ereignissen A_1, A_2 und A_3 gebildeten Paaren stochastisch unabhängig bezüglich P. Es ist aber $A_1 \cap A_2 \cap A_3 = \{(5,4)\}$, also

$$P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) = \frac{1}{36} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{9} = P(A_1) \cdot P(A_2) \cdot P(A_3).$$

Es nachfolgenden Beispiel bezeichne $\lambda^{(1)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beispiel 2.2.5. Seien $\Omega := [0,1)$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1)$ sowie $P := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei

$$A_n := \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2j-2}{2^n}, \frac{2j-1}{2^n}\right).$$

Dann gilt:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $A_n \in \mathfrak{A}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt $P(A_n) = \frac{1}{2}$.

(c) Die Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

Satz 2.2.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge bezüglich P stochastisch unabhängiger Ereignisse aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - P(A_j)\right].$$

(b) *Es ist*

$$P\left(\Omega \setminus \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \left[1 - P(A_j)\right].$$

(c) *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt*

$$P\left(\bigcup_{j=1}^{n}\left[A_j \cap \left(\bigcap_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (\Omega \setminus A_k)\right)\right]\right) = \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \prod_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{n} (1 - P(A_k)).$$

Folgerung 2.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ und es ist*

$$P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \left[1 - P(A_k)\right].$$

BEWEIS. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen Bemerkung 2.2.5 ist dann $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Nach Satz 2.2.8 Teil *(a)* gilt dann

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = 1 - \prod_{k=1}^{n} \left[1 - P\left(A_k\right)\right]. \tag{1}$$

Wir setzen $B_n \coloneqq \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Dann ist

$$B_n = \bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} A_k = B_{n+1},$$

also ist $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge. Weiter gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n.$$

Mittels der Unterhalbstetigkeit von P und (1) folgt nun

$$\begin{aligned} P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) &= P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} B_k\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n}\left[\bigcup_{j=1}^{k} A_k\right]\right) \\ &= \lim_{n\to\infty} P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \lim_{n\to\infty} 1 - \prod_{k=1}^{n}\left[1 - P\left(A_k\right)\right] \\ &= 1 - \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n}\left[1 - P\left(A_k\right)\right]. \end{aligned}$$

□

Beispiel 2.2.6. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_{1,\binom{49}{6}}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Herr X gibt bei dem Wettspiel „6 aus 49" bei n aufeinanderfolgenden Wochenziehungen jeweils k verschiedene Tippreihen ab. Wir groß ist dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses $A_{n,k}$, welches der Ereignisaussage „Herr X erzielt im Verlaufe dieser n Wochenziehungen mindestens einmal 6 Richtige" entspricht.

BEWEIS. Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ und bezeichne A_j das der Ereignisaussage „Herr X erzielt bei der j-ten Wochenziehung 6 Richtige" entsprechende Ereignis. Aufgrund der Versuchsbedingungen berechnet sich diese Wahrscheinlichkeit $P\left(A_j\right)$, wenn

$$p_k \coloneqq \frac{k}{\binom{49}{6}}$$

gesetzt wird, gemäß $P\left(A_j\right) = p_k$. Weiterhin gilt $A_{n,k} = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Bei der Unterstellung der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P, ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz 2.2.8 dann Folgendes:

$$P\left(A_{n,k}\right) = P\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - P\left(A_j\right)\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n}\left(1 - p_k\right) = 1 - \left(1 - p_k\right)^n.$$

Ist z. B. $k = 10$ und $n = 2000$, was einen Zeitraum von ca. 38 Jahren entspricht, so ist

$$P\left(A_{2000,10}\right) \approx 0.00142.$$

□

Es folgt nun eine zahlentheoretische Anwendung von Satz 2.2.8.

Beispiel 2.2.7. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es bezeichne k die Anzahl der verschiedenen Primzahlen in der Primzahlzerlegung von n. Weiterhin seien $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,k}}$ eine Anordnung dieser k Primzahlen zu einer Folge. Es seien $\Omega_n \coloneqq \mathbb{N}_{1,n}$, $\mathfrak{A}_n \coloneqq \mathfrak{P}(\Omega_n)$ und P_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$. Dann gilt:

(a) Sei $j \in \mathbb{N}_{1,k}$ und bezeichne $A_{j,n}$ die Menge aller $s \in \mathbb{N}_{1,n}$, welche durch p_j teilbar sind. Dann gilt

$$P_n(A_{j,n}) = \frac{1}{p_j}.$$

(b) Die Folge $(A_{j,n})_{j \in \mathbb{N}_{1,k}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P_n.

(c) Bezeichne B_n die Menge aller zu n teilerfremden Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt

$$B_n = \bigcap_{j=1}^{k} (\Omega \setminus A_{j,n})$$

sowie

$$P_n(B_n) = \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

Das Beispiel eröffnet uns einen Zugang zu einer der wichtigsten zahlentheoretischen Funktionen.

Definition 2.2.4. Die Funktion $\varphi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$, welche jedem $n \in \mathbb{N}$ die Anzahl der zu n teilerfremden Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$ zuordnet, heißt Eulersche φ-Funktion.

Satz 2.2.9. *Es bezeichne φ die* Eulersche *φ-Funktion. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\varphi(1) = 1$.*

(b) *Sei $n \in \mathbb{N}$, bezeichne k die Anzahl der verschiedenen Primzahlen in der Primfaktorzerlegung von n und es seien $p_1, \ldots, p_k$ diese k Primzahlen. Dann gilt:*

$$\varphi(n) = n \cdot \prod_{j=1}^{k} \left(1 - \frac{1}{p_j}\right).$$

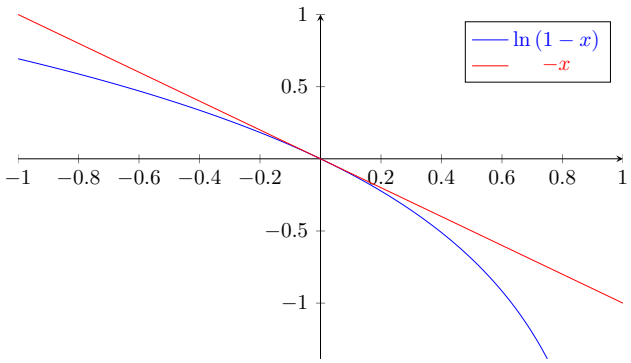
(c) *Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass n_1 und n_2 teilerfremd sind. Dann gilt*

$$\varphi(n_1 \cdot n_2) = \varphi(n_1) \cdot \varphi(n_2).$$

Wir betrachten nun einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen. Wir interessieren uns nun für die Wahrscheinlichkeit dafür, dass unendlich viele dieser Ereignisse eintreten, mit anderen Worten also die Wahrscheinlichkeit $P(\limsup_{n \to \infty} A_n)$. Hierzu stellen wir zunächst einige Hilfsresultate bereit.

Lemma 2.2.1. *Sei $x \in [0, 1)$. Dann gilt*

$$\ln(1 - x) \leq -x.$$



BEWEIS. Sei $x = 0$. Dann gilt

$$\ln(1-0) = \ln 1 = 0 \leq -0. \tag{1}$$

Sei nun $x \in (0,1)$. Dann ist $1-x \in (0,1)$. Aufgrund des Mittelwertsatzes der Differentialrechnung gibt es dann ein $y \in (1-x,1)$ mit

$$-\ln(1-x) = \ln 1 - \ln(1-x) = (\ln)'(y) \cdot [1-(1-x)] = \frac{1}{y} \cdot x. \tag{2}$$

Wegen $y \in (1-x,1) \subseteq (0,1)$ ist dann $\frac{1}{y} \in (1,+\infty)$. Damit folgt

$$\frac{1}{y}x \geq x. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt daher nun $-\ln(1-x) \geq x$ bzw.

$$\ln(1-x) \leq -x. \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt dann die Behauptung. □

Lemma 2.2.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,1]$. Dann gilt*

$$\prod_{j=1}^{n}[1-\alpha_j] \leq \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right).$$

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $\alpha_k = 1$ existiert. Dann gilt

$$\prod_{j=1}^{n}[1-\alpha_j] = 0 \leq \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right). \tag{1}$$

Sei nun $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,1)$. Wegen Lemma 2.2.1 gilt dann

$$\ln\left(\prod_{j=1}^{n}[1-\alpha_j]\right) = \sum_{j=1}^{n}\ln(1-\alpha_j) \leq -\sum_{j=1}^{n}\alpha_j. \tag{2}$$

Aus (2) und der Monotonie der Exponentialfunktion folgt nun

$$\prod_{j=1}^{n}[1-\alpha_j] = \exp\left(\ln\left(\prod_{j=1}^{n}[1-\alpha_j]\right)\right) \leq \exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right). \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt nun die Behauptung. □

Lemma 2.2.3. *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$ mit $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n = +\infty$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left[1-P\left(A_j\right)\right]=0.$$

Beweis. Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann gilt wegen Lemma 2.2.2

$$0\leq\prod_{j=1}^{n}\left[1-P\left(A_j\right)\right]\leq\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right). \tag{1}$$

Nun ist $\lim_{n\to\infty}\exp\left(-n\right)=0$ und wegen $\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n=+\infty$ gilt dann

$$\exp\left(-\sum_{j=1}^{\infty}\alpha_j\right)=\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)=0. \tag{2}$$

Damit erhalten wir aus (1) und (2) dann

$$0\leq\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left[1-P\left(A_j\right)\right]\leq\lim_{n\to\infty}\exp\left(-\sum_{j=1}^{n}\alpha_j\right)=0.$$

Also gilt

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{j=1}^{n}\left[1-P\left(A_j\right)\right]=0.$$

□

Satz 2.2.10 (Zweites Lemma von Borel-Cantelli)**.** *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$ mit $\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)=+\infty$. Weiter sei $A\coloneqq\limsup_{n\to\infty}A_n$. Dann gilt $A\in\mathfrak{A}$ sowie $P\left(A\right)=1$.*

Beweis. Es gilt $A=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_n$. Damit ist

$$\Omega\setminus A=\Omega\setminus\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\Omega\setminus\left(\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k\right)=\bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{\infty}\left(\Omega\setminus A_k\right). \tag{1}$$

Seien nun $n\in\mathbb{N}$ und $l\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}$. Dann setzen wir

$$C_{n,l}\coloneqq\bigcap_{k=n}^{l}\left(\Omega\setminus A_k\right). \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ ist, folgt damit aus (2)

$$C_{n,l}\in\mathfrak{A}. \tag{3}$$

Weiterhin folgt aus (2)

$$C_l\supseteq C_{l+1} \tag{4}$$

sowie

$$\bigcap_{l=n}^{\infty}C_{n,l}=\bigcap_{l=n}^{\infty}\bigcap_{k=n}^{l}\left(\Omega\setminus A_k\right)=\bigcap_{k=n}^{\infty}\left(\Omega\setminus A_k\right). \tag{5}$$

Aus (3) bis (5) und der Oberstetigkeit des endlichen Maßes P folgt dann

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}(\Omega\setminus A_k)\right)=P\left(\bigcap_{l=n}^{\infty}C_{n,l}\right)=\lim_{l\to\infty}P\left(C_{n,l}\right). \tag{6}$$

Sei $l\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}$. Da die Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,l}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, liefert Teil *(b)* von Satz 2.2.8 dann

$$P\left(C_{n,l}\right)=P\left(\bigcap_{k=n}^{l}(\Omega\setminus A_k)\right)=\prod_{k=n}^{l}\left[1-P\left(A_k\right)\right]. \tag{7}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty}P\left(A_n\right)=+\infty. \tag{8}$$

Da P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$P\left(A_s\right)\in[0,1]\qquad\text{für alle } s\in\mathbb{N}. \tag{9}$$

Wegen (7) bis (9) liefert Lemma 2.2.3 dann

$$\lim_{l\to\infty}P\left(C_{n,l}\right)=\lim_{l\to\infty}\prod_{k=n}^{l}\left[1-P\left(A_k\right)\right]=0. \tag{10}$$

Aus (6) und (10) folgt nun

$$P\left(\bigcap_{k=n}^{\infty}(\Omega\setminus A_k)\right)=0. \tag{11}$$

Wegen (1) und (11) liefert Teil *(d)* von Satz M.5.1 schließlich $P\left(\Omega\setminus A\right)=0$. Somit ist

$$P\left(A\right)=1-P\left(\Omega\setminus A\right)=1-0=1. \qquad \square$$

Folgerung 2.2.3. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$, welche eine bezüglich P stochastisch unabhängige Teilfolge $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, für die $\sum_{k=1}^{\infty}P\left(A_{n_k}\right)=+\infty$ erfüllt ist. Es sei sei $A\coloneqq\limsup_{n\to\infty}A_n$. Dann gilt $A\in\mathfrak{A}$ sowie $P\left(A\right)=1$.*

Beweis. Sei $\widetilde{A}\coloneqq\limsup_{k\to\infty}A_{n_k}$. Nach Satz 2.2.10 gilt dann

$$\widetilde{A}\in\mathfrak{A}\quad\text{und}\quad P\left(\widetilde{A}\right)=1. \tag{1}$$

Nach der Definition des Limes superior gilt weiter

$$\widetilde{A}=\limsup_{k\to\infty}A_{n_k}=\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_{n_k}\subseteq\bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty}A_k=\limsup_{n\to\infty}A_n=A. \tag{2}$$

Wegen (1), (2) und der Isotonie von P gilt somit

$$1=P\left(\widetilde{A}\right)\leq P\left(A\right)\leq 1,$$

also $P\left(A\right)=1$. $\square$

Das folgende Beispiel zeigt, dass die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P in Satz 2.2.10 unerlässlich ist.

Beispiel 2.2.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $B \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass $P(B) \in (0,1)$ erfüllt ist. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $A_n := B$ und es sei $A := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Wegen $P(B) \in (0,1)$ gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = \sum_{n=1}^{\infty} P(B) = +\infty.$$

Andererseits ist wegen

$$A = \limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} B = \bigcap_{n=1}^{\infty} B = B$$

dann

$$P(A) = P(B) \in (0,1).$$

Durch die Kombination der Sätze 2.2.10 und M.5.4 erhalten wir den folgenden

Satz 2.2.11. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei $A := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $A \in \mathfrak{A}$ und es gilt $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) < +\infty$.*

  (ii) *Es ist $P(A) = 0$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (iii) *Es ist $\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty$.*

  (iv) *Es ist $P(A) = 1$.*

Wir geben nun eine Verschärfung von Satz 2.2.1 an:

Satz 2.2.12. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine nichtleere Indexmenge. Weiterhin sei $(A_j)_{j\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Es bezeichne $\mathcal{H}(I)$ die Menge aller endlichen Teilmengen von I. Wir setzen weiterhin: $\bigcap_{j\in\varnothing} A_j := \Omega$, $\bigcap_{j\in\varnothing} (\Omega \setminus A_j) := \Omega$ sowie $\prod_{j\in\varnothing} P(A_j) := 1$ und $\prod_{j\in\varnothing} P(\Omega \setminus A_j) := 1$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Familie $(A_j)_{j\in I}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Für jedes geordnete Paar $(J,K) \in \mathcal{H}(I) \times \mathcal{H}(I)$, für das $J \cap K = \varnothing$ ist, gilt*

$$P\left(\left[\bigcap_{j\in J} (\Omega \setminus A_j)\right] \cap \left[\bigcap_{k\in K} (A_k)\right]\right) = \left[\prod_{j\in J} P(\Omega \setminus A_j)\right] \cdot \left[\prod_{k\in K} P(A_k)\right].$$

(iii) *Falls für $j \in I$ für B_j jeweils eine der Mengen A_j oder $\Omega \setminus A_j$ gewählt wird, so ist die Familie $(B_j)_{j\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Induktion über die Elemente von J. □

Mit Hilfe von Satz 2.2.12 lässt sich ein rascher alternativer Zugang zu Satz 2.2.8 erreichen.

Alternativer Beweis von Satz 2.2.8. Wegen Satz 2.2.12 ist die Folge $(\Omega \setminus A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}(\Omega\setminus A_j)\right)=\prod_{j=1}^{n}P(\Omega\setminus A_j)=\prod_{j=1}^{n}[1-P(A_j)].$$

□

Satz 2.2.13. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n\in\mathbb{N}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Falls für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ für B_j jeweils eine der Mengen A_j oder $\Omega\setminus A_j$ gewählt wird, so ist*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n}B_j\right)=\prod_{j=1}^{n}P(B_j).$$

2.3. Ungekoppelte Zufallsexperimente vom Produkttyp

Im vorliegenden Abschnitt wenden wir uns der einfachsten Klasse von mehrstufigen Zufallsexperimenten zu. Hierbei handelt es sich um solche Experimente, welche sich aus einer *endlichen* Anzahl *ohne* gegenseitiger Beeinflussung verlaufenden Einzelexperimenten zusammensetzen. Dabei werden wir erkennen, dass die postulierte experimentelle Unabhängigkeit auf stochastische Unabhängigkeit führt.

Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann betrachten wir n Experimente mit zufälligen Ausgang. Für $k\in\mathbb{N}_{1,n}$ diene zur Modellierung des k-ten Experimentes E_k ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_k,\mathfrak{A}_k,P_k)$. Wir interessieren uns nun für ein neues Zufallsexperiment E, welches darin besteht, dass die Experimente $E_1,\ldots,E_n$ *ohne gegenseitige Beeinflussung* nacheinander oder nebeneinander her ausgeführt werden. Das Experiment wird dann durch den Produktraum

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j,\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j,\bigotimes_{j=1}^{n}P_j\right)$$

beschrieben. Hierbei ist $\bigotimes_{j=1}^{n}P_j$ das einzige Maß auf

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j=\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right),$$

welches für alle

$$\bigtimes_{j=1}^{n}A_j\in\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$$

der Gleichung

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}P_j\right)\left(\bigtimes_{j=1}^{n}A_j\right)=\prod_{j=1}^{n}P_j(A_j)$$

genügt.

Satz 2.3.1. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, P_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Weiter sei*

$$(\Omega, \mathfrak{A}, P) \coloneqq \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j, \bigotimes_{j=1}^{n} P_j \right).$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $A_j \in \mathfrak{A}_j$. Dann sind

$$\begin{aligned} E_1 &\coloneqq A_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times \Omega_n, \\ E_2 &\coloneqq \Omega_1 \times A_2 \times \cdots \times \Omega_n, \\ &\vdots \\ E_n &\coloneqq \Omega_1 \times \Omega_2 \times \cdots \times A_n \end{aligned}$$

bezüglich P stochastisch unabhängig Ereignisse.

Beweis. Seien $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $i_1, \ldots, i_m \in \mathbb{N}_{1,n}$ paarweise verschieden. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ wird dann gesetzt:

$$B_k \coloneqq \begin{cases} A_{i_j}, & \text{falls mit einem } j \in \mathbb{N}_{1,m} \text{ dann } i_j = k \text{ gilt,} \\ \Omega_k, & \text{falls } k \in \mathbb{N}_{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}. \end{cases} \tag{1}$$

Dann gilt

$$\bigcap_{j=1}^{m} E_{i_j} = \bigtimes_{j=1}^{n} B_k. \tag{2}$$

Falls $\mathbb{N}_{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\} \neq \varnothing$ ist, oder äquivalent $m \in \mathbb{N}_{1,n-1}$ erfüllt ist, so gilt für $k \in \mathbb{N}_{1,n} \setminus \{i_1, \ldots, i_m\}$ wegen (1) dann

$$P_k(B_k) = P_k(\Omega_k) = 1. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{j=1}^{m} E_{i_j} \right) &= P\left(\bigtimes_{k=1}^{n} B_k \right) = \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k \right) \left(\bigtimes_{k=1}^{n} B_k \right) = \prod_{k=1}^{n} P_k(B_k) \\ &= \prod_{j=1}^{m} P_{i_j}(A_{i_j}) = \prod_{j=1}^{m} \left(\prod_{\substack{k=1 \\ k\neq i_j}}^{m} P_k(\Omega_k) \right) P_{i_j}(A_{i_j}) \\ &= \prod_{j=1}^{m} \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k \right)(B_k) = \prod_{j=1}^{m} P\left(E_{i_j}\right). \end{aligned}$$

Somit ist $\left(E_{i_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. □

Wir betrachten zunächst mehrstufige Laplace-Experimente.

Satz 2.3.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren endlichen Mengen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne P_j die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_j, \mathfrak{P}(\Omega_j))$. Weiter bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf*

$$\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_j \right) \right).$$

Dann gelten

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_j\right)$$

sowie

$$P = \bigotimes_{j=1}^{n} P_j.$$

Wir wenden uns nun einer Klasse von besonderes einfachen Zufallsexperimenten zu, nämlich solchen mit genau 2 möglichen Versuchsausgängen. Diese werden oft mit Erfolg oder Misserfolg gedeutet.

Definition 2.3.1. Seien $\Omega_1 := \{0,1\}$, $\mathfrak{A}_1 := \mathfrak{P}(\Omega_1)$, $p \in [0,1]$ und

$$P_{1,p} := p \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{A}_1} + (1-p) \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{A}_1}.$$

Dann heißt $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_{1,p})$ der *einfache Bernoulli-Raum zum Parameter p.*

Bemerkung 2.3.1. Der einfache Bernoulli-Raum $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_{1,p})$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum. ♣

Definition 2.3.2. Sei $p \in [0,1]$ und bezeichne $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, P_{1,p})$ den einfachen Bernoulli-Raum zum Parameter p. Weiter sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und es sei

$$(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_{n,p}) := \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_1, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_1, \bigotimes_{j=1}^{n} P_{1,p}\right).$$

Dann heißt $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_{n,p})$ der *n-fache Bernoulli-Raum zum Parameter p.*

Definition 2.3.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Unter einem *n-fachen Bernoulli-Experiment* verstehen wir dann ein zufälliges Experiment, dessen Modellierung bei geeigneter Wahl eines $p \in [0,1]$ durch den n-fachen Bernoulli-Raum $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_{n,p})$ erfolgen kann.

Satz 2.3.3. *Seien $p \in [0,1]$, $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n, P_{n,p})$ n-fachen Bernoulli-Raum zum Parameter p. Dann gilt:*

(a) *Seien $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ und sei $k := \sum_{j=1}^{n} \omega_j$. Dann gilt*

$$P_{n,p}(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}) = p^k \cdot (1-p)^{n-k}.$$

(b) *Es bezeichne $\beta_{n,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Weiter sei $k \in \{0,1,\ldots,n\}$ sowie*

$$A_{n,k} := \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \,\middle|\, k = \sum_{j=1}^{n} \omega_j \right\}.$$

Dann gilt

$$P_{n,p}(A_{n,k}) = \binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k} = \beta_{n,p}(\{k\}).$$

(c) *Sei* $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ *und es bezeichne* $B_{n,k}$ *die Menge aller* $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$, *für welche* $\omega_k = 1$ *sowie im Fall* $k \neq 1$ *für alle* $j \in \{1, \ldots, k-1\}$ *weiterhin* $\omega_j = 0$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$P_{n,p}(B_{n,k}) = (1-p)^{k-1} \cdot p$$

und im Fall $p \in (0,1]$, *falls* $\widetilde{G}_p$ *die Ersterfolgsverteilung zum Parameter* p *bezeichnet, weiterhin*

$$P_{n,p}(B_{n,k}) = \widetilde{G}_p(\{k\}).$$

(d) *Seien* $k \in \mathbb{N}_0$ *und* $r \in \mathbb{N}$ *so gewählt, dass* $k + r \leq n$ *erfüllt ist. Es bezeichne* $C_{n,k,r}$ *die Menge aller* $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$, *für welche* $\sum_{j=1}^{k+r} \omega_j = r$ *und* $\omega_{k+r} = 1$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$P_{n,p}(C_{n,k,r}) = \binom{k+r-1}{k} \cdot (1-p)^k \cdot p^r$$

und im Fall $p \in (0,1)$, *falls* $G_{p,r}$ *die negative Binomialverteilung mit dem Parameter* p *und* r *bezeichnet, gilt weiterhin*

$$P_{n,p}(C_{n,k,r}) = G_{p,r}(\{k\}).$$

(e) *Es bezeichne* D_n *die Menge aller* $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega_n$ *mit* $\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} \omega_j \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$P_{n,p}(D_n) = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^n\right].$$

(f) *Sei* $s \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt:*

(f1) *Es ist*

$$D_{2s} = \bigcup_{k=0}^{s} A_{2s,2k}$$

und

$$D_{2s+1} = \bigcup_{k=0}^{s} A_{2s+1,2k}.$$

(f2) *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{2s}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{2s-2k} = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^{2s}\right]$$

sowie im Fall $n > 0$ *weiterhin*

$$\sum_{k=0}^{s-1} \binom{2s}{2k+1} \cdot p^{2k+1} \cdot (1-p)^{2s-(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[1 - (1-2p)^{2s}\right].$$

(f3) *Es gilt*

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{2s+1}{2k} \cdot p^{2k} \cdot (1-p)^{2s+1-2k} = \frac{1}{2}\left[1 + (1-2p)^{2s+1}\right]$$

sowie im Fall $n > 0$ *weiterhin*

$$\sum_{k=0}^{s} \binom{2s+1}{2k+1} \cdot p^{2k+1} \cdot (1-p)^{2s+1-(2k+1)} = \frac{1}{2}\left[1 - (1-2p)^{2s+1}\right].$$

Folgerung 2.3.1. *Sei $x \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $1 + \sqrt{x} \in (0, +\infty)$ und*

$$\frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \in (-1, 1)\,.$$

(b) *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

$$\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \binom{2^n}{2k+1} \cdot x^k \in (0, +\infty)\,,$$

als auch

$$1 - \frac{1 - \sqrt{x}}{1 + \sqrt{x}} \in (0, 2)$$

sowie

$$\frac{\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \binom{2^n}{2k} \cdot x^k}{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \binom{2^n}{2k+1} \cdot x^k} = \sqrt{x} \cdot \frac{1 + \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2^n}}{1 - \left(\frac{1-\sqrt{x}}{1+\sqrt{x}}\right)^{2^n}}.$$

(c) *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=0}^{2^{n-1}} \binom{2^n}{2k} \cdot x^k}{\sum_{k=0}^{2^{n-1}-1} \binom{2^n}{2k+1} \cdot x^k} = \sqrt{x}.$$

Beispiel 2.3.1. Bei einem Produktionsprozess von elektrischen Sicherungen möchte man erreichen, dass höchstens ein Prozent der Produktion defekt ist. Dazu kontrolliert man stündlich zehn Sicherungen. Falls nicht alle Sicherungen in Ordnung sind, wird der Produktionsprozess gestoppt und überprüft. Ist dieser Prozess sinnvoll? Dazu fragen wir uns: Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses, welches der Ereignisaussage „Der Produktionsprozess wird nicht gestoppt, obwohl 2% der Sicherungen defekt sind“ entspricht?
Da die Anzahl der stündlich produzierten Sicherungen sehr groß im Vergleich zur Anzahl der stündlich kontrollierten Sicherungen ist, besteht kein wesentlicher Unterschied zwischen Ziehungen mit Zurücklegen und Ziehen ohne Zurücklegen. Daher können wir hier ein zehnfaches Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $0.02 = {}^{2}/_{100}$ zugrunde legen. Die Wahrscheinlichkeit des uns interessierenden Ereignisses beträgt dann also

$$\beta_{10;0.02}\left(\{0\}\right) = \binom{10}{0} \cdot 0.02^0 \cdot (1 - 0.02)^{10} = 0.98^{10} \approx 0.82.$$

In circa 82 % aller Fälle wird eine Fehlerquote von 2 % nicht bemerkt. Das Verfahren ist nicht zu empfehlen.

Beispiel 2.3.2. Ein Liefervertrag zwischen einem Hersteller und einem Händler sieht vor, dass eine Lieferung im Umfang $N = 1000$ Erzeugnissen einer bestimmten Art höchstens 2 % defekte Stücke enthalten darf. Das vertraglich vereinbarte Prüfverfahren sieht vor, dass die Lieferung zurückgewiesen wird, wenn eine Stichprobe vom Umfang $n = 50$ mindestens ein defektes Stück enthält.
Wir diskutieren nun dieses Prüfverfahren: Hierzu betrachten wir den Fall, dass die 2 %-Schranke gerade eingehalten wird, also genau $M = 20$ defekte Stücke unter den 1000 gelieferten vorhanden sind. Bezeichnet nun $H_{1000,20,50}$ die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern 1000, 20

und 50, so ist für $k \in \mathbb{N}_{1,50}$ die Wahrscheinlichkeit $P(A_k)$ des Ereignisses A_k, welches der Ereignisaussage „Unter den 50 ausgewählten Erzeugnissen befinden sich genau k defekte“ entspricht, dann

$$P(A_k) = H_{1000,20,50}(\{k\}) = \frac{\binom{20}{k}\binom{1000-20}{50-k}}{\binom{1000}{50}} = \frac{\binom{20}{k}\binom{980}{50-k}}{\binom{1000}{50}}.$$

Insbesondere ist

$$P(A_0) = \frac{\binom{20}{0}\binom{980}{50}}{\binom{1000}{50}} \approx 0.36,$$

also

$$P(\Omega \setminus A_0) = 1 - P(A_0) \approx 0.64.$$

Da nun $\Omega \setminus A_0$ aufgrund des vereinbarten Prüfverfahrens der Ereignisaussage „Die Lieferung wird zurückgewiesen“ entspricht, wird eine Lieferung, die genau 2 % defekte Stücke enthält, mit Wahrscheinlichkeit 0.64 zurückgewiesen. Wir nehmen nun an, dass die Lieferung genau 1 % defekte Stücke enthält, dann folgt analog

$$P(A_0) = \frac{\binom{10}{0}\binom{990}{50}}{\binom{1000}{50}} \approx 0.6,$$

also

$$P(\Omega \setminus A_0) = 1 - P(A_0) \approx 0.4.$$

Eine Lieferung, die genau 1 % defekter Teile enthält, wird mit Wahrscheinlichkeit 0.4 zurückgewiesen. Das vereinbarte Prüfverfahren ist also sehr streng.

Beispiel 2.3.3. Die Wahrscheinlichkeit, dass ein Brennelement in einem Kernreaktor den Bedingungen der Qualitätsüberprüfung nicht genügt, beträgt $p = 0.0002$. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage „Höchstens 2 von 5000 Brennelementen in einem Kernreaktor erfüllen die Qualitätsanforderungen nicht“ entspricht?
Unser zufälliges Experiment ist ein 5000-faches Bernoulli-Experiment mit Erfolgswahrscheinlichkeit $p = 0.0002$ und lässt sich durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega_{5000}, \mathfrak{A}_{5000}, P_{5000;0.0002})$ modellieren. Mit den Bezeichnungen von Teil *(b)* von Satz 2.3.3 gilt dann

$$A = \bigcup_{k=0}^{2} A_{5000,k}.$$

Beachtet man, dass unsere Folge $(A_{5000,k})_{k \in \mathbb{Z}_{0,2}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Ereignissen ist, so folgt mittels Teil *(b)* von Satz 2.2.2, dann

$$P_{5000;0.0002}(A) = P_{5000;0.0002}\left(\bigcup_{k=0}^{2} A_{5000,k}\right) = \sum_{k=0}^{2} P_{5000;0.0002}(A_{5000,k}).$$

Wir nehmen nun eine auf dem Poissonschen Grenzwertsatz (siehe Satz M.15.2) beruhende Poisson-Approximation, der hier auftretenden Binomialverteilung vor. Hierzu wählen wir

$$\alpha := 5000 \cdot 0.0002 = 1$$

und erhalten

$$\sum_{k=0}^{2} \pi_\alpha(\{k\}) = \sum_{k=0}^{2} \pi_1(\{k\}) = \sum_{k=0}^{2} \exp(-1) \cdot \frac{1^k}{k!} = \frac{1}{\mathrm{e}} \cdot \left(1 + 1 + \frac{1}{2}\right) = \frac{5}{2\mathrm{e}} \approx 0.9197.$$

Beispiel 2.3.4. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Zwei Personen X und Y werfen jeder n-mal eine faire Münze. Wie groß ist dann die Wahrscheinlichkeit des Ereignisses A, welches der Ereignisaussage „Es erhalten X und Y gleich oft Kopf“ entspricht?
Das vorliegende Zufallsexperiment stellt eine ohne gegenseitige Beeinflussung ablaufende Nebeneinanderausführung zweier Bernoulli-Experimente mit Erfolgswahrscheinlichkeit $1/2$ dar. Da diese jeweils durch den n-fachen Bernoulli-Raum $\left(\Omega_n, \mathfrak{A}_n P_{n,1/2}\right)$ ist dann der Produktraum

$$\left(\Omega_n, \mathfrak{A}_n P_{n,1/2}\right) \otimes \left(\Omega_n, \mathfrak{A}_n P_{n,1/2}\right)$$

der unserem Experiment zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es ist also

$$\Omega = \Omega_n \times \Omega_n = \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \{0,1\}\right) \times \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \{0,1\}\right)$$

und

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}_n \otimes \mathfrak{A}_n = \mathfrak{P}(\Omega_n) \otimes \mathfrak{P}(\Omega_n) = \mathfrak{P}(\Omega_n \times \Omega_n) = \mathfrak{P}(\Omega)$$

sowie

$$P = P_{n,1/2} \otimes P_{n,1/2}.$$

Wir nehmen eine Identifizierung der Münzwurfergebnisse Kopf und Zahl mit den Elementen 1 und 0 von Ω_n vor. Für $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$ sei

$$A_{n,k} \coloneqq \left\{ (\omega_1, \ldots, \omega_n) \,\middle|\, \sum_{j=1}^{n} \omega_j = k \right\}.$$

Aus der Definition von A folgt dann

$$A = \bigcup_{k=0}^{n} \left(A_{n,k} \times A_{n,k}\right).$$

Da für alle $k, l \in \mathbb{Z}_{0,n}$ mit $k = l$ dann $(A_{n,k} \times A_{n,k}) \cap (A_{n,l} \times A_{n,l}) = \varnothing$. Wegen Teil *(b)* von Satz 2.3.3 gilt für $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$ dann

$$P_{n,1/2}(A_{n,k}) = \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^k \cdot \left(\frac{1}{2}\right)^{n-k} = \frac{1}{2^n} \cdot \binom{n}{k}.$$

Unter Beachtung von

$$\binom{2n}{n} = \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2$$

sowie den obigen Betrachtungen folgt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(\bigcup_{k=0}^{n} \left(A_{n,k} \times A_{n,k}\right)\right) = \sum_{k=0}^{n} P\left(A_{n,k} \times A_{n,k}\right) = \sum_{k=0}^{n} \left(P_{n,1/2} \otimes P_{n,1/2}\right)\left(A_{n,k} \times A_{n,k}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{n} \left[P\left(A_{n,k}\right)\right]^2 = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{n} \left[\binom{n}{k}\right]^2 \\ &= \frac{1}{2^{2n}} \cdot \binom{2n}{n}. \end{aligned}$$

2.4. Mehrstufige Zufallsexperimente mit endlich vielen Versuchsausgängen

Im vorliegenden Abschnitt studieren wir nun mehrstufige Zufallsexperimente bei denen Abhängigkeiten zwischen den einzelnen Teilexperimenten bestehen. Hierbei konzentrieren wir uns auf die einfachste mögliche Situation, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass jedes der ins Gesamtexperiment eingehenden Einzelexperimente nur endlich viele Versuchsausgänge besitzt. Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Konstruktion eines für derartige Zufallsexperimente adäquaten Wahrscheinlichkeitsraumes. Dieser ist durch eine spezielle innere Struktur gekennzeichnet.

Definition 2.4.1. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere endliche Mengen. Weiter sei

$$Q\colon \Omega_1 \times \mathfrak{P}(\Omega_2) \longrightarrow [0,1]$$

und für $\omega_1 \in \Omega_1$ sei

$$Q_{\omega_1 \bullet}\colon \mathfrak{P}(\Omega_2) \longrightarrow [0,1]$$

definiert durch $A \longmapsto Q(\omega_1, A)$. Dann heißt Q eine *Übergangswahrscheinlichkeit von* $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ *nach* $(\Omega_2, \mathfrak{P}(\Omega_2))$, falls für alle $\omega_1 \in \Omega_1$, dann $Q_{\omega_1 \bullet}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathfrak{P}(\Omega_2))$ ist.

Wir kommen nun zum zentralen Resultat des Abschnitts:

Satz 2.4.1. *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren endlichen Mengen. Weiter sei P_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ und für $k \in \mathbb{N}_{2,n}$ sei $P_{k-1,k}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von*

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j\right)\right) \text{ nach } (\Omega_k, \mathfrak{P}(\Omega_k)).$$

Es sei

$$P := \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j} P_1(\{\omega_1\}) \cdot \left(\prod_{k=2}^{n} (P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\bullet} \cdot \varepsilon_{(\omega_1,\ldots\omega_n),\mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j\right)}\right).$$

Dann gilt

$$P \in \mathcal{M}_+^1\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j\right)\right).$$

Beweis. Unsere Strategie basiert auf Satz 1.4.1. Sei $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$. Aus der Definition der beteiligten Größen folgt dann

$$[P_1(\{\omega_1\})] \cdot \left(\prod_{k=2}^{n} (P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\bullet}(\{\omega_k\})\right) \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ setzen wir $s_k := \operatorname{card} \Omega_k$. Dann ist also $s_k \in \mathbb{N}$ und sei $(\omega_{l_k,k})_{l_k \in \mathbb{N}_{1,s_k}}$ eine Anordnung der Elemente von Ω_k zu einer Folge. Es ist also

$$\Omega_k = \bigcup_{l_k=1}^{s_k} \{\omega_{l_k,k}\}. \tag{2}$$

Wegen $P_1 \in \mathcal{M}_+^1(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ folgt aus Teil *(a)* von Satz 1.4.1 dann

$$\sum_{l_1=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{l_1,1}\}) = 1. \tag{3}$$

Sei $k \in \mathbb{N}_{2,n}$ sowie $(l_1, \ldots, l_{k-1}) \in \times_{j=1}^{k-1} \mathbb{N}_{1,s_j}$. Wegen

$$(P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{l_{k-1}})_\bullet} \in \mathcal{M}_+^1\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j\right)\right)$$

und wegen (2) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 1.4.1 dann

$$(P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{l_{k-1,l_{k-1}}})_\bullet}(\{\omega_{l_k,k}\}) = 1. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (2) bis (4) folgt nun

$$\begin{aligned}
&\sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\times_{j=1}^n \Omega_j} [P_1(\{\omega_1\})] \cdot \left(\prod_{k=2}^n (P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})_\bullet}(\{\omega_k\})\right) \\
=&\sum_{l_1=1}^{s_1}\left(\sum_{l_2=1}^{s_2}\left(\cdots\left(\sum_{l_n=1}^{s_n}[P_1(\{\omega_1\})]\left(\prod_{k=2}^n (P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})_\bullet}(\{\omega_k\})\right)\right)\right)\right) \\
=&\sum_{l_1=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{l_1,1}\})\left(\sum_{l_2=1}^{s_2}(P_{1,2})_{\omega_{l_1}\bullet}\left(\cdots\left(\sum_{l_n=1}^{s_n}(P_{n-1,n})_{(\omega_{l_1,1},\ldots,\omega_{l_{n-1},n-1})_\bullet}(\{\omega_{l_n,n}\})\right)\right)\right) \\
=&\begin{cases}
\sum_{l_1=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{l_1,1}\}) \ , & \text{falls } n=2, \\
\sum_{l_1=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{l_1,1}\})\left(\sum_{l_2=1}^{s_2}(P_{1,2})_{\omega_{l_1}\bullet}(\{\omega_{l_1,1}\})\cdots\right. & \\
\left.\left(\sum_{l_{n-1}=1}^{s_{n-1}}(P_{n-2,n-1})_{(\omega_{l_1,1},\ldots,\omega_{l_{n-2},n-2})_\bullet}(\{\omega_{l_{n-1},n-1}\})\right)\right) \ , & \text{falls } n>2
\end{cases} \\
&\vdots \text{(wiederholtes Anwenden von (4))} \\
=&1.
\end{aligned}$$

Daraus folgt nun mit (1) und der Definition von P mittels Teil *(b)* von Satz 1.4.1 dann

$$P \in \mathcal{M}_+^1\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j\right)\right). \qquad \square$$

Dieser Satz führt auf folgende Begriffsbildung:

Definition 2.4.2. Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren endlichen Mengen. Weiter sei P_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ und für $k \in \mathbb{N}_{2,n}$ sei $P_{k-1,k}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j\right)\right) \text{ nach } (\Omega_k, \mathfrak{P}(\Omega_k)).$$

Dann heißt das im letzten Satz eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß P die *Kopplung* von P_1 mit der Folge $(P_{k-1,k})_{k\in\mathbb{N}_{2,n}}$.

Bemerkung 2.4.1. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren endlichen Mengen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei P_j ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_j, \mathfrak{P}(\Omega_j))$. Für $k \in \mathbb{N}_{2,n}$ sei

$$P_{k-1,k}\colon \left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j\right) \times \mathfrak{P}(\Omega_k) \longrightarrow [0,1]$$

definiert gemäß

$$((\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}), A_k) \longmapsto P_k(A_k).$$

Dann gilt:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_{2,n}$. Dann gilt: Sei $(\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}) \in \bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j$. Es sei

$$(P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\bullet} : \mathfrak{P}(\Omega_k) \longrightarrow [0,1]$$

definiert gemäß $A \longmapsto P_{k-1,k}((\omega_1, \ldots, \omega_{k-1}), A)$. Dann ist $(P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\bullet} = P_k$. Ferner ist $P_{k-1,k}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{k-1} \Omega_j\right)\right) \text{ nach } (\Omega_k, \mathfrak{P}(\Omega_k)).$$

(b) Es bezeichne P die Kopplung von P_1 mit der Folge $(P_{k-1,k})_{k\in\mathbb{N}_{2,n}}$. Dann gilt

$$P = \bigotimes_{j=1}^{n} P_j.$$

♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition von P_k.

Zu *(b)*: Sei $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$. Unter Beachtung von *(a)* und den Teil *(b)* von Satz 1.4.1 folgt dann

$$\begin{aligned}
P(\{\omega_1, \ldots, \omega_n\}) &= P_1(\{\omega_1\}) \cdot \prod_{k=2}^{n} (P_{k-1,k})_{(\omega_1,\ldots,\omega_{k-1})\bullet}(\{\omega_k\}) \\
&= P_1(\{\omega_1\}) \prod_{k=2}^{n} P_k(\{\omega_k\}) = \prod_{k=1}^{n} P_k(\{\omega_k\}) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k\right)\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \{\omega_k\}\right) \\
&= \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k\right)(\{(\omega_1, \ldots, \omega_n)\}).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz 1.4.1 dann

$$\begin{aligned} P &= \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\times_{k=1}^{n}\Omega_k} P\left(\{\omega_1,\ldots,\omega_n\}\right)\cdot\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\mathfrak{P}\left(\times_{k=1}^{n}\Omega_k\right)} \\ &= \sum_{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\in\times_{k=1}^{n}\Omega_k} \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k\right)\left(\{(\omega_1,\ldots,\omega_n)\}\right)\cdot\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\mathfrak{P}\left(\times_{k=1}^{n}\Omega_k\right)} \\ &= \left(\bigotimes_{k=1}^{n} P_k\right). \end{aligned}$$

□

Wir verdeutlichen nun, dass sich Übergangswahrscheinlichkeiten in natürlicher als bedingte Wahrscheinlichkeiten interpretieren lassen.

Satz 2.4.2. *Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere endliche Mengen, P_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1,\mathfrak{P}(\Omega_1))$ und $P_{1,2}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von $(\Omega_1,\mathfrak{P}(\Omega_1))$ nach $(\Omega_2,\mathfrak{P}(\Omega_2))$. Es bezeichne P die Kopplung von P_1 und $P_{1,2}$. Weiter sei $\omega_1\in\Omega_1$ und $A_2\in\mathfrak{P}(\Omega_2)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $P(\{\omega_1\}\times A_2) = P_1(\{\omega_1\})\cdot(P_{1,2})_{\omega_1\bullet}(A_2)$.*

(b) *Es ist $P_1(\{\omega_1\}\times\Omega_2) = P(\{\omega_1\})$.*

(c) *Es gelte $\{\omega_1\}\in\mathfrak{P}(\Omega_1)\setminus\mathcal{N}_{P_1}$. Dann ist $\{\omega_1\}\times\Omega_2\in\mathfrak{P}(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus\mathcal{N}_P$ und es gilt*

$$P(\Omega_1\times A_2\,|\,\{\omega_1\}\times\Omega_2) = (P_{1,2})_{\omega_1\bullet}(A_2).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei zunächst $A_2=\varnothing$. Da P ein Maß auf $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathfrak{P}(\Omega_1\times\Omega_2))$ bzw. $(P_{1,2})_{\omega_1\bullet}$ nach Voraussetzung ein Maß auf $(\Omega_2,\mathfrak{P}(\Omega_2))$ ist, gilt dann

$$P(\{\omega_1\}\times A_2) = P(\{\omega_1\}\times\varnothing) = P(\varnothing) = 0$$

bzw.

$$(P_{1,2})_{\omega_1\bullet}(A_2) = (P_{1,2})_{\omega_1\bullet}(\varnothing) = 0.$$

Hieraus folgt dann

$$P(\{\omega_1\}\times A_2) = 0 = P_1(\{\omega_1\})\cdot(P_{1,2})_{\omega_1\bullet}(A_2).$$

Sei nun $A_2\neq\varnothing$. Sei $s_2 := \operatorname{card} A_2$, dann ist $s_2\in\mathbb{N}$. Ferner sei $(\omega_{j,2})_{j\in\mathbb{N}_{1,s_2}}$ eine Anordnung der s_2 Elemente von A_2zu einer Folge. Dann gilt $A_2=\bigcup_{j=2}^{s_2}\{\omega_{j,2}\}$ und für alle $(j,l)\in\mathbb{N}_{1,s_2}\times\mathbb{N}_{1,s_2}$ gilt $\{\omega_{j,2}\}\cap\{\omega_{l,2}\}=\varnothing$. Damit ist

$$\{\omega_1\}\times A_2 = \{\omega_1\}\times\bigcup_{j=2}^{s_2}\{\omega_{j,2}\} = \bigcup_{j=2}^{s_2}(\omega_1,\omega_{j,2})$$

und für alle $(j,l) \in \mathbb{N}_{1,s_2} \times \mathbb{N}_{1,s_2}$ gilt $(\omega_1, \omega_{j,2}) \cap (\omega_1, \omega_{l,2}) = \varnothing$. Hieraus folgt wegen der Additivität des Maßes P , der Definition von P und der Additivität von $(P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}$ dann

$$\begin{aligned} P(\{\omega_1\} \times A_2) &= P\left(\bigcup_{j=2}^{s_2} (\omega_1, \omega_{j,2})\right) = \sum_{j=1}^{s_2} P((\omega_1, \omega_{j,2})) \\ &= \sum_{j=1}^{s_2} P_1(\{\omega_1\}) \cdot (P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}(\{\omega_{j,2}\}) \\ &= P_1(\{\omega_1\}) \cdot \sum_{j=1}^{s_2} (P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}(\{\omega_{j,2}\}) \\ &= P_1(\{\omega_1\}) \cdot (P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}\left(\bigcup_{j=1}^{s_2} \{\omega_{j,2}\}\right) \\ &= P_1(\{\omega_1\}) \cdot (P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}(A_2). \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)* in dem man $A_2 = \Omega_2$ wählt und beachtet, dass $(P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist.

Zu *(c)*: Dies sei eine Übung. □

Folgerung 2.4.1. *Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere endliche Mengen, P_1 ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ und $P_{1,2}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{P}(\Omega_2))$. Es bezeichne P die Kopplung von P_1 und $P_{1,2}$. Weiter sei $A_1 \in \mathfrak{P}(\Omega_1)$. Dann gilt*

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P_1(A_1).$$

Beweis. Sei zunächst $A_1 = \varnothing$. Dann gilt $A_1 \times \Omega_2 = \varnothing$. Hieraus folgt dann

$$P(A_1 \times \Omega_2) = P(\varnothing) = 0 = P_1(\varnothing) = P_1(A_1).$$

Sei nun $A_1 \neq \varnothing$, $s_1 \coloneqq \operatorname{card} A_1$ und $(\omega_{j,1})_{j \in \mathbb{N}_{1,s_1}}$ eine Anordnung der Elemente von A_1 zu einer Folge. Dann gilt $A_1 = \bigcup_{j=1}^{s_1} \{\omega_{j,1}\}$ sowie

$$A_1 \times \Omega_2 = \left[\bigcup_{j=1}^{s_1} \{\omega_{j,1}\}\right] \times \Omega_2 = \bigcup_{j=1}^{s_1} \{\omega_{j,1}\} \times \Omega_2.$$

Da die Elemente der Vereinigung dann paarweise disjunkt sind, folgt hieraus

$$\begin{aligned} P(A_1 \times \Omega_2) &= P\left(\bigcup_{j=1}^{s_1} \{\omega_{j,1}\} \times \Omega_2\right) = \sum_{j=1}^{s_1} P(\{\omega_{j,1}\} \times \Omega_2) \\ &= \sum_{j=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{j,1}\}) \cdot \underbrace{(P_{1,2})_{\omega_1 \bullet}(\Omega_2)}_{=1} \\ &= \sum_{j=1}^{s_1} P_1(\{\omega_{j,1}\}) = P_1\left(\bigcup_{j=1}^{s_1} \{\omega_{j,1}\}\right) \\ &= P_1(A_1). \end{aligned}$$

□

Wir präsentieren nun einige Beispiele mehrstufiger Zufallsexperimente mit endlich vielen Versuchsausgängen:

Beispiel 2.4.1. Seien $r, s \in \mathbb{N}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Es sei ein Urne mit r roten und s schwarzen Kugeln gegeben. Aus dieser Urne wird rein zufällig eine Kugel gezogen. Anschließend wird diese Kugel sowie eine weitere Kugel dergleichen Farbe in die Urne zurückgelegt. Hiernach wird dann ein zweites Mal rein zufällig aus der Urne gezogen. Man gebe einen adäquaten Wahrscheinlichkeitsraum zur Beschreibung dieses Zufallsexperimentes an.

Lösung. Es liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment vor. Wir treffen die Wahl $\Omega_1 \coloneqq \Omega_2 \coloneqq \{0,1\}$ sowie

$$\Omega \coloneqq \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Hierbei bedeute eine 1 in der ersten- bzw. zweiten Komponente, dass im ersten- bzw. zweiten Zug eine rote Kugel gezogen wurde, während eine 0 in der ersten- bzw. zweiten Komponente symbolisiert, dass im ersten- bzw. im zweiten Zug eine schwarze Kugel gezogen wurde. Aufgrund der Versuchsbedingungen wird dann das erste Experiment durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_1 = \frac{r}{r+s} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_1)} + \frac{s}{r+s} \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{P}(\Omega_2)}$$

beschrieben. Wir bestimmen nun die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{1,2}$, welche in Abhängigkeit vom Ergebnis des ersten Experiments das zweite Experiment beschreibt. Aufgrund der Versuchsbedingungen gilt

$$(P_{1,2})_{1\bullet} = \frac{r+1}{r+1+s} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_1)} + \frac{s}{r+1+s} \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{P}(\Omega_2)}$$

und

$$(P_{1,2})_{0\bullet} = \frac{r}{r+1+s} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_1)} + \frac{s+1}{r+1+s} \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{P}(\Omega_2)}.$$

Hieraus folgt, da unser Zufallsexperiment durch die Kopplung P von P_1 und P_2 beschrieben wird, dann

$$\begin{aligned}
P(\{(1,1)\}) &= P_1(\{1\}) \cdot (P_{1,2})_{1\bullet}(\{1\}) = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{r+1}{r+s+1}, \\
P(\{(1,0)\}) &= P_1(\{1\}) \cdot (P_{1,2})_{1\bullet}(\{0\}) = \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s+1}, \\
P(\{(0,1)\}) &= P_1(\{0\}) \cdot (P_{1,2})_{0\bullet}(\{1\}) = \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s+1}, \\
P(\{(0,0)\}) &= P_1(\{0\}) \cdot (P_{1,2})_{0\bullet}(\{0\}) = \frac{s}{r+s} \cdot \frac{s+1}{r+s+1}.
\end{aligned}$$

Damit ist also

$$\begin{aligned}
P = &\frac{r}{r+s} \cdot \frac{r+1}{r+s+1} \cdot \varepsilon_{(1,1),\mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{r}{r+s} \cdot \frac{s}{r+s+1} \cdot \varepsilon_{(1,0),\mathfrak{P}(\Omega)} \\
&+ \frac{s}{r+s} \cdot \frac{r}{r+s+1} \cdot \varepsilon_{(0,1),\mathfrak{P}(\Omega)} + \frac{s}{r+s} \cdot \frac{s+1}{r+s+1} \cdot \varepsilon_{(0,0),\mathfrak{P}(\Omega)}.
\end{aligned}$$

Beispiel 2.4.2. In einer amerikanischen Quizshow *„Let's make a deal“* ist als Hauptgewinn ein Auto ausgesetzt. Hierzu sind auf der Bühne drei verschlossene Türen aufgebaut. Hinter einer rein zufällig gewählten Tür befindet sich der Hauptpreis, hinter den anderen beiden jeweils eine Ziege. Der Kandidat wählt eine der Türen aus. Diese bleibt jedoch vorerst verschlossen. Der Spielleiter weiß hinter welcher Tür das Auto steht und öffnet daraufhin die Tür mit der Ziege. Der Kandidat hat nun die Möglichkeit, bei seiner Wahl zu bleiben oder sich umzuentscheiden

und die verbleibende Tür zu wählen. Er erhält dann den Preis hinter der zuletzt gewählten Tür. Es wird angenommen, dass der Kandidat rein zufällig eine der drei Türen auswählt. Weiterhin wird angenommen, dass der Spielleiter, falls er die Möglichkeit besitzt, zwei Türen auszuwählen, sich rein zufällig für eine der beiden entscheidet.

Welche Strategie verspricht den Kandidaten, die größten Chancen auf den Hauptgewinn? Sollte er seine Wahl beibehalten oder wechseln?

Lösung. Wir modellieren das Ziegenproblem als zweistufiges Zufallsexperiment. Hierbei sei $\widetilde{\Omega} \coloneqq \mathbb{N}_{1,3}$, $\Omega_1 \coloneqq \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$, $\Omega_2 \coloneqq \widetilde{\Omega}$ sowie schließlich

$$\Omega \coloneqq \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Das Elementarereignis $((\omega_1, \omega_2), \omega_3) \in \Omega$ entspreche hierbei folgender Elementaraussage: „Der Hauptgewinn steht hinter Tür , der Kandidat wählt ω_2 und der Moderator öffnet Tür ω_3." Wir bestimmen nun das zugehörige Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Aufgrund der Versuchsbedingungen ist das Wahrscheinlichkeitsmaß P_1 auf $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$, welches das Experiment beschreibt, dann die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_1, \mathfrak{P}(\Omega_1))$. Wir bestimmen nun die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{1,2}$, welche in Abhängigkeit vom Ergebnis des ersten Experiments das zweite beschreibt. Aufgrund der Versuchsbedingungen gilt

$$\begin{aligned}
(P_{1,2})_{(1,1)\bullet} &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{2,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{3,\mathfrak{P}(\Omega_2)}, & (P_{1,2})_{(1,2)\bullet} &= \varepsilon_{3,\mathfrak{P}(\Omega_2)},\\
(P_{1,2})_{(1,3)\bullet} &= \varepsilon_{3,\mathfrak{P}(\Omega_2)}, & (P_{1,2})_{(2,1)\bullet} &= \varepsilon_{3,\mathfrak{P}(\Omega_2)},\\
(P_{1,2})_{(2,2)\bullet} &= \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{3,\mathfrak{P}(\Omega_2)}, & (P_{1,2})_{(2,3)\bullet} &= \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_2)},\\
(P_{1,2})_{(3,1)\bullet} &= \varepsilon_{2,\mathfrak{P}(\Omega_2)}, & (P_{1,2})_{(3,2)\bullet} &= \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_2)},
\end{aligned}$$

sowie

$$(P_{1,2})_{(3,3)\bullet} = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{2,\mathfrak{P}(\Omega_2)}.$$

Da die Kopplung P von P_1 und $P_{1,2}$ unser Zufallsexperiment beschreibt, folgt dann für $j, k, l \in \widetilde{\Omega}$

$$\begin{aligned}
P(\{((j,j),l)\}) &= P_1(\{(j,j)\}) \cdot (P_{1,2})_{(j,j)\bullet}(\{l\})\\
&= \frac{1}{9} \cdot (P_{1,2})_{(j,j)\bullet}(\{l\})\\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } l = j,\\ \frac{1}{18}, & \text{falls } l \neq j \end{cases}
\end{aligned}$$

sowie im Fall $j \neq k$ weiterhin

$$\begin{aligned}
P(\{((j,k),l)\}) &= P_1(\{(j,k)\}) \cdot (P_{1,2})_{(j,k)\bullet}(\{l\})\\
&= \frac{1}{9} \cdot (P_{1,2})_{(j,k)\bullet}(\{l\})\\
&= \begin{cases} 0, & \text{falls } l \in \{j,k\},\\ \frac{1}{18}, & \text{falls } \widetilde{\Omega} \setminus \{j,k\}. \end{cases}
\end{aligned}$$

Sei nun noch $(j,k,l) \in \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}$ sowie

$$G_j \coloneqq \left(\{j\} \times \widetilde{\Omega}\right) \times \widetilde{\Omega}, \quad K_k \coloneqq \left(\widetilde{\Omega} \times \{k\}\right) \times \widetilde{\Omega}, \quad S_l \coloneqq \left(\widetilde{\Omega} \times \widetilde{\Omega}\right) \times \{l\}.$$

Dann entspricht G_j bzw. K_k bzw. S_l also der Ereignisaussage „Der Gewinn steht hinter der Tür j“ bzw. „Der Kandidat öffnet Tür k“ bzw. „Der Spielleiter öffnet Tür l“. Weiterhin gilt

$$G_j \cap K_k \cap S_l = \{((j,k),l)\}. \tag{1}$$

Wir berechnen nun $P(G_1 \mid K_2 \cap S_3)$ und $P(G_2 \mid K_2 \cap S_3)$. Wegen (1) und den obigen Wahrscheinlichkeiten gilt

$$P(G_1 \cap K_2 \cap S_3) = P(\{((1,2),3)\}) = \frac{1}{9}. \tag{2}$$

Weiterhin ist

$$K_2 \cap S_3 = \left(\widetilde{\Omega} \times \{2\}\right) \times \{3\} = \{((1,2),3),((2,2),3),((3,2),3)\}.$$

Hieraus folgt nun mit den obigen Wahrscheinlichkeiten

$$\begin{aligned} P(K_2 \cap S_3) &= P(\{((1,2),3),((2,2),3),((3,2),3)\}) \\ &= P(\{((1,2),3)\}) + P(\{((2,2),3)\}) + P(\{((3,2),3)\}) \\ &= \frac{1}{9} + \frac{1}{18} + 0 = \frac{3}{18} = \frac{1}{6}. \end{aligned}$$

Damit folgt nun

$$P(G_1 \mid K_2 \cap S_3) = \frac{P(G_1 \cap K_2 \cap S_3)}{P(K_2 \cap S_3)} = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{6}} = \frac{2}{3}.$$

Ferner ist wegen (2)

$$P(G_2 \cap K_2 \cap S_3) = P(\{((2,2),3)\}) = \frac{1}{18}.$$

Hiermit folgt in Verbindung mit $P(K_2 \cap S_3) = \frac{1}{6}$ dann

$$P(G_2 \mid K_2 \cap S_3) = \frac{P(G_2 \cap K_2 \cap S_3)}{P(K_2 \cap S_3)} = \frac{\frac{1}{18}}{\frac{1}{6}} = \frac{1}{3}.$$

Aus Symmetriegründen gilt außerdem

$$P(G_1 \mid K_1 \cap S_3) = \frac{1}{3},\ P(G_2 \mid K_1 \cap S_3) = \frac{2}{3},\ P(G_3 \mid K_1 \cap S_2) = \frac{2}{3},\ P(G_1 \mid K_1 \cap S_2) = \frac{1}{3}.$$

Wir sehen also, dass die Strategie des Wechsels der Tür für den Kandidaten die Chance auf den Hauptgewinn verdoppelt.

Beispiel 2.4.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Es liegen zwei Urnen X und Y vor, welche jeweils n mit den Nummern $1,\ldots,n$ durchnummerierten Kugeln enthalten. Aus der Urne X wird dann rein zufällig ein Kugel gezogen. Aufgrund des Ziehungsergebnisses soll dann eine Person Z vorhersagen, ob die nachfolgende rein zufällig Ziehung einer Kugel aus der Urne Y ein geringeres, gleich großes oder höheres Ziehungsergebnis bringen wird. Man gebe einen adäquaten Wahrscheinlichkeitsraum $\left(\Omega^{(n)}, \mathfrak{A}^{(n)}, P^{(n)}\right)$ zur Beschreibung dieses Zufallsexperiments an und bestimme im Fall $n \geq 3$ eine möglichst gute Vorhersageregel für Z. Man führe zudem eine diesbezügliche asymptotische Betrachtung.

Lösung. Es liegt ein zweistufiges Zufallsexperiment vor. Wir setzen $\Omega_1^{(n)} := \mathbb{N}_{1,n}$, $\Omega_2 := \mathbb{Z}_{-1,1}$ sowie $\Omega^{(n)} := \Omega_1^{(n)} \times \Omega_2$. Das Elementarereignis $(j,k) \in \Omega^{(n)}$ entspreche hierbei der Ereignisaussage: „Die Ziehung der Urne X erbrachte die Kugel mit Nummer j, während das Ziehungsergebnis

aus der Urne Y im Fall $k = -1$ bzw. $k = 0$ bzw. $k = 1$ eine Kugel mit kleinerer bzw. gleicher bzw. größerer Nummer erbrachte." Aufgrund der Versuchsbedingungen wird die erste Stufe des Experiments durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_1^{(n)} := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j,\mathfrak{P}\left(\Omega_1^{(n)}\right)} \tag{1}$$

modelliert. Wir bestimmen nun die Übungswahrscheinlichkeit $P_{1,2}^{(n)}$, welche in Abhängigkeit vom Ergebnis des ersten Experiments das zweite beschreibt. Sei hierzu $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Aus den Versuchsbedingungen erhält man dann

$$P_{1,2}^{(n)}\left(\{(j,-1)\}\right) = \frac{j-1}{n} \tag{2}$$

bzw.

$$P_{1,2}^{(n)}\left(\{(j,0)\}\right) = \frac{1}{n} \tag{3}$$

und

$$P_{1,2}^{(n)}\left(\{(j,1)\}\right) = \frac{n-j}{n}. \tag{4}$$

Wegen (2) bis (4) gilt also

$$\left(P_{1,2}^{(n)}\right)_{j\bullet} = \frac{j-1}{n} \cdot \varepsilon_{-1,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{1}{n} \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{j+1}{n} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_2)}. \tag{5}$$

Aufgrund von (5) erkennt man sogleich, dass $P_{1,2}^{(n)}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\Omega_2, \mathfrak{P}(\Omega_2))$ ist. Somit ist $P_{1,2}^{(n)}$) eine Übergangswahrscheinlichkeit von $\left(\Omega_1^{(n)}, \mathfrak{P}\left(\Omega_1^{(n)}\right)\right)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{P}(\Omega_2))$. Das unser Experiment beschreibende Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\Omega^{(n)}, \mathfrak{P}\left(\Omega^{(n)}\right)\right)$ ist dann also die Kopplung von $P_1^{(n)}$ mit $P_{1,2}^{(n)}$. Aus (1) bis (5) folgt für $(j,k) \in \Omega^{(n)}$ dann also

$$P^{(n)}\left(\{(j,k)\}\right) = P_1^{(n)}\left(\{j\}\right) \cdot \left(P_{1,2}\right)_{j\bullet}\left(\{k\}\right) = \frac{1}{n}\left(P_{1,2}\right)_{j\bullet}\left(\{k\}\right).$$

Das heißt es gilt

$$P^{(n)}\left(\{(j,k)\}\right) = \begin{cases} \frac{j-1}{n^2}, & \text{falls } k = -1, \\ \frac{1}{n^2}, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{n-j}{n^2}, & \text{falls } k = 1. \end{cases} \tag{6}$$

Wir wollen nun eine optimale Vorhersageregel für Z bestimmen. Aus den vorangehenden Betrachtungen wird deutlich, dass wir jedes $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$ als Vorhersageregel auffassen können. Setzen wir für $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$ dann

$$B_f := \left\{ \left(j, f(j)\right) \,\middle|\, j \in \Omega_1^{(n)} \right\}, \tag{7}$$

so beschreibt dann also die Zahl $P^{(n)}(B_f)$ die Güte der Vorhersageregel f. Wir suchen also ein $f^* \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$ mit

$$P^{(n)}(B_{f^*}) = \max_{f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)} P^{(n)}(B_f).$$

Da für $f \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$ wegen (7) nun

$$\begin{aligned} P^{(n)}(B_f) &= P^{(n)}\left(\left\{(j, f(j)) \,\middle|\, j \in \Omega_1^{(n)}\right\}\right) = P^{(n)}\left(\{(j, f(j)) \mid j \in \mathbb{N}_{1,n}\}\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} P^{(n)}\left(\{(j, f(j))\}\right) \end{aligned}$$

erfüllt ist, versuchen wir dann ein $f^* \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$ zu bestimmen, welches für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Bedingung

$$P^{(n)}\left(\{(j, f(j))\}\right) = \max_{k \in \mathbb{Z}_{-1,1}} P^{(n)}\left(\{(j,k)\}\right)$$

genügt. Ausgangspunkt für die Umsetzung dieses Vorhabens ist die Formel (6). Diese führt uns auf die Funktion $f^* \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)$, welche gemäß

$$f^*(j) \coloneqq \begin{cases} +1, & \text{falls } 1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}, \\ -1, & \text{falls } \frac{n+1}{2} < j \leq n \end{cases} \tag{8}$$

definiert ist. Sei zunächst $1 \leq j \leq \frac{n+1}{2}$. Dann gilt also $2j \leq n+1$ bzw. $j-1 \leq n-j$, also wegen (8) und (6) dann

$$P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = P^{(n)}\left(\{j, 1\}\right) = \frac{n-j}{n^2} \geq \frac{j-1}{n^2} = P^{(n)}\left(\{j, -1\}\right). \tag{9}$$

Weiterhin gilt für $n \geq 3$ zusätzlich

$$n - j \geq n - \frac{n+1}{2} = \frac{n-1}{2} \geq 1,$$

also wegen (6) und (8) dann

$$P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = P^{(n)}\left(\{j, 1\}\right) = \frac{n-j}{n^2} \geq \frac{1}{n^2} = P^{(n)}\left(\{j, 0\}\right). \tag{10}$$

Sei nun andererseits $\frac{n+1}{2} < j \leq n$. Dann gilt $2j > n+1$ bzw. $j-1 > n-j$, also wegen (8) und (6) gerade

$$P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = P^{(n)}\left(\{j, -1\}\right) = \frac{j-1}{n^2} > \frac{n-j}{n^2} = P^{(n)}\left(\{j, 1\}\right). \tag{11}$$

Weiterhin gilt für $n \geq 3$

$$j > \frac{n+1}{2} \geq 2 \qquad \text{bzw.} \qquad j - 1 > 1,$$

also wegen (6) und (8) dann

$$P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = P^{(n)}\left(\{j, -1\}\right) = \frac{j-1}{n^2} > \frac{1}{n^2} = P^{(n)}\left(\{j, 0\}\right). \tag{12}$$

Also wegen (9) bis (12) gilt im Falle $n \geq 3$ für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann

$$P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = \max_{k \in \mathbb{Z}_{-1,1}} P^{(n)}\left(\{j, k\}\right).$$

Hieraus folgt nun für $n \geq 3$

$$P^{(n)}\left(B_{f^*}\right) = \max_{f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1^{(n)}, \Omega_2\right)} P^{(n)}\left(B_f\right).$$

Sei nun $n \geq 3$. Wir berechnen nun $P\left(B_{f^*}\right)$. Hierzu betrachten wir zunächst den Fall, dass n gerade ist. Wegen $n \geq 4$ gilt dann $\frac{n}{2} - 1, \frac{n}{2} + 1 \in \mathbb{N}$, $\frac{n}{2} < \frac{n+1}{2} < \frac{n}{2} + 1$ sowie wegen $n > 2$ weiterhin $2n > n + 2$ bzw. $n < 2\left(n-1\right)$ bzw. $\frac{n}{2} < n - 1$ bzw. $\frac{n}{2} + 1 < n$. Daraus ergibt sich

$$\begin{aligned}
P^{(n)}\left(B_{f^*}\right) &= \sum_{j=1}^{n} P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) = \sum_{j=1}^{n/2} P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) + \sum_{j=n/2+1}^{n} P^{(n)}\left(\{(j, f^*(j))\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n/2} P^{(n)}\left(\{(j,1)\}\right) + \sum_{j=n/2+1}^{n} P^{(n)}\left(\{(j,-1)\}\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n/2} \frac{n-j}{n^2} + \sum_{j=n/2+1}^{n} \frac{j-1}{n^2} = \frac{1}{n^2}\left[\sum_{j=1}^{n/2}(n-j) + \sum_{j=n/2+1}^{n}(j-1)\right] \\
&= \frac{1}{n^2}\left[\sum_{k=n/2}^{n-1} k + \sum_{k=n/2}^{n-1} k\right] = \frac{2}{n^2}\sum_{k=n/2}^{n-1} k = \frac{2}{n^2}\left[\sum_{k=1}^{n-1} k - \sum_{k=1}^{n/2-1} k\right] \\
&= \frac{2}{n^2}\left[\frac{(n-1)\,n}{2} - \frac{\left(\frac{n}{2}-1\right)\frac{n}{2}}{2}\right] = \frac{3n-2}{4n}.
\end{aligned}$$

Für ungerade n ergibt eine analoge Rechnung

$$P^{(n)}\left(B_{f^*}\right) = \frac{3n^2 - 2n - 1}{4n^2}.$$

Das heißt es gilt in jedem Falle

$$\lim_{n \to \infty} P^{(n)}\left(B_{f^*}\right) = \frac{3}{4}.$$

Beispiel 2.4.4. Um in der Spielshow „Randotime“ den Hauptpreis zu gewinnen erhält ein Kandidat zwei Schachteln sowie 100 weiße und 100 schwarze Kugeln. Er hat 10 Minuten Zeit die Kugeln nach belieben auf beide Schachteln zu verteilen, wobei nur keine Schachtel leer bleiben darf. Danach werden ihm die Augen verbunden und er darf „blind“ eine Schachtel auswählen sowie aus dieser rein zufällig ausgewählten Schachtel eine Kugel ziehen. Er erhält den Hauptgewinn, falls die gezogene Kugel weiß ist. Wie sollte der Kandidat die Verteilung der Kugel anordnen, um die Gewinnwahrscheinlichkeit zu maximieren? Wie groß ist diese dann?

Lösung. Nachdem der Kandidat sich für eine spezielle Verteilung der Kugeln auf die beiden Schachteln entschieden hat, wird ein zweistufiges Zufallsexperiment durchgeführt. Bevor dieses modelliert wird, spezifizieren wir zunächst die Verteilung der Kugeln auf beide Schachteln. Es bezeichne S_1 bzw. S_2 diejenige der beiden Schachteln, die höchstens hundert - bzw. mindestens hundert Kugeln enthält. Weiterhin bezeichne x bzw. y die Anzahl der Kugeln in S_1 bzw. die Anzahl der weißen Kugeln in S_1. Dann gilt also

$$x \in \mathbb{N}_{1,100} \tag{1}$$

sowie

$$y \in \mathbb{Z}_{0,x} \tag{2}$$

und es befinden sich genau $200-x$ Kugeln in S_2, von denen genau $100-y$ weiß sind. Wir setzen

$$\Omega_1 := \{1,2\}, \quad \Omega_2 := \{w,s\}, \quad \Omega := \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Hierbei symbolisiert eine 1 bzw. 2 in der ersten Komponente, dass die Schachtel S_1 bzw. S_2 gewählt wurde, während w bzw. s in der zweiten Komponente bedeutet, dass in der gewählten Schachtel eine weiße- bzw. schwarze Kugel gezogen wurde. Aufgrund der Versuchsbedingungen wird die erste Stufe des Experiments durch das Wahrscheinlichkeitsmaß

$$P_1 = \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{P}(\Omega_1)} + \frac{1}{2} \cdot \varepsilon_{2,\mathfrak{P}(\Omega_2)}. \tag{3}$$

beschrieben. Wir bestimmen nun die Übergangswahrscheinlichkeit $P_{1,2}^{(x,y)}$, welche in Abhängigkeit vom Ergebnis des ersten- das zweite Experiment beschreibt. Aufgrund der vorgenommenen Verteilung der Kugeln gilt dann

$$\left(P_{1,2}^{(x,y)}\right)_{1\bullet} = \frac{y}{x} \cdot \varepsilon_{w,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{x-y}{x} \cdot \varepsilon_{s,\mathfrak{P}(\Omega_2)} \tag{4}$$

sowie

$$\left(P_{1,2}^{(x,y)}\right)_{2\bullet} = \frac{100-y}{200-x} \cdot \varepsilon_{w,\mathfrak{P}(\Omega_2)} + \frac{100-(x-y)}{200-x} \cdot \varepsilon_{s,\mathfrak{P}(\Omega_2)}. \tag{5}$$

Unser Zufallsexperiment wird nun die Kopplung $P_{x,y}$ von P_1 und $P_{1,2}^{(x,y)}$ beschrieben. Bezeichne A das der Ereignisaussage „Der Kandidat zieht eine weiße Kugel“ entsprechende Ereignis. Dann ist also $A = \{(1,w),(2,w)\}$ und aufgrund der Additivität von $P_{x,y}$ gilt $P_{x,y}(A) = P_{x,y}(\{(1,w),(2,w)\}) = P_{x,y}(\{(1,w)\}) + P_{x,y}(\{(2,w)\})$. Hieraus folgt aufgrund der wegen (3) bis (5) geltenden Beziehungen

$$P_{x,y}(\{(1,w)\}) = [P_1(\{1\})]\left[\left(P_{1,2}^{(x,y)}\right)_{2\bullet}(\{w\})\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{y}{x}$$

und

$$P_{x,y}(\{(2,w)\}) = [P_1(\{2\})]\left[\left(P_{1,2}^{(x,y)}\right)_{2\bullet}(\{w\})\right] = \frac{1}{2} \cdot \frac{100-y}{200-x}$$

dann

$$\begin{aligned} P_{x,y}(A) &= \frac{1}{2}\frac{y}{x} + \frac{1}{2}\frac{100-y}{200-x} = \frac{1}{2}\left(\frac{y}{x} + \frac{100-y}{200-x}\right) \\ &= \frac{1}{2}\frac{y(200-x)+x(100-x)}{x(200-x)} = \frac{1}{2}\frac{200y-xy+100x-xy}{x(200-x)} \\ &= \frac{1}{2}\frac{200y-2xy+100x}{x(200-x)} = \frac{1}{2}\frac{2y(100-x)+100x}{x(200-x)} = \frac{y(100-x)+50x}{x(200-x)}. \end{aligned} \tag{6}$$

Da wegen (1) nun $100-x \geq 0$ ist, folgt aus (2) und (6) dann

$$P_{x,y}(A) \leq P_{x,x}(A). \tag{7}$$

Wegen (7) ist also $x_0 \in \mathbb{N}_{1,100}$ derart zu bestimmen, dass

$$P_{x_0,x_0}(A) = \max_{x \in \mathbb{N}_{1,n}} P_{x,x}(A)$$

erfüllt ist. Wegen (6) gilt für $x \in \mathbb{N}_{1,n}$ nun

$$P_{x,x}(A) = \frac{x(100-x)+50x}{x(200-x)} = \frac{100-x+50}{200-x} = \frac{150-x}{200-x}. \tag{8}$$

Sei $f\colon \mathbb{R} \setminus \{200\} \to \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \mapsto \frac{150-u}{200-u}. \tag{9}$$

Dann ist f differenzierbar auf $\mathbb{R} \setminus \{200\}$ und für $u \in \mathbb{R} \setminus \{200\}$ gilt

$$\begin{aligned} f'(u) &= \frac{(-1)(200-u)-(-1)(150-u)}{(200-u)^2} = \frac{200-u+150-u}{(200-u)^2} \\ &= -\frac{50}{(200-u)^2} < 0. \end{aligned}$$

Somit ist f streng monoton fallend auf $\mathbb{R} \setminus \{200\}$. Hieraus folgt in Verbindung mit (8), (5) und (7) für $x \in \mathbb{N}_{2,100}$ und $y \in \mathbb{Z}_{0,x}$ dann

$$P_{1,1}(A) = f(1) > f(x) = P_{x,x}(A) \geq P_{x,y}(A)$$

sowie

$$P_{1,1}(A) = \frac{150-1}{200-1} = \frac{149}{199} = 0.7487\ldots$$

Die optimale Verteilung für den Kandidaten besteht also darin, dass er eine weiße Kugel in eine Schachtel und die restlichen Kugeln in die andere Schachtel legt.

Wir nehmen nun eine leichte Verallgemeinerung der in Definition 2.4.1 getroffenen Begriffsbildung vor:

Definition 2.4.3. Sei $Q\colon \mathbb{N}_0 \times \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) \to [0,1]$ und für $j \in \mathbb{N}_0$ sei $Q_j\colon \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0) \to [0,1]$ definiert gemäß

$$A \mapsto Q((j,A)).$$

Dann heißt Q eine *Übergangswahrscheinlichkeit* von $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ nach $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$, falls für alle $j \in \mathbb{N}_0$ dann Q_j ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$.

Wir nehmen nun eine Verallgemeinerung von Satz 2.4.1 vor:

Satz 2.4.3. *Seien $P_1 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ sowie ferner $P_{1,2}$ eine Übergangswahrscheinlichkeit von $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$ nach $(\mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0))$. Es sei*

$$P := \sum_{(j,k) \in \mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0} [P_1(\{j\})] \left[(P_{1,2})_{j,\cdot}(\{k\}) \right] \cdot \varepsilon_{(j,k),\mathfrak{P}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0)}.$$

Dann gilt $P \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0))$.

3. Einführende Betrachtungen über Markovsche dynamische Ketten mit endlichen Zustandsraum

In vielen Fällen lässt sich die Evolution eines gewissen Phänomens durch die Veränderung der Zustände eines dynamischen Systems ausdrücken. Hierzu unterscheidet man zwischen deterministischen und stochastischen dynamischen Systemen.

Unter einem *deterministischen dynamischen System* verstehen wir ein geordnetes (Ω, T) bestehend aus einer nichtleeren Menge Ω und einer Abbildung $T\colon \Omega \longrightarrow \Omega$. Hierbei wird dann Ω als der Zustandsraum des deterministischen dynamischen Systems (Ω, T) angesehen und die Elemente von Ω heißen die *Zustände* von (Ω, T). Die Abbildung T beschreibt die Bewegung von (Ω, T).

Befindet sich das System im Zeitpunkt t im Zustand ω, so wird es sich für $k \in \mathbb{N}$ zum Zeitpunkt $t + k$ das System im Zustand $T^k(\omega)$ befinden. Besonderes einfach sind jene deterministischen dynamischen Systeme, die einen endlichen Zustandsraum Ω besitzen. Wir werden uns in diesem Abschnitt mit speziellen stochastischen dynamischen Systemen mit endlichen Zustandsraum Ω beschäftigen. Eine derartige stochastische Dynamik lässt sich durch spezielle Matrizen beschreiben.

3.1. Stochastische Matrizen

Es wird sich als vorteilhaft erweisen, die Übergangswahrscheinlichkeit, welche den von uns betrachteten stochastischen dynamischen System zugrunde liegt, in geeigneter Weise in Matrizen zusammenfassen. Dies führt uns auf eine spezielle Klasse von Matrizen, deren Untersuchung dieser Abschnitt gewidmet ist.

Beispiel 3.1.1 (Winterwetter in Israel)**.** Gemäß längerer Beobachtungen wurde folgende Beschreibung des Wetters in Israel in den Wintermonaten Dezember, Januar und Februar angegeben. Ist es an einem Tag dieses Zeitraumes trocken, so ist es am nächsten Tag mit einer Wahrscheinlichkeit von $3/4$ trocken, während es mit einer Wahrscheinlichkeit von $1/4$ regnet. Regnet es an einem Tag dieses Zeitraumes, so regnet es am nächsten Tag mit der Wahrscheinlichkeit $2/3$, während es mit der Wahrscheinlichkeit $1/3$ trocken ist.

heute \ morgen	trocken	Regen
trocken	$3/4$	$1/4$
Regen	$2/3$	$1/3$

Wir erhalten also die die Matrix

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix},$$

deren Zeilensummen jeweils den Wert 1 haben.

Wir werden somit auf folgende Begriffsbildung geführt.

Definition 3.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Einträgen.

(a) Es heißt $\mathbf{A}$ *stochastisch*, falls für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\sum_{k=1}^{n} a_{j,k} = 1$.

(b) Es heißt $\mathbf{A}$ *doppelstochastisch*, falls $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ stochastisch sind.

Bezeichnung. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Einträgen.

(a) Die Menge aller stochastischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ wird mit $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bezeichnet.

(b) Die Menge aller doppelstochastischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ wird mit $\mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$ bezeichnet.

Bemerkung 3.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A}$ eine Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$ mit nichtnegativen Einträgen. Weiterhin sei $\mathbf{1}_n \coloneqq (1,\dots,1)^T \in \mathbb{R}^n$. Dann gilt

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A}$ stochastisch.

(ii) Es ist $\mathbf{A}\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$.

(iii) Es ist 1 ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{1}_n$ ein zugehöriger Eigenvektor.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iv) Es ist $\mathbf{A}$ doppelstochastisch.

(v) Es ist $\mathbf{A}\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ und $\mathbf{A}^T\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$.

(vi) Es ist 1 jeweils ein Eigenwert von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{A}^T$ und $\mathbf{1}_n$ ein zugehöriger Eigenvektor. ♣

Beweis. Sei $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{1}_n = \left[(a_{j,k})_{j,k=1}^{n}\right]\cdot\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\sum_{k=1}^{n} a_{1,k}\\ \vdots\\ \sum_{k=1}^{n} a_{n,k}\end{pmatrix}.$$

Hieraus folgt sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*, während die von *(ii)* und *(iii)* sogleich aus den Begriffsbildungen von Eigenwert und Eigenvektor folgt. Die Aussage *(b)* folgt nun sofort aus *(a)*. □

Satz 3.1.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times n}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Dann ist $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$.*

(b) *Seien $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$. Dann ist $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $\mathbf{A},\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ haben $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ nichtnegative Einträge. Damit hat auch $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ nichtnegative Einträge. Außerdem gelten nach Bemerkung 3.1.1 Teil *(a)* dann $\mathbf{A}\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ und $\mathbf{B}\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$. Hieraus folgt $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\cdot\mathbf{1}_n) = \mathbf{A}\cdot\mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$. Wiederum mittels Bemerkung 3.1.1 Teil *(a)* folgt dann $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$.

Zu *(b)*: Wegen $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$ gelten $\mathbf{A}^T, \mathbf{B}^T \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Damit ist wegen $\mathbf{B}^T \cdot \mathbf{A}^T = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T$ dann $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{B})^T \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Es ist also $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$. □

Folgerung 3.1.1. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann sind $\left(\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}, \cdot\right)$ sowie $\left(\mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}, \cdot\right)$ jeweils Halbgruppen mit Einselement $\mathbf{I}_n$.*

Folgerung 3.1.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_0$ sowie $\mathbf{A}$ eine Matrix aus $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$. Dann gilt $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bzw. $\mathbf{A}^k \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$.*

Satz 3.1.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge aus $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ mit Grenzwert $\mathbf{A}$. Dann gehört auch $\mathbf{A}$ zu $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bzw. $\mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$.*

Beweis. Da $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Matrizen mit nichtnegativen Einträgen ist, gilt dies auch für deren Grenzwert $\mathbf{A}$ und folglich auch für $\mathbf{A}^T$. Sei $n \in \mathbb{N}$. Wegen $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ ist Bemerkung 3.1.1 Teil *(a)* ist dann $\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ und falls $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$ ist, gilt auch $\mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{1}_n = \mathbf{1}_n$ nach Bemerkung 3.1.1.*(b)*. Damit folgt dann

$$\mathbf{1}_n = \lim_{n\to\infty} (\mathbf{A}_k \cdot \mathbf{1}_n) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k\right) \cdot \mathbf{1}_n = \mathbf{A} \cdot \mathbf{1}_n$$

bzw.

$$\mathbf{1}_n = \lim_{n\to\infty} \left(\mathbf{A}_k^T \cdot \mathbf{1}_n\right) = \left(\lim_{k\to\infty} \mathbf{A}_k^T\right) \cdot \mathbf{1}_n = \mathbf{A}^T \cdot \mathbf{1}_n.$$

Hieraus folgt erneut mittels Teil *(a)* bzw. *(b)* dann $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ bzw. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\text{dst}}^{n\times n}$. □

3.2. Definitionen und Beispiele von Markovschen dynamischen Systemen mit endlichem Zustandsraum

Wir studieren in diesem Abschnitt das Konzept der Markovschen Dynamik auf einer endlichen Menge. Hierbei werden wir erkennen, dass die Untersuchung derartiger dynamischer Systeme mit der Untersuchung verschiedener Eigenschaften stochastischer Matrizen hinausläuft.

Sei $n \in \mathbb{N}$. Weiter seien Ω eine n-elementige Menge, deren Elemente $\omega_1, \ldots, \omega_n$ als Zustände interpretiert werden. Es sei $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Dann beschreibt $\mathbf{A}$ jenen stochastischen Vorgang auf Ω, welcher dadurch charakterisiert ist, dass für alle $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ die Wahrscheinlichkeit des Übergangs von Zustand j in den Zustand k gerade durch $a_{j,k}$ gegeben ist. Sei nun auch $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Wir gehen davon aus, dass die durch $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ beschriebenen stochastischen Vorgänge auf Ω unabhängig voneinander verlaufen. Seien $j, k, l \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann beträgt die Wahrscheinlichkeit dafür, dass der Zustand ω_j des Systems zunächst unter Einwirkung unter des von $\mathbf{A}$ beschriebenen stochastischen Vorgangs in den Zustand ω_k und dann unter Einwirkung des von $\mathbf{B}$ beschriebenen stochastischen Vorgangs in den Zustand ω_l übergeht, also gerade $a_{j,k}b_{k,l}$. Aufgrund der Additivität der Wahrscheinlichkeit ist dann die Wahrscheinlichkeit dafür, dass das System unter der zusammengesetzten, aber unabhängig voneinander ablaufenden Einwirkungen der von $\mathbf{A}$ und $\mathbf{B}$ stochastischen Vorgänge von Zustand ω_j in den Zustand ω_l übergeht wird, gerade $\sum_{k=1}^{n} a_{j,k}b_{k,l}$, dass heißt diese Wirkung wird durch die stochastische Matrix $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}$ beschrieben.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine n-elementige Menge mit den Elementen $\omega_1, \ldots, \omega_n$. Weiterhin sei $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$. Dann beschreibt die Folge $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ von in *diskreten* Zeitpunkten ablaufenden stochastischen Zustandsänderungen, welche unabhängig voneinander erfolgen. Für

$t \in \mathbb{N}$ beschreibt hierbei die Matrix $\mathbf{A}_t$ die Änderung des Zustandes zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t. Sind $t_1, t_2 \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $t_1 < t_2$ erfüllt ist, so wird nach den obigen Ausführungen die Änderung des Systemzustandes zwischen den Zeitpunkten t_1 und t_2 gerade durch die Matrix

$$\prod_{s=1}^{\overrightarrow{t_2-t_2}} \mathbf{A}_{t_1+s}$$

beschrieben. Charakteristisch für das eben beschriebene Modell ist, dass bei beliebigen $t \in \mathbb{N}$ die Änderung des Zustandes zwischen den Zeitpunkten $t-1$ und t nur vom Zustand zum Zeitpunkt $t-1$ selbst und nicht von der Vorgeschichte, dass heißt der Trajektorie auf, der der Zustand zum Zeitpunkt $t-1$ erreicht wurde, abhängt. Man spricht davon, dass ein stochastisches Modell mit *Markov-Eigenschaft* vorliegt. Wir sind nun insbesondere an solchen Situationen interessiert, in denen die stochastischen Zustandsänderungen *zeitunabhängig* verlaufen. Dies bedeutet, dass die obige Folge $(\mathbf{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{R}_{\text{st}}^{n\times n}$ eine konstante Folge ist. Es bezeichne $\mathbf{A}$ den konstanten Wert dieser Folge. Aufgrund der obigen Betrachtungen wird bei beliebigen Zeitpunkt $t \in \mathbb{N}$ die Zustandsänderung des Systems zwischen den Zeitpunkten 0 und t durch die Matrix $\mathbf{A}^t$ beschrieben.

Beispiel 3.2.1 (Fortsetzung von Beispiel 3.1.1)**.** Die dortige Zustandsmenge Ω ist zweielementig und besteht aus den Elementen ω_1 und ω_2, welche Trockenheit bzw. Regen symbolisieren. Gemäß dieser Nummerierung wird die Markovsche Dynamik auf Ω durch die Matrix

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 3/4 & 1/4 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}$$

beschrieben. Wir stellen uns vor, wir wären im betrachteten Zeitraum in einem regnerischen Freitag in Israel angekommen und fragen uns nach der Wahrscheinlichkeit für einen trockenen Sonntag. Nach den obigen Ausführungen ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit dann gerade das Element der linken unteren Ecke der Matrix $\mathbf{A}^2$, also

$$\frac{1}{3}\cdot\frac{3}{4} + \frac{2}{3}\cdot\frac{1}{3} = \frac{1}{4} + \frac{2}{9} = \frac{9+8}{36} = \frac{17}{36}.$$

Zahlreiche der hier betrachteten Markovschen dynamischen Systeme mit endlichen Zustandsraum haben die Eigenschaft, dass man vom Zustand j im Elementarprozess nur in die Zustände $j-1$, j oder $j+1$ gelangen kann. Die zugehörigen Übergangsmatrizen haben dann Triagonalgestalt, also die Form

$$\begin{pmatrix} a_{1,1} & a_{1,2} & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_{2,1} & a_{2,2} & a_{2,3} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a_{3,2} & a_{3,3} & a_{3,4} & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2,n-2} & a_{n-2,n-1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-1,n-2} & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & a_{n,n-1} & a_{n,n} \end{pmatrix}.$$

Beispiel 3.2.2. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es seien n weiße und n schwarze Kugeln auf zwei Urnen U_1 und U_2 verteilt und zwar n Kugeln in jeder Urne. Für $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$ liege der Zustand j vor, falls genau j weiße Kugeln in der Urne U_1 sind. Der Elementarprozess verlaufe wie folgt: Wir ziehen blind je eine Kugel aus U_1 und U_2, wobei jede Kugel mit derselben Wahrscheinlichkeit $1/n$ gezogen werde, und vertauschen die beiden Kugeln. Es bezeichne $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}_{0,n}}$ die

zugehörige Übergangsmatrix. Aufgrund der Versuchsbedingungen hat $\mathbf{A}$ die Triagonalgestalt. Wir bestimmen nun die Elemente von $\mathbf{A}$. Zunächst ist klar, dass für alle $(j,k) \in \mathbb{Z}_{0,n} \times \mathbb{Z}_{0,n}$ mit $|j-k| \geq 2$ dann $a_{j,k} = 0$ gilt. Sei $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Falls das System sich im Zustand j befindet, sind also j weiße und $n-j$ schwarze Kugeln in Urne U_1 und dementsprechend $n-j$ weiße Kugeln und j schwarze Kugeln in Urne U_2. Dann ist also $a_{j,j}$ die Wahrscheinlichkeit des Ziehens eines Kugelpaares „weiß aus U_1 und weiß aus U_2" bzw. „schwarz aus U_1 und schwarz aus U_2". Folglich ist

$$a_{j,j} = \frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{2j\,(n-j)}{n^2}.$$

Sei nun $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann ist $a_{j,j-1}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Kugelpaares „weiß aus U_1 und schwarz aus U_2". Folglich ist

$$a_{j,j-1} = \frac{j}{n} \cdot \frac{j}{n} = \frac{j^2}{n^2}.$$

Sei nun $j \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$. Dann ist $a_{j,j+1}$ die Wahrscheinlichkeit für das Ziehen eines Kugelpaares „schwarz aus U_1 und weiß aus U_2". Folglich ist

$$a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j}{n} = \frac{(n-j)^2}{n^2}.$$

Wir wenden uns jetzt einem Diffusionsmodell zu, welches von den theoretischen Physikern Tatjana Ehrenfest[1)] und Paul Ehrenfest[2)] entwickelt wurde.

Beispiel 3.2.3 (Ehrenfestsches Diffusionsmodell)**.** Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann stelle man sich folgende Situation vor: Ein Gefäß sei durch eine durchlässige Membran in zwei Kammern T_1 und T_2 zerlegt. Im Gefäß seien n Moleküle derselben Art. Für $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$ liege der Zustand j vor, falls genau j Moleküle in der Kammer T_1 sind. Im Elementarprozess wechsle genau eines der Moleküle die Kammer, jedes mit der Wahrscheinlichkeit $1/n$. Wir bestimmen nun die Übergangsmatrix $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k \in \mathbb{Z}_{0,n}}$. Zunächst ist klar, dass für alle $(j,k) \in \mathbb{Z}_{0,n}$ mit $|j-k| \geq 2$ dann $a_{j,k} = 0$ gilt. Weiterhin ist klar, dass für alle $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$ dann $a_{j,j} = 0$ gilt. Sei $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Falls sich das System im Zustand j befindet, so sind j Moleküle in T_1 und $n-j$ Moleküle in T_2. Sei $j \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$. Dann ist also $a_{j,j-1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Molekül aus T_2 nach T_1 diffundiert. Folglich ist

$$a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n}.$$

Außerdem ist $a_{j,j-1}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Molekül von T_1 nach T_2 diffundiert. Somit gilt

$$a_{j,j-1} = \frac{j}{n}.$$

Beispiel 3.2.4 (Ruinproblem eines Spielers)**.** Zwei Spieler S_1 und S_2 spielen gegeneinander. In jeder Zeiteinheit wird ein Spiel gespielt, das mit einem Sieg einer der beiden Spieler oder Remis endet. Hierbei gewinne bzw. verliere der Spieler S_1 stets mit der Wahrscheinlichkeit p bzw. q, während $r := 1-p-q$ die Wahrscheinlichkeit für ein Remis ist. Weiter gebe $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ das vorhandene Gesamtkapital beider Spieler an. Nach jedem Spiel zahlt der unterlegene Spieler dem Sieger eine Geldeinheit aus. Endet ein Spiel im Remis, so wird kein Geld ausgezahlt. Es wird vereinbart, dass das Spiel endet, wenn einer der beiden Spieler S_1 oder S_2 ruiniert ist,

[1)] Tatjana Ehrenfest-Afanassjewa (*19.11.1876; †14.04.1964) war eine russisch-niederländische Physikerin und Mathematikerin.

[2)] Paul Ehrenfest (*18.01.1880; †25.09.1933) war österreichischer Physiker.

dass heißt kein Geld mehr besitzt. Wir modellieren nun das vorliegende Spiel als MARKOVsches dynamisches System. Für $j \in \mathbb{Z}_{0,m}$ liege der Zustand j vor, falls das Kapital des Spielers S_1 genau j Geldeinheiten beträgt. Wir bestimmen nun die Übergangsmatrix $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}_{0,m}}$. Zunächst ist klar, dass für alle $(j,k) \in \mathbb{Z}_{0,m} \times \mathbb{Z}_{0,m}$ mit $|j-k| \geq 2$ dann $a_{j,k} = 0$ gilt. Für $j \in \mathbb{Z}_{0,m}$ gilt weiterhin

$$a_{j,j} = \begin{cases} 1, & \text{falls } j \in \mathbb{Z}_{0,m}, \\ r, & \text{falls } j \in \mathbb{N}_{1,m-1}. \end{cases}$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,m-1}$ gilt $a_{j,j-1} = q$ bzw. $a_{j,j+1} = p$.

M. EIGEN[3)] und R. WINKLER beschreiben in ihrem Buch „Das Spiel – Naturgesetze steuern den Zufall" sogenannte Kugelspiele, die dazu dienen sollen, Mechanismen der Evolution zahlenmäßig zu erfassen. Eines dieser Kugelspiele ist das sogenannte Selektionsspiel, welches wir hier in einer vereinfachten Version beschreiben.

Beispiel 3.2.5. Seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $n = r+s$. Dann stelle man sich folgende Situation vor. Zwei Populationen, welche nachfolgend als rote bzw. schwarze Kugeln angesprochen werden, teilen sich einen „Lebensraum" mit den Plätzen 1 bis n. Zu Beginn der Beobachtung seien r rote und s schwarze Kugeln auf dem Lebensraum verteilt. Es werde weiterhin angenommen, dass Kugeln „sterben" können und „geboren" werden nach dem folgenden Verfahren:

(I) Einer der Plätze 1 bis n wird „zufällig" ausgewählt und die dort befindliche „stirbt".

(II) Aus den restlichen $n-1$ Plätzen wird einer „zufällig" ausgewählt. Ist die dort befindliche Kugel rot bzw. schwarz, so wird die im vorangegangenen Schritt entstandene Leerstelle mit einer „neugeborenen" roten bzw. schwarzen Kugel aufgefüllt.

Wir modellieren nun diesen Vorgang als MARKOVsches dynamisches System. Wir wählen den Zustandsraum $\Omega = \mathbb{Z}_{0,n}$. Für $j \in \mathbb{Z}_{0,n}$ bedeute der Zustand j hierbei, dass genau j rote Kugeln vorhanden sind. Wir bestimmen die Übergangsmatrix $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{Z}_{0,n}}$. Zunächst ist klar, dass die Zustände $j = 0$ und $j = n$ durch den Elementarprozess in sich selbst überführt werden. Es ist also $a_{0,0} = 1$ und $a_{n,n} = 1$. Sei nun $j \in \mathbb{N}_{1,n-1}$ und es möge der Zustand j vorliegen. Dann kann nach dem Elementarprozess nur ein Übergang in genau einem der Zustände $j-1$, j oder $j+1$ vollzogen werden. Folglich gilt für alle $(j,k) \in \mathbb{Z}_{0,n} \times \mathbb{Z}_{0,n}$ mit $|j-k| \geq 2$ dann $a_{j,k} = 0$. Wir betrachten zunächst den Fall, dass ein Übergang von dem Zustand j in den Zustand $j-1$ vollzogen wird. Dann stirbt also eine rote Kugel und es wird eine schwarze Kugel geboren. Hieraus folgt dann

$$a_{j,j-1} = \frac{j}{n} \cdot \frac{n-j}{n-1}.$$

Es möge nun ein Übergang vom Zustand j in den Zustand j vollzogen werden. Dann stirbt entweder eine Kugel und es wird eine rote Kugel geboren, oder es stirbt eine schwarze Kugel und es wird eine schwarze Kugel geboren. Folglich gilt

$$a_{j,j} = \frac{j}{n} \cdot \frac{j-1}{n-1} + \frac{n-j}{n} \cdot \frac{n-j-1}{n-1}.$$

Es möge schließlich nun der Übergang vom Zustand j in den Zustand $j+1$ vollzogen werden. Dann stirbt eine schwarze Kugel und es wird eine rote Kugel geboren. Hieraus folgt dann

$$a_{j,j+1} = \frac{n-j}{n} \cdot \frac{j}{n-1}.$$

[3)] MANFRED EIGEN (*09.05.1927) ist ein deutscher Bio- und Physikochemiker. Ihm wurde 1967 der Nobelpreis für Chemie in Anerkennung seiner Arbeiten zur Geschwindigkeitsmessung von schnellen chemischen Reaktionen verliehen.

Insbesondere gilt also $a_{j,j-1} = a_{j,j+1}$.

Interpretation. Die zufallsgesteuerte Entwicklung der roten Population kann als Übergang zweier Zufallsmechanismen gedeutet werden, nämlich einer symmetrischen Irrfahrt startend im Punkt $(0, r)$ und eines „Dehnungsmechanismus", welcher, wenn das System zum Zeitpunkt j sich im Zustand k befindet, sich mit der Wahrscheinlichkeit $a_{k,k}$ dazu entschließt, die Population unverändert zu lassen und mit der Wahrscheinlichkeit $1 - a_{k,k}$ dazu, einen Schritt einer symmetrischen Irrfahrt durchzuführen. ♣

3.3. Beispiele zur Untersuchung des Langzeitverhaltens von Markovschen dynamischen Systemen mit endlichem Zustandsraum

Wir wollen in diesem Abschnitt anhand einiger exemplarischer Beispiele erste Eindrücke über das Langzeitverhalten *spezieller* Markovscher dynamischer Systeme mit endlichem Zustandsraum vermitteln.

Seien $n \in \mathbb{N}$ und Ω eine n-elementige Zustandsmenge. Weiter sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\mathrm{st}}^{n\times n}$. Dann wird die durch $\mathbf{A}$ induzierte Markovsche Dynamik auf Ω durch die Folge $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ bestimmt. Ist die Folge $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent, so ist deren Grenzwert nach Satz 3.1.2 eine Matrix aus $\mathbb{R}_{\mathrm{st}}^{n\times n}$. Die Untersuchung des Langzeitverhaltens von n-elementigen Systemen mit Markovscher Dynamik führt also auf das Studium des Grenzverhaltens der Folge $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ für Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\mathrm{st}}^{n\times n}$. Wir wollen diese Frage hier nicht systematisch aufgreifen. Wir betrachten einige Beispiele, die sich mit Hilfe geeigneter „Rechentricks" behandeln lassen.

Beispiel 3.3.1. Seien $p, q \in [0, 1]$ sowie

$$\mathbf{A} := \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\mathrm{st}}^{2\times 2}$.

(b) Seien $p = q = 0$. Dann gilt $\mathbf{A} = \mathbf{I}_2$ und

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \mathbf{I}_2.$$

(c) Seien $p = q = 1$. Dann gilt

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und für $k \in \mathbb{N}$ gilt $\mathbf{A}^{2k} = \mathbf{I}_2$ und $\mathbf{A}^{2r-1} = \mathbf{A}$. Somit ist die Folge $(\mathbf{A}^n)_{n\in\mathbb{N}}$ *nicht* konvergent.

(d) Sei $1 - p - q \in (-1, 1)$. Dann gilt $p + q \neq 0$ sowie

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Interpretation (von Beispiel 3.3.1). Eine Nachricht der Form „Ja" oder „Nein" (etwa „x lebt noch" oder „x ist tot") werde mündlich weitergegeben. Bei der Weitergabe werde sie möglicherweise verfälscht und zwar wie folgt: Mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ wird „Ja" als „Ja" weitergegeben, mit der Wahrscheinlichkeit p wird „Ja" als „Nein" weitergegeben. Mit der Wahrscheinlichkeit q wird „Nein" zu „Ja" verfälscht und mit der Wahrscheinlichkeit $1-q$ wird „Nein" unverfälscht weitergegeben. Die Zustände des zugrunde liegenden MARKOVschen dynamischen Systems seien das Vorliegen der Nachricht „Ja" oder „Nein". Die Übergangsmatrix ist also dann

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1-p & p \\ q & 1-q \end{pmatrix}.$$

Die Übergangswahrscheinlichkeit für eine Kette von n Personen sind dann also die Elemente $\mathbf{A}^n$. Im Falle $1-p-q \in (-1,1)$ ist dann also

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \frac{1}{p+q} \begin{pmatrix} q & p \\ q & p \end{pmatrix}.$$

Ist $p, q \in (0,1)$, dass heißt es liegt eine unparteiische Verfälschung der Nachricht vor, so gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathbf{A}^n = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}.$$

Nach einer langen Kette von Zwischenträgern haben wir also mit Wahrscheinlichkeit $1/2$ die Ankunft einer unverfälschten Ausgangsnachricht zu erwarten. ♣

Beispiel 3.3.2. Es seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a \in [0,1]$ und $b \coloneqq \frac{1-a}{n-1}$. Weiter sei

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} a & b & b & \dots & b \\ b & a & b & \dots & b \\ b & b & a & \dots & b \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b & b & b & \dots & a \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{n\times n}.$$

Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\mathrm{dst}}$.

(b) Sei $\mathbf{F}_n$ jene Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, deren Elemente sämtlich den Wert 1 besitzen. Weiter seien $a-b \in (-1,1)$. Dann gilt

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}^m = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{F}_n.$$

(c) Sei $a-b \in [1,+\infty)$. Dann ist $\mathbf{A} = \mathbf{I}_n$, also ist insbesondere

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}^m = \mathbf{I}_n.$$

(d) Sei $a-b \in (-\infty,-1]$. Dann gilt $a=0$, $b=1$ für $n=2$, dass heißt es ist

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

und die Folge $(\mathbf{A}^m)_{m\in\mathbb{N}}$ konvergiert nicht.

Interpretation (von Beispiel 3.3.2). Es sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und es sei eine Situation gegeben, in der n Firmen je ein Produkt gleicher Art (z. B. Tafelwerke) anbieten. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ befinde sich unser Konsument im Zustand j, wenn er beim letzten Kauf das Produkt bei der j-ten Firma gewählt hat. Er verhält sich nun so: Mit Wahrscheinlichkeit a bleibt er beim Produkt des letzten Kaufes, mit Wahrscheinlichkeit $b := \frac{a-1}{n-1}$ wählt er irgendeines der anderen $n-1$ Produkte. Die Übergangsmatrix ist dann $\mathbf{A}$ aus Beispiel 3.3.2. Im Falle $a - b \in (-1, 1)$ ist dann also

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}^m = \frac{1}{n} \cdot \mathbf{F}_n.$$

Alle Firmen haben schließlich denselben Anteil an Konsum des Käufers. ♣

Es gibt auch noch die weitere

Interpretation (von Beispiel 3.3.2 für $n = 4$). Vorgegeben sei ein Labyrinth mit vier Kammern, in welchen je zwei Kammern durch eine Tür verbunden sind. In diesem Labyrinth sitze eine Maus. Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,4}$ befinde sich das zugehörige System im Zustand j, falls sich die Maus in Kammer j befindet. Im Elementarprozess verhalte sich die Maus wie folgt: Mit der Wahrscheinlichkeit a bleibe sie in der Kammer j, mit der Wahrscheinlichkeit $b = \frac{1}{3}(1-a)$ wechsle sie in eine der restlichen Kammern. Im Falle $a - b \in (-1, 1)$ ist dann also

$$\lim_{m\to\infty} \mathbf{A}^m = \frac{1}{4} \cdot \mathbf{F}_4.$$

Nach langer Zeit ist für $j \in \mathbb{N}_{1,4}$ die Wahrscheinlichkeit dafür, die Maus in der Kammer j zu finden, gerade $1/4$ und zwar unabhängig davon, wo sich die Maus am Anfang des Prozesses befand. ♣

4. Zufallsvariable und ihre Verteilung

4.1. Definition und Eigenschaften

Bei einem Zufallsexperiment interessiert man sich häufig *nicht direkt* für den vom zufallsgesteuerten Ausgang dieses Experiments sondern für gewisse mathematische Größen, die durch den zufälligen Ausgang des Experiments bestimmt werden. Man denke dabei an die Summe der gewürfelten Augenzahl beim dreimaligen Werfen eines Würfels oder an den Abstand des Treffers vom Mittelpunkt einer Schießscheibe beim Schießen auf diese. Wird das Zufallsexperiment durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ beschrieben, so ist in den obigen Beispielen also jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ eine reelle Zahl $X(\omega)$ zugeordnet.

Wir sind nun daran interessiert, für gewisse Teilmengen B von $\mathbb{R}^1$ die Wahrscheinlichkeit des Hineinfallens der Werte von X in B zu bestimmen. Um dies zu realisieren müssen wir absichern, dass die Menge $X^{-1}(B) \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in B\}$ ein Ereignis ist, also zur σ-Algebra $\mathfrak{A}$ gehört. Wir haben also zu gewährleisten, das für die uns interessierenden Mengen $B \in \mathfrak{P}(\mathbb{R}^1)$ die Beziehung $X^{-1}(B) \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist. Die konsequente Weiterführung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeit und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $X \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Dann heißt X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Wir weisen darauf hin, dass die Definition einer $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *nicht* durch das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ beeinflusst wird. Der obige Sprachgebrauch soll lediglich die Vorstellung verstärken, dass die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung X hier im Zusammenhang mit einem Zufallsexperiment beschrieben wird, welches durch den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ modelliert wird. In den von uns betrachteten Anwendungen werden zumeist $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ im Vordergrund stehen, dass heißt es ist also $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit einem gewissen $m \in \mathbb{N}$.

In der Theorie stochastischer Prozesse stößt man jedoch auf Situationen, in denen ein metrischer Raum (Ω', ρ') auftritt und $\mathfrak{A}'$ gerade die Borelsche σ-Algebra von (Ω', ρ') ist. So wird im Zusammenhang mit der Brownschen Bewegung etwa Ω' als der lineare Raum aller auf einem kompakten Intervall von $\mathbb{R}$ definierten stetigen reellwertigen Funktionen angesehen und ρ' ist die durch die Supremumsnorm auf Ω' induzierte Metrik.

Beispiel 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist 1_A eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Beweis. Dies folgt sogleich aus Definition 4.1.1 und Teil *(b)* aus Beispiel M.16.3. □

Satz 4.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nicht triviale messbare Räume. Weiter sei X eine $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $Y \in \operatorname{Abb}(\Omega_1, \Omega_2)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$-messbare Abbildung. Dann ist $Y \circ X$ eine $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. Kombiniere die Definition 4.1.1 mit Satz M.16.6. □

Bemerkung 4.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $s \in \mathbb{N}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m \coloneqq \sum_{j=1}^{s} m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $\mathbf{X}_j \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}^{m_j})$. Weiter sei $\mathbf{X}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß

$$\omega \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1(\omega) \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m(\omega) \end{pmatrix}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(ii) Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ ist $\mathbf{X}_j$ eine $\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. ♣

Satz 4.1.2. *Seien $l, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Weiter sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei $\mathbf{Y} \coloneqq \mathbf{AX} + \mathbf{a}$. Dann ist $\mathbf{Y}$ eine $\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. Sei $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{Au} + \mathbf{a}$. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt dann sogleich $\mathbf{Y} = \mathbf{AX} + \mathbf{a} = T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \circ \mathbf{X}$. Kombiniert man dies mit der nach Satz M.16.9 vorliegenden $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$, so liefert Satz 4.1.1 dann die Behauptung. □

Satz 4.1.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $l, s \in \mathbb{N}$ und $(m_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine Folge $\mathbb{N}$. Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ ist $\mathbf{X}_j$ eine $\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{l\times m_j}$. Weiter sei $\mathbf{Y} \coloneqq \sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{X}_j$. Dann ist $\mathbf{Y}$ eine $\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. Sei $\mathbf{A} \coloneqq (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_s)$ und sei $m \coloneqq \sum_{j=1}^{s} m_j$. Dann ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$. Weiter sei

$$\mathbf{X} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_s \end{pmatrix}.$$

Aus der Definition der beteiligten Größe folgt dann

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{s} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{X}_j = (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_s) \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_s \end{pmatrix} = \mathbf{A} \cdot \mathbf{X}.$$

Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass $\mathbf{X}$ wegen Bemerkung 4.1.1 eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, so liefert Satz 4.1.2 die Behauptung. □

Folgerung 4.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_n}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $\mathbf{Y} \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j$ sowie $\mathbf{Z} \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j$. Dann $\mathbf{Y}$ und $\mathbf{Z}$ jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $A_j \coloneqq \mathbf{I}_m$ und $B_j \coloneqq \frac{1}{n}\mathbf{I}_m$. Aus der Definition der beteiligten Größen folgt dann

$$\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{X}_j \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{Z} = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{B}_j \cdot \mathbf{X}_j.$$

Hieraus folgt mittels Satz 4.1.3 die Behauptung. □

Folgerung 4.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$. Dann ist $\mathbf{Y} = \mathbf{X}_1 - \mathbf{X}_2$. Dann ist $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Beweis. Sei $\mathbf{A}_1 \coloneqq \mathbf{I}_m$ und $\mathbf{A}_2 \coloneqq -\mathbf{I}_m$. Dann gilt $\mathbf{Y} = \sum_{j=1}^{2} \mathbf{A}_j \cdot \mathbf{X}_j$. Somit liefert Satz 4.1.3 die Behauptung. □

Zur Beschreibung von Vorgängen in Natur und Technik, welche sich über einen gewissen Zeitraum erstrecken und deren Verlauf vom Zufall abhängt, ist es notwendig spezielle Familien von Zufallsvariablen zu betrachten. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung,welche eine zentrale Rolle im Gebiet der Stochastik einnimmt.

Definition 4.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum, T eine nichtleere Indexmenge und $(X_t)_{t\in T}$ eine Familie von $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $(X_t)_{t\in T}$ *ein stochastischer Prozess* auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und Parameterraum T.

Der Parameterraum T eines stochastische Prozess wird oftmals als Zeitbereich interpretiert.

Definition 4.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum, T eine nichtleere Indexmenge und $(X_t)_{t\in T}$ ein stochastischer Prozess auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Zustandsraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und Parameterraum T. Weiterhin sei $\omega \in \Omega$. Dann heißt die Abbildung $Y_\omega \colon T \longrightarrow \Omega'$, welche gemäß $t \longmapsto X_t(\omega)$ erklärt ist, die zu ω gehörige *Trajektorie* (oder auch der zu ω gehörige Pfad) von $(X_t)_{t\in T}$.

Hat ein Experimentator mit einer Zufallsvariable X zu tun, die bestimmte Merkmale beschreibt, so interessiert ihn hauptsächlich die Frage, mit welcher Wahrscheinlichkeit diese Zufallsvariable bestimmte Werte annimmt. Von diesen Standpunkt aus gesehen ist nicht das Wahrscheinlichkeitsmaß P auf dem Grundraum $(\Omega, \mathfrak{A})$ von Bedeutung sondern viel mehr, dass von X und P auf dem Bildraum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ induzierte Wahrscheinlichkeitsmaß von Bedeutung. Die Vollendung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 4.1.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt das Bildmaß $X(P)$ von P unter X die *Verteilung von X bezüglich P*. Statt $X(P)$ wird hierbei oft die Symbolik P_X verwendet.

Bemerkung 4.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien X_1 und X_2 jeweils $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für die es ein $N \in \mathcal{N}_P$ gibt, für das $\{\omega \in \Omega \mid X_1(\omega) \neq X_2(\omega)\} \subseteq N$ erfüllt ist. Dann gilt $P_{X_1} = P_{X_2}$. ♣

Bemerkung 4.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es bezeichne P_X die Verteilung von X bezüglich P. Dann ist $(\Omega', \mathfrak{A}', P_X)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. ♣

Beweis. Dies folgt aus Satz M.16.10. □

Bemerkung 4.1.4. Sei $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann ist $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \coloneqq \mathrm{Id}_{\Omega'}$ eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega', \mathfrak{A}', \mu)$, welche $P_X = \mu$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.16.4. □

Bemerkung 4.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei N' eine Teilmenge von Ω', für welche $X^{-1}(\Omega' \setminus N') \neq \varnothing$ erfüllt ist und η ein dann existierendes Element von $X^{-1}(\Omega' \setminus N')$ ist. Die Abbildung $X_\eta \colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ sei definiert gemäß

$$X_\eta(\omega) \coloneqq \begin{cases} X(\omega), & \text{falls } \omega \in X^{-1}(\Omega' \setminus N'), \\ X(\eta), & \text{falls } X^{-1}(N'). \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es gelten $X_\eta(\Omega) \subseteq \Omega' \setminus N'$ sowie $\{X \neq X_\eta\} = X^{-1}(N')$.

(b) Sei $N' \in \mathfrak{A}'$. Dann ist X_η eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(c) Sei $N' \in \mathcal{N}_{P_X}$. Dann gilt $\{X \neq X_\eta\} \in \mathcal{N}_P$ sowie $P_X = P_{X_\eta}$. ♣

Wir erläutern nun, in welcher Weise die Wahl des Bildraumes die Verteilung einer Zufallsvariablen beeinflusst.

Bemerkung 4.1.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiterhin sei $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein messbarer Raum derart, dass $\Omega' \subseteq \Omega''$ und $\mathfrak{A}'' \cap \Omega' \subseteq \mathfrak{A}'$ erfüllt ist. Es bezeichne $\widetilde{X}$ die durch X festgelegte Abbildung von Ω in Ω'', dass heißt für $\omega \in \Omega$ sei $\widetilde{X}(\omega) \coloneqq X(\omega)$. Dann gilt:

(a) Es ist $\widetilde{X}^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq X^{-1}(\mathfrak{A}')$.

(b) Es ist $\widetilde{X}$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(c) Sei $A'' \subseteq \Omega''$. Dann gilt $A'' \cap \Omega' \in \mathfrak{A}'$ sowie $P_{\widetilde{X}}(A'') = P_X(A'' \cap \Omega')$.

(d) Es gelte $\{A'' \cap \Omega' \mid A'' \in \mathfrak{A}''\} = \mathfrak{A}'$. Dann gilt $\widetilde{X}^{-1}(\mathfrak{A}'') = X^{-1}(\mathfrak{A}')$.

(e) Sei $\omega' \in \Omega'$. Dann gilt:

(e1) Sei $P_X = \varepsilon_{\omega', \mathfrak{A}'}$. Dann gilt $P_{\widetilde{X}} = \varepsilon_{\omega', \mathfrak{A}''}$.

(e2) Es gelte $\{A'' \cap \Omega' \mid A'' \in \mathfrak{A}''\} = \mathfrak{A}'$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $P_X = \varepsilon_{\omega', \mathfrak{A}'}$.

(ii) Es ist $P_{\widetilde{X}} = \varepsilon_{\omega', \mathfrak{A}''}$. ♣

Lemma 4.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, Ω' eine höchstens abzählbare nichtleere Menge und X eine $(\Omega', \mathfrak{P}(\Omega'))$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein messbarer Raum mit $\Omega' \subseteq \Omega''$. Es bezeichne $\widetilde{X}$ die durch X festgelegte Abbildung von Ω in Ω''. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\widetilde{X}$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ und $(\omega'_j)_{j \in I}$ eine Folge von paarweise disjunkte verschiedenen Elementen von Ω', für welche $\Omega' = \bigcup_{j \in I} \{\omega'_j\}$ erfüllt ist. Dann gilt:*

(b1) *Es ist*

$$P_X = \sum_{j \in I'} P\left(X^{-1}\left(\{\omega'_j\}\right)\right) \cdot \varepsilon_{\omega'_j, \mathfrak{P}(\Omega')}.$$

(b2) *Es ist*

$$P_{\widetilde{X}} = \sum_{j \in I'} P\left(\tilde{X}^{-1}\left(\{\omega_j'\}\right)\right) \cdot \varepsilon_{\omega_j', \mathfrak{A}''}.$$

Bemerkung 4.1.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ nicht triviale messbare Räume. Weiter seien X_1 und X_2 jeweils $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $P_{X_1} = P_{X_2}$ erfüllt ist, sowie $Y \in \mathrm{Abb}(\Omega', \Omega'')$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}''$-messbare Abbildung.

Dann sind $Y \circ X_1$ und $Y \circ X_2$ jeweils $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für die $P_{Y \circ X_1} = P_{Y \circ X_2}$ erfüllt ist. ♣

Beweis. Wegen Satz 4.1.1 sind $Y \circ X_1$ und $Y \circ X_2$ jeweils $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable und $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen der nach Voraussetzung geltender Beziehung $X_1(P) = P_{X_1} = P_{X_2} = X_2(P)$ ergibt sich unter Beachtung von Satz M.16.11 dann

$$P_{Y \circ X_1} = (Y \circ X_1)(P) = Y[X_1(P)] = Y[X_2(P)] = (Y \circ X_2)(P) = P_{Y \circ X_2}. \qquad \square$$

Lemma 4.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann ist 1_A eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_{1_A} = [1 - P(A)] \cdot \varepsilon_{0, \mathfrak{B}_1} + P(A) \cdot \varepsilon_{1, \mathfrak{B}_1}.$$

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist hinsichtlich X vor allem die Verteilung P_X von besonderem Interesse. Der das zufällige Geschehen steuernde Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist in vielen Fällen nicht explizit zugänglich. Eine solche Situation liegt in weiten Teilen der mathematischen Statistik vor. Die wahrscheinlichkeitstheoretische Struktur einer Zufallsvariablen kommt am prägnantesten durch ihre Verteilung zum Vorschein. Dementsprechend spielen in der Wahrscheinlichkeitstheorie vor allem solche aus Zufallsvariablen abgeleitete Begriffe und solche Eigenschaften von Zufallsvariablen eine Rolle, welche sich mit Hilfe ihrer Verteilungen formulieren lassen. Deshalb bezeichnet man solche Begriffe und Eigenschaften oft als wahrscheinlichkeitstheoretische Begriffe und sieht deren Studium als Hauptziel der Wahrscheinlichkeitstheorie an.

Wir weisen nun auf ein Phänomen hin, bei dem $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auftreten, bei denen $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht die Gestalt $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit einem gewissen $m \in \mathbb{N}$ besitzen. Hierbei handelt es sich um die Brownsche Bewegung. In diesem Falle ist $\Omega' = \mathscr{C}(([0,1], |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$ (für ein Beispiel einer stetigen Abbildung auf $[0,1]$, siehe etwa Abbildung 4.1). Die Abbildung

$$\|\cdot\| : \mathscr{C}(([0,1], |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)) \longrightarrow [0, +\infty),$$

welche gemäß

$$f \longmapsto \sup_{u \in [0,1]} |f(u)|$$

definiert ist, erweist sich als Norm auf Ω'.

Es bezeichne $\mathfrak{A}'$ die Borelsche σ-Algebra des normierten Raumes $(\Omega, \|\cdot\|)$. Mit der Brownschen Bewegung sind nun spezielle $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ verbunden.

Beispiel 4.1.2. Das zugrunde liegende Zufallsexperiment bestehe in einem zweimaligen fairen Münzwurf. Die uns interessierende Zufallsvariable ist die Anzahl der Wappen. Wir wählen den Grundraum

$$\Omega := \{Z, W\}^2,$$

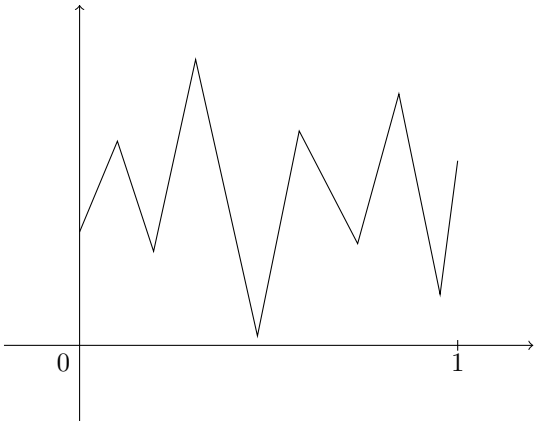


Abbildung 4.1.: Beispiel für eine stetige Funktion auf $[0,1]$

wobei das Symbol Z bzw. W für Zahl bzw. Wappen steht. Weiterhin wählen wir als σ-Algebra $\mathfrak{A} \coloneqq \mathfrak{P}(\Omega)$ und als Wahrscheinlichkeitsmaß P die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Die Anzahl der Wappen kann dann die Werte 0, 1 und 2 annehmen. Aus diesem Grunde wählen wir den Bildraum

$$(\Omega', \mathfrak{A}') = (\{0,1,2\}, \mathfrak{P}(\{0,1,2\})).$$

Wir definieren die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \Omega'$ gemäß

$$X((Z,Z)) \coloneqq 0, \quad X((Z,W)) \coloneqq X((W,Z)) \coloneqq 1, \quad X((W,W)) = 2.$$

Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist X dann trivialerweise $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar, also eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wir berechnen nun deren Verteilung P_X. Wegen Teil *(b1)* von Lemma 4.1.1 gilt

$$P_X = \sum_{j=0}^{2} P\left(X^{-1}(\{j\})\right) \cdot \varepsilon_{j,\mathfrak{A}'}. \tag{1}$$

Es ist $X^{-1}(\{0\}) = \{(Z,Z)\}$, , $X^{-1}(\{1\}) = \{(W,Z), (Z,W)\}$ sowie $X^{-1}(\{2\}) = \{(W,W)\}$. Für $j \in \{0,1,2\}$ gilt nun

$$P\left(X^{-1}(\{j\})\right) = \frac{\operatorname{card} X^{-1}(\{j\})}{\operatorname{card} \Omega}$$

und damit ist

$$P\left(X^{-1}(\{0\})\right) = \frac{1}{4}, \quad P\left(X^{-1}(\{1\})\right) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}, \quad P\left(X^{-1}(\{2\})\right) = \frac{1}{4}.$$

Hieraus folgt nun in Verbindung mit (1)

$$P_X = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{A}'} + \varepsilon_{2,\mathfrak{A}'}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_{1,\mathfrak{A}'}.$$

Es bezeichne $\widetilde{X}$ die durch X festgelegte Abbildung von Ω in $\mathbb{R}$, das heißt, für $\omega \in \Omega$ gilt $\widetilde{X}(\omega) = X(\omega)$. Wegen Teil *(a)* von Lemma 4.1.1 ist $\widetilde{X}$ dann eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen Teil *(b2)* von Lemma 4.1.1 gilt dann letztendlich

$$P_{\widetilde{X}} = \frac{1}{4}\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{A}'} + \varepsilon_{2,\mathfrak{A}'}\right) + \frac{1}{2}\varepsilon_{1,\mathfrak{A}'}.$$

Beispiel 4.1.2 führte einen gewissen Formalismus vor, welcher jetzt nicht vertieft wird.

Beispiel 4.1.3. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann bestehe unser Zufallsexperiment darin, dass zwei Personen unabhängig voneinander eine Zahl aus der Menge $\mathbb{N}_{1,n}$ auswählen. Weiterhin sei $m \in \mathbb{Z}_{0,n-1}$. Dann ist die Wahrscheinlichkeit dafür zu bestimmen, dass sich die beiden ausgewählten Zahlen höchstens um m unterscheiden.

Lösung. Wir wählen den Grundraum $\mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ und $\mathfrak{A} \coloneqq \mathfrak{P}(\Omega)$ als σ-Algebra. Als Wahrscheinlichkeitsmaß wählt man die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Das Elementarereignis $(j,k) \in \Omega$ entspreche dann der Ereignisaussage „Die erste Person bzw. zweite Person wählt die Zahl j bzw. k“. Wir definieren

$$X_1 \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_{1,n} \qquad \text{bzw.} \qquad X_2 \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{N}_{1,n}$$

gemäß

$$(j,k) \longmapsto j \qquad \text{bzw.} \qquad (j,k) \longmapsto k.$$

Das uns interessierende Ereignis ist dann also

$$\{\omega \in \Omega \,|\, m \geq |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\}.$$

Das Komplementärereignis ist dann also

$$\Omega \setminus \{\omega \in \Omega \,|\, m \geq |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\} = \{\omega \in \Omega \,|\, m < |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\}$$

bzw.

$$= \{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} \cup \{\omega \in \Omega \,|\, -m > X_1(\omega) - X_2(\omega)\},$$

wobei die beiden Mengen paarweise disjunkt sind. Ferner ist

$$\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m\}$$

sowie

$$\{\omega \in \Omega \,|\, -m > X_1(\omega) - X_2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \,|\, X_2(\omega) > X_1(\omega) + m\}.$$

Aus diesem Sachverhalt und der Symmetrie des Problems folgt

$$\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} = \{\omega \in \Omega \,|\, -m > X_1(\omega) - X_2(\omega)\}.$$

Damit gilt

$$\begin{aligned}
&P(\{\omega \in \Omega \,|\, m \geq |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\}) \\
=&1 - P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\}) \\
=&1 - P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} \cup \{\omega \in \Omega \,|\, -m > X_1(\omega) - X_2(\omega)\}) \\
=&1 - 2P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}).
\end{aligned}$$

Aufgrund der konkreten Wahl von P gilt

$$\begin{aligned}
P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}) &= \frac{\operatorname{card} P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\})}{\operatorname{card} \Omega} \\
&= \frac{1}{n^2} \cdot \operatorname{card} P(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}).
\end{aligned}$$

Wir bestimmen nun die Menge $\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}$. Da X_2 Werte aus $\mathbb{N}_{1,n}$ annimmt, gilt

$$\Omega = \bigcup_{k=1}^{n} \{\omega \in \Omega \,|\, X_2(\omega) = k\},$$

wobei diese Mengen wieder paarweise disjunkt sind. Es gilt daher

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} \\
&= \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m\} \\
&= \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m\} \cap \Omega \\
&= \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m\} \cap \left(\bigcup_{k=1}^{n} \{\omega \in \Omega \,|\, X_2(\omega) = k\} \right) \\
&= \bigcup_{k=1}^{n} \left(\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m\} \cap \{\omega \in \Omega \,|\, X_2(\omega) = k\} \right) \\
&= \bigcup_{k=1}^{n} \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > X_2(\omega) + m,\, X_2(\omega) = k\}.
\end{aligned}$$

Für alle $j, k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $j \neq k$ sind diese Mengen paarweise disjunkt. Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$. Falls $k \geq n - m$ ist, so gilt $n \leq k + m$ und da X_1 Werte aus $\mathbb{N}_{1,n}$ annimmt dann

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k + m,\, X_2(\omega) = k\} = \varnothing.$$

Im Falle $m = n - 1$ ist $k \geq n - m$, also

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k + m,\, X_2(\omega) = k\} = \varnothing.$$

Sei nun $m < n - 1$. Dann ist $n - m - 1 \geq 1$. Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n-m-1}$, dann gilt

$$2 \leq k + m + 1 \leq (n - m - 1) + m + 1 = n.$$

Sei $j \in \mathbb{N}_{k+m+1,n}$, dann gilt

$$X_1((j,k)) = j \geq k + m + 1 > k + m.$$

Andererseits sei $j \in \mathbb{N}_{1,k+m}$, dann gilt

$$X_1((j,k)) = j \leq k + m.$$

Aus den letzten drei Ungleichungen folgt nun

$$\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k + m,\, X_2(\omega) = k\} = \{(j,k) \,|\, j \in \mathbb{N}_{k+m+1,n}\}.$$

Daraus folgt nun

$$\begin{aligned}
\operatorname{card}\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k + m,\, X_2(\omega) = k\} &= \operatorname{card}\{(j,k) \,|\, j \in \mathbb{N}_{k+m+1,n}\} \\
&= \operatorname{card} \mathbb{N}_{k+m+1,n} \\
&= n - m - k.
\end{aligned}$$

Aus dem Bisherigen folgt

$$\begin{aligned}
&\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\} \\
&= \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } m = n - 1, \\ \bigcup_{k=1}^{n-m-1} \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k + m,\, X_2(\omega) = k\}, & \text{falls } m < n - 1. \end{cases}
\end{aligned}$$

Falls $m = n - 1$, so folgt daraus

$$P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}\right) = P(\varnothing) = 0 = \frac{(n-m)(n-m-1)}{2n^2}.$$

Aus dem Bisherigen und der Additivität von P folgt

$$\begin{aligned} P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{n-m-1} \{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k+m,\, X_2(\omega) = k\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m-1} P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k+m,\, X_2(\omega) = k\}\right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-m-1} \frac{\operatorname{card}\{\omega \in \Omega \,|\, X_1(\omega) > k+m,\, X_2(\omega) = k\}}{n^2} \\ &= \frac{1}{n^2} \cdot \sum_{k=1}^{n-m-1} (n-m-k). \end{aligned}$$

Es ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n-m-1} (n-m-k) &= \frac{1}{n^2} \left(\sum_{k=1}^{n-m-1} (n-m) - \sum_{k=1}^{n-m-1} k \right) \\ &= \frac{1}{n^2} \left[(n-m-1)(n-m) - \frac{1}{2}(n-m-1)(n-m) \right] \\ &= \frac{2(n-m-1)(n-m) - (n-m-1)(n-m)}{2n^2} \\ &= \frac{(n-m-1)(n-m)}{2n^2}. \end{aligned}$$

Letztendlich ergibt sich

$$\begin{aligned} P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, m \geq |X_1(\omega) - X_2(\omega)|\}\right) &= 1 - 2P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, m < X_1(\omega) - X_2(\omega)\}\right) \\ &= 1 - 2 \cdot \frac{(n-m-1)(n-m)}{2n^2} \\ &= 1 - \frac{(n-m-1)(n-m)}{n^2}. \end{aligned}$$

Wir wollen nun den Fall von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen noch etwas näher untersuchen. Hierbei werden wir an die Betrachtungen des Abschnittes M.14 anknüpfen. Dort haben wir gesehen (vgl. Satz M.14.4), dass ein Maß aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ vollständig durch seine rechte- bzw. linke Verteilungsfunktion bestimmt ist. Aus diesem Grunde erscheint eine Übertragung dieser Begriffe auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen angebracht.

Definition 4.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Dann verstehen wir unter der linken- bzw. rechten Verteilungsfunktion von X gerade die linke- bzw. rechte Verteilungsfunktion von P_X.

Bemerkung 4.1.8. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Weiter sei $u \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$F_{P_X,l}(u) = P\left(\{\omega \in \Omega \,|\, X(\omega) \in (-\infty, u)\}\right)$$

und

$$F_{P_X,r}(u) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty, u]\}). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Es ist

$$F_{P_X,l}(u) = P_X((-\infty,u)) = P\left(X^{-1}((-\infty,u))\right) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty,u)\})$$

und analog

$$F_{P_X,l}(u) = P_X((-\infty,u]) = P\left(X^{-1}((-\infty,u])\right) = P(\{\omega \in \Omega \mid X(\omega) \in (-\infty,u]\}). \qquad \square$$

Zur Vorbereitung des nächsten Beispiels sei an die Simpson-Verteilung (vgl. Beispiel M.14.11) erinnert. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (a, +\infty)$. Weiter sei $\sigma_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß

$$\sigma_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha,\beta], \\ \frac{4(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } x \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \\ \frac{4(\beta-x)}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } x \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]. \end{cases}$$

$\sigma_{\alpha,\beta}$ ist dann eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und das zu $\sigma_{\alpha,\beta}$ zugehörige Maß $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$ auf $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt Simpson-Verteilung mit den Parametern α und β. Es gilt zusätzlich noch

$$F_{\mathcal{S}_{\alpha,\beta},l} = F_{\mathcal{S}_{\alpha,\beta},r}.$$

Eine direkte Rechnung erbringt für $u \in \mathbb{R}$ den folgenden Ausdruck für die linke Verteilungsfunktion

$$F_{\mathcal{S}_{\alpha,\beta},l}(u) = \int_{-\infty}^{u} \sigma_{\alpha,\beta}(x)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 0, & \text{falls } u \in (-\infty,\alpha), \\ \frac{2(u-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } u \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \\ 1 - \frac{2(u-\alpha)^2}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } u \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right], \\ 1, & \text{falls } u \in (\beta,+\infty). \end{cases}$$

Beispiel 4.1.4. Die Menge an Brot (gemessen in100 kg), welche eine gewisse Bäckerei pro Tag verkauft, werde modelliert als eine gewisse $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable X auf einem abstrakten Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ deren Verteilung P_X gerade die Simpson-Verteilung $\mathcal{S}_{0,6}$ mit den Parametern $\alpha = 0$ und $\beta = 6$ ist.

(a) Wie groß sind die Wahrscheinlichkeiten der Ereignisse A und B, welche den Ereignisaussagen „Es werden pro Tag mehr als 300 kg Brot verkauft“ bzw. „Es werden pro Tag zwischen 150 kg und 450 kg Brot verkauft“ entsprechen?

(b) Sind die Ereignisse A und B stochastisch unabhängig bezüglich P?

Lösung.

Zu *(a)*: Es bezeichne $F_{\mathcal{S}_{0,6},l}$ bzw. $F_{\mathcal{S}_{0,6},r}$ die linke- bzw. rechte Verteilungsfunktion von $\mathcal{S}_{0,6}$. Aufgrund unserer Vorbetrachtungen gilt dann

$$F_{\mathcal{S}_{0,6},l} = F_{\mathcal{S}_{0,6},r} \tag{1}$$

sowie für $u \in \mathbb{R}$ weiterhin

$$F_{\mathcal{S}_{0,6},l}(u) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u \in (-\infty,0), \\ \frac{u^2}{18}, & \text{falls } u \in [0,3], \\ 1 - \frac{(6-u)^2}{18}, & \text{falls } u \in (3,6], \\ 1, & \text{falls } u \in (6,+\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Aufgrund der Definition von A bzw. B gilt

$$A = \{X > 3\} = X^{-1}((3, +\infty)) \tag{3}$$

bzw.

$$B = \left\{X \in \left[\frac{3}{2}, \frac{9}{3}\right]\right\} = X^{-1}\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{3}\right]\right). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (3), der nach Bemerkung 4.1.3 gültigen Beziehung $P_X(\mathbb{R}) = 1$ sowie von (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned} P(A) &= P\left(X^{-1}(3, +\infty)\right) = P_X((3, +\infty)) = P_X(\mathbb{R} \setminus (-\infty, 3]) \\ &= P_X(\mathbb{R}) - P_X((-\infty, 3]) = 1 - F_{P_X,r}(3) \\ &= 1 - F_{\mathcal{S}_{0,6},l}(3) = 1 - \frac{3^2}{18} = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Unter Beachtung von (4), Teil *(b4)* von Lemma M.14.2 sowie (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned} P(B) &= P\left(X^{-1}\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]\right)\right) = P_X\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]\right) = \mathcal{S}_{0,6}\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]\right) \\ &= F_{\mathcal{S}_{0,6},r}\left(\frac{9}{2}\right) - F_{\mathcal{S}_{0,6},l}\left(\frac{3}{2}\right) = F_{\mathcal{S}_{0,6},l}\left(\frac{9}{2}\right) - F_{\mathcal{S}_{0,6},l}\left(\frac{3}{2}\right) \\ &= \left[1 - \frac{\left(1 - \frac{9}{2}\right)^2}{18}\right] - \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 \\ &= 1 - \frac{1}{4} = \frac{3}{4}. \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Wegen (3) und (4) gilt

$$\begin{aligned} A \cap B &= X^{-1}((3, +\infty)) \cap X^{-1}\left(\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]\right) \\ &= X^{-1}\left((3, +\infty)\left[\frac{3}{2}, \frac{9}{2}\right]\right) = X^{-1}\left(\left(3, \frac{9}{2}\right]\right). \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit Teil *(b4)* von Lemma M.14.2 sowie (1) und (2) dann

$$\begin{aligned} P(A \cap B) &= P\left(X^{-1}\left(\left(3, \frac{9}{2}\right]\right)\right) = P_X\left(\left(3, \frac{9}{2}\right]\right) = \mathcal{S}_{0,6}\left(\left(3, \frac{9}{2}\right]\right) \\ &= F_{\mathcal{S}_{0,6},r}\left(\frac{9}{2}\right) - F_{\mathcal{S}_{0,6},l}(3) = F_{\mathcal{S}_{0,6},l}\left(\frac{9}{2}\right) - F_{\mathcal{S}_{0,6},l}(3) \\ &= \left[1 - \frac{\left(6 - \frac{9}{2}\right)^2}{18}\right] - \frac{3^2}{18} = 1 - \frac{1}{18} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^2 - \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{8} - \frac{1}{2} \\ &= \frac{3}{8}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt in Verbindung mit *(a)* nun

$$P(A \cap B) = \frac{3}{8} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} = P(A) \cdot P(B),$$

das heißt, A und B sind stochastisch unabhängig bezüglich P.

4.2. Degenerierte- und P-fast sicher konstante Zufallsvariablen

Wir studieren eine Klasse von Zufallsvariablen, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass die ihnen innewohnende Zufälligkeit äußerst minimal ist.

Definition 4.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt X *degeneriert*, falls mit einem gewissen $\omega_0' \in \Omega'$ die Beziehung

$$P_X = \varepsilon_{\omega_0', \mathfrak{A}'}$$

besteht.

Bemerkung 4.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine degenerierte $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $\mathfrak{A}_{P,0} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega \setminus A \in \mathcal{N}_P\}$. Dann gilt

$$X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \qquad \clubsuit$$

Definition 4.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt X *P-fast sicher konstant auf Ω*, falls ein $\omega_0' \in \Omega'$ mit

$$X^{-1}(\Omega' \setminus \{\omega_0'\}) \in \mathcal{N}_P$$

existiert.

Bemerkung 4.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und insbesondere sei dabei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist P-fast sicher konstant auf Ω.

(ii) Es existiert ein $\omega_1' \in \Omega'$ mit $P\left(X^{-1}(\{\omega_1'\})\right) = 1$.

(b) Sei *(i)* erfüllt. Dann gibt es genau ein $\omega_0' \in \Omega'$ mit $X^{-1}(\Omega' \setminus \{\omega_0'\}) \in \mathcal{N}_P$ und es gibt genau ein $\omega_1' \in \Omega'$ mit $P\left(X^{-1}(\{\omega_1'\})\right) = 1$. Hierbei gilt noch $\omega_0' = \omega_1'$. $\clubsuit$

Satz 4.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und insbesondere sei dabei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *X ist P-fast sicher konstant auf Ω.*

(ii) *X ist degeneriert.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes $\omega_0' \in \Omega'$ mit $P_X = \varepsilon_{\omega_0', \mathfrak{A}'}$ und zwar ist es das eindeutig bestimmte $\omega_0' \in \Omega'$ mit $X^{-1}(\Omega' \setminus \{\omega_0'\}) \in \mathcal{N}_P$.*

Satz 4.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{X}$ *ist* P*-fast sicher konstant auf* Ω.

(ii) *Es gibt ein* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{u},\mathfrak{B}_m}$.

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ *und zwar ist dies das eindeutig bestimmte* $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $X^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \mathbf{u}) \in \mathcal{N}_P$.

Satz 4.2.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum und* X *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) X *ist* P*-fast sicher konstant auf* Ω.

(ii) *Für jedes* $A \in X^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ *gilt* $P(A) = 0$ *oder* $P(A) = 1$.

(iii) *Für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $P(\{X \leq \alpha\}) = 0$ *oder* $P(\{X \leq \alpha\}) = 1$.

(iv) *Für jedes* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $P(\{X < \alpha\}) = 0$ *oder* $P(\{X < \alpha\}) = 1$.

(v) X *ist degeneriert.*

Wir geben nun verschiedene Charakterisierungen der P-fast sicheren Konstanz einer $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen $\mathbf{X}$.

Lemma 4.2.1. *Sei.* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \ldots, X_m)^T$ *eine* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. *Dann ist* X_j *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathbf{X}$ *ist* P*-fast sicher konstant auf* Ω.

(ii) *Für jedes* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *ist* X_j P*-fast sicher konstant auf* Ω.

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt:*

(c1) *Es gibt genau ein* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $X^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{a}\}) \in \mathcal{N}_P$ *und es gibt genau eine Folge* $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ *aus* $\mathbb{R}$ *derart, dass für jedes* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *auch* $X_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{a_j\}) \in \mathcal{N}_P$ *gilt. Hierbei gilt* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T$.

(c2) *Es gibt genau ein* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ *mit* $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ *und es gibt genau eine Folge* $(a_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ *derart, dass für jedes* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *dann* $P_{X_j} = \varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}$ *gilt. Hierbei gilt* $\mathbf{X}^{-1}(\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{a}\}) \in \mathcal{N}_P$ *sowie für jedes* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *weiterhin* $X_j^{-1}(\mathbb{R} \setminus \{a_j\}) \in \mathcal{N}_P$ *gilt. Außerdem ist* $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T$.

Satz 4.2.4. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{X}$ *eine* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. *Es sei weiterhin* $\mathfrak{A}_{P,0} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega \setminus A \in \mathcal{N}_P\}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathbf{X}$ *ist* P*-fast sicher konstant auf* Ω.

(ii) *Es ist* $\mathbf{X}^{-1}(\mathfrak{B}_m) \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$.

4.3. Diskrete Zufallsvariablen

Vom historischen Standpunkt aus betrachtet, standen zunächst Wahrscheinlichkeitsräume mit endlicher oder abzählbarer unendlicher Grundmenge im Vordergrund. Diese Struktur bedingt, dass jede Zufallsvariable auf einem solchen Wahrscheinlichkeitsraum einen höchstens abzählbaren Wertevorrat besitzt. Betrachten wir spezielle $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen, so zeigt sich, dass deren Verteilung ein diskretes Wahrscheinlichkeitsmaß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist.

Definition 4.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und insbesondere sei dabei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Dann heißt X *diskret*, falls $P_X \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{d}}(\Omega', \mathfrak{A}')$ gilt.

Bemerkung 4.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und insbesondere sei dabei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit höchstens abzählbaren Wertebereich. Dann ist X diskret. ♣

Bemerkung 4.3.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und insbesondere sei dabei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine P-fast sichere konstante $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist X diskret. ♣

Beispiel 4.3.1. Eine Fluggesellschaft hat beobachtet, das 5 % aller Personen, die einen Flug reservieren, nicht zu diesem erscheinen. Aus diesem Grund verkauft die Gesellschaft 100 Tickets für ein Flugzeug mit 95 Plätzen. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass alle Personen, die zum Flug erscheinen, einen Platz bekommen, wenn angenommen wird, dass die Personen unabhängig voneinander handeln?
Die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable X auf auf einem nicht näher spezifizierten, im Hintergrund stehenden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, beschreibe die Anzahl der Personen, die gebucht haben und zum Flug erscheinen. Es ist dann

$$P_X = \beta_{n;p} \qquad \text{mit } n = 100 \text{ und } p = 0,95.$$

Also gilt

$$\begin{aligned} P\left(X \in \mathbb{N}_{1,95}\right) &= P_X\left(\mathbb{N}_{1,95}\right) = \beta_{100;0,85}\left(\mathbb{N}_{1,95}\right) \\ &= 1 - \sum_{k=96}^{100} \binom{100}{k} \cdot 0,95^k \cdot 0,05^{100-k} \approx 0,564. \end{aligned}$$

Wir zeigen nun die Gedächtnislosigkeit der geometrischen Verteilung.

Satz 4.3.1.

(a) *Sei $p \in (0,1]$ und es bezeichne G_p die geometrische Verteilung zum Parameter p. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$G_p\left((n-1, +\infty)\right) = (1-p)^n.$$

Im Falle $p \in (0,1)$ ist also $G_p\left((n-1, +\infty)\right) \in (0,1)$.

(b) *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für die mit einem gewissen $p \in (0,1)$ die Beziehung $P_X = G_p$ gilt. Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gelten:*

$$P\left(\{X > n-1\}\right) = (1-p)^n \in (0,1)$$

sowie

$$P\left(\{X = n\} \,|\, \{X > n-1\}\right) = p.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$\begin{aligned} G_p((n-1,+\infty)) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}((n-1,+\infty)) = \sum_{k=n}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \\ &= (1-p)^n \cdot p \cdot \sum_{s=0}^{\infty} (1-p)^s = (1-p)^n \cdot p \cdot \frac{1}{1-(1-p)} \\ &= (1-p)^n \cdot p \cdot \frac{1}{p} = (1-p)^n . \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Es folgt aus *(a)*

$$\begin{aligned} P(\{X > n-1\}) &= P\left(X^{-1}((n-1,+\infty))\right) = P_X((n-1,+\infty)) \\ &= G_p(n-1,+\infty) = (1-p)^n . \end{aligned} \tag{1}$$

Wegen $p \in (0,1)$ ist also insbesondere

$$P(\{X > n-1\}) \in (0,1) . \tag{2}$$

Weiter ist

$$\begin{aligned} P(\{X=n\}) = P_X(\{n\}) = G_p(\{n\}) &= \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}(\{n\}) \\ &= (1-p)^n \cdot p \end{aligned} \tag{3}$$

und es ist

$$\{X=n\} \cap \{X > n-1\} = \{X=n\} . \tag{4}$$

Aus (1) bis (4) folgt

$$P(\{X=n\} \mid \{X > n-1\}) = \frac{P(\{X=n\} \cap \{X > n-1\})}{P(\{X > n-1\})} = \frac{(1-p)^n \cdot p}{(1-p)^n} = p. \qquad \square$$

Es gilt eine gewisse Umkehrung.

Satz 4.3.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, deren Verteilung die Gestalt $P_X = \sum_{k=0}^{\infty} p_k \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$ besitzt und für alle $n \in \mathbb{N}$ gelte*

$$P(\{X > n-1\}) \neq 0 \quad \textit{und} \quad P(\{X=n\} \mid \{X > n-1\}) = p_0.$$

Dann gelten $p_0 \in (0,1)$ und $P_X = G_{p_0}$.

Beispiel 4.3.2 (Zahlenlotto „6 aus 49”)**.** Als Grundraum wählen wir die Menge aller Kombinationen von 49 Elementen zur 6-ten Klasse. Es bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Die $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega), P)$ gebe die Anzahl der richtig getippten Zahlen an. Dann nimmt X genau die Werte aus $\mathbb{Z}_{0,6}$ an. Es bezeichne $H_{49;6;6}$ die hypergeometrische Verteilung mit Parametern $N = 49$, $M = 6$ und $n = 6$. Für $k \in \mathbb{Z}_{0,6}$ gilt dann

$$P_X(\{k\}) = P\left(X^{-1}(\{k\})\right) = P(\{X=k\}) = \frac{\binom{k}{k} \cdot \binom{43}{6-k}}{\binom{49}{6}} = H_{49;6;6}(\{k\}) .$$

Also ist

$$P_X = \sum_{k=0}^{6} P_X(\{k\}) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1} = \sum_{k=0}^{6} H_{49;6;6}(\{k\}) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Insbesondere sind

k	0	1	2	3
$P_X(\{k\})$	$0,4359$	$0,4130$	$0,1323$	$0,1765 \cdot 10^{-1}$

und

k	4	5	6
$P_X(\{k\})$	$0,9866 \cdot 10^{-3}$	$0,1845 \cdot 10^{-4}$	$0,7150 \cdot 10^{-7}$

4.4. $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen mit $\lambda^{(m)}$-stetigen Verteilungen

Vom wahrscheinlichkeitstheoretischen Standpunkt aus ist die Verteilung das wesentliche Objekt zur Behandlung einer Zufallsvariablen.

Definition 4.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dabei sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Ferner sei X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit Verteilung P_X. Dann heißt P_X *stetig,* falls $P_X \in \mathcal{M}_+^{1,c}(\Omega', \mathfrak{A}')$.

Im Folgenden beschreiben wir unsere Betrachtungen auf dem total atomarer messbaren Raum $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. In diesem Falle betrachten wir eine besondere interessante Teilklasse von stetigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen. Wir betrachten speziell $(\Omega', \mathfrak{A}') = (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit einem gewissen $m \in \mathbb{N}$.

Definition 4.4.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $\mathbf{X}$ $\lambda^{(m)}$*-stetig,* falls $P_{\mathbf{X}}$ ein $\lambda^{(m)}$-stetiges Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist.

Bemerkung 4.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}$ eine $\lambda^{(m)}$-stetige $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist $\mathbf{X}$ stetig. ♣

Beweis. Dies folgt sogleich aus Beispiel M.22.5.1. □

Wir wenden uns nun nochmals einigen den in den Abschnitte M.22.13 und M.22.14 eingeführten $\lambda^{(1)}$-stetigen Wahrscheinlichkeitsmaßen zu.

Satz 4.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $A, a \in \mathbb{R}$, $Y := AX + a$. Dann gilt:*

(a) *Y ist eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Sei $A \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(b1) *Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,A^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und A^2. Sei $P_X = \mathcal{N}_{0,1}$. Dann ist $P_Y = \mathcal{N}_{a,A^2}$.*

(b2) *Es bezeichne $\gamma_{a,A}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern a und A. Sei $P_X = \gamma_{0,1}$. Dann ist $P_Y = \gamma_{a,A}$.*

(b3) *Es bezeichne $L_{a,A}$ die Laplace-Verteilung mit den Parametern a und A. Sei $P_X = L_{0,1}$. Dann ist $P_Y = L_{a,1/A}$.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz 4.1.2.

Zu *(b)*: Wegen $Y = T_{A,a} \circ X$ folgt aus Satz M.16.11 dann

$$P_Y = Y(P) = (T_{A,a} \circ X)(P) = T_{A,a}(X(P)) = T_{A,a}(P_X).$$

Hieraus folgt mit Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 bzw. Teil *(b)* von Satz M.22.14.2 bzw. Teil *(b)* von Satz M.22.14.4 die Behauptung von *(b1)* bzw. *(b2)* bzw. *(b3)*. □

Abschnitt 4.3 haben wir gesehen, dass die geometrische Verteilung durch eine bemerkenswerte stochastische Eigenschaft charakterisiert werden kann, nämlich die sogenannte Gedächtnislosigkeit. Wir greifen dies nochmal auf und zeigen, dass die Exponentialverteilung im gewissen Sinne durch diese Eigenschaft charakterisiert ist.

Lemma 4.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei $s \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass $P(\{X > s\}) \neq 0$ ist. Sei $t \in (0, +\infty)$. Dann gilt*

$$P(\{X > s+t\} \mid \{X > s\}) = \frac{P(\{X > s+t\})}{P(\{X > s\})}.$$

BEWEIS. Wegen $t \in (0, +\infty)$ ist

$$\{X > s+t\} \subseteq \{X > s\},$$

also

$$\{X > s+t\} \cap \{X > s\} = \{X > s+t\}.$$ □

Satz 4.4.2. *Sei $\eta \in (0, +\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = E_\eta$. Dann gilt:*

(a) *Sei $s \in (0, +\infty)$. Dann gelten $P(\{X > s\}) = \exp(-\eta \cdot s)$ und $P(\{X > s\}) \neq 0$.*

(b) *Seien $s, t \in (0, +\infty)$. Dann gilt*

$$P(\{X > s+t\} \mid \{X > s\}) = P(\{X > t\}).$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Aus Satz M.22.14.3 folgt

$$\begin{aligned} P(\{X > s\}) &= P_X((s, +\infty)) = E_\eta((s, +\infty)) = 1 - F_{E_\eta}(s) = 1 - [1 - \exp(-\eta \cdot s)] \\ &= \exp(-\eta \cdot s) \neq 0. \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Unter Verwendung von Lemma 4.4.1 und *(a)* folgt

$$\begin{aligned} P(\{X > s+t\} \mid X > s) &= \frac{P(\{X > s+t\})}{P(\{X > s\})} = \frac{\exp(-\eta \cdot (s+t))}{\exp(-\eta \cdot s)} = \exp(-\eta \cdot t) \\ &= P(\{X > t\}). \end{aligned}$$ □

Wir zeigen nun, dass die Exponentialverteilung im gewissen Sinne durch die Gedächtnislosigkeit charakterisiert ist.

Lemma 4.4.2. *Sei* $h\colon (0,+\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ *derart gewählt, dass für alle* $s,t \in (0,+\infty)$ *die Funktionalgleichung*

$$h(s+t) = h(s) \cdot h(t)$$

besteht. Dann gilt:

(a) *Es existiere ein* $s_0 \in (0,+\infty)$ *mit* $h(s_0) = 0$. *Dann ist* h *die Nullfunktion auf* $(0,+\infty)$.

(b) *Sei* h *nicht die Nullfunktion auf* $(0,+\infty)$ *und zudem monoton auf* $(0,+\infty)$. *Dann gibt es ein eindeutig bestimmtes* $\eta \in \mathbb{R}$, *so dass für alle* $s \in (0,+\infty)$ *dann*

$$h(s) = \exp(-\eta \cdot s)$$

gilt.

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$0 = h(s_0) = h\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{s_0}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} h\left(\frac{s_0}{n}\right) = \left[h\left(\frac{s_0}{n}\right)\right]^n,$$

das heißt es ist

$$h\left(\frac{s_0}{n}\right) = 0. \tag{1}$$

Sei $y \in (0,+\infty)$. Wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{s_0}{n} = 0$ gibt es dann ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\frac{s_0}{n_0} < y. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$y - \frac{s_0}{n_0} > 0. \tag{3}$$

Aus (2), (3) und der Funktionalgleichung von h folgt mittels (1) dann

$$h(y) = h\left(\left[y - \frac{s_0}{n_0}\right] + \frac{s_0}{n_0}\right) = h\left(y - \frac{s_0}{n_0}\right) \cdot h\left(\frac{s_0}{n}\right) = 0.$$

Somit ist h die Nullfunktion auf $(0,+\infty)$.

Zu *(b)*: Sei $s \in (0,+\infty)$. Wegen *(a)* und der Wahl von h gilt dann

$$h(s) \neq 0. \tag{4}$$

Weiterhin gilt

$$h(s) = h\left(\frac{s}{2} + \frac{s}{2}\right) = \left[h\left(\frac{s}{2}\right)\right]^2. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann

$$h(s) > 0. \tag{6}$$

Wegen (6) gilt insbesondere $h(1) > 0$. Wir setzen damit

$$\eta := -\ln(h(1)).$$

Es gilt also

$$\exp(-\eta) = \exp(\ln(h(1))) = h(1). \tag{7}$$

Sei $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Funktionalgleichung von h gilt dann

$$h(1) = h\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^{n} h\left(\frac{1}{n}\right) = \left[h\left(\frac{1}{n}\right)\right]^n,$$

also

$$h(1) = \sqrt[n]{h(1)}. \tag{8}$$

Aus der Funktionalgleichung von h und aus (8) folgt für $m \in \mathbb{N}$ dann

$$h\left(\frac{m}{n}\right) = h\left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{n}\right) = \prod_{k=1}^{m} h\left(\frac{1}{n}\right) = \left[h\left(\frac{1}{n}\right)\right]^m = [h(1)]^{m/n}. \tag{9}$$

Sei nun $r \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$. Dann gibt es gewisse $m, n \in \mathbb{N}$ mit $r = \frac{m}{n}$. Aus (9) und (7) folgt dann

$$h(r) = h\left(\frac{m}{n}\right) = [h(1)]^{m/n} = [h(1)]^r = [\exp(-\eta)]^r = \exp(-\eta \cdot r). \tag{10}$$

Sei nun schließlich $s \in (0, +\infty) \setminus \mathbb{Q}$. Dann gibt es Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $u_n < s \cdot v_n$.

(II) Es gelten $\lim_{n\to\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} = s$.

Für $n \in \mathbb{N}$ seien $\alpha_n := \min\{h(u_n), h(v_n)\}$ und $\beta_n := \max\{h(u_n), h(v_n)\}$. Da h monoton ist, folgt für $n \in \mathbb{N}$ aus *(I)* dann $v_n \leq h(s) \leq \beta_n$. Somit ist

$$h(s) = \bigcap_{n=1}^{\infty} [\alpha_n, \beta_n]. \tag{11}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ ist wegen $u_n, v_n \in \mathbb{Q} \cap (0, +\infty)$ und (10) dann

$$h(u_n) = \exp(-\eta \cdot u_n) \tag{12}$$

sowie

$$h(v_n) = \exp(-\eta \cdot v_n). \tag{13}$$

Da wegen *(II)* nun $\lim_{n\to\infty}(-\eta \cdot u_n) = -\eta \cdot s$ bzw. $\lim_{n\to\infty}(-\eta \cdot v_n) = -\eta \cdot s$ erfüllt ist, folgt wegen (12) und (13) sowie der Stetigkeit der Exponentialfunktion dann

$$\lim_{n\to\infty} h(u_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(-\eta \cdot u_n) = \exp(-\eta \cdot s)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} h(v_n) = \lim_{n\to\infty} \exp(-\eta \cdot v_n) = \exp(-\eta \cdot s).$$

Daraus folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \exp(-\eta \cdot s)$$

bzw.

$$\lim_{n\to\infty} \beta_n = \exp(-\eta \cdot s).$$

Hieraus und aus (11) folgt dann

$$h(s) = \exp(-\eta \cdot s). \tag{14}$$

Sei nun $\gamma \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass für alle $u > 0$ gilt $h(u) = \exp(-\gamma \cdot u)$. Dann ist $h(1) = \exp(-\gamma)$. Aufgrund der Eindeutigkeit der Exponentialfunktion und der Definition von η folgt dann

$$\gamma = -\ln(h(1)) = \eta. \qquad \square$$

Satz 4.4.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es gilt $P(\{X > 0\}) = 1$.*

(II) *Falls $s \in (0, +\infty)$ so beschaffen ist, dass $P(\{X > s\}) \neq 0$ erfüllt ist, so besteht für alle $t \in (0, +\infty)$ die Beziehung $P(\{X > s + t\} \mid \{X > s\}) = P(\{X > t\})$.*

Dann gibt es ein eindeutig *bestimmtes $\eta \in (0, +\infty)$ mit $P_X = E_\eta$.*

Beweis. Sei $h\colon (0, +\infty) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto P(\{X > u\}). \tag{1}$$

Seien $s, t \in (0, +\infty)$. Sei zunächst

$$\{X > s\} \in \mathcal{N}_P. \tag{2}$$

Wegen $\{X > s + t\} \subseteq \{X > s\}$ und $\{X > s + t\} \in \mathfrak{A}$ liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\{X > s + t\} \in \mathcal{N}_P. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (1), (3), (2) und nochmals (1) folgt dann

$$h(s + t) = P(\{X > s + t\}) = 0 = P(\{X > s\}) \cdot P(\{X > t\}) = h(s) \cdot h(t). \tag{4}$$

Sei nun

$$P(\{X > s\}) \neq 0. \tag{5}$$

Dann folgt mittels *(II)* und Lemma 4.4.1 zunächst

$$P(\{X > t\}) = P(\{X > s + t\} \mid \{X > s\}) = \frac{P(\{X > s + t\})}{P(\{X > s\})}$$

und mit (1) dann

$$h(s + t) = h(s) \cdot h(t). \tag{6}$$

Wir zeigen nun, dass h nicht die Nullfunktion auf $(0, +\infty)$ ist. Aufgrund der Wahl von X ist $(\{X > 1/n\})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$, welche zu dem isoton ist und der Beziehung

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{X > \frac{1}{n}\right\} = \{X > 0\}$$

genügt. Aus (1), der Unterhalbstetigkeit von P und *(I)* folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} h\left(\frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} P\left(\left\{X > \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left\{X > \frac{1}{n}\right\}\right) = P\left(\{X > 0\}\right) = 1. \tag{7}$$

Aus (7) folgt

(I') Es ist h nicht die Nullfunktion auf $(0, +\infty)$.

Für $s \in (0, +\infty)$ gilt

$$h(s) = P\left(\{X > s\}\right) = P(\Omega) - P\left(\{X \leq s\}\right) = 1 - F_{P_X,r}. \tag{8}$$

Da $F_{P_X,r}$ nach Satz M.14.5 monoton wachsend ist, gilt somit:

(II') Es ist h monoton fallend auf $(0, +\infty)$.

Wegen (2), (4) bis (6), *(I')* und *(II')* gibt es nach Teil *(b)* von Lemma 4.4.2 ein eindeutig bestimmtes $\eta \in \mathbb{R}$, so dass für alle $s \in (0, +\infty)$ gilt

$$h(s) = \exp\left(-\eta \cdot s\right). \tag{9}$$

Wir zeigen nun, dass $\eta \in (0, +\infty)$ gilt. Es ist $\left(\{X > n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine antitone Folge aus $\mathfrak{A}$ mit

$$\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X > n\} = \varnothing.$$

Wegen der Oberhalbstetigkeit von P folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} h(n) = \lim_{n\to\infty} P\left(\{X > n\}\right) = P\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\{X > n\}\right) = P(\varnothing) = 0 \tag{10}$$

und wegen (9) und (10) gilt somit

$$\eta \in (0, +\infty). \tag{11}$$

Unter Beachtung von (11) bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Wegen Teil *(d)* von Satz M.22.14.3 gilt für $s \in \mathbb{R}$

$$F_{E_\eta}(s) = \begin{cases} 0, & \text{falls } s \in (-\infty, 0], \\ 1 - \exp\left(-\eta \cdot s\right), & \text{falls } s \in (0, +\infty). \end{cases} \tag{12}$$

Wir zeigen, dass $F_{P_X,r} = F_{E_\eta,r}$ gilt. Sei $s \in (0, +\infty)$. Dann gilt wegen (8), (9) und (12)

$$F_{P_X,r}(s) = 1 - h(s) = 1 - \exp\left(-\eta \cdot s\right) = F_{E_\eta,r}(s). \tag{13}$$

Sei nun $(-\infty, 0]$. Dann gilt

$$\{X \leq s\} \subseteq \{X \leq 0\} = \Omega \setminus \{X > 0\}. \tag{14}$$

Wegen $P(\Omega) = 1$ und *(I)* gilt

$$\Omega \setminus \{X > 0\} \in \mathcal{N}_P. \tag{15}$$

Wegen $\{X \leq s\} \in \mathfrak{A}$, (14) und (15) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1

$$\{X \leq s\} \in \mathcal{N}_P. \tag{16}$$

Es gilt aufgrund von (16) und (12) dann

$$F_{P_X,r}(s) = P_X((-\infty, s]) = 0 = F_{E_\eta,r}(s). \tag{17}$$

Wegen (13) und (17) folgt

$$F_{P_X,r} = E_{E_\eta,r}.$$

Satz M.14.4 liefert dann

$$P_X = E_\eta. \qquad \square$$

4.5. Lebensdauerverteilungen

Dieser Abschnitt stellt eine erste Einführung in ein Teilgebiet der Stochastik dar, welcher *Zuverlässigkeitstheorie* genannt wird. Gegenstand der Zuverlässigkeitstheorie ist die stochastische Modellierung und der Behandlung der Lebensdauer von Vorgängen und Prozessen in Natur und Technik. Maße aus $\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, welche keine Masse auf $(-\infty, 0)$ besitzen, lassen sich zur Modellierung von Lebensdauerverteilungen heranziehen.

Definition 4.5.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so beschaffen, dass $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_\mu$. Dann heißt μ eine *Lebensdauerverteilung.*

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die Menge aller Lebensdauerverteilungen.

Definition 4.5.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und sei $U_\mu \colon (0, +\infty) \longrightarrow [0, 1]$ definiert gemäß $v \longmapsto \mu(v, +\infty)$. Dann heißt U_μ die *zu μ gehörige Überlebenswahrscheinlichkeit.*

Bemerkung 4.5.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und bezeichne U_μ die zu μ gegebene Überlebenswahrscheinlichkeit sowie $F_{\mu,r}$ die rechte Verteilungsfunktion von μ. Dann gilt:

(a) Es gilt $U_\mu = 1 - F_{\mu,r} \restriction (0, +\infty)$.

(b) Es gilt

$$\lim_{v \to \infty} U_\mu(v) = 0. \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $v \in [0, +\infty)$. Dann gilt

$$U_\mu(v) = \mu((v, +\infty)) = 1 - \mu((-\infty, v]) = 1 - F_{\mu,r}(v).$$

Zu *(b)*: Wegen Satz M.14.6 gilt

$$\lim_{v \to \infty} F_{\mu,r}(v) = 1.$$

Mit *(a)* folgt dann die Behauptung. $\square$

Stochastische Interpretation einer Lebensdauerverteilung

Seien $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = \mu$. Dann wird Ω als eine Gesamtheit homogener Individuen, etwa eine Population von Lebewesen, interpretiert und für jedes $\omega \in \Omega$ wird $X(\omega)$ als Lebensdauer von ω gedeutet. Insbesondere beschreibt die Zahl $\mu(\{0\})$ die Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum der Gesamtheit tot geboren wird bzw. nicht einsatzfähig ist. Für $v \in (0,+\infty)$ gibt der Wert $U_\mu(v)$ dann gerade die Wahrscheinlichkeit dafür an, dass ein Individuum aus Ω eine Lebensdauer größer als v besitzt. Sei $t \in (0,+\infty)$ so gewählt, dass $U_\mu(t) \neq 0$ ist. Wegen Lemma 4.4.1 gilt für $s \in (0,+\infty)$ dann

$$\begin{aligned}\frac{U_\mu(t+s)}{U_\mu(t)} &= \frac{\mu((t+s,+\infty))}{\mu((t,+\infty))} = \frac{P_X(t+s,+\infty)}{P_X((t,+\infty))} = \frac{P(\{X>t+s\})}{P(\{X>t\})}\\ &= P(\{X>t+s\}\,|\,\{X>t\}).\end{aligned}$$

Somit ist der Quotient $\frac{U_\mu(t+s)}{U_\mu(t)}$ die bedingte Wahrscheinlichkeit dafür, dass ein Individuum aus Ω, welches ein Lebensalter größer als t erreicht hat, auch ein Lebensdauer größer als $t+s$ erreicht bzw. im Intervall $(t, t+s]$ nicht ausfällt.

Definition 4.5.3. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, so dass U_μ nirgends verschwindet, dann heißt μ eine *IFR-* bzw. *DFR-Verteilung,* falls für alle $s \in (0,+\infty)$, $t_1 \in (0,+\infty)$ und $t_2 \in (t_1,+\infty)$ stets die Ungleichung

$$\frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \geq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)} \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \leq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)}$$

besteht. Hierbei steht IFR bzw. DFR für „Increasing Failure Rate" bzw. „Decreasing Failure Rate".

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,\mathrm{IFR}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ bzw. $\mathcal{M}^1_{+,\mathrm{DFR}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die Menge aller IFR- bzw. DFR-Verteilungen.

Eine IFR-Verteilung berücksichtigt natürliche Alterungsvorgänge. Seien $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{IFR}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X\colon \Omega \longrightarrow [0,+\infty)$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $t_1 \in (0,+\infty)$ und $t_2 \in (t_1,+\infty)$. Ist $s \in (0,+\infty)$, so besagt die Definition 4.5.3 in Verbindung mit unserer früheren Interpretation

$$P(\{X>t_1+s\}\,|\,\{X>t_1\}) = \frac{U_\mu(t_1+s)}{U_\mu(t_1)} \geq \frac{U_\mu(t_2+s)}{U_\mu(t_2)} = P(\{X>t_2+s\}\,|\,\{X>t_2\}).$$

Im Zusammenhang von Lebensdauerverteilungen spielt die Exponentialverteilung eine bedeutende Rolle. Diese ist geeignet zur Modellierung von Lebensdauer von Objekten, welche keinem Alterungsprozess unterliegen.

Beispiel 4.5.1. Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt:

(a) Es ist $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und für alle $t \in (0,+\infty)$ gilt $U_{E_\eta}(t) = \exp(-\eta \cdot t) \neq 0$.

(b) Es ist $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{IFR}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \cap \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{DFR}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beispiel 4.5.2. Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$ und bezeichne $W_{\alpha,\beta}$ die Weibull-Verteilung mit den Parametern α und β. Dann ist $W_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und für alle $t \in (0, +\infty)$ gilt

$$U_{W_{\alpha,\beta}}(t) = \exp\left(-\beta \cdot t^{\alpha}\right).$$

Wir wenden uns einer wichtigen Teilklasse von $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu. Jedem Maß der genannten Klasse ordnen wir eine auf $(0, +\infty)$ definierte Funktion r_μ mit Werten aus $[0, +\infty)$ derart zu, dass für jedes $t \in (0, +\infty)$ die Zahl $r_\mu(t)$ gerade die momentane Ausfallrisiko von μ zum Zeitpunkt t zum Ausdruck bringt.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die Menge aller $\nu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, deren rechte Verteilungsfunktion $F_{\nu,r}$ in $(0, +\infty)$ differenzierbar ist und für welche die Überlebenswahrscheinlichkeit U_ν nicht verschwindet.

Definition 4.5.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter sei $t \in (0, +\infty)$ und es bezeichne $F'_{\mu,r}(t)$ den Wert der rechtsseitigen Ableitung von $F_{\mu,r}$ an der Stelle t. Dann heißt die Zahl

$$r_\mu(t) \coloneqq \frac{F'_{\mu,r}(t)}{U_\mu(t)}$$

die *Ausfallrate von μ zum Zeitpunkt t.*

Interpretation. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Sei $t \in (0, +\infty)$. Dann gilt

$$P\left(\{X \in (t, +\infty)\}\right) = P_X\left((t, +\infty)\right) = U_{P_X}(t),$$

also ist insbesondere $P\left(\{X \in (t, +\infty)\}\right) \neq 0$. Sei nun $\varepsilon \in (0, +\infty)$. Dann ist

$$\{X \in (t, t+\varepsilon)\} \cap \{X \in (t, +\infty)\} = \{X \in (t, t+\varepsilon)\}.$$

Weiterhin ist

$$P\left(\{X \in (t, t+\varepsilon)\}\right) = P_X\left((t, t+\varepsilon)\right) = F_{P_X,r}(t+\varepsilon) - F_{P_X,r}(t).$$

Damit ergibt sich dann

$$P\left(\{X \in (t, t+\varepsilon)\} \,|\, X \in (t, +\infty)\right) = \frac{P\left(\{X \in (t, t+\varepsilon)\}\right)}{P\left(X \in (t, +\infty)\right)} = \frac{F_{P_X,r}(t+\varepsilon) - F_{P_X,r}(t)}{U_{P_X}(t)}.$$

Damit erhält man

$$\begin{aligned} r_P(t) &= \frac{F'_{P_X}(t)}{U_{P_X}(t)} = \frac{1}{U_{P_X}(t)} \cdot \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \left(F_{P_X,r}(t+\varepsilon) - F_{P_X,r}(t)\right) \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot \frac{F_{P_X,r}(t+\varepsilon) - F_{P_X,r}(t)}{U_{P_X}(t)} \\ &= \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{1}{\varepsilon} \cdot P\left(\{X \in (t, t+\varepsilon)\} \,|\, X \in (t, +\infty)\right). \end{aligned}$$

Hieraus wird deutlich, dass die Zahl $r_{P_X}(t)$ als die momentane Ausfallrate des Maßes P_X zum Zeitpunkt t angesehen werden kann. ♣

Satz 4.5.1. *Sei $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty)}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit:*

(I) *Für alle* $t \in (0,+\infty)$ *gilt* $U_\mu(t) \neq 0$.

(II) μ *ist* $\lambda^{(1)}$*-stetig und besitzt eine in* $(0,+\infty)$ *stetige Dichteversion* f *bezüglich* $\lambda^{(1)}$.

Dann ist $\mu \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ *und für* $t \in (0,+\infty)$ *gilt*

$$r_\mu(t) = \frac{f(t)}{U_\mu(t)}.$$

BEWEIS. Sei $t \in (0,+\infty)$. Aufgrund von *(II)* folgt aus den Teilen *(b)* und *(c)* von Satz M.22.11.1, dass $F_{\mu,r}$ in t differenzierbar ist und $F'_{\mu,r}(t) = f(t)$ gilt. Mit *(I)* folgt $\mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ und

$$r_\mu(t) = \frac{F'_{\mu,r}(t)}{U_\mu(t)} = \frac{f(t)}{U_\mu(t)}.$$

□

Beispiel 4.5.3. Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann ist $E_\eta \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ und für $t \in [0,+\infty)$ ist $r_{E_\eta} = \eta$.

Die Konstanz der Ausfallrate der Exponentialverteilung ist der Grund dafür, dass diese Verteilung zur Modellierung von Lebensdauer von Objekten ohne Alterungsprozess herangezogen wird.

Beispiel 4.5.4. Seien $\alpha,\beta \in (0,+\infty)$ und bezeichne $W_{\alpha,\beta}$ die Weibull-Verteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt $W_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_{+,[0,+\infty),g}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ und für $t \in (0,+\infty)$ ist

$$r_{W_{\alpha,\beta}}(t) = \alpha \cdot \beta \cdot t^{\alpha-1}.$$

Das Monotonieverhalten wird damit allein durch den Parameter α bestimmt. Somit kann man zusammenfassen

$$r_{W_{\alpha,\beta}} \begin{cases} \text{ist monoton wachsend,} & \text{falls } \alpha > 1, \\ \text{ist konstant und es ist } W_{\alpha,\beta} = E_\beta, & \text{falls } \alpha = 1, \\ \text{ist monoton fallend,} & \text{falls } \alpha < 1. \end{cases}$$

Dies bedeutet im Einzelnen: Ist $\alpha > 1$, so liegt ein Alterungsprozess vor. Im Falle $\alpha < 1$ ist das durch $W_{\alpha,\beta}$ modellierte Objekt durch „Kinderkrankheiten" gekennzeichnet.

5. Numerische Charakteristika von Zufallsvariablen

In dem Kapitel 4 wurde herausgearbeitet, dass eine Zufallsvariable am vollständigsten durch ihre Verteilung beschrieben wird. In einer ganzen Reihe von Fällen, in denen nicht die vollständige Information über die Verteilung vorhanden ist, sondern man nur gewisse Kenntnisse über verschiedene aus der zugrunde liegenden Verteilung abgeleiteten numerischen Größen besitzt.

Das Ziel dieses Abschnittes besteht darin, derartige numerische Charakteristika von Zufallsvariablen vorzustellen. Mit der Einführung der ins Auge gefassten numerischen Charakteristika verbindet sich die Zielstellung, sich eine gewisse summarische Vorstellung von der Zufallsvariablen zu verschaffen. Mathematisch bedeutet dies, dass wir mit Hilfe gewisser Integrationsprozeduren reellen Zufallsvariablen Zahlenwerte zuordnen, die eine gewisse Grobinformation über deren Werte ausdrücken.

5.1. Erwartungswert

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $\left(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}_1}\right)$-Zufallsvariablen X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Jedem Elementarereignis $\omega \in \Omega$ entspricht der Wert $X(\omega)$. Es liegt in der Natur von Ereignissen mit zufälligem Ausgang, dass sich die Frage nach dem „mittleren" bzw. zu erwartenden Ausgang aufdrängt. Die Weiterführung dieses Gedankengangs führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin liege eine der beiden folgenden Situationen vor:

(I) Sei $X \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(II) Es sei X eine quasi-P-integrierbare Funktion aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Dann heißt die Größe

$$\mathrm{E}_P(X) := \int_\Omega X \mathrm{d}P$$

der *Erwartungswert von* X bezüglich P.

Bemerkung 5.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es liege eine der beiden nachfolgenden Situationen vor:

(I) Sei $X, Y \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(II) Es sei X, Y eine quasi-P-integrierbare Funktion aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Weiterhin sei $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt $\mathrm{E}_P(X) = \mathrm{E}_P(Y)$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Satz M.22.5.3. □

Bemerkung 5.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\left(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}_1}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Es gehören X^+, X^- und $|X|$ jeweils zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$\mathrm{E}_P(|X|) = \mathrm{E}_P\left(X^+\right) + \mathrm{E}_P\left(X^-\right).$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) X ist quasi-P-integrierbar.

(ii) Es ist $\inf\{\mathrm{E}_P(X^+), \mathrm{E}_P(X^-)\} < +\infty$.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) X ist P-integrierbar.

(iv) Es ist $\sup\{\mathrm{E}_P(X^+), \mathrm{E}_P(X^-)\} < +\infty$.

(d) Sei *(i)* erfüllt, dann ist

$$\mathrm{E}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(X^+\right) - \mathrm{E}_P\left(X^-\right). \qquad \clubsuit$$

Bemerkung 5.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $s \in (0, +\infty)$, $A \in \mathfrak{A}$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha \cdot 1_A \in \mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und es gilt

$$\mathrm{E}_P(\alpha \cdot 1_A) = \alpha \cdot P(A).$$

Wir zeigen nun, dass der Erwartungswert eine wahrscheinlichkeitstheoretische Größe ist, also durch die Verteilung der entsprechenden Zufallsvariablen bestimmt ist. $\clubsuit$

Satz 5.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $|X| \in \mathcal{E}^*(\Omega\cap, \mathfrak{A}\cap)\,\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\mathrm{E}_P(|X|) = \mathcal{M}_1(P_X).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *X ist P-integrierbar.*

(ii) *Es ist $\mathcal{M}_1(P_X) \in [0, +\infty)$.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\mathrm{E}_P(X) = M_1(P_X).$$

(d) *Sei X nichtnegativ. Dann gelten $1_{[0,+\infty)} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie*

$$\mathrm{E}_P(X) = \int_{\mathbb{R}} 1_{[0,+\infty)} \cdot \mathrm{id}_{\mathbb{R}} \mathrm{d}P_x.$$

Beweisskizze.

Zu *(a)*: Verwende Satz M.22.9.1.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)*.

Zu *(c)*: Verwende Satz M.22.9.2.

Zu *(d)*: Verwende *(c)* und Satz M.22.5.3. □

Folgerung 5.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie X, Y zwei $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = P_Y$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\{|X|, |Y|\} \subseteq \mathcal{E}^* (\Omega\cap, \mathfrak{A}\cap) \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\mathrm{E}_P (|X|) = \mathrm{E}_P (|Y|).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *X ist P-integrierbar.*

(ii) *Y ist P-integrierbar.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt auch* (ii) *und es ist*

$$\mathrm{E}_P (X) = \mathrm{E}_P (Y).$$

Folgerung 5.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie X und Y zwei $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = P_Y$. Weiter sei $g \in \mathcal{M}(\Omega', \mathfrak{A}'; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es sind $g \circ X$ und $g \circ Y$ jeweils $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit*

$$P_{g\circ X} = P_{g\circ Y}.$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $g \circ X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(ii) *Es ist $g \circ Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gelten* (ii) *und*

$$\mathrm{E}_P (g \circ X) = \mathrm{E}_P (g \circ Y).$$

Satz 5.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum, X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie $g \in \mathcal{M}(\Omega', \mathfrak{A}'; \mathbb{K})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $g \circ X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$.*

(b) *Es ist*

$$\mathrm{E}_P (|g \circ X|) = \mathrm{E}_{P_X} (|g|).$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *$g \circ X$ ist quasi-P-integrierbar.*

(ii) *g ist quasi-P-integrierbar.*

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *$g \circ X$ ist P-integrierbar.*

(iv) *g ist P_X-integrierbar.*

(e) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gelten* (ii) *und*

$$\mathrm{E}_P(g \circ X) = E_{P_X}(g).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz M.16.3.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung M.19.9 gilt $|g| \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Hieraus ergibt sich mittels Satz M.22.9.1 dann $|g \circ X| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$E_{P_X}(|g|) = \int\limits_{\Omega'} |g| \,\mathrm{d}P_X = \int\limits_{\Omega'} |g| \,\mathrm{d}X(P) = \int\limits_{\Omega} (|g| \circ X) \,\mathrm{d}P = \int\limits_{\Omega} |g \circ X| \,\mathrm{d}P = E_P(|g \circ X|).$$

Zu *(c)* bis *(e)*: Die Behauptungen sind eine unmittelbare Konsequenz aus Satz M.22.9.2. Der Beweis von *(e)* erfolgt analog zum Beweis von *(b)*. □

Wir geben nun eine interessante Formel für die Berechnung des Erwartungswertes einer $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen mit Werten in $\mathbb{N}$ an.

Satz 5.1.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable, welche nur Werte in $\mathbb{N}$ annimmt. Dann ist $X \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt*

$$\mathrm{E}_P(X) = \sum_{n=1}^{\infty} P(\{X \geq n\}).$$

Beweis. Aus der Wahl von X ergibt sich alles aus Teil *(b4)* von Satz M.22.3.3. □

Beispiel 5.1.1. Der zufällige Versuch bestehe im einmaligen Werfen eines homogenen Würfels. Die Zufallsvariable X möge die dabei erzielte Augenzahl beschreiben. Wir wollen deren Erwartungswert bestimmen. Der zugehörige Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist dabei durch $\Omega = \mathbb{N}_{1,6}$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie die diskrete Gleichverteilung $P := 1/6 \cdot \sum_{k=1}^{6} \varepsilon_{k,\mathfrak{A}}$ gegeben. Es ist dann $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ die gemäß $k \longmapsto k$ definierte Abbildung. Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ ist X dann trivialerweise $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar, also eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Unter Beachtung von Definition 5.1.1 sowie Beispiel M.22.2.4 folgt dann

$$\mathrm{E}_P(X) = \int\limits_{\Omega} X \mathrm{d}P = \int\limits_{\Omega} X \mathrm{d}\left(\frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} \varepsilon_{k,\mathfrak{A}}\right) = \sum_{k=1}^{6} \frac{1}{6} \cdot X(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} X(k) = \frac{1}{6}\sum_{k=1}^{6} k = \frac{7}{2}.$$

Wir wenden uns nun der Linearität der Erwartungswertbildung zu.

Satz 5.1.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gelten $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} \alpha_k X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \,\mathrm{E}_P(X_k).$$

Beweis. Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Teil *(d)* von Satz M.22.4.5. □

Satz 5.1.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $[0,+\infty]$ bzw. $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie*

$$\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n \alpha_k X_k\right) = \sum_{k=1}^n \alpha_k \,\mathrm{E}_P(X_k)\,.$$

Beweis. Dies folgt aus Definition 5.1.1 sowie aus den Teilen *(a)* und *(b)* von Satz M.22.2.2. □

Satz 5.1.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann gilt:*

(a) *Seien $X, Y \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\overline{\mathbb{R}}\right)$ so gewählt, dass $X+Y$ definiert ist. Dann ist $X+Y \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\overline{\mathbb{R}}\right)$ und es gilt*

$$\mathrm{E}_P(X+Y) = \mathrm{E}_P(X) + \mathrm{E}_P(Y)\,.$$

(b) *Seien $X \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\overline{\mathbb{R}}\right)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann ist $\alpha X \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\overline{\mathbb{R}}\right)$ und es gilt*

$$\mathrm{E}_P(\alpha X) = \alpha\,\mathrm{E}_P(X)\,.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Satz M.22.4.2.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Definition 5.1.1 und Teil *(b)* von Satz M.22.4.3. □

Definition 5.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$. Dann heißt X *zentriert*, falls $\mathrm{E}_P(X) = 0$ erfüllt ist.

Bezeichnung. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Es bezeichne $\mathscr{L}^1_0(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$ die Menge aller zentrierten Elemente aus $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$.

Bemerkung 5.1.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Dann ist $\mathscr{L}^1_0(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ ein im seminormierten Raum $\left(\mathscr{L}^1_0(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}), \mathcal{N}_{1,P,\mathbb{R}}\right)$ abgeschlossener linearer Teilraum des linearen Raumes $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$. ♣

Bemerkung 5.1.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$. Dann gilt $X - \mathrm{E}_P(X) \in \mathscr{L}^1_0(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$. ♣

5.2. Varianz und Kovarianz

Wir betrachten in diesem Abschnitt einen $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie P-integrierbare numerische Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Deren Erwartungswert $\mathrm{E}_P(X)$ bezüglich P lässt sich dann als eine charakteristische Zahl auffassen, um die die Zufallsvariable schwankt. Über die Größe dieser Schwankung gibt die Zahl $\mathrm{E}_P(X)$ jedoch keine Auskunft. Das Ziel des vorliegenden Abschnittes besteht darin, eine solche Maßzahl für die mittlere Abweichung von X von der Zahl $\mathrm{E}_P(X)$ anzubieten. Die genannte Fragestellung führt in Kombination mit der nachfolgenden Bemerkung zu einer naheliegenden Version einer solchen Maßzahl.

Bemerkung 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$. Dann ist $|X - \mathrm{E}_P(X)| \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{K})$. ♣

Bemerkung 5.2.1 führt nun auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. Dann heißt die Zahl $\mathrm{E}_P(|X - \mathrm{E}_P(X)|)$ die *mittlere Abweichung von* X bezüglich P.

Das eben eingeführte Streuungsmaß erwies sich jedoch für das praktische Rechnen zu unhandlich. Aus diesem Grunde wenden wir uns nun einem anderen Streuungsmaß zu, welches auf Carl Friedrich Gauss[1)] zurückgeht.

Bemerkung 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. Dann gelten $|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\mathrm{E}_P\left(|X - \mathrm{E}_P(X)|^2\right) \in [0, +\infty]$. ♣

Bemerkung 5.2.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$.

(a) Dann heißt die in $[0, +\infty]$ gelegene Größe

$$\mathrm{Var}_P(X) \coloneqq \mathrm{E}_P\left(|X - \mathrm{E}_P(X)|^2\right)$$

die *Varianz von* X bezüglich P.

(b) Die Größe $\sqrt{\mathrm{Var}_P(X)}$ wird als *Streuung von* X bezüglich P bezeichnet.

Bemerkung 5.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. Dann gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = \left[\mathcal{N}_{2,P}(X - \mathrm{E}_P(X))\right]^2,$$

wobei die Größe $\mathcal{N}_{2,P}$ in Bemerkung M.22.6.1 eingeführt wurde. ♣

Bemerkung 5.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie ferner $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es ist $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$.

(b) Es ist $|X - \mathrm{E}_P(X)| \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. ♣

Bemerkung 5.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Weiterhin seien $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$ so gewählt, dass $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}_P$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(Y).$$ ♣

[1)] Johann Carl Friedrich Gauss (*30.04.1777;†23.02.1855) war ein deutscher Mathematiker, Astronom, Geodät und Physiker. Mit 18 Jahren entwickelte er die Grundlagen der modernen Ausgleichsrechnung und der mathematischen Statistik (Methode kleinster Quadrate), mit der er 1800 die Wiederentdeckung des ersten Asteroiden Ceres ermöglichte. Auf Gauss gehen die nicht-euklidische Geometrie, zahlreiche mathematische Funktionen, Integralsätze, die Gausssche Glockenkurve, erste Lösungen für elliptische Integrale und die Gausssche Osterformel zurück.

Beweis. Wegen Bemerkung 5.2.2 ergibt sich

$$\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2, |Y - \mathrm{E}_P(Y)|^2\right\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Aus (1) folgt sogleich $\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2, |Y - \mathrm{E}_P(Y)|^2\right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.5 dann

$$\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq |Y - \mathrm{E}_P(Y)|^2\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von X und Y liefert Bemerkung 5.1.1 dann $\mathrm{E}_P(X) = \mathrm{E}_P(Y)$. Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq |Y - \mathrm{E}_P(Y)|^2\right\} &= \left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq |Y - \mathrm{E}_P(X)|^2\right\} \\ &\subseteq \{X - \mathrm{E}_P(X) \neq Y - \mathrm{E}_P(X)\} = \{X \neq Y\}.\end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (2), (3) und $\{X \neq Y\} \in \mathcal{N}_P$ liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 nun

$$\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq |Y - \mathrm{E}_P(Y)|^2\right\} \in \mathcal{N}_P. \tag{4}$$

Unter Beachtung von Definition 5.2.2 folgt wegen (1) und (4) mittels Teil *(a)* von Satz M.22.5.3 dann

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(Y). \qquad \square$$

Satz 5.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es gilt* $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$.

  (ii) *Es ist* $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(b) *Es ist*

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}_P(X)\right]^2.$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (iii) *Es ist* $\mathrm{Var}_P(X) = 0$.

  (iv) *Es ist* $\{X \neq \mathrm{E}_P(X)\} \in \mathcal{N}_P$.

Beweis. Es gilt

$$|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 = (X - \mathrm{E}_P(X))^2 = X^2 - 2 \cdot [\mathrm{E}_P(X)] \cdot X + [\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega. \tag{1}$$

Wegen $\Omega \in \mathfrak{A}$ gilt nach Bemerkung 5.1.3 dann

$$[\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{2}$$

und

$$\mathrm{E}_P\left([\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega\right) = [\mathrm{E}_P(X)]^2 P(\Omega) = [\mathrm{E}_P(X)]^2. \tag{3}$$

Sei

$$f \coloneqq -2 \cdot [\mathrm{E}_P(X)] \cdot X + [\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega. \tag{4}$$

Wegen $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, (2) und (4) folgt mittels Satz 5.1.4 dann

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{5}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (3) dann

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P(f) &= \mathrm{E}_P\left(-2 \cdot [\mathrm{E}_P(X)] \cdot X + [\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega\right) \\ &= \mathrm{E}_P\left(-2 \cdot [\mathrm{E}_P(X)] \cdot X\right) + \mathrm{E}_P\left([\mathrm{E}_P(X)]^2 \cdot 1_\Omega\right) \\ &= -2\,\mathrm{E}_P(X) \cdot \mathrm{E}_P(X) + [\mathrm{E}_P(X)]^2 = -[\mathrm{E}_P(X)]^2. \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen (1) und (4) gilt

$$|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 = X^2 + f. \tag{7}$$

Zu *(a)*: Dies folgt wegen (5) und (7) sogleich mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5.

Zu *(b)*: Sei zunächst $\mathrm{Var}_P(X) = +\infty$. Wegen *(a)* gilt dann $\mathrm{E}_P\left(X^2\right) = +\infty$. Somit ist

$$\mathrm{Var}_P(X) = +\infty = +\infty - [\mathrm{E}_P(X)]^2 = \mathrm{E}_P\left(X^2\right) - [\mathrm{E}_P(X)]^2.$$

Sei nun $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$. Wegen *(a)* ist dann $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, also

$$X^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{8}$$

Unter Verwendung von Definition 5.2.2, (7), (8) und (5) ergibt sich mittels Satz 5.1.4 bei zusätzlicher Beachtung von (6)

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_P(X) &= \mathrm{E}_P\left(|X - \mathrm{E}_P(X)|^2\right) = \mathrm{E}_P\left(X^2 + f\right) = \mathrm{E}_P(X)^2 + \mathrm{E}_P(f) \\ &= \mathrm{E}_P(X)^2 - [\mathrm{E}_P(X)]^2. \end{aligned}$$

Zu *(c)*: Wegen Bemerkung 5.2.2 gilt

$$|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega., \mathfrak{A}.) \tag{9}$$

Wegen Definition 5.2.2 und Definition 5.1.2 gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(|X - \mathrm{E}_P(X)|^2\right) = \int\limits_\Omega |X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \,\mathrm{d}P. \tag{10}$$

Wegen (9) und (10) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 dann, dass *(iii)* äquivalent ist zu:

(iii') Es ist $\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq 0\right\} \in \mathcal{N}_P$.

Hieraus sowie aus

$$\left\{|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \neq 0\right\} \neq \{X \neq \mathrm{E}_P(X)\}$$

folgt dann die Äquivalenz von *(iii)* und *(iv)*. □

Bemerkung 5.2.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gelten $1_A \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und

$$\mathrm{Var}_P(1_A) = P(A) - [P(A)]^2. \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen Bemerkung 5.1.4 gelten

$$1_A \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{E}_P(1_A) = P(A). \tag{2}$$

Wegen $(1_A)^2 = 1_A$ folgt aus (2) dann

$$\mathrm{E}_P\left((1_A)^2\right) = \mathrm{E}_P(1_A) = P(A). \tag{3}$$

Unter Beachtung von Teil *(b)* von Satz 5.2.1 sowie (2) und (3) folgt dann

$$\mathrm{Var}_P(1_A) = \mathrm{E}_P\left((1_A)^2\right) - [\mathrm{E}_P(1_A)]^2 = P(A) - [P(A)]^2. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann alles gezeigt. □

Wir zeigen nun, dass die Varianz eines $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ eine wahrscheinlichkeitstheoretische Größe ist.

Satz 5.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $P_X \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt*

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{var}(P_X).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathrm{Var}_P(X) = 0$.

(ii) *Es ist* $P_X = \varepsilon_{\mathrm{E}_P(X), \mathfrak{B}_1}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gelten nach Satz 5.1.1 dann

$$P_X \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \tag{1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P(X) = M_1(P_X). \tag{2}$$

Unter Beachtung von (1), Teil *(a)* von Satz M.23.4.2 sowie $|X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und Satz M.22.9.1 folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{var}(P_X) &= \int_{\mathbb{R}} [u - M_1(P_X)]^2 \, P_X(\mathrm{d}u) = \int_{\mathbb{R}} [u - \mathrm{E}_P(X)]^2 \, P_X(\mathrm{d}u) \\ &= \int_{\mathbb{R}} [u - \mathrm{E}_P(X)]^2 \, [X(P)](\mathrm{d}u) = \int_{\Omega} |X - \mathrm{E}_P(X)|^2 \, \mathrm{d}P \\ &= \mathrm{Var}_P(X), \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen (3) ist *(i)* äquivalent zu:

(i') Es ist $\operatorname{var}(P_X) = 0$.

Wegen Teil *(b)* von Satz M.23.4.4 ist *(i')* äquivalent zu

(ii') Es ist $P_X = \varepsilon_{M_1(P_X),\mathfrak{B}_1}$.

Wegen (2) sind *(ii')* und *(ii)* äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Folgerung 5.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $P_X = P_Y$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\operatorname{Var}_P(X) = \operatorname{Var}_P(Y).$$

Beweis. Dies folgt aus Teil *(a)* von Satz 5.2.2. □

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen der in Definition 5.2.1 eingeführten mittleren Abweichung und der Varianz.

Satz 5.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ und $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$. Dann gelten $|X - \mathrm{E}_P(X)| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$ sowie*

$$\mathrm{E}_P(|X - \mathrm{E}_P(X)|) \leq \sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}.$$

Beweis. Wegen Bemerkung 5.2.1 gilt

$$|X - \mathrm{E}_P(X)| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K}). \tag{1}$$

Wegen Definition 5.1.1 und Bemerkung M.22.6.1 gilt

$$\mathrm{E}_P(|X - \mathrm{E}_P(X)|) = \int_\Omega |X - \mathrm{E}_P(X)| \, \mathrm{d}P. \tag{2}$$

Wegen Definition 5.2.2 gilt

$$\operatorname{Var}_P(X) = \left[\mathcal{N}_{2,P}(X - \mathrm{E}_P(X))\right]^2. \tag{3}$$

Da $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum ist, gilt nach Teil *(a)* von Folgerung M.22.7.1 dann

$$\mathcal{N}_{1,P}(X - \mathrm{E}_P(X)) \leq \mathcal{N}_{2,P}(X - \mathrm{E}_P(X)). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (2), (4) und (3) folgt nun

$$\mathrm{E}_P(|X - \mathrm{E}_P(X)|) = \mathcal{N}_{1,P}(X - \mathrm{E}_P(X)) \leq \mathcal{N}_{2,P}(X - \mathrm{E}_P(X)) = \sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ist alles gezeigt. □

Satz 5.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $\sigma, a \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\sigma X + a \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\operatorname{Var}_P(\sigma X + a) = \sigma^2 \operatorname{Var}_P(X).$$

BEWEIS. Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt $a \cdot 1_\Omega \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Hieraus sowie aus der Wahl von X folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 dann

$$\sigma X + a = \sigma X + a \cdot 1_\Omega \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen (1) bzw. $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.2 dann, dass $P_{\sigma X+a}$bzw. P_X jeweils zu $\mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ gehört und dass die Beziehungen

$$\operatorname{Var}_P(\sigma X + a) = \operatorname{var}(P_{\sigma X+a}) \tag{2}$$

bzw.

$$\operatorname{Var}_P(X) = \operatorname{var}(P_X) \tag{3}$$

bestehen. Sei $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $u \longmapsto \sigma u + a$. Dann gilt

$$\sigma X + a = T_{\sigma,a} \circ X. \tag{4}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\sigma,a}$ dann $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar. Kombiniert man dies mit (4), so ergibt sich mittels Satz M.16.11 dann

$$P_{\sigma X+a} = (\sigma X + a)(P) = (T_{\sigma,a} \circ X)(P) = T_{\sigma,a}[X(P)] = T_{\sigma,a}(P_X). \tag{5}$$

Wegen Satz M.23.4.5 gilt

$$\operatorname{var}(T_{\sigma,a}(P_X)) = |\sigma|^2 \operatorname{var}(P_X) = \sigma^2 \operatorname{var}(P_X). \tag{6}$$

Unter Verwendung von (2), (5), (6) und (3) folgt nun

$$\operatorname{Var}_P(\sigma X + a) = \operatorname{var}(P_{\sigma X+a}) = \operatorname{var}(T_{\sigma,a}(P_X)) = \sigma^2 \operatorname{var}(P_X) = \sigma^2 \operatorname{Var}_P(X). \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung 5.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gelten $X - \operatorname{E}_P(X) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\operatorname{Var}_P(X - \operatorname{E}_P(X)) = \operatorname{Var}_P(X).$$

BEWEIS. Dies folgt sofort aus Satz 5.2.4, indem man $\sigma = 1$ und $a = -\operatorname{E}_P(X)$ wählt. □

Satz 5.2.4 legt es nahe, eine Unterklasse der in Definition5.1.2 eingeführten Klasse der zentrierten Elemente von $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ zu betrachten.

Definition 5.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann heißt X *standardisiert,* falls $\operatorname{E}_P(X) = 0$ und $\operatorname{Var}_P(X) = 1$ erfüllt sind.

Bemerkung 5.2.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ derart beschaffen, dass $\operatorname{Var}_P(X) \in (0, +\infty)$ erfüllt ist. Seien

$$\sigma := \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}} \qquad \text{und} \qquad a := \frac{-\operatorname{E}_P(X)}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X)}}.$$

Dann ist $\sigma X + a$ ein standardisiertes Element von $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und $P_{\sigma X+a}$ ist die Standardisierung von P_X. ♣

Wir wenden uns einer speziellen Extremalaufgabe für Funktionen aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ zu. Hierzu ist eine kleine Vorbereitung nötig.

Bemerkung 5.2.8. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\alpha \in \mathbb{R}$, $p \in (0, +\infty)$ und $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt $|X - \alpha|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Beweis. Wegen Beispiel M.16.3 gilt $1_\Omega \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt wegen $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ mittels Satz M.18.7 dann $X - \alpha = X - \alpha \cdot 1_\Omega \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.19.1 dann $|X - \alpha|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Satz 5.2.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\alpha \in \mathbb{R}$ und $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gelten:*

(a) *Es gelten $|X - \alpha|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\mathrm{E}_P\left(|X - \alpha|^2\right) = \mathrm{Var}_P(X) + [\mathrm{E}_P(X) - \alpha]^2.$$

(b) *Es gilt $\mathrm{Var}_P(X) \leq \mathrm{E}_P\left(|X - \alpha|^2\right)$.*

(c) *Sei $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(c1) *Es ist $X - \alpha \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(c2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(|X - \alpha|^2\right)$.*

(ii) *Es ist $\alpha = \mathrm{E}_P(X)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung 5.2.9 gilt

$$|X - \alpha|^2 \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Sei zunächst

$$X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Es gilt

$$|X - \alpha|^2 = (X - \alpha)^2 = X^2 - 2\alpha \cdot X + \alpha^2 \cdot 1_\Omega = |X|^2 - 2\alpha \cdot X + \alpha^2 \cdot 1_\Omega. \tag{3}$$

Wegen (2), der Wahl von X und Bemerkung 5.1.3 gilt

$$\left\{|X|^2, X, 1_\Omega\right\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) liefert Satz 5.1.4 dann

$$|X - \alpha|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{5}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von Bemerkung 5.1.3 zudem

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left(|X - \alpha|^2\right) &= \mathrm{E}_P\left(|X|^2 - 2\alpha \cdot X + \alpha^2 \cdot 1_\Omega\right) \\
&= \mathrm{E}_P\left(|X|^2\right) - 2\alpha\,\mathrm{E}_P(X) + \alpha^2 \cdot E_P(1_\Omega) \\
&= \mathrm{E}_P\left(|X|^2\right) - 2\alpha\,\mathrm{E}_P(X) + \alpha^2 \\
&= \left(\mathrm{E}_P\left(X^2\right) - [\mathrm{E}_P(X)]^2\right) + \left([\mathrm{E}_P(X)]^2 - 2\alpha \cdot \mathrm{E}_P(X) + \alpha^2\right) \\
&= \mathrm{E}_P(X) - [\mathrm{E}_P(X)]^2 + (\mathrm{E}_P(X) - \alpha)^2.
\end{aligned} \tag{6}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 5.2.1 gilt

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}_P(X)\right]^2. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(|X-\alpha|^2\right) = \mathrm{Var}_P(X) = \left[\mathrm{E}_P(X) - \alpha\right]^2. \tag{8}$$

Sei nun

$$X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \setminus \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wegen (9) liefert Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann

$$\mathrm{Var}_P(X) = +\infty. \tag{10}$$

Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{11}$$

Es gilt

$$X = (X-\alpha) + \alpha \cdot 1_\Omega. \tag{12}$$

Da $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ wegen Folgerung M.22.6.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (9), (11) und (12) dann

$$X - \alpha \notin \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{13}$$

Aus (1) und (13) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(|X-\alpha|^2\right) = +\infty. \tag{14}$$

Unter Verwendung von (14) und (10) folgt nun

$$\mathrm{E}_P\left(|X-\alpha|^2\right) = +\infty = +\infty + \left[\mathrm{E}_P(X) - \alpha\right]^2 = \mathrm{Var}_P(X) + \left[\mathrm{E}_P(X) - \alpha\right]^2. \tag{15}$$

Wegen (1), (2), (8), (9) und (15) dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen $\left[\mathrm{E}_P(X) - \alpha\right]^2 \in [0, +\infty)$ sogleich aus *(a)*.

Zu *(c1)*: Wegen (11) und der Wahl von X liefert Folgerung M.22.6.2 dann sofort $X - \alpha \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Zu *(c2)*: Aufgrund der Wahl von X gilt nach Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann $\mathrm{Var}_P(X) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen *(a)* dann sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Wir leiten nun eine für die weiteren Teile der Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutsame Ungleichung her. Mit deren Hilfe lässt sich die Wahrscheinlichkeit der Abweichung eine P-integrierbaren $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable von ihrem Erwartungswert abschätzen.

Satz 5.2.6 (Ungleichung von Čebyšev)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner seien $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie $\alpha, s \in (0, +\infty)$. Dann gelten $\{|X - \mathrm{E}_P(X)| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$ und weiter $|X - \mathrm{E}_P(X)|^s \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$P\left(\{|X - \mathrm{E}_P(X)| \geq \alpha\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^s} \int\limits_\Omega |X - \mathrm{E}_P(X)|^s \, \mathrm{d}P.$$

Insbesondere gilt

$$P\left(\left\{\left|X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}{\alpha^2}.$$

Beweis. Wegen Bemerkung 5.1.5 gilt

$$X - \mathrm{E}_P\left(X\right) \in \mathscr{L}_0^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$$

und somit also insbesondere

$$X - \mathrm{E}_P\left(X\right) \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right).$$

Hieraus folgt mittels Satz M.22.3.2 dann alle Behauptungen. □

Folgerung 5.2.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $X \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass $\mathrm{Var}_P\left(X\right) \in (0, +\infty)$ erfüllt ist. Weiter sei $\alpha \in (0, +\infty)$. Dann gelten*

$$\left\{\left|X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right| \geq \alpha \cdot \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}\right\} \in \mathfrak{A}$$

und

$$P\left(\left\{\left|X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right| \geq \alpha \cdot \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2}.$$

Wir zeigen anhand eines konkreten Beispiels, dass die Ungleichung von Satz 5.2.6 durchaus das Gleichheitszeichen erfüllt sein kann.

Beispiel 5.2.1. Sei $\alpha \in [1, +\infty)$ und

$$\mu \coloneqq \frac{1}{2\alpha^2}\left[\varepsilon_{-\alpha,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{\alpha,\mathfrak{B}_1}\right] + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann gilt:

(a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) Es gelten $M_1\left(\mu\right) = 0$ und $\mathrm{var}\left(\mu\right) = 1$.

(c) Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner sei X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = \mu$. Dann ist $X \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ und es gelten $\left\{\left|X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A}$ sowie

$$P\left(\left\{\left|X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) = \frac{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}{\alpha^2}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es ist

$$2 \cdot \frac{1}{2\alpha^2}\left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) = 1. \tag{1}$$

Wegen Teil *(a)* von Beispiel M.5.2 gilt

$$\left\{\varepsilon_{-\alpha,\mathfrak{B}_1}, \varepsilon_{\alpha,\mathfrak{B}_1}, \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\right\} \subseteq \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(b2)* von Satz M.6.2 dann

$$\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Wegen (3) und der Gestalt von μ liefert Teil *(c)* von Satz M.23.2.3 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* und der Gestalt von μ folgt mittels Teil *(a)* bzw. *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$M_2(\mu) = \left(|-\alpha|^2 + |\alpha|^2\right) \cdot \frac{1}{2\alpha^2} + |0|^2 \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 1 \tag{4}$$

bzw.

$$M_1(\mu) = (-\alpha + \alpha) \cdot \frac{1}{2\alpha^2} + 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 0. \tag{5}$$

Wegen *(a)* gilt insbesondere $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Daraus folgt mit Teil *(c)* von Satz M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (4) und (5) dann

$$\operatorname{var}(\mu) = M_2(\mu) - [M_1(\mu)]^2 = 1 - 0^2 = 1. \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Wegen *(a)* ist $M_1(\mu) \in [0, +\infty)$. Wegen $P_X = \mu$ ist dann $M_1(P_X) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.1.1 und (5) dann

$$\mathrm{E}_P(X) = M_1(P_X) = M_1(\mu) = 0 \tag{7}$$

sowie mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.2 und (6) weiterhin

$$\mathrm{Var}_P(X) = \operatorname{var}(P_X) = \operatorname{var}(\mu) = 1. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (7), (8) und der Definition von μ folgt dann

$$\begin{aligned}
&P(\{|X - \mathrm{E}_P(X)| \geq \alpha\}) \\
=&P(\{|X| \geq \alpha\}) = P\left(|X|^{-1}([\alpha, +\infty))\right) = P\left(X^{-1}((-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty))\right) \\
=&P_X((-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)) = \mu((-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)) \\
=&\left[\frac{1}{2\alpha^2} \cdot (\varepsilon_{-\alpha,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{\alpha,\mathfrak{B}_1}) + \left(1 - \frac{1}{\alpha^2}\right) \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\right]((-\infty, -\alpha] \cup [\alpha, +\infty)) \\
=&\frac{1}{2\alpha^2}(1+1) = \frac{1}{\alpha^2} \\
=&\frac{\mathrm{Var}_P(X)}{\alpha^2}.
\end{aligned}$$

□

Unser nächstes Ziel besteht darin, die Varianz einer Summe von integrierbaren Zufallsvariablen zu berechnen. Diese Zielstellung führt uns auf eine Begriffsbildung, welche in gewisser Weise *wechselseitige* Zusammenhänge zwischen integrierbaren Zufallsvariablen beschreibt. Hierzu benötigen wir noch eine gewisse Vorbereitung.

Lemma 5.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Es gilt dann:*

(a) *Seien $a, b \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(ii) *Es ist $(X - a)(Y - b) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gelten*

$$(X - \mathrm{E}_P(X))(Y - \mathrm{E}_P(Y)) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

und

$$\mathrm{E}_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) = \mathrm{E}_P(XY) - [\mathrm{E}_P(X)][\mathrm{E}_P(Y)].$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wir zeigen nun *(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*. Es gilt

$$(X - a)(Y - b) = XY - bX - aY + ab \cdot 1_\Omega. \tag{2}$$

Wegen (2), *(i)* und (1) liefert Folgerung M.22.6.2 dann *(ii)*.
Es folgt nun *(ii)* $\Rightarrow$ *(i)*. Es ist

$$XY = (X - a)(Y - b) + bX + aY - ab \cdot 1_\Omega. \tag{3}$$

Wegen (3), *(ii)* und (1) liefert Folgerung M.22.6.2 dann *(i)*.

Zu *(b)*: Wegen 5.2.1 gilt$[X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)] \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Unter Beachtung von (2), Satz 5.1.4 und Bemerkung 5.1.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) \\
=&\mathrm{E}_P(XY - [\mathrm{E}_P(Y)] \cdot X - [\mathrm{E}_P(X)] \cdot Y + [\mathrm{E}_P(X)][\mathrm{E}_P(Y)] \cdot 1_\Omega) \\
=&\mathrm{E}_P(XY) - [\mathrm{E}_P(Y)][\mathrm{E}_P(X)] - [\mathrm{E}_P(X)][\mathrm{E}_P(Y)] + [\mathrm{E}_P(Y)][\mathrm{E}_P(X)][\mathrm{E}_P(1_\Omega)] \\
=&\mathrm{E}_P(XY) - [\mathrm{E}_P(X)][\mathrm{E}_P(Y)].
\end{aligned}$$

□

Lemma 5.2.1 führt uns nun auf folgende Begriffsbildung.

Definition 5.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann wird die Zahl

$$\mathrm{Cov}_P(X, Y) \coloneqq E_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)])$$

als *Kovarianz von X und Y* bezeichnet.

Bemerkung 5.2.9. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und seien $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Seien nun $U, V \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})$ so gewählt, dass die Mengen $\{X \neq U\}, \{Y \neq V\} \in \mathcal{N}_P$. Dann gelten $\{U, V, UV\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie

$$\mathrm{Cov}_P(X, Y) = \mathrm{Cov}_P(U, V).$$

♣

Satz 5.2.7. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $X, Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $XY \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\mathrm{Cov}_P(X, Y) = \mathrm{E}_P(XY) - \mathrm{E}_P(X) \cdot \mathrm{E}_P(Y).$$

(b) *Es ist* $\mathrm{Cov}_P(X,Y) = \mathrm{Cov}_P(Y,X)$.

(c) *Es gelten* $\{X - \mathrm{E}_P(X), Y - \mathrm{E}_P(Y), (X - \mathrm{E}_P(X))(Y - \mathrm{E}_P(Y))\} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P([X - \mathrm{E}_P(X)], [Y - \mathrm{E}_P(Y)]) = \mathrm{Cov}_P(X,Y).$$

(d) *Es ist*

$$|\mathrm{Cov}_P(X,Y)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}_P(X)} \cdot \sqrt{\mathrm{Var}_P(Y)}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition 5.2.4 und Teil *(b)* aus Lemma 5.2.1.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus Definition 5.2.4.

Zu *(c)*: Aufgrund der Wahl von X und Y ergibt sich mittels Bemerkung 5.1.5 dann

$$X - \mathrm{E}_P(X) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{E}_P(X - \mathrm{E}_P(X)) = 0 \tag{2}$$

bzw.

$$Y - \mathrm{E}_P(Y) \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{3}$$

und

$$\mathrm{E}_P(Y - \mathrm{E}_P(Y)) = 0. \tag{4}$$

Wegen $X \cdot Y \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ liefert Teil 5.2.1 von Lemma 5.2.1 dann

$$[X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)] \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (1), (3) und (5) folgt mittels *(a)* sowie unter zusätzlicher Beachtung von (2) und (4) dann

$$\begin{aligned} &\mathrm{Cov}_P(X - \mathrm{E}_P(X), Y - \mathrm{E}_P(Y)) \\ =&\mathrm{E}_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) - [\mathrm{E}_P(X - \mathrm{E}_P(X))][\mathrm{E}_P(Y - \mathrm{E}_P(Y))] \\ =&\mathrm{E}_P([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) = \mathrm{Cov}_P(X,Y). \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen (1), (3), (5) und (6) ist dann *(c)* bewiesen.

Zu *(d)*: Wegen (5) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.4.4 dann

$$\left| \int_\Omega [X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)] \, \mathrm{d}P \right| \leq \int_\Omega |[X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]| \, \mathrm{d}P. \tag{7}$$

Nach Definition gilt

$$\mathcal{N}_{1,P}([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) = \int_\Omega |[X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]| \, \mathrm{d}P. \tag{8}$$

Aufgrund der Hölderschen Ungleichung gilt

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{1,P}([X - \mathrm{E}_P(X)][Y - \mathrm{E}_P(Y)]) \\ \leq&[\mathcal{N}_{2,P}(X - \mathrm{E}_P(X))][\mathcal{N}_{2,p}(Y - \mathrm{E}_P(Y))]. \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen Bemerkung 5.2.3 gelten

$$\mathcal{N}_{2,P}\left(X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right) = \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(X\right)} \tag{10}$$

und

$$\mathcal{N}_{2,P}\left(Y - \mathrm{E}_P\left(Y\right)\right) = \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(Y\right)}. \tag{11}$$

Unter Beachtung von (7) bis (11) folgt nun

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{Cov}_P\left(X,Y\right)\right| &= \left|\mathrm{E}_P\left(\left[X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right]\left[Y - \mathrm{E}_P\left(Y\right)\right]\right)\right| \\ &= \left|\int\limits_{\Omega}\left[X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right]\left[Y - \mathrm{E}_P\left(Y\right)\right]\mathrm{d}P\right| \\ &\leq \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}_P\left(Y\right)}.\end{aligned}$$

□

Wir führen nun eine weitere Begriffsbildung ein, welche auf die Wechselbeziehungen zwischen zwei integrierbaren Zufallsvariablen Bezug nimmt.

Definition 5.2.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass $XY \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ erfüllt ist. Dann heißen X und Y *unkorreliert bezüglich* P, falls

$$\mathrm{E}_P\left(XY\right) = \mathrm{E}_P\left(X\right)\mathrm{E}_P\left(Y\right).$$

Es folgen nun erste Charakterisierungen der Unkorreliertheit.

Lemma 5.2.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $X, Y \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass $XY \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ erfüllt ist. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *X und Y sind unkorreliert bezüglich P.*

(ii) *Y und X sind unkorreliert bezüglich P.*

(iii) *Es ist $\mathrm{Cov}_P\left(X,Y\right) = 0$.*

(iv) *$X - \mathrm{E}_P\left(X\right)$ und $Y - \mathrm{E}_P\left(Y\right)$ sind unkorreliert bezüglich P.*

Bemerkung 5.2.10. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $X, Y \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass X und Y unkorreliert bezüglich P sind. Weiter seien $U, V \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass $\{X \neq U\}$ und $\{Y \neq V\}$ jeweils zu $\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ gehören. Dann gehören $U, V \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ und sind unkorreliert bezüglich P. ♣

Satz 5.2.8 (Identität von Irenée-Jules Bienaymé[2]). *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ derart, dass für alle $k, l \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $k \neq l$ dann X_k und X_l unkorreliert bezüglich P sind. Dann gelten $\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ sowie*

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}_P\left(X_k\right).$$

[2] Irénée-Jules Bienaymé (*28.08.1796; †19.10.1878) war ein französischer Wahrscheinlichkeitstheoretiker und Statistiker. In Fortsetzung des Werks von Laplace, dessen Methode der kleinsten Quadrate er verallgemeinerte, leistete er Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie, Statistik und zu deren Anwendung auf Finanzrechnung, Demographie und Sozialstatistik.

Beweis. Wegen Satz 5.1.4 gelten

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right) \tag{1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(X_k\right). \tag{2}$$

Aus (2) folgt nun

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right). \tag{3}$$

Sei

$$I_n := \left\{(k,l) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n} \mid k \neq l\right\}. \tag{4}$$

Wegen $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ ist

$$I_n \neq \varnothing. \tag{5}$$

Aus (4) folgen weiterhin

$$\mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n} = \left\{(j,j) \mid j \in \mathbb{N}_{1,n}\right\} \cup I_n \tag{6}$$

und

$$\left\{(j,j) \mid j \in \mathbb{N}_{1,n}\right\} \cap I_n = \varnothing. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (3) bis (7) folgt nun

$$\begin{aligned}
\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2 &= \left[\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right]^2 \\
&= \left[\sum_{k=1}^{n} \left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right)\right]^2 \\
&= \sum_{k=1}^{n} \sum_{l=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\left[X_l - \mathrm{E}_P\left(X_l\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]^2 + \sum_{(k,l)\in I_n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_l\right)\right] \\
&= \sum_{k=1}^{n} \left|X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right|^2 + \sum_{(k,l)\in I_n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_l\right)\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Sei nun

$$(k,l) \in I_n. \tag{9}$$

Wegen (9) und (4) sind dann X_k und X_l unkorreliert bezüglich P. Somit gilt nach Lemma 5.2.2 dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(X_k, X_l\right) = 0 \tag{10}$$

sowie wegen Definition 5.2.5 weiterhin

$$X_k X_l \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right). \tag{11}$$

Wegen (11) folgt mittels Lemma 5.2.1 dann

$$[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,[X_l - \mathrm{E}_P(X_l)] \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{12}$$

Wegen Definition 5.2.4 und (10) gilt

$$\mathrm{E}_P([X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,[X_l - \mathrm{E}_P(X_l)]) = \mathrm{Cov}_P(X_k, X_l) = 0. \tag{13}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{14}$$

Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{15}$$

Es ist

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} X_k - \left[\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right] \cdot 1_\Omega. \tag{16}$$

Da $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P, ; R)$ nach Folgerung M.22.6.1 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (14) bis (16) dann

$$\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{17}$$

Aus (18) folgt nun

$$\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{18}$$

Aus (18) folgt

$$\sum_{k=1}^{n} |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2 = \left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2 \overset{(k,l)\in I_n}{=} [X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,[X_l - \mathrm{E}_P(X_l)]. \tag{19}$$

Wegen (19), (18), (9) und (12) folgt mit Satz 5.1.4 dann $\sum_{k=1}^{n} |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie bei zusätzlicher Betrachtung von (13) dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right) &= \mathrm{E}_P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2\right) \\
&= \sum_{(k,l)\in I_n} \mathrm{E}_P([X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,[X_l - \mathrm{E}_P(X_l)]) \\
&= \mathrm{E}_P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2\right) \\
&= \mathrm{E}_P\left(\left|\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right|^2\right).
\end{aligned} \tag{20}$$

Da $\left(|X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ nach Bemerkung 5.2.2 eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ ist, liefert Satz 5.1.5 dann $\sum_{k=1}^n |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right) = \sum_{k=1}^n \mathrm{E}_P\left(|X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right). \tag{21}$$

Unter Beachtung von (1), Definition 5.2.2, (20), (21) und nochmals Definition 5.2.2 folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) &= \mathrm{E}_P\left(\left|\sum_{k=1}^n X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)\right|^2\right)\\ &= \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n |X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^n \mathrm{E}_P\left(|X_k - \mathrm{E}_P(X_k)|^2\right)\\ &= \sum_{k=1}^n \mathrm{Var}_P(X_k).\end{aligned} \tag{22}$$

Unter Beachtung von (1) sei nun

$$\sum_{k=1}^n X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}) \setminus \mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}). \tag{23}$$

Wegen (23) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = +\infty. \tag{24}$$

Wegen Bemerkung 5.2.3 gilt

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \left[\mathcal{N}_{2,P}\left(\sum_{k=1}^n X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)\right)\right]^2. \tag{25}$$

Aus (24) und (25) folgt dann

$$\mathcal{N}_{2,P}\left(\sum_{k=1}^n X_k - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right)\right) = +\infty. \tag{26}$$

Aus (26) und (3) folgt dann

$$\mathcal{N}_{2,P}\left(\sum_{k=1}^n [X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\right) = +\infty. \tag{27}$$

Wegen der Minkowskischen Ungleichung folgt dann

$$\mathcal{N}_{2,P}\left(\sum_{k=1}^n [X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\right) \leq \sum_{k=1}^n \mathcal{N}_{2,P}(X_k - \mathrm{E}_P(X_k)). \tag{28}$$

Wegen (27) und (28) existiert ein $s \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $\mathcal{N}_{2,P}(X_s - \mathrm{E}_P(X_s)) = +\infty$. Da nach Bemerkung 5.2.3 gilt $\mathrm{Var}_P(X_s) = \mathcal{N}_{2,P}(X_s - \mathrm{E}_P(X_s))$, ist

$$\mathrm{Var}_P(X_s) = +\infty. \tag{29}$$

Aus (24) und (29) folgt dann

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = +\infty = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_P(X_k).$$

Damit ist dann alles gezeigt. □

Im restlichen Teil des Abschnitts betrachten wir nun jene Situation, in der die vorliegenden $(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$-Zufallsvariablen quadratisch P-integrierbar sind. Damit sind unsere Betrachtungen automatisch im Semiprähilbertraum $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle\right)$ über $\mathbb{R}$ angesiedelt. Dies bedeutet insbesondere, dass wir nun im verstärkten Maße auf Methoden der Funktionalanalysis zurückgreifen können.

Lemma 5.2.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $X, Y \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Es gilt dann:*

(a) *Es gilt $\{X, Y, X \cdot Y\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Es gelten $\{X - \mathrm{E}_P(X), Y - \mathrm{E}_P(Y)\} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(X, Y) = \langle X - \mathrm{E}_P(X), Y - \mathrm{E}_P(Y) \rangle_{P;\mathbb{R}}.$$

(c) *Es gilt $\mathrm{Cov}_P(X, X) = \mathrm{Var}_P(X)$.*

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es sind X und Y unkorreliert bezüglich P.*

(ii) *Es ist $\mathrm{Cov}_P(X, Y) = 0$.*

(iii) *Es sind $X - \mathrm{E}_P(X)$ und $Y - \mathrm{E}_P(Y)$ orthogonal in $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle_{P;\mathbb{R}}\right)$.*

Lemma 5.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a) *Es gehören 1_A und 1_B zu $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und es gelten $A \cap B \in \mathfrak{A}$ sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(1_A, 1_B) = P(A \cap B) - [P(A)][P(B)].$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es sind 1_A und 1_B unkorreliert bezüglich P.*

(ii) *Es sind A und B stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Wir zeigen nun eine Möglichkeit auf, wie man unter gewissen Umständen aus zwei gegebenen Zufallsvariablen aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ zwei neue Zufallsvariablen aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ konstruieren kann, welche unkorreliert bezüglich P sind.

Satz 5.2.9. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X, Y \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $\mathrm{E}_P(X^2) = \mathrm{E}_P(Y^2)$ sowie $\mathrm{E}_P(X) = \mathrm{E}_P(Y)$ erfüllt sind. Dann gilt sowohl*

$$\{X + Y, X - Y\} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

als auch

$$\mathrm{Cov}_P(X + Y, X - Y) = 0.$$

Satz 5.2.10. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ und $(\beta_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ bzw. $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ und $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ Folgen aus $\mathbb{R}$ bzw. $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann sind $\left\{\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_j Y_j\right\} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\operatorname{Cov}_P\left(\sum_{j=1}^s \alpha_j X_j, \sum_{k=1}^s \beta_j Y_j\right) = \sum_{j=1}^s \sum_{k=1}^s \alpha_j \beta_k \operatorname{Cov}_P(X_j, Y_k)$$

und

$$\operatorname{Var}_P\left(\sum_{j=1}^r \alpha_j X_j\right) = \sum_{j=1}^r \sum_{k=1}^r \alpha_j \alpha_k \operatorname{Cov}_P(X_j, X_k).$$

Folgerung 5.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann ist $(1_{A_k})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und es gelten $\sum_{k=1}^n 1_{A_k} \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^n 1_{A_k}\right) = \sum_{j=1}^n \sum_{k=1}^n \left[P(A_j \cap A_k) - P(A_j) P(A_k)\right].$$

Beispiel 5.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{S}_n$ die Menge aller Permutationen der Menge $\mathbb{N}_{1,n}$. Es sei weiter $\mathfrak{A}_n = \mathfrak{P}(\mathfrak{S}_n)$ und es bezeichne P_n die diskrete Gleichverteilung auf $\mathfrak{S}_n$. Weiter sei $X\colon \mathfrak{S}_n \longrightarrow \mathbb{R}$ diejenige Abbildung, welche jedem $\sigma \in \mathfrak{S}_n$ die Anzahl ihrer Fixpunkte zuordnet. Dann gelten $X \in \mathscr{L}^2(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R})$ sowie

$$E_{P_n}(X) = 1$$

bzw.

$$\operatorname{Var}_P(X) = \begin{cases} 0, & \text{falls } n = 1, \\ 1, & \text{falls } n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \end{cases}$$

Beweis. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Es sei

$$A_{n,j} \coloneqq \{\sigma \in \mathfrak{S}_n \mid f(j) = j\}. \tag{2}$$

Aus (2) und Wahl von $\mathfrak{A}_n$ folgt

$$A_{n,j} \in \mathfrak{A}_n. \tag{3}$$

Aus (2) folgt sogleich

$$\operatorname{card} A_{n,j} = (n-1)!. \tag{4}$$

Wegen (4) ist dann

$$P_n(A_{n,j}) = \frac{\operatorname{card} A_{n,j}}{\operatorname{card} \mathfrak{S}_n} = \frac{(n-1)!}{n!} = \frac{1}{n}. \tag{5}$$

Wegen (3) liefert Bemerkung 5.1.3 weiterhin

$$1_{A_{n,j}} \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R}) \tag{6}$$

sowie bei Beachtung von (5) weiterhin

$$\mathrm{E}_{P_n}\left(1_{A_{n,j}}\right) = P(A_{n,j}) = \frac{1}{n}. \tag{7}$$

Aus (1), (2) und der Definition von X folgt

$$X = \sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,j}}. \tag{8}$$

Wegen (8), (1) und (6) folgt mittels Satz 5.1.4 nun, dass $X \in \mathscr{L}^1(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R})$ sowie unter zusätzlicher Beachtung von (1) und (7) weiterhin

$$\mathrm{E}_{P_n}(X) = \mathrm{E}_{P_n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \mathrm{E}_{P_n}\left(1_{A_{n,j}}\right) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n} = 1. \tag{9}$$

Wegen (8), (1) und (3) gelten nach Folgerung 5.2.4 zudem

$$X \in \mathscr{L}^2(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n, P_n; \mathbb{R}) \tag{10}$$

und

$$\mathrm{Var}_{P_n}(X) = \mathrm{Var}_{P_n}\left(\sum_{j=1}^{n} 1_{A_{n,j}}\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left[P_n(A_{n,j} \cap A_{n,k}) - P_n(A_{n,j})\, P_n(A_{n,k})\right]. \tag{11}$$

Sei zunächst

$$n = 1. \tag{12}$$

Unter Beachtung von (12), (11), (1) und (5) folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_P(X) &= \sum_{j=1}^{1}\sum_{k=1}^{1} \left[P_1(A_{1,j} \cap A_{1,k}) - P(A_{1,j})\, P(A_{1,k})\right] \\ &= P_1(A_{1,1} \cap A_{1,1}) - P(A_{1,1})^2 \\ &= 1 - 1^2 \\ &= 0. \end{aligned} \tag{13}$$

Sei nun

$$n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \tag{14}$$

Es sei nun

$$I'_n = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}^2 \mid j = k\right\} \tag{15}$$

sowie

$$I''_n = \left\{(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}^2 \mid j \neq k\right\}. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt

$$\mathrm{card}\, I'_n = n \tag{17}$$

und

$$\mathrm{card}\, I''_n = n(n-1). \tag{18}$$

Weiterhin ist

$$I'_n \cup I''_n = \mathbb{N}_{1,n}^2 \tag{19}$$

sowie

$$I'_n \cap I''_n = \varnothing. \tag{20}$$

Sei

$$(j,k) \in I'_n. \tag{21}$$

Aus (21), (15), (1) und (5) folgt dann

$$\begin{aligned} P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P_n\left(A_{n,j}\right) P_n\left(A_{n,k}\right) &= P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P_n\left(A_{n,k}\right)^2 \\ &= P_n\left(A_{n,j}\right) - P_n\left(A_{n,j}\right)^2 \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n^2} \\ &= \frac{n-1}{n^2}. \end{aligned} \tag{22}$$

Sei nun

$$(j,k) \in I''_n. \tag{23}$$

Aus (23) und (16) folgt dann $j \neq k$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (2) dann

$$\operatorname{card}\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) = (n-2)!.$$

Hieraus folgt nun

$$P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) = \frac{\operatorname{card}\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right)}{\operatorname{card} \mathfrak{S}_n} = \frac{(n-2)!}{n!} = \frac{1}{(n-1) \cdot n}.$$

also wegen (1) und (5) dann

$$P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P\left(A_{n,j}\right) P\left(A_{n,k}\right) = \frac{1}{(n-1) \cdot n} - \frac{1}{n^2} = \frac{1}{(n-1)\, n^2}. \tag{24}$$

Unter Beachtung von (11) sowie (17) bis (24) folgt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_{P_n}(X) &= \sum_{j=1}^{n} \sum_{k=1}^{n} \left(P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P_n\left(A_{n,j}\right) P_n\left(A_{n,k}\right)\right) \\ &= \sum_{(j,k) \in I'_n} \left(P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P_n\left(A_{n,j}\right) P_n\left(A_{n,k}\right)\right) \\ &+ \sum_{(j,k) \in I''_n} \left(P_n\left(A_{n,j} \cap A_{n,k}\right) - P_n\left(A_{n,j}\right) P_n\left(A_{n,k}\right)\right) \\ &= \sum_{(j,k) \in I'_n} \frac{n-1}{n^2} + \sum_{(j,k) \in I''_n} \frac{1}{(n-1)\, n^2} \\ &= \operatorname{card} I'_n \cdot \frac{n-1}{n^2} + \operatorname{card} I''_n \cdot \frac{1}{(n-1)\, n^2} \\ &= n \cdot \frac{n-1}{n^2} + n\,(n-1) \cdot \frac{1}{(n-1)\, n^2} \\ &= \frac{n-1}{n} + \frac{1}{n} = 1. \end{aligned}$$

□

Interpretation (von Beispiel 5.2.2). Sei $n \in \mathbb{N}$. Wir betrachten eine Urne die n Kugeln enthält, welche mit den Nummern 1 bis n versehen sind. Der zufällige Versuch entstehe im zufälligen n-maligen willkürlichen Ziehen der Kugeln ohne Zurücklegen. Dann liefert der Wahrscheinlichkeitsraum $(\mathfrak{S}_n, \mathfrak{A}_n, P_n)$ aus Beispiel 5.2.1 ein adäquates Modell zu dessen Modellierung. Die Zufallsvariable X beschreibt dann gerade die Anzahl derjenigen Kugeln, deren Nummer mit der Nummer des Zuges, bei dem sie gezogen wurden, übereinstimmt. ♣

Wir modifizieren nun das soeben betrachtete Zufallsexperiment.

Beispiel 5.2.3. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es liege eine Urne vor, welche n Kugeln enthält, die mit den Nummern 1 bis n versehen sind. Der zufällige Versuch bestehe im n-maligen Ziehen einer Kugel mit Zurücklegen. Die Zufallsvariable X beschreibe der Anzahl der Kugeln, deren Nummer mit der Nummer des Zuges, in dem sie gezogen wurden, übereinstimmt. Setzen wir nun $\Omega \coloneqq \mathbb{N}_{1,n}^n$ sowie $\mathfrak{A} \coloneqq \mathfrak{P}(\Omega)$ und bezeichnen mit P die diskrete Gleichverteilung auf Ω,so stellt der Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein adäquates Modell zur Beschreibung des Experiments dar. Die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable X auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ nimmt dann Werte aus $\mathbb{Z}_{0,n}$ an. Somit ist also $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{0,n} \in \mathcal{N}_{P_X}$, denn

$$P_X(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{0,n}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}_{0,n})\right) = P(\varnothing) = 0.$$

Hieraus folgt mittels Lemma M.7.3 dann

$$P_X = \sum_{k=0}^{n} P_X(\{k\}) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{1}$$

Sei

$$k \in \mathbb{Z}_{0,n}. \tag{2}$$

Dann ist also $X^{-1}(\{k\})$ die Menge all jener Tupel $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \Omega$, für welche es genau k paarweise verschiedene Zahlen $l_1, \ldots, l_k \in \mathbb{N}_{1,n}$ derart gibt, dass für alle $s \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\omega_{l_s} = l_s$. Wir wollen nun $\operatorname{card} X^{-1}(\{k\})$ bestimmen. Zunächst gibt es $\binom{n}{k}$ Möglichkeiten, die Position der k Züge festzulegen, wo die Übereinstimmung der Nummer der Kugel mit der Nummer des Zuges, in dem sie gezogen wurde, vorliegt. Wir fixieren nun eine solche Konstellation. Dann ist in jedem der restlichen $n-k$ Züge die Wahl der Kugel so zu realisieren, dass deren Nummer verschieden von der Nummer des Zuges ist. Hierfür gibt es für jeden der restlichen $n-k$ Züge genau $n-1$ Möglichkeiten. Somit gilt

$$\operatorname{card} X^{-1}(\{k\}) = \binom{n}{k} (n-1)^{n-k}.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned} P_X(\{k\}) = P\left(X^{-1}(\{k\})\right) &= \frac{\operatorname{card} X^{-1}(\{k\})}{\operatorname{card} \Omega} = \frac{\binom{n}{k}(n-1)^{n-k}}{n^n} \\ &= \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(\frac{n-1}{n}\right)^{n-k} = \binom{n}{k}\left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k}. \end{aligned} \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann

$$P_X = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \cdot \left(\frac{1}{n}\right)^k \left(1-\frac{1}{n}\right)^{n-k} \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{4}$$

Wegen $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $\frac{1}{n} \in (0,1)$. Beachtet man dies, so folgt wenn $\beta_{n,\frac{1}{n}}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und $\frac{1}{n}$ bezeichnet, aus (4) dann

$$P_X = \beta_{n,\frac{1}{n}}. \tag{5}$$

Wegen Satz M.23.6.1 gelten

$$\beta_{n,\frac{1}{n}} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{6}$$

sowie

$$M_1\left(\beta_{n,\frac{1}{n}}\right) = n \cdot \frac{1}{n} = 1, \tag{7}$$

und

$$\operatorname{var}\left(\beta_{n,\frac{1}{n}}\right) = n \cdot \frac{1}{n}\left(1 - \frac{1}{n}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \tag{8}$$

Wegen (5) und (6) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.1.1 dann

$$X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wegen (9) folgt mittels Teil *(c)* von Satz 5.1.1 sowie (5) und (7) dann

$$\mathrm{E}_P(X) = M_1(P_X) = M_1\left(\beta_{n,\frac{1}{n}}\right) = 1. \tag{10}$$

Wegen (9) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.2 sowie (5) und (8) dann

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}(P_X) = \operatorname{var}\left(\beta_{n,\frac{1}{n}}\right) = 1 - \frac{1}{n}. \tag{11}$$

Vergleichen von (10) und (11) mit den Ergebnissen von Beispiel 5.2.3, welches dem Ziehen ohne Zurücklegen entspricht, dass die entsprechende Zufallsvariable denselben Erwartungswert besitzt, während die Varianz beim Ziehen mit Zurücklegen kleiner ist.

5.3. Momente von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen

Der vorliegende Abschnitt ist dem Studium der Potenzmomente von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen gewidmet. Die maßtheoretische Grundlage hierfür bildet der Abschnitt M.23.2.

Bemerkung 5.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbf{X}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Hierbei seien

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$$

sowie

$$(k_1, \ldots, k_m)^T \in \mathbb{N}_0^m.$$

Dann gelten $\prod_{j=1}^m (X_j)^{k_j} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $\left|\prod_{j=1}^m (X_j)^{k_j}\right| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Beweis. Sei $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $(u_1, \ldots, u_m)^T \longmapsto \prod_{j=1}^m (u_j)^{k_j}$. Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt dann

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\prod_{j=1}^m (X_j)^{k_j} = P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ \mathbf{X}. \tag{2}$$

Wegen (1), (2) und der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\mathbf{X}$ folgt mittels Satz M.16.3 dann

$$\prod_{j=1}^m (X_j)^{k_j} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt mittels Satz M.18.4 und Bemerkung M.19.9 dann

$$\left|\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\right| \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}).$$

□

Bemerkung 5.3.1 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung:

Definition 5.3.1. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, $m\in\mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Hierbei sei $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)^T$. Außerdem sei $(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}_0^m$. Dann heißt

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}) \coloneqq \mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\right|\right)$$

das $(k_1,\ldots,k_m)$-*te absolute Moment von* $\mathbf{X}$ *bezüglich* P und die Zahl $\sum_{j=1}^m k_j$ heißt dessen *Ordnung*. Falls $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})\in[0,+\infty)$ ist, so heißt

$$M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}) \coloneqq \mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\right)$$

das $(k_1,\ldots,k_m)$-*te Moment von* $\mathbf{X}$ *bezüglich* P und die Zahl $\sum_{j=1}^m k_j$ heißt dessen *Ordnung*.

Satz 5.3.1. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m\in\mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Hierbei sei $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)^T$. Außerdem sei $(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}) = \mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(P_{\mathbf{X}})$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(P_{\mathbf{X}})\in[0,+\infty)$.

(ii) *Es ist* $\prod_{j=1}^m (X_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$.

(c) *Sei (i) erfüllt. Dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}) = M_{(k_1,\ldots,k_m)}(P_{\mathbf{X}}).$$

(d) *Sei* (i) *erfüllt und sei für $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ zudem $X_j(\Omega)\subseteq[0,+\infty)$ erfüllt. Dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}) = \mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X}).$$

(e) *Sei $\mathbf{X}\in[\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})]^{m\times 1}$. Dann gelten*

$$\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$$

sowie

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})\in[0,+\infty).$$

Beweis.

Zu *(a)*-*(d)*: Diese Aussagen folgen aus den Teilen *(a)* bis *(d)* des Satzes M.23.2.2.

Zu *(e)*: Da $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ ist, liefert Teil *(b)* von Lemma M.21.3 dann

$$\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^\infty(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}).$$

Hieraus ergibt sich mittels Teil *(b)* von Folgerung M.22.6.3 dann

$$\prod_{j=1}^{m}(X_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}).$$

Hieraus folgt mittels *(b)* dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})\in[0,+\infty).$$ □

Folgerung 5.3.1. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m\in\mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit $P_{\mathbf{X}}=P_{\mathbf{Y}}$. Weiter sei $(k_1,\ldots,k_m)\in\mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})=\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{Y})$.*

(b) *Seien $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)^T$ und $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_m)^T$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\prod_{j=1}^m(X_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$.*

(ii) *Es ist $\prod_{j=1}^m(Y_j)^{k_j}\in\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$.*

(c) *Sei $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})\in[0,+\infty)$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{Y})\in[0,+\infty)$$

sowie

$$M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})=M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{Y}).$$

Unsere nachfolgenden Betrachtungen beschäftigen sich mit dem Fall $m=1$. Wir knüpfen an die Untersuchungen der früheren Abschnitte an, in denen das Studium der ersten beiden Momente von $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen vorgenommen wurde. Wir wenden uns jetzt $(\mathbb{R},\mathfrak{B})$-Zufallsvariablen mit endlichen Potenzmomenten höherer Ordnung zu.

Bemerkung 5.3.2. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, X eine $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und $a\in\mathbb{R}$, dann ist $X-a$ eine $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. ♣

Bemerkung 5.3.2 berechtigt uns in Verbindung mit Definition 5.3.1 zu folgender Begriffsbildung.

Definition 5.3.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Ferner seien $k\in\mathbb{N}_0$ und $a\in\mathbb{R}$. Dann heißt $\mathcal{M}_{k;P}(X-a)$ das *k-te a-zentrierte absolute Moment von X bezüglich P*. Falls $\mathcal{M}_{k;P}(X-a)\in[0,+\infty)$ erfüllt ist, heißt $M_{k;P}(X-a)$ das *k-te a-zentrierte Moment von X bezüglich P*.

Satz 5.3.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $k \in \mathbb{N}_0$, $a \in \mathbb{R}$ sowie X eine $\left(\mathbb{R}_1, \mathfrak{B}^1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $\mathcal{M}_{k;P}(X-a) \in [0, +\infty)$. Sei $l \in \mathbb{Z}_{0,k}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{l;P}(X-a) \in [0, +\infty).$$

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz 5.3.1 gilt für $s \in \mathbb{N}_0$ nun $\mathcal{M}_{s;P}(X-a) = \mathcal{M}(P_{X-a})$. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.23.3.1 dann $\mathcal{M}_{l;P}(X-a) \in [0, +\infty)$. □

Satz 5.3.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{M}_{k;P}(X) \in [0, +\infty)$.*

(ii) *Für alle $a \in \mathbb{R}$ gilt $\mathcal{M}_{k;P}(X-a) \in [0, +\infty)$.*

(iii) *Es gibt ein $a_0 \in \mathbb{R}$ mit $\mathcal{M}_{k;P}(X-a_0) \in [0, +\infty)$.*

(b) *Sei (i) erfüllt und sei $a \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\mathcal{M}_{k;P}(X-a) \in [0, +\infty)$ sowie*

$$\mathcal{M}_{k;P}(X-a) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} (-a)^{k-l} \cdot \mathcal{M}_{k;P}(X).$$

Beweis. Sei $a \in \mathbb{R}$ und $T_{1;-a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $u \longmapsto u-a$. Dann gilt $X-a = T_{1;-a} \circ X$. Hieraus folgt bei Beachtung der nach Teil *(b)* von Satz M.16.9 vorliegenden $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $T_{1;-a}$ mittels Satz M.16.11 dann

$$P_{X-a} = (X-a)(P) = (T_{1;-a} \circ X)(P) = T_{1;-a}[X(P)] = T_{1;-a}(P_X). \tag{1}$$

Wegen (1) erhält man durch Kombination von Satz 5.3.1 mit Satz M.23.3.2 dann alle Behauptungen. □

Wir nehmen nun eine Spezifizierung der in Definition 5.3.2 eingeführten Begriffsbildung vor.

Definition 5.3.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann heißt

$$\mathcal{M}_{k;P}(X - \mathrm{E}_P(X))$$

das *$k-$te zentrierte absolute Moment von X bezüglich P*. Sei nun noch $\mathcal{M}_{k;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) \in [0, +\infty)$, dann heißt

$$M_{k;P}(X - \mathrm{E}_P(X))$$

das *k-te zentrierte Moment von X bezüglich P*.

Bemerkung 5.3.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, dann gilt:

(a) Es gelten $\mathcal{M}_{1;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) \in [0, +\infty)$ und $M_{1;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) = 0$.

(b) Es ist $\mathcal{M}_{2;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) = \mathrm{Var}_P(X)$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gilt nach Satz 5.3.1 dann $\mathcal{M}_{1;P}(X) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.3.3 dann $\mathcal{M}_{1;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) \in [0, +\infty)$ sowie mittels Bemerkung 5.1.5 weiterhin $M_{1;P}(X - \mathrm{E}_P(X)) = \mathrm{E}_P(X - \mathrm{E}_P(X)) = 0$.

Zu *(b)*: Die Kombination von Definition 5.3.3 mit Definition 5.2.2 liefert *(b)*. □

5.4. Kovarianzmatrix von Zufallsvektoren

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Im Mittelpunkt der Betrachtungen steht dann das Studium von quadratisch P-integrierbaren $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen. Wir werden dann erkennen, dass deren Verteilungen gerade durch die Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße von zweiter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gegeben sind. Dies gibt uns die Möglichkeit, auf Abschnitt M.23.9 zurückzugreifen.

Ein wesentlicher Aspekt dieses Abschnittes besteht darin, bei fixiertem $m, n \in \mathbb{N}$ die Wechselbeziehungen zwischen Abbildungen $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ zu studieren. Wir nehmen zunächst ein matrizielle Erweiterung des Erwartungswertbegriffes vor.

Definition 5.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. Hierbei sei jetzt

$$\mathbf{Z} = (z_{j,k})_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}}.$$

Dann heißt die Matrix

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{Z}) := (\mathrm{E}_P(z_{j,k}))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}}$$

der *Erwartungswert von* $\mathbf{Z}$ *bezüglich* P.

Lemma 5.4.1. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Ferner seien* $p, q \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Dann gelten* $\mathbf{Z}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{q\times p}$ *und* $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}^T\right) = \left[\mathrm{E}_P(\mathbf{Z})\right]^T$.

Beweis. Kombiniere Definition 5.4.1 und Lemma M.23.9.1. □

Lemma 5.4.2. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien* $p, q \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) *Seien* $\mathbf{Y}, \mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Dann gelten* $\mathbf{Y} + \mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$ *und*

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} + \mathbf{Z}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) + \mathrm{E}_P(\mathbf{Z}).$$

(b) *Sei* $\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Weiter seien* $r, s \in \mathbb{N}$ *sowie* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r\times p}$ *und* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q\times s}$. *Dann gelten* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}\cdot\mathbf{B} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$ *und* $\mathrm{E}_P(\mathbf{A}\cdot\mathbf{Z}\cdot\mathbf{B}) = \mathbf{A}\cdot\mathrm{E}_P(\mathbf{Z})\cdot\mathbf{B}$.

Beweis. Kombiniere Definition 5.4.1 jeweils mit Teil *(a)* beziehungsweise Teil *(b)* von Lemma M.23.9.2. □

Bemerkung 5.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei $\pi_{m,j}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß der Vorschrift $(u_1, \ldots, u_m)^T \longmapsto u_j$. Dann gilt:

(a) $X_j = \pi_{m,j} \circ \mathbf{X}$.

(b) X_j ist eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\pi_{m,j}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung sowie

$$P_{X_j} = \pi_{m,j}(P_{\mathbf{X}}).$$ ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Folgt aus der Definition der beteiligten Größen.

Zu *(b)*: Dies folgt aus der Transitivität der Bildung von Bildmaßen. □

Satz 5.4.1. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $k \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T$ *eine* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$*. Dann gilt:*

(a) *Sei* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$*. Dann gilt* $\mathcal{M}_{k;P}(X_j) = \mathcal{M}_k\left(P_{X_j}\right)$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\left(\mathcal{M}_{k;P}(X_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $[0, +\infty)$.

(ii) *Es ist* $\left(\left(X_j\right)^k\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(iii) *Es ist* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^k(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(iv) *Es ist* $\left(P_{X_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,k}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(v) *Es ist* $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt:*

(c1) *Sei* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$*. Dann gilt* $M_{k;P}(X_j) = M_k\left(P_{X_j}\right)$.

(c2) *Sei* $s \in \mathbb{N}_{1,k}$*. Dann gilt* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(c3) *Es gelten* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *und* $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}})$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Satz 5.3.1.

***(i)* ⇔ *(ii)*:** Dies folgt aus Teil *(b)* von Satz 5.3.1.

***(ii)* ⇔ *(iii)*:** Dies folgt aus Definition M.22.6.1 und Folgerung M.22.4.1.

***(i)* ⇔ *(iv)*:** Das folgt aus *(a)*.

***(iv)* ⇔ *(v)*:** Wegen Teil *(b)* der Bemerkung 5.4.1 ist *(iv)* äquivalent zu

(iv') Es ist $\left(\pi_{m,j}(P_{\mathbf{X}})\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{1,k}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.

Da wegen Bemerkung M.23.5.4 dann *(iv')* und *(v)* äquivalent sind, gilt dies auch für *(iv)* und *(v)*.

Zu *(c1)*: Dies folgt aus Teil *(c)* von Satz 5.3.1.

Zu *(c2)*: Wegen *(i)* folgt aus *(b)* dann *(iii)*. Wegen $s \in \mathbb{N}_{1,k}$ und der Endlichkeit von P folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.22.7.3 dann *(c2)*.

Zu *(c3)*: Aus *(c2)* folgt sogleich $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Unter Beachtung von Definition 5.4.1, Teil *(b)* von Satz 5.1.1, Teil *(b)* von Bemerkung 5.4.1 und Teil *(a2)* von Satz M.23.9.1 folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \quad & \mathrm{E}_P\left((X_1, \ldots, X_m)^T\right) = \left(\mathrm{E}_P(X_1), \ldots, \mathrm{E}_P(X_m)\right)^T \\
= \quad & \left(M_1\left(P_{X_1}\right), \ldots, M_1\left(P_{X_m}\right)\right)^T \\
= \quad & \left(M_1\left(\pi_{m,1}(P_{\mathbf{X}})\right), \ldots, M_1\left(\pi_{m,m}(P_{\mathbf{X}})\right)\right)^T \\
= \quad & \left(\widetilde{M}_1(P_{\mathbf{X}}), \ldots, \widetilde{M}_m(P_{\mathbf{X}})\right)^T \\
= \quad & \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}).
\end{aligned}$$ □

Unter Beachtung von Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 und Definition 5.2.4 treffen wir nun folgende Begriffsbildung, welche das zentrale Objekt dieses Abschnittes darstellt.

Definition 5.4.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$ und $\mathbf{Y} = (Y_1, \ldots, Y_m)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times 1}$. Dann heißt die reelle $m \times n$-Matrix

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) := \left(\mathrm{Cov}_P(X_j, Y_k)\right)_{\substack{j \in \mathbb{N}_{1,m} \\ k \in \mathbb{N}_{1,n}}}$$

die Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *bezüglich* P.

Satz 5.4.2. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie* $m, n \in \mathbb{N}$. *Weiter seien* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$ *und* $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times 1}$. *Dann gilt:*

(a) *Es gelten* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$ *und* $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times 1}$.

(b) *Es gelten* $(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})) \cdot (\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}))^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times n}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right]\left[\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\right]^T\right).$$

(c) *Es ist* $\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times n}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^T\right) - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \cdot \left[\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\right]^T.$$

(d) *Es ist*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})\right]^T.$$

(e) *Es gelten* $\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$, $\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times 1}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}), \mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}).$$

(f) *Es gelten* $(\mathbf{X}, \mathbf{Y})^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{(m+n) \times 1}$ *und*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \\ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}) \end{bmatrix}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt sogleich aus Teil *(c3)* aus Satz 5.4.1.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 gilt

$$(X_j Y_k)_{\substack{j \in \mathbb{N}_{1,m} \\ k \in \mathbb{N}_{1,n}}} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times n}. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(b)* von Lemma 5.2.1 dann

$$\left(\left[X_j - \mathrm{E}_P(X_j)\right]\left[Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k)\right]\right)_{\substack{j \in \mathbb{N}_{1,m} \\ k \in \mathbb{N}_{1,n}}} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times n}. \tag{2}$$

Aus der Definition der beteiligten Matrizen folgt sogleich

$$([X_j - \mathrm{E}_P(X_j)][Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k)])_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} = [\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times n}. \tag{4}$$

Unter Verwendung von Definition 5.4.2, Definition 5.2.4, Definition 5.4.1 und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (\mathrm{Cov}_P(X_j, Y_k))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \\
&= (\mathrm{E}_P([X_j - \mathrm{E}_P(X_j)][Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k)]))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \\
&= \mathrm{E}_P\left(([X_j - \mathrm{E}_P(X_j)][Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k)])_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}}\right) \\
&= \mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T\right).
\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Es gelten

$$\mathbf{X}\mathbf{Y}^T = (X_j Y_k)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \tag{6}$$

sowie

$$[\mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T = \begin{pmatrix}\mathrm{E}_P(X_1)\\ \vdots \\ \mathrm{E}_P(X_m)\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\mathrm{E}_P(Y_1)\\ \vdots \\ \mathrm{E}_P(Y_n)\end{pmatrix}^T = ([\mathrm{E}_P(X_j)][\mathrm{E}_P(Y_k)])_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}}. \tag{7}$$

Wegen (1) und (6) gilt dann

$$\mathbf{X}\mathbf{Y}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times n}. \tag{8}$$

Unter Verwendung von Definition 5.4.2, Teil *(a)* von Satz 5.2.5, Definition 5.4.1, (7) und (6) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) &= (\mathrm{Cov}_P(X_j, Y_k))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \\
&= (\mathrm{E}_P(X_j Y_k) - [\mathrm{E}_P(X_j)][\mathrm{E}_P(Y_k)])_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \\
&= (\mathrm{E}_P(X_j Y_k))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} - ([\mathrm{E}_P(X_j)][\mathrm{E}_P(Y_k)])_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} \\
&= (\mathrm{E}_P(X_j Y_k))_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}} - [\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T \\
&= \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\mathbf{Y}^T\right) - [\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{Y} - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})]^T.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) ist dann *(c)* bewiesen.

Zu *(d)*: Dies folgt sogleich aus Definition 5.4.2 und Teil *(b)* von Satz 5.2.7.

Zu *(e)*: Dies folgt sogleich aus Definition 5.4.2 und Teil *(c)* von Satz 5.2.7.

Zu *(f)*: Dies folgt unmittelbar aus Definition 5.4.2. □

Satz 5.4.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_m)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$*. Dann gilt:*

(a) $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(b) $(X_j - \mathrm{E}_P(X_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *ist eine Folge aus* $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *und* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ *ist die* Gramsche *Matrix der Folge* $(X_j - \mathrm{E}_P(X_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *im* $\mathbb{R}$*-Semiprähilbertraum*

$$\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle\right).$$

(c) *Es ist* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ *positiv semidefinit, also* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$.

(d) *Es gelten* $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ *sowie* $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}})$ *und* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}})$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(c3)* von Satz 5.4.1.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Definition 5.4.2 sowie Teil *(b)* von Lemma 5.2.3.

Zu *(c)*: Das folgt wegen *(b)* sogleich aus Teil *(c)* von Satz M.23.8.1.

Zu *(d)*: Wegen Teil *(b)* bzw. *(c3)* von Satz 5.4.1 gilt

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}). \tag{2}$$

Es ist nun

$$(\mathrm{E}_P(X_1), \ldots, \mathrm{E}_P(X_m))^T = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) = \left(\widetilde{M}_1(P_{\mathbf{X}}), \ldots, \widetilde{M}_m(P_{\mathbf{X}})\right)^T. \tag{3}$$

Sei

$$(j, k) \in \mathbb{N}^2_{1,m}. \tag{4}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ folgt bei Beachtung von Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 und Teil *(b)* von Lemma 5.2.1 dann

$$[X_j - \mathrm{E}_P(X_j)]\,[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)] \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{5}$$

sowie wegen Definition 5.2.4 und Definition 5.1.1 zudem

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(X_j, X_k) &= \mathrm{E}_P([X_j - \mathrm{E}_P(X_j)]\,[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]) \\ &= \int_\Omega [X_j - \mathrm{E}_P(X_j)]\,[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,\mathrm{d}P.\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Beachtung von (3) ergibt sich

$$\begin{aligned}[X_j - \mathrm{E}_P(X_j)]\,[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)] &= \left[X_j - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[X_k - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right] \\ &= \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \circ \mathbf{X} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} \circ \mathbf{X} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right] \\ &= \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right]\right) \circ \mathbf{X}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(b3)* von Satz M.23.9.3 dann

$$\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right] \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, P_{\mathbf{X}}; \mathbb{R}) \tag{8}$$

sowie wegen Definition M.23.9.3 weiterhin

$$\mathrm{cov}_{jk}(P_{\mathbf{X}}) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right] \mathrm{d}P_{\mathbf{X}}. \tag{9}$$

Wegen (8) und der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\mathbf{X}$ folgt mittels des Transformationssatzes für Integrale, also Satz M.22.9.2, dann $\left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right]\right) \circ \mathbf{X} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie wegen $P_{\mathbf{X}} = P \circ \mathbf{X}^{-1}$ dann weiterhin

$$\begin{aligned}&\int\limits_{\Omega} \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right]\right) \circ \mathbf{X} \mathrm{d}P = \\ &\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(P_{\mathbf{X}})\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(P_{\mathbf{X}})\right]\right) \mathrm{d}P_{\mathbf{X}}.\end{aligned} \tag{10}$$

Unter Verwendung von (6), (7), (10) und (9) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(X_j, X_k) &= \int\limits_{\Omega} [X_j - \mathrm{E}_P(X_j)]\,[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)]\,\mathrm{d}P \\ &= \mathrm{cov}_{jk}(P_{\mathbf{X}}).\end{aligned} \tag{11}$$

Aus (4) und (11) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = (\mathrm{Cov}_P(X_j, X_k))_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} = (\mathrm{cov}_{jk}(P_{\mathbf{X}}))_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}}). \tag{12}$$

Aus (1), (2) und (12) folgt die Behauptung. □

Folgerung 5.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} = P_{\mathbf{Y}}$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(ii) *Es ist $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(iii) *Es ist $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann ist $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und es gilt $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{Y})$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Satz 5.4.1.

Zu *(b)*: Wegen *(i)* folgt aus *(a)* dann $Y \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie mittels Teil *(d)* von Satz 5.4.3 zudem

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}_P(P_{\mathbf{X}}) = \mathrm{cov}_P(P_{\mathbf{Y}}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{Y}).$$ □

Teil *(d)* von Satz 5.4.3 zeigt, dass das Studium des Raumes $\left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ auf das Studium der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ führt. Damit ist der Anschluss an Abschnitt M.23.9 hergestellt.

Satz 5.4.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

(ii) *Es ist* $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathrm{E}_P(\mathbf{X}), \mathfrak{B}_m}$.

Beweis. Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.3 gelten

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) \tag{2}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}}). \tag{3}$$

Wegen (3) ist *(i)* zu äquivalent zu:

(i') Es ist $\mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

Wegen (1) ist *(i')* nach Folgerung M.23.9.2 äquivalent zu

(ii') Es gilt $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}), \mathfrak{B}_m}$.

Wegen (2) sind nun *(i')* und *(ii')* äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Satz 5.4.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Sei V ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dann gelten $V \in \mathfrak{B}_m$ und $\mathbf{X}^{-1}(V) \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Es ist $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}))$ ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$ und es gelten*

$$\mathbf{X}^{-1}(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}))) \in \mathfrak{A}$$

sowie

$$P\left(\mathbf{X}^{-1}(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})))\right) = 1.$$

(c) *Sei V ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $P\left(\mathbf{X}^{-1}(V)\right) = 1$.

(ii) *Es ist* $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})) \subseteq V$.

(d) *Sei* $\det\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right]=0$. *Dann gilt:*

(d1) *Es ist* $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)\subsetneq\mathbb{R}^m$.

(d2) *Es ist* $\mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)=m-\mathrm{Rang}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right]$ *sowie* $\dim\mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)\in\mathbb{N}$.

(d3) *Sei* $s:=\dim\mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)$. *Unter Beachtung von* $s\in\mathbb{N}$ *bezeichne* $\left(\mathbf{u}_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *eine Basis von* $\mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)$. *Weiter sei*

$$\mathbf{A}:=\begin{pmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_s^T\end{pmatrix}.$$

Dann gelten

$$\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathbf{A}\left[\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]=\mathbf{A}\left[\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right]\right\}=\mathbf{X}^{-1}\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)$$

sowie

$$\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathbf{A}\left[\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]=\mathbf{A}\left[\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right]\right\}\in\mathfrak{A}$$

und

$$P\left(\left\{\omega\in\Omega\,|\,\mathbf{A}\left[\mathbf{X}\left(\omega\right)\right]=\mathbf{A}\left[\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right]\right\}\right)=1.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, gilt $\mathbb{R}^m\in\mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt in Verknüpfung mit Lemma M.23.9.7 dann

$$V\in\mathfrak{B}_m. \tag{1}$$

Aus (1) und der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\mathbf{X}$ folgt $\mathbf{X}^{-1}\left(V\right)\in\mathfrak{A}$.

Zu *(b)*: Da $\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^n$ ist, ist $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)$ ein affiner Unterraum von $\mathbb{R}^m$. Wegen Teil *(a)* von Satz 5.4.3 gelten

$$P_{\mathbf{X}}\in\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right) \tag{2}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)=\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(P_{\mathbf{X}}\right) \tag{3}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)=\mathrm{cov}\left(P_{\mathbf{X}}\right). \tag{4}$$

Wegen (2) liefert Satz M.23.9.8 dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(P_{\mathbf{X}}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{cov}\left(P_{\mathbf{X}}\right)\right)\in\mathfrak{B}_m \tag{5}$$

und

$$P_{\mathbf{X}}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(P_{\mathbf{X}}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{cov}\left(P_{\mathbf{X}}\right)\right)\right)=1. \tag{6}$$

Aus (3) bis (6) folgen nun

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)\in\mathfrak{B}_m \tag{7}$$

und

$$P\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right)\right)=1. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt wegen $P_{\mathbf{X}} = P \circ \mathbf{X}^{-1}$ dann

$$\mathbf{X}^{-1}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)\right) \tag{9}$$

und

$$P\left(\mathbf{X}^{-1}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)\right)\right) = 1. \tag{10}$$

Wegen (9) und (10) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Wegen $P_{\mathbf{X}} = P \circ \mathbf{X}^{-1}$ ist *(i)* äquivalent zu

(i') $P_{\mathbf{X}}(V) = 1$.

Wegen (2) ist *(i')* nach Satz M.23.9.9 äquivalent zu

(ii') $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}})\right) \subseteq V$.

Wegen (3) und (4) sind *(ii')* und *(ii)* äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*.

Zu *(d1)*: Wegen $\det\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right) = 0$ ist $\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right) \subsetneq \mathbb{R}^m$. Hieraus folgt dann $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right) \subsetneq \mathbb{R}^m$.

Zu *(d2)*: Dies ist ein bekanntes Resultat aus der linearen Algebra.

Zu *(d3)*: Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.2 gilt

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^T. \tag{11}$$

Es bezeichne $\left[\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)\right]^{\perp}$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)$ in $(\mathbb{R}^m, \langle .,. \rangle_2)$. Unter Beachtung von Satz M.23.9.9 und der Formel (11) gilt dann

$$\left[\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)\right]^{\perp} = \mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^T\right) = \mathcal{N}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right). \tag{12}$$

Wegen *(d1)* und (12) gilt nach Teil *(c)* von Lemma M.23.9.7 dann

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right) = \left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right\}. \tag{13}$$

Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{X}^{-1}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right)\right) &= \mathbf{X}^{-1}\left(\left\{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{z} = \mathbf{A}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right\}\right) \\ &= \left\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{A}\left[\mathbf{X}(\Omega)\right] = \mathbf{A}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right)\right\}. \end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (13) folgt aus (9) bzw. (10) dann $\left\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{A}\left[\mathbf{X}(\Omega)\right] = \mathbf{A}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right)\right\} \in \mathfrak{A}$ und

$$P\left(\left\{\omega \in \Omega \mid \mathbf{A}\left[\mathbf{X}(\Omega)\right] = \mathbf{A}\left(\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right)\right\}\right) = 1.$$

Damit ist alles gezeigt. □

Wir führen nun eine weitere Kenngröße ein, welche auf die Wechselbeziehungen zwischen zwei P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen eingeht.

Definition 5.4.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $X_1 \cdot X_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann heißt die Zahl

$$\mathrm{Cor}_P(X_1, X_2) := \begin{cases} \frac{\mathrm{Cov}_P(X_1,X_2)}{\sqrt{\mathrm{Var}_P(X_1)}\sqrt{\mathrm{Var}_P(X_2)}}, & \text{falls } \left[\mathrm{Var}_P(X_1)\right]\left[\mathrm{Var}_P(X_2)\right] \neq 0, \\ 0, & \text{sonst,} \end{cases}$$

der *Korrelationskoeffizient von X_1 und X_2 bezüglich P*.

Bemerkung 5.4.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $X_1 \cdot X_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathrm{Cor}_P(X_1, X_2) = \mathrm{Cor}_P(X_2, X_1)$.

(b) Es gelten

$$\{X_1 - \mathrm{E}_P(X_1), X_2 - \mathrm{E}_P(X_2), [X_1 - \mathrm{E}_P(X_1)][X_2 - \mathrm{E}_P(X_2)]\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

sowie

$$\mathrm{Cor}_P(X_1 - \mathrm{E}_P(X_1), X_2 - \mathrm{E}_P(X_2)) = \mathrm{Cor}_P(X_1, X_2). \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Satz 5.2.7 gilt $\mathrm{Cov}_P(X_1, X_2) = \mathrm{Cov}_P(X_2, X_1)$. Hieraus folgt mittels Definition 5.4.3 dann $\mathrm{Cor}_P(X_1, X_2) = \mathrm{Cor}_P(X_2, X_1)$.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(c)* von Satz 5.2.7 gelten

$$\{\{X_1 - \mathrm{E}_P(X_1), X_2 - \mathrm{E}_P(X_2), [X_1 - \mathrm{E}_P(X_1)][X_2 - \mathrm{E}_P(X_2)]\}\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \quad (1)$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P(X_1 - \mathrm{E}_P(X_1), X_2 - \mathrm{E}_P(X_2)) = \mathrm{Cov}_P(X_1, X_2). \quad (2)$$

Wegen Folgerung 5.2.2 gilt für

$$j \in \mathbb{N}_{1,2} \quad (3)$$

zudem

$$\mathrm{Var}_P(X_j - \mathrm{E}_P(X_1)) = \mathrm{Var}_P(X_j). \quad (4)$$

Wegen (1) bis (4) folgt aus Definition 5.4.3 dann

$$\mathrm{Cov}_P(X_1, \mathrm{E}_P(X_1), X_2 - E_P(X_2)) = \mathrm{Cov}_P(X_1, X_2). \quad (5)$$

Wegen (1) und (5) ist dann *(b)* bewiesen. □

Bemerkung 5.4.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $X_1 \cdot X_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ erfüllt ist, aber nicht X_1 *und* X_2 zu $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gehören. Dann ist

$$\mathrm{Cor}_P(X_1, X_2) = 0. \qquad \clubsuit$$

Beweis. Aufgrund der Wahl von X_1 und X_2 tritt wegen Teil *(a)* von Satz 5.2.1 mindestens einer der Fälle $\mathrm{Var}_P(X_1) = +\infty$ oder $\mathrm{Var}_P(X_2) = +\infty$ ein. Somit sind nur die Fälle $\mathrm{Var}_P(X_1) \cdot \mathrm{Var}_P(X_2) = 0$ oder $\mathrm{Var}_P(X_1)\,\mathrm{Var}_P(X_2) = +\infty$ möglich. Hieraus folgt dann die Behauptung. □

Wegen Bemerkung 5.4.3 betrachten wir beim weiteren Studium der in Definition 5.4.3 eingeführten Begriffsbildung nur den Fall $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Satz 5.4.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\{X_1, X_2, X_1 \cdot X_2\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Es gelten*

$$P_{\binom{X_1}{X_2}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2\right)$$

und

$$\mathrm{Cor}_P\left(X_1, X_2\right) = \mathrm{cor}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right).$$

(c) *Es gilt* $\mathrm{Cor}\left(X_1, X_2\right) = \mathrm{Cor}_P\left(X_2, X_1\right)$.

(d) *Es gilt* $\left|\mathrm{Cor}_P\left(X_1, X_2\right)\right| \leq 1$.

(e) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es sind* X_1 *und* X_2 *unkorreliert bezüglich* P.

(ii) *Es ist* $\mathrm{Cor}_P\left(X_1, X_2\right) = 0$.

(iii) *Es ist* $\mathrm{Cov}_P\left(X_1, X_2\right) = 0$.

(f) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iv) *Es ist* $\left|\mathrm{Cor}_P\left(X_1, X_2\right)\right| = 1$.

(v) *Es gelten* $\left[\mathrm{Var}_P\left(X_1\right)\right]\left[\mathrm{Var}_P\left(X_2\right)\right] \neq 0$ *und*

$$\det\left[\mathrm{Cov}_P\left(\binom{X_1}{X_2}, \binom{X_1}{X_2}\right)\right] = 0.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Lemma 5.2.3.

Zu *(b)*: Aufgrund der Wahl von X_1 und X_2 liefert Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$P_{\binom{X_1}{X_2}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2\right) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\binom{X_1}{X_2}, \binom{X_1}{X_2}\right) = \mathrm{cov}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right). \tag{2}$$

Unter Beachtung von Definition 5.4.2 und Teil *(c)* von Lemma 5.2.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_P\left(\binom{X_1}{X_2}, \binom{X_1}{X_2}\right) &= \begin{bmatrix} \mathrm{Cov}_P\left(X_1, X_1\right) & \mathrm{Cov}_P\left(X_1, X_2\right) \\ \mathrm{Cov}_P\left(X_2, X_1\right) & \mathrm{Cov}_P\left(X_2, X_2\right) \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathrm{Var}_P\left(X_1\right) & \mathrm{Cov}_P\left(X_1, X_2\right) \\ \mathrm{Cov}_P\left(X_2, X_1\right) & \mathrm{Var}_P\left(X_2\right) \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{3}$$

Sei nun

$$j \in \{1, 2\} \tag{4}$$

und $\pi_{2;j}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$\binom{u_1}{u_2} \longmapsto u_j. \tag{5}$$

Wegen (1) gelten nach Teil *(a)* von Satz M.23.9.6 nun $\pi_{2;j} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2; \mathbb{R}\right)$ und

$$\pi_{2;j}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right) \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Wegen Teil *(c)* von Satz M.23.9.6 gilt weiterhin

$$\operatorname{cov}_{jj}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right) = \operatorname{var}\left(\pi_{2;j}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right). \tag{6}$$

Der Vergleich der Diagonalelemente von Gleichung (2) erbringt unter zusätzlicher Beachtung von (3) und (6) dann

$$\operatorname{Var}_P(X_j) = \operatorname{cov}_{jj}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right) = \operatorname{var}\left(\pi_{2;j}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right). \tag{7}$$

Der Vergleich des $(1,2)$-Elements der Gleichung (2) erbringt

$$\operatorname{Cov}_P(X_1, X_2) = \operatorname{cov}_{12}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right). \tag{8}$$

Wegen (4), (7) und (8) ergibt sich unter Heranziehung von Definition 5.4.5 und Definition M.23.9.4 dann

$$\operatorname{Cor}_P(X_1, X_2) = \operatorname{cor}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right). \tag{9}$$

Wegen (1) und (9) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Bemerkung 5.4.2.

Zu *(d)*: Dies folgt wegen (9) sogleich aus Teil *(a)* von Satz M.23.9.7.

***(i)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*:** Dies folgt aus Teil *(d)* von Lemma 5.2.3.

***(ii)* $\Leftrightarrow$ *(iii)*:** Wegen (9) ist *(ii)* äquivalent zu

(ii') $\operatorname{cor}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right) = 0.$

Wegen (1) ist *(ii')* nach Teil *(b)* von Satz M.23.9.7 äquivalent zu

(iii') $\operatorname{cov}_{12}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right) = 0.$

Wegen (8) sind nun *(iii')* und *(iii)* äquivalent. Hieraus folgt nach unserer Herleitung die Äquivalenz von *(ii)* und *(iii)*.

Zu *(f)*: Wegen (9) ist *(iv)* äquivalent zu

(iv') $\left|\operatorname{cor}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right| = 1.$

Wegen (1) ist *(iv')* nach Teil *(c)* von Satz M.23.9.7 äquivalent zu

(v') Es gelten $\left[\operatorname{var}\left(\pi_{2;1}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right)\right]\left[\operatorname{var}\left(\pi_{2;2}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right)\right] \neq 0$ und $\det\left[\operatorname{cov}\left(P_{\binom{X_1}{X_2}}\right)\right] = 0.$

Wegen (4), (7) und (2) sind nun *(v')* und *(v)* äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(iv)* und *(v)*. □

Interpretation des Teils (f) *von Satz 5.4.6.* Seien $X_1, X_2 \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann ist die Bedingung *(v)* aus Satz 5.4.6 bei Beachtung der im Beweis (vgl. dort (3)) erhaltenen Formel

$$\operatorname{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\operatorname{Var}_P(X_1) & \operatorname{Cov}_P(X_1, X_2)\\ \operatorname{Cov}_P(X_2, X_1) & \operatorname{Var}_P(X_2)\end{pmatrix}$$

äquivalent dazu, dass

$$\mathrm{E}_P\left(\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right)+\mathcal{R}\left(\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix},\begin{pmatrix}X_1\\X_2\end{pmatrix}\right)\right)$$

eine Gerade des $\mathbb{R}^2$ ist, welche nicht zu einer der Koordinatenachsen parallel ist. Wegen Teil *(f)* von 5.4.6 und Teil *(d3)* von Satz 5.4.5 ist die Bedingung $|\mathrm{Cor}_P(X_1,X_2)|=1$ also äquivalent dazu, dass die Werte von $(X_1\ X_2)^T$ also P-fast überall auf einer Geraden des $\mathbb{R}^2$ liegen, welche nicht zu einer der Koordinatenachsen parallel ist. ♣

Bemerkung 5.4.4. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $X\in\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathrm{Var}_P(X)\in[0,+\infty)$.

(b) Es ist

$$\mathrm{Cor}_P(X,X)=\begin{cases}0, & \text{falls } \mathrm{Var}_P(X)=0,\\ 1, & \text{falls } \mathrm{Var}_P(X)\in(0,+\infty).\end{cases}$$ ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Satz 5.2.1.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(c)* von Lemma 5.2.3 gilt $\mathrm{Cov}_P(X,X)=\mathrm{Var}_P(X)$. Hieraus folgt in Verbindung mit Definition 5.4.3 im Falle $\mathrm{Var}_P(X)\in(0,+\infty)$ dann

$$\mathrm{Cor}_P(X,X)=\frac{\mathrm{Cov}_P(X,X)}{\sqrt{\mathrm{Var}_P(X)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}_P(X)}}=\frac{\mathrm{Var}_P(X)}{\mathrm{Var}_P(X)}=1.$$

Im Falle $\mathrm{Var}_P(X)=0$ liefert Definition 5.4.3 sogleich $\mathrm{Cor}_P(X,X)=0$. □

Unter Beachtung von Teil *(a)* von Satz 5.4.6 und Definition 5.4.3 treffen wir nun folgende Begriffsbildung:

Definition 5.4.4. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m,n\in\mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X}=(X_1,\ldots,X_m)^T\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times1}$ sowie $\mathbf{Y}=(Y_1,\ldots,Y_n)^T\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times1}$. Dann heißt die reelle $m\times n$-Matrix

$$\mathrm{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}):=\left(\mathrm{Cor}_P(X_j,Y_k)\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,m}\\k\in\mathbb{N}_{1,n}}}$$

die *Korrelationsmatrix von* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *bezüglich* P.

Satz 5.4.7. *Seien* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie* $m,n\in\mathbb{N}$. *Weiter seien* $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times1}$ *sowie* $\mathbf{Y}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times1}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathrm{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})=\left[\mathrm{Cor}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\right]^T$

(b) *Es sind* $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times1}$ *und* $\mathbf{Y}\in\left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times1}$.

(c) *Es gelten* $\mathbf{X}-\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times1}$, $\mathbf{Y}-\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times1}$ *und*

$$\mathrm{Cor}_P(\mathbf{X}-\mathrm{E}_P(\mathbf{X}),\mathbf{Y}-\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}))=\mathrm{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

(d) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *bzw.* $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ *werde unter Beachtung von* $\operatorname{Var}_P(X_j) \in [0,+\infty)$ *bzw.* $\operatorname{Var}_P(Y_k) \in [0,+\infty)$ *die Setzung*

$$a_j := \begin{cases} 0, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(X_j) = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X_j)}}, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(X_j) \in (0,+\infty). \end{cases}$$

bzw.

$$b_k := \begin{cases} 0, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(Y_k) = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(Y_k)}}, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(Y_k) \in (0,+\infty). \end{cases}$$

vorgenommen. Weiter seien $\mathbf{A} := \operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_m)$ *bzw.* $\mathbf{B} := \operatorname{diag}(b_1,\ldots,b_n)$. *Dann gilt*

$$\operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathbf{A} \cdot \operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \cdot \mathbf{B}.$$

(e) *Es gelten* $\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{(m+n)\times 1}$ *sowie*

$$\operatorname{Cor}_P\left(\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}},\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}}\right) = \begin{bmatrix} \operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) & \operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}) \\ \operatorname{Cor}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) & \operatorname{Cor}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) \end{bmatrix}.$$

Satz 5.4.8. *Seien* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{X} = (X_1,\ldots,X_m)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(b) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ *werden unter Beachtung von* $\operatorname{Var}_P(X_j) \in [0,+\infty)$ *die Setzung*

$$\widetilde{X}_j := \begin{cases} 1_\varnothing, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(X_1) = 0, \\ \frac{1}{\sqrt{\operatorname{Var}_P(X_j)}}, & \text{falls } \operatorname{Var}_P(X_j) \in (0,+\infty) \end{cases}$$

vorgenommen. Dann ist $\left(\widetilde{X}_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *eine Folge aus* $\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ *und es ist* $\operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})$ *die* Gramsche *Matrix der Folge* $\left(\widetilde{X}_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *im* $\mathbb{R}$*-Semiprähilbertraum*

$$\left(\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}),\langle .,. \rangle_{P,\mathbb{R}}\right).$$

(c) *Es ist* $\operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$.

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{Cor}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

(ii) *Es ist* $\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

Satz 5.4.9. *Seien* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie* $m,n,r,s \in \mathbb{N}$. *Es seien* $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ *bzw.* $(\mathbf{b}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *Folgen aus* $\mathbb{R}^m$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *sowie* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ *und* $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *Folgen aus* $\mathbb{N}$. *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,r}$ *bzw.* $k \in \mathbb{N}_{1,s}$ *seien* $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{n\times m_j}$ *bzw.* $\mathbf{B}_k \in \mathbb{R}^{n\times n_k}$ *sowie* $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m_j\times 1}$ *und* $\mathbf{Y}_k \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n_k\times 1}$. *Weiterhin seien*

$$\widetilde{\mathbf{X}} := \sum_{j=1}^{r} (\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j + \mathbf{a}_j) \quad \text{und} \quad \widetilde{\mathbf{Y}} := \sum_{k=1}^{s} (\mathbf{B}_k\mathbf{Y}_k + \mathbf{b}_k).$$

Dann gelten $\widetilde{\mathbf{X}} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$, $\widetilde{\mathbf{Y}} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\right) = \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} \mathbf{A}_j \left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j, \mathbf{Y}_k\right)\right] \cdot \mathbf{B}_k^T.$$

Beweis. Wegen Folgerung M.22.6.2 gilt:

(I) Es ist $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

Wegen *(I)* folgt sogleich

$$\widetilde{\mathbf{X}} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1} \tag{1}$$

und

$$\widetilde{\mathbf{Y}} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) liefert Teil *(f)* von Satz 5.4.2 dann

$$\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{(m+n)\times 1}. \tag{3}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{X}}\right) & \mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\right)\\ \mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{Y}}, \widetilde{\mathbf{X}}\right) & \mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{Y}}, \widetilde{\mathbf{Y}}\right)\end{pmatrix}. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4) werden wir nun die behauptete Formel für $\mathrm{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}}, \widetilde{\mathbf{X}}\right)$ aus einen entsprechender Formel für

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\right)$$

herleiten. Hierzu setzen wir zunächst

$$\mathbf{X} := \begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_r\end{pmatrix} \tag{5}$$

und

$$\mathbf{Y} := \begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_s\end{pmatrix} \tag{6}$$

sowie

$$\widetilde{m} := \sum_{j=1}^{r} m_j \tag{7}$$

und

$$\widetilde{n} := \sum_{k=1}^{s} n_k. \tag{8}$$

Wegen (5) bis (8) sowie der Wahl der Folgen $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ und $(\mathbf{Y}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ ergibt sich mittels *(I)* dann

$$\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{(\widetilde{m}+\widetilde{n})\times 1}. \tag{9}$$

Wegen (9) liefert Teil *(f)* von Satz 5.4.2 dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\\ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\end{pmatrix}. \tag{10}$$

Wegen (3) und (9) folgen mittels Teil *(d)* von Satz 5.4.3 nun

$$P_{\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}}\in\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^{m+n},\mathfrak{B}_{m+n}\right) \tag{11}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{cov}\left(P_{\begin{pmatrix}\widetilde{\mathbf{X}}\\ \widetilde{\mathbf{Y}}\end{pmatrix}}\right) \tag{12}$$

bzw.

$$P_{\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}}\in\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^{\widetilde{m}+\widetilde{n}},\mathfrak{B}_{\widetilde{m}+\widetilde{n}}\right) \tag{13}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix},\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}\right)=\mathrm{cov}\left(P_{\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}}\right). \tag{14}$$

Wir zeigen nun, dass sich $\left(\widetilde{\mathbf{X}}^T,\widetilde{\mathbf{Y}}^T\right)^T$ durch eine affine Abbildung aus $\left(\mathbf{X}^T,\mathbf{Y}^T\right)^T$ gewinnen lässt. Hierzu betrachten wir die Matrizen

$$\mathbf{A}:=(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_r) \tag{15}$$

und

$$\mathbf{a}:=\sum_{j=1}^{r}\mathbf{a}_j \tag{16}$$

sowie

$$\mathbf{B}=(\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_s) \tag{17}$$

und

$$\mathbf{b}:=\sum_{k=1}^{s}\mathbf{b}_k. \tag{18}$$

Unter Beachtung von (16), (15), (5), (6) und (8) bzw. (18), (17), (6), (5) und (7) folgt dann

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{X}}&=\sum_{j=1}^{r}\left[\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j+\mathbf{a}_j\right]=\sum_{j=1}^{r}\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j+\sum_{j=1}^{r}\mathbf{a}_j=(\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_r)\begin{pmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_r\end{pmatrix}+\sum_{j=1}^{r}\mathbf{a}_j\\ &=\mathbf{A}\mathbf{X}+\mathbf{a}=\left(\mathbf{A},\mathbf{O}_{m\times\widetilde{n}}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}+\mathbf{a}\end{aligned} \tag{19}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathbf{Y}}&=\sum_{k=1}^{s}\left[\mathbf{B}_k\mathbf{Y}_k+\mathbf{b}_k\right]=\sum_{k=1}^{s}\mathbf{B}_k\mathbf{Y}_k+\sum_{k=1}^{s}\mathbf{b}_k=(\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_s)\begin{pmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_s\end{pmatrix}+\sum_{k=1}^{s}\mathbf{b}_k\\ &=\mathbf{B}\mathbf{Y}+\mathbf{b}=\left(\mathbf{O}_{n\times\widetilde{m}},\mathbf{B}\right)\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}+\mathbf{b}.\end{aligned} \tag{20}$$

Seien

$$\mathbf{C} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{m\times\widetilde{n}} \\ \mathbf{O}_{n\times\widetilde{m}} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \tag{21}$$

und

$$\mathbf{c} := \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \tag{22}$$

Unter Beachtung von (14) bis (22) folgt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{m\times\widetilde{n}} \\ \mathbf{O}_{n\times\widetilde{m}} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix} = \mathbf{C} \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix} + \mathbf{c} = T_{\mathbf{C},\mathbf{c}} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}. \tag{23}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{C},\mathbf{c}}$ eine $\mathfrak{B}_{\widetilde{m}+\widetilde{n}}$-$\mathfrak{B}_{m+n}$-messbare Abbildung. Beachtet man dies sowie (23), so ergibt sich aufgrund der Transitivität der Bildung von Bildmaßen (vgl. Satz M.16.11) dann

$$P_{\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{smallmatrix}\right)} = \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}(P) = \left[T_{\mathbf{C},\mathbf{c}} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}\right](P) = T_{\mathbf{C},\mathbf{c}} \left[\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}(P)\right] = T_{\mathbf{C},\mathbf{c}} \left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{smallmatrix}\right)}\right). \tag{24}$$

Wegen (13) und (24) liefert Teil *(c)* von Satz M.23.9.11 dann

$$\operatorname{cov}\left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{smallmatrix}\right)}\right) = \operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{C},\mathbf{c}}\left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{smallmatrix}\right)}\right)\right) = C \cdot \operatorname{cov}\left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{smallmatrix}\right)}\right) \cdot C^T. \tag{25}$$

Unter Verwendung von (4), (12), (25), (14), (21) und (10) folgt dann

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \operatorname{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{X}}\right) & \operatorname{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{Y}}\right) \\ \operatorname{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{Y}},\widetilde{\mathbf{X}}\right) & \operatorname{Cov}_P\left(\widetilde{\mathbf{Y}},\widetilde{\mathbf{Y}}\right) \end{pmatrix} = \operatorname{Cov}_P\left(\begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{pmatrix}\right) = \operatorname{cov}\left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \widetilde{\mathbf{X}} \\ \widetilde{\mathbf{Y}} \end{smallmatrix}\right)}\right) \\ =& C \cdot \operatorname{cov}\left(P_{\left(\begin{smallmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{smallmatrix}\right)}\right) \cdot C^T = C \cdot \left[\operatorname{Cov}_P\left(\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}\right)\right] \cdot C^T \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{m\times\widetilde{n}} \\ \mathbf{O}_{n\times\widetilde{m}} & \mathbf{B} \end{pmatrix} \left[\operatorname{Cov}_P\left(\begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{X} \\ \mathbf{Y} \end{pmatrix}\right)\right] \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{O}_{m\times\widetilde{n}} \\ \mathbf{O}_{n\times\widetilde{m}} & \mathbf{B} \end{pmatrix}^T \\ =& \begin{pmatrix} \mathbf{A}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\mathbf{A}^T & \mathbf{A}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{B}^T \\ \mathbf{B}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\mathbf{A}^T & \mathbf{B}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\mathbf{B}^T \end{pmatrix}. \end{aligned} \tag{26}$$

Unter Verwendung von (5), (6) und Definition 5.4.2 ergibt sich

$$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \operatorname{Cov}_P\left(\begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_r \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{Y}_s \end{pmatrix}\right) = \left(\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,r} \\ k\in\mathbb{N}_{1,s}}}. \tag{27}$$

Unter Beachtung von (26), (15), (27) und (17) folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{Cov}_p\left(\widetilde{\mathbf{X}},\widetilde{\mathbf{Y}}\right) &= \mathbf{A}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\mathbf{B}^T\\ &= (\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_r)\left(\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,r}\\k\in\mathbb{N}_{1,s}}}(\mathbf{B}_1,\ldots,\mathbf{B}_s)^T\\ &= (\mathbf{A}_1,\ldots,\mathbf{A}_r)\left(\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,r}\\k\in\mathbb{N}_{1,s}}}\begin{pmatrix}\mathbf{B}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{B}_s^T\end{pmatrix}\\ &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s}\mathbf{A}_j\left[\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{Y}_k)\right]\mathbf{B}_k^T.\end{aligned} \tag{28}$$

Wegen (1), (2) und (28) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung 5.4.2. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m,r\in\mathbb{N}$. Es sei $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ bzw. $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{N}$. Für $j\in\mathbb{N}_{1,r}$ seien $\mathbf{A}_j\in\mathbb{R}^{m\times m_j}$ und $\mathbf{X}_j\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m_j\times 1}$. Für alle $j,k\in\mathbb{N}_{1,r}$ mit $j\neq k$ gelte*

$$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k)=\mathbf{O}_{m_j\times k}.$$

Dann gelten $\sum_{j=1}^{r}(\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j+\mathbf{a}_j)\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und

$$\operatorname{Cov}_P\left(\sum_{j=1}^{r}(\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j+\mathbf{a}_j),\sum_{j=1}^{r}(\mathbf{A}_j\mathbf{X}_j+\mathbf{a}_j)\right)=\sum_{j=1}^{r}\mathbf{A}_j\cdot\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_j)\cdot\mathbf{A}_j^T$$

Beispiel 5.4.1. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $m\in\mathbb{N}$. Weiter sei $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit:

(I) Für alle $j,k\in\mathbb{N}_{1,m}$ mit $j\neq k$ gilt $A_j\cap A_k=\varnothing$.

(II) Für alle $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ gilt $A_j\in\mathfrak{A}$.

Weiter sei $\mathbf{X}:=(1_{A_1},\ldots,1_{A_m})^T$. Dann gilt:

(a) Es gelten $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und

$$\operatorname{E}_P(\mathbf{X})=(P(A_1),\ldots,P(A_m))^T.$$

(b) Es gelten $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und

$$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})=\operatorname{diag}(P(A_1),\ldots,P(A_m))-\begin{bmatrix}P(A_1)\\ \vdots\\ P(A_m)\end{bmatrix}\cdot[P(A_1),\ldots,P(A_m)].$$

(c) Es ist

$$P_{\mathbf{X}}=\sum_{j=1}^{m}P(A_j)\cdot\varepsilon_{\mathbf{e}_j^{(m)},\mathfrak{B}_m}+\left[1-\sum_{j=1}^{m}P(A_j)\right]\cdot\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$$

und damit $P_{\mathbf{X}}\in\mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt wegen der Voraussetzung *(II)* sofort aus Bemerkung 5.1.3.

Zu *(b)*: Wegen Voraussetzung *(II)* folgt aus Bemerkung 5.1.3 sogleich

$$\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}. \tag{1}$$

Wegen Definition 5.4.2 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}, \mathbf{X}\right) = \left(\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k\right)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}. \tag{2}$$

Sei nun

$$(j,k) \in \mathbb{N}_{1,m}^2. \tag{3}$$

Wegen (3) und der Voraussetzung *(II)* liefert Teil *(a)* von Lemma 5.2.4 dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(1_{A_j}, 1_{A_k}\right) = P\left(A_j \cap A_k\right) - \left[P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right]. \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(1_{A_j}, 1_{A_j}\right) = P\left(A_j\right) - \left[P\left(A_j\right)\right]^2 \tag{5}$$

sowie im Fall $j \neq k$ unter zusätzlicher Beachtung von Voraussetzung *(I)* dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(1_{A_j}, 1_{A_k}\right) = -P\left(A_j\right) P\left(A_k\right). \tag{6}$$

Aus (2) bis (6) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}, \mathbf{X}\right) &= \left(\mathrm{Cov}_P\left(1_{A_j}, 1_{A_k}\right)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \\
&= \mathrm{diag}\left(P\left(A_1\right), \ldots, P\left(A_m\right)\right) - \left(P\left(A_j\right) P\left(A_k\right)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \\
&= \mathrm{diag}\left(P\left(A_1\right), \ldots, P\left(A_m\right)\right) - \begin{bmatrix} P\left(A_1\right) \\ \vdots \\ P\left(A_m\right) \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} P\left(A_1\right) \\ \vdots \\ P\left(A_m\right) \end{bmatrix}^T.
\end{aligned} \tag{7}$$

Zu *(c)*: Aus den Voraussetzungen *(I)*,*(II)* und der Definition von $\mathbf{X}$ folgt sogleich, dass

$$\mathbf{X}^{-1}\left(\mathbb{R}^m \setminus \left\{\mathbf{e}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{e}_m^{(m)}, \mathbf{0}_{m\times 1}\right\}\right) = \varnothing. \tag{8}$$

Hieraus folgt sogleich

$$\begin{aligned}
P_{\mathbf{X}}\left(\mathbb{R}^m \setminus \left\{\mathbf{e}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{e}_m^{(m)}, \mathbf{0}_{m\times 1}\right\}\right) &= P\left(\mathbf{X}^{-1}\left(\mathbb{R}^m \setminus \left\{\mathbf{e}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{e}_m^{(m)}, \mathbf{0}_{m\times 1}\right\}\right)\right) \\
&= P\left(\varnothing\right) = 0.
\end{aligned}$$

Somit ist

$$\mathbb{R}^m \setminus \left\{\mathbf{e}_1^{(m)}, \ldots, \mathbf{e}_m^{(m)}, \mathbf{0}_{m\times 1}\right\} \in \mathcal{N}_{P_{\mathbf{X}}}. \tag{9}$$

Wegen (7) folgt mittels Lemma M.7.3 dann

$$P_{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^{m}\left(P_{\mathbf{X}}\left(\left\{\mathbf{e}_j^{(m)}\right\}\right)\right) \cdot \varepsilon_{\mathbf{e}_j^{(m)}, \mathfrak{B}_m} + P_{\mathbf{X}}\left(\left\{\mathbf{0}_{m\times 1}\right\}\right) \cdot \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}. \tag{10}$$

Wegen $P_{\mathbf{X}}(\mathbb{R}^m) = P\left(\mathbf{X}^{-1}(\mathbb{R}^m)\right) = P(\Omega) = 1$ folgt aus (8) dann

$$\sum_{j=1}^{m} P_{\mathbf{X}}\left(\left\{\mathbf{e}_j^{(m)}\right\}\right) + P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}) = 1. \tag{11}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{12}$$

Wegen (10) und Voraussetzung *(I)* folgt dann $\mathbf{X}^{-1}\left(\mathbf{e}_j^{(m)}\right) = A_j$. Hieraus folgt nun

$$\mathbf{P}_X\left(\left\{\mathbf{e}_j^{(m)}\right\}\right) = P(A_j). \tag{13}$$

Aus (4) bis (11) folgt nun

$$P_{\mathbf{X}}(\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}) = 1 - \sum_{j=1}^{m} P_{\mathbf{X}}\left(\left\{\mathbf{e}_j^{(m)}\right\}\right). \tag{14}$$

Wegen (10) bis (12) folgt nun aus (8)

$$P_{\mathbf{X}} = \sum_{j=1}^{m} P(A_j) \cdot \varepsilon_{\mathbf{e}_j^{(m)},\mathfrak{B}_m} + \left[1 - \sum_{j=1}^{m} P(A_j)\right] \cdot \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}.$$

Damit ist alles bewiesen. □

Seien nun $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Wir zeigen nun, dass dann der Vektor $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ die eindeutig bestimmte Extremalstelle einer matriziellen Extremalaufgabe ist, welche als Extremalwert die Matrix $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ besitzt. Das nachfolgende Resultat steht im engen Zusammenhang mit Satz M.23.9.16.

Satz 5.4.10. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathbf{X} - \mathbf{a} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(b) *Es ist $[\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m}$.*

(c) *Es gilt $\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) + [\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) - \mathbf{a}] \cdot [\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) - \mathbf{a}]^T$.*

(d) *Es gilt $\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$.*

(e) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathbf{a} = \mathrm{E}_P(\mathbf{X})$.*

(ii) *Es ist $\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]\right)^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.*

(iii) *Es ist $\mathrm{tr}\left[\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right)\right] = \mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\right]$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$1_\Omega \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und der Tatsache, dass $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.22.6.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (1) dann

$$\mathbf{X} - \mathbf{a} = \mathbf{X} - \mathbf{a} \cdot 1_\Omega \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}.$$

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* sogleich aus Teil *(b)* von Satz M.23.9.4.

Zu *(c)*-*(e)*: Wegen $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ folgt aus Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \tag{2}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) \tag{3}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}}). \tag{4}$$

Sei $f_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}$ definiert gemäß

$$\mathbf{u} \longmapsto (\mathbf{u} - \mathbf{a})(\mathbf{u} - \mathbf{a})^T. \tag{5}$$

Aus (5) folgt dann

$$[\mathbf{X} - \mathbf{a}][\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T = f_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{X}. \tag{6}$$

Aus *(b)* und (6) folgt nun

$$f_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m}. \tag{7}$$

Da $\mathbf{X}$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung ist, folgt bei Beachtung von $P_{\mathbf{X}} = \mathbf{X}(P)$ aus (7) mittels Teil *(b)* von Satz M.22.9.2 dann $f_{\mathbf{a}} \in [\mathcal{L}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, P_{\mathbf{x}}; \mathbb{R})]^{m\times m}$ sowie mittels Teil *(c)* von Satz M.22.9.2 zudem

$$\int\limits_\Omega (f_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{X})\,\mathrm{d}P = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}P_{\mathbf{X}}. \tag{8}$$

Unter Beachtung von *(b)* und (6) gilt nun

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) = \int\limits_\Omega \left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right)\mathrm{d}P = \int\limits_\Omega (f_{\mathbf{a}} \circ \mathbf{X})\,\mathrm{d}P. \tag{9}$$

Aus (9) und (8) folgt nun

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}P_{\mathbf{X}}. \tag{10}$$

Wegen (2), (3), (4) und (10) ist die Behauptung von *(c)* bzw. *(d)* bzw. *(e)* dann eine unmittelbare Konsequenz aus Teil *(a2)* bzw. *(a3)* bzw. *(b)* von Satz M.23.9.16. □

Wir wollen nun noch einmal unter einem etwas anderen Blickwinkel auf die Teile (d), (e) von Satz 5.4.10 zurückblicken. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Bezeichnung. Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann sei $\mathbb{R}_S^{q\times q} := \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q} \mid \mathbf{A} = \mathbf{A}^T\right\}$.

Definition 5.4.5. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_S^{q\times q}$ derart, dass $\mathbf{B} - \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ bzw. $\mathbf{B} - \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$ erfüllt ist. Dann schreiben wir für diesen Sachverhalt auch $\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{A} < \mathbf{B}$ oder $\mathbf{B} \geqq \mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{B} > \mathbf{A}$.

Bemerkung 5.4.5. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_S^{q\times q}$. Dann gelten:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A} \geqq \mathbf{O}_{q\times q}$.

(ii) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A} > \mathbf{O}_{q\times q}$.

(ii) $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$. ♣

Bemerkung 5.4.6. Seien $q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_S^{q\times q}$. Dann gelten:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$.

(ii) Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ gilt $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \leq \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathbf{A} < \mathbf{B}$.

(ii) Für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ gilt $\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} < \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{x}$. ♣

Bemerkung 5.4.7. Seien $q \in \mathbb{N}$. Dann gelten:

(a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$, dann gilt $\mathbf{A} \leqq \mathbf{A}$.

(b) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}_S^{q\times q}$ so beschaffen, dass $\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \leqq \mathbf{A}$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathbf{A} = \mathbf{B}$.

(c) Seien $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C} \in \mathbb{R}_S^{q\times q}$ so beschaffen, dass $\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$ und $\mathbf{B} \leqq \mathbf{C}$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathbf{A} \leqq \mathbf{C}$.

(d) Die Relation „$\leqq$" auf $\mathbb{R}_S^{q\times q}$ ist eine Halbordnung, also reflexiv, transitiv und antisymmetrisch. ♣

Definition 5.4.6. Seien $q \in \mathbb{N}$. Dann wird die in Definition 5.4.5 eingeführte Relation „$\leqq$" auf $\mathbb{R}_S^{q\times q}$ auch als Löwner[1)]*-Halbordnung auf* $\mathbb{R}_S^{q\times q}$ bezeichnet.

[1)] Karl Löwner (∗29.05.1893; †08.01.1968) war ein tschechisch-US-amerikanischer Mathematiker, der sich nach seiner Emigration 1939 in die USA Charles Loewner nannte und sich vor allem mit Funktionentheorie und Analysis beschäftigte.

Interpretation von Satz 5.4.10 in Termen der LÖWNER*-Halbordnung.* Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Weiter sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Unter Beachtung der nach Teil *(b)* von Satz 5.4.2 gültigen Beziehung

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]\,[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T\right)$$

folgt aus den Teilen *(d)* und *(e)*

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) \geqq \mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]\,[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T\right)$$

im Sinne der LÖWNER-Halbordnung auf $\mathbb{R}_S^{q\times q}$, wobei die Gleichheit genau für $\mathbf{a} = \mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ vorliegt. Dieses Resultat ist aus gewisser Hinsicht bemerkenswert. Da es sich hier um eine Minimumaufgabe für eine Halbordnung handelt, ist a priori überhaupt nicht klar, ob es *überhaupt* ein Element gibt, welches mit allen anderen vergleichbar ist. Selbst wenn es ein solches Element gibt, bedeutet dies noch nicht, dass dieses Element minimal sein muss. Setzen wir

$$H_{\mathbf{X}} := \left\{\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathbf{a}] \cdot [\mathbf{X} - \mathbf{a}]^T\right) \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\right\},$$

so ist $H_{\mathbf{X}} \subseteq \mathbb{R}_S^{q\times q}$. Aus der Gestalt von $H_{\mathbf{X}}$ ist nicht offensichtlich, dass $H_{\mathbf{X}}$ ein Minimum im Sinne der LÖWNER-Halbordnung in $\mathbb{R}_S^{q\times q}$ besitzt. Selbst wenn die Frage der Existenz dieses Minimums geklärt sein sollte, ist nicht unmittelbar entscheidbar, ob dieses Minimum genau einmal angenommen wird. Satz 5.4.10 gibt auf beide Fragen eine vollständige Antwort. Dieses Resultat lässt sich auch aus dem Orthoprojektionssatz für Hilbertmoduln über $\mathbb{R}^{m\times m}$ herleiten (hier speziell linke $\mathbb{R}^{m\times m}$-Hilbertmoduln). ♣

Das Ziel unserer nachfolgenden Überlegungen lässt sich wie folgt beschreiben: Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Dann ist die Aufgabe der besten matrixlinearen Approximation von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$ zu untersuchen.

Es ist dann also eine Matrix $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ so zu bestimmen, dass die Differenz $\mathbf{Y} - \mathbf{BX}$ unter allen Differenzen $\mathbf{Y} - \mathbf{HX}$, mit beliebigem $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, in dem Sinne minimal ist, dass im Sinne der LÖWNER-Halbordnung auf $\mathbb{R}_S^{m\times m}$ die Beziehung

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{HX}, \mathbf{Y} - \mathbf{HX}) \geqq \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{BX}, \mathbf{Y} - \mathbf{BX})$$

besteht. Zur Realisierung dieser Zielstellung benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Bemerkung 5.4.8. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^q\}$. ♣

Lemma 5.4.3. *Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times r}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A})$.*

(ii) *Es gibt ein $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{q\times r}$ mit $\mathbf{AH} = \mathbf{B}$.*

BEWEIS. Wir schreiben $\mathbf{B}$ als Blockmatrix über die Spalten gemäß

$$\mathbf{B} = (\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r). \tag{1}$$

***(i)*⇒*(ii)*:** Wegen *(i)* und (1) gibt es nach Bemerkung 5.4.8 für $k \in \mathbb{N}_{1,r}$ dann ein $\mathbf{h}_k \in \mathbb{R}^q$ mit $\mathbf{Ah}_k = \mathbf{b}_k$. Hieraus folgt mit der Setzung $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_r)$ dann *(ii)*.

***(ii)*⇒*(i)*:** Gemäß *(ii)* sei $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{q\times r}$ so gewählt, dass $\mathbf{AH} = \mathbf{B}$. Schreiben wir nun $\mathbf{H}$ als Blockmatrix $\mathbf{H} = (\mathbf{h}_1, \ldots, \mathbf{h}_r)$ so gilt wegen (1) dann

$$(\mathbf{b}_1, \ldots, \mathbf{b}_r) = \mathbf{AH} = (\mathbf{Ah}_1, \ldots, \mathbf{Ah}_r)\,.$$

Somit gilt für $k \in \mathbb{N}_{1,r}$ also $\mathbf{b}_k = \mathbf{Ah}_k$ und folglich wegen Bemerkung 5.4.8 dann $\mathbf{b}_k \in \mathcal{R}(\mathbf{A})$. Hieraus folgt dann *(i)*. □

Lemma 5.4.4. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Weiter seien die Matrizen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$, $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ so gewählt, so dass mit der Setzung*

$$\mathbf{E} := \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{pmatrix}$$

die Beziehung $\mathbf{E} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(p+q)\times(p+q)}$ besteht. Dann gilt:

(a) *Es gelten $\mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A})$ und $\mathcal{R}\left(\mathbf{B}^T\right) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{D})$.*

(b) *Es gibt ein $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ bzw. ein $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ mit $\mathbf{AG} = \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{DH} = \mathbf{B}^T$.*

(c) *Es gibt ein $\widetilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ bzw. ein $\widetilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ mit $\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{A} = \mathbf{B}^T$ bzw. $\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{D} = \mathbf{B}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Unter Beachtung von $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(p+q)}$ bezeichne $\sqrt{\mathbf{E}}$ die nach Satz M.23.9.12 existierende und eindeutig bestimmte positiv semidefinite Quadratwurzel aus $\mathbf{E}$. Wir wählen nun die Blockzerlegung $\sqrt{\mathbf{E}} = (\mathbf{U}, \mathbf{V})$ mit Blöcken $\mathbf{U} \in \mathbb{R}^{(p+q)\times p}$ und $\mathbf{V} \in \mathbb{R}^{(p+q)\times q}$. Unter Beachtung von $\sqrt{\mathbf{E}}^T\sqrt{\mathbf{E}} = \sqrt{\mathbf{E}}^2 = \mathbf{E}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\begin{pmatrix} \mathbf{U}^T\mathbf{U} & \mathbf{U}^T\mathbf{V} \\ \mathbf{V}^T\mathbf{U} & \mathbf{V}^T\mathbf{V} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \mathbf{U}^T \\ \mathbf{V}^T \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \mathbf{U}, & \mathbf{V} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{U}, & \mathbf{V} \end{pmatrix}^T \begin{pmatrix} \mathbf{U}, & \mathbf{V} \end{pmatrix} \\ &= \sqrt{\mathbf{E}}^T\sqrt{\mathbf{E}} = \sqrt{\mathbf{E}}^2 = \mathbf{E} = \begin{pmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{pmatrix}\end{aligned}\,.$$

Hieraus folgen

$$\mathbf{U}^T\mathbf{U} = \mathbf{A}, \tag{1}$$
$$\mathbf{U}^T\mathbf{V} = \mathbf{B}, \tag{2}$$
$$\mathbf{V}^T\mathbf{U} = \mathbf{B}^T, \tag{3}$$
$$\mathbf{V}^T\mathbf{V} = \mathbf{D}. \tag{4}$$

Wegen Teil *(b)* von Lemma M.23.9.11 gelten

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{U}^T\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{U}^T\mathbf{U}\right) \tag{5}$$

und

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{V}^T\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{V}^T\mathbf{V}\right). \tag{6}$$

Aus (1) und (5) bzw. (4) und (6) folgen dann

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{U}^T\right) = \mathcal{R}(\mathbf{A}) \tag{7}$$

bzw.

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{V}^T\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{D}\right). \tag{8}$$

Unter Verwendung von (2), Lemma 5.4.3 und (7) bzw. (3), Lemma 5.4.3 und (8) folgt nun

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{U}^T\mathbf{V}\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{U}^T\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{A}\right)$$

bzw.

$$\mathcal{R}\left(\mathbf{B}\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{V}^T\mathbf{U}\right) \subseteq \mathcal{R}\left(\mathbf{V}^T\right) = \mathcal{R}\left(\mathbf{D}\right).$$

Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* sogleich aus Lemma 5.4.3.

Zu *(c)*: Gemäß *(b)* seien $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ bzw. $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ so gewählt, dass $\mathbf{AG} = \mathbf{B}$ bzw. $\mathbf{DH} = \mathbf{B}^T$ erfüllt ist. Setzen wir dann $\widetilde{\mathbf{G}} := \mathbf{G}^T$ bzw. $\widetilde{\mathbf{H}} := \mathbf{H}^T$, so ist $\widetilde{\mathbf{G}} \in \mathbb{R}^{q\times p}$ bzw. $\widetilde{\mathbf{H}} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und unter Beachtung der nach Wahl von $\mathbf{E}$ gültigen Beziehung $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$ bzw. $\mathbf{D}^T = \mathbf{D}$ folgt

$$\widetilde{\mathbf{G}}\mathbf{A} = \mathbf{G}^T\mathbf{A}^T = \left(\mathbf{AG}\right)^T = \mathbf{B}^T$$

bzw.

$$\widetilde{\mathbf{H}}\mathbf{D} = \mathbf{H}^T\mathbf{D}^T = \left(\mathbf{DH}\right)^T = \left(\mathbf{B}^T\right)^T = \mathbf{B}. \qquad \square$$

Lemma 5.4.5. *Seien $q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $r \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q\times r}$. Dann gilt $\mathbf{B}^T\mathbf{AB} \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$.*

(b) *Seien $p \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt $\mathbf{CAC}^T \in \mathbb{R}^{p\times p}_{\geq}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$ gilt $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$. Hieraus folgt

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{AB}\right)^T = \mathbf{B}^T\mathbf{AB}. \tag{1}$$

Wegen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$ gilt

$$\left\{\mathbf{x}^T\mathbf{Ax} \mid \mathbf{x} \in \mathbb{R}^q\right\} \subseteq [0, +\infty). \tag{2}$$

Sei nun

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^r. \tag{3}$$

Aus (3) folgt

$$\mathbf{Bu} \in \mathbb{R}^q. \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt dann $\left(\mathbf{Bu}\right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Bu}\right) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt wegen $\left(\mathbf{Bu}\right)^T \mathbf{A} \left(\mathbf{Bu}\right) = \mathbf{u}^T\mathbf{B}^T\mathbf{ABu}$ dann *(a)*.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)*, in dem die Wahl $\mathbf{B} = \mathbf{C}^T$ vorgenommen wird. $\square$

Satz 5.4.11. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{n\times 1}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt ein $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mir $\mathbf{B}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}, \mathbf{X}\right)\right] = \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}, \mathbf{X}\right)$.*

(b) *Sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *so gewählt, dass* $\mathbf{B}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right] = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ *erfüllt ist. Weiter sei* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$*. Dann gilt:*

(b1) *Es gelten* $\{\mathbf{Y}-\mathbf{HX}, \mathbf{Y}-\mathbf{BX}\} \subseteq \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ *sowie*

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}) = &\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})\\ &+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T.\end{aligned}$$

(b2) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX}) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}$.

(b3) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathbf{H}\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})$.

(ii) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})$.

(iii) *Es gilt* $\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX})\right] = \mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})\right]$.

(b4) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}) \geqq \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})$ *wobei die Gleichheit genau dann vorliegt, wenn* $\mathbf{H}\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})$ *erfüllt ist.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(c)* von 5.4.3 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}\right) \in \mathbb{R}^{(m+n)\times(m+n)}_{\geq}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.2 gilt

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) = \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right]^T. \tag{2}$$

Wegen Teil *(f)* von Satz 5.4.2 gilt weiter

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix},\begin{bmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\\ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) liefert Teil *(c)* von Lemma 5.4.4 die Existenz eines $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit

$$\mathbf{B}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right] = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}).$$

Zu *(b1)*: Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ gelten

$$\mathbf{Y}-\mathbf{HX} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1} \tag{4}$$

bzw.

$$\mathbf{Y}-\mathbf{BX} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1} \tag{5}$$

und

$$(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}. \tag{6}$$

sowie aufgrund der Wahl von $\mathbf{B}$ weiterhin

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X}) &= \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{X})\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\ &= \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) - \mathbf{B}\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\ &= \mathbf{O}_{n\times m}\,(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T = \mathbf{O}_{n\times m}.\end{aligned} \tag{7}$$

Unter Beachtung von Teil *(d)* von Satz 5.4.2 und (7) folgt

$$\mathrm{Cov}_P\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right) = \left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, (\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X}\right)\right]^T = \mathbf{O}_{m\times n}. \tag{8}$$

Wegen (5) und (6) ergibt sich durch erneute Anwendung von Satz 5.4.9 bei zusätzlicher Beachtung von (7) und (8) dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right)\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\left[\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right]+\left[\mathbf{B}\mathbf{X}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right], \left[\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right]+\left[\mathbf{B}\mathbf{X}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right]\right)\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\left[\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right]+\left[\mathbf{B}-\mathbf{H}\right]\mathbf{X}, \left[\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right]+\left[\mathbf{B}-\mathbf{H}\right]\mathbf{X}\right)\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)+\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, (\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X}\right)\\
&+\mathrm{Cov}_P\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)\\
&+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)\\
&+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T.
\end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (4), (5) und (9) ist dann *(b1)* bewiesen.

Zu *(b2)*: Aus (9) folgt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right)-\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)\\
=&\,(\mathbf{B}-\mathbf{H})\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T.
\end{aligned} \tag{10}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz 5.4.3 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}. \tag{11}$$

Wegen (11) liefert Teil *(b)* von Lemma 5.4.5 nun

$$(\mathbf{B}-\mathbf{H})\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right](\mathbf{B}-\mathbf{H})^T \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgt dann $\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right)-\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right) \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}$.

***(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:** Aus *(i)* und der Wahl von $\mathbf{B}$ folgt

$$\begin{aligned}
(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right) &= \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\\
&= \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y},\mathbf{X}\right)-\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y},\mathbf{X}\right) = \mathbf{O}_{n\times m}.
\end{aligned}$$

Hieraus folgt

$$(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T = \mathbf{O}_{n\times n}. \tag{13}$$

***(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*:** Dies gilt trivialerweise.

***(iii)* $\Rightarrow$ *(i)*:** Unter Verwendung von (10) und *(iii)* ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\mathrm{tr}\left[(\mathbf{B}-\mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right]\\
=&\,\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right)-\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)\right]\\
=&\,\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{H}\mathbf{X}\right)\right]-\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y}-\mathbf{B}\mathbf{X}\right)\right]\\
=&\,0.
\end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (12) und (14) folgt mittels Lemma M.23.9.12 dann

$$(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T=\mathbf{O}_{n\times n}. \tag{15}$$

Unter Beachtung von (11) bezeichne $\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}$ die nach Satz M.23.9.12 existierende und eindeutig bestimmte positiv semidefinite Quadratwurzel aus $\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})$. Dann gilt $\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}^T=\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}$ und somit also

$$\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}=\left(\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\right)^2=\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}).$$

Hieraus folgt nun

$$\begin{aligned}(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T&=(\mathbf{B}-\mathbf{H})\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\&=(\mathbf{B}-\mathbf{H})\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\cdot\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\right)^T\\&=\mathbf{O}_{n\times n}.\end{aligned}$$

Hieraus folgt mittels Teil *(c)* von Lemma M.23.9.11 dann $(\mathbf{B}-\mathbf{H})\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}=\mathbf{O}_{n\times m}$. Damit ist

$$\mathbf{B}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})-\mathbf{H}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})=(\mathbf{B}-\mathbf{H})\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}\sqrt{\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})}=\mathbf{O}_{n\times m}.$$

Hieraus und aus der Wahl von $\mathbf{B}$ folgt nun

$$\mathbf{H}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})=\mathbf{B}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})=\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}).$$

Somit gilt *(i)*.

Zu *(b4)*: Dies folgt sogleich aus *(b2)* und *(b3)*. □

Unsere nächste Zielstellung lässt sich wie folgt beschreiben:

Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m,n\in\mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Dann sind Matrizen $\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ und $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^n$ derart zu bestimmten, dass im Sinne der LÖWNER-Halbordnung in $\mathbb{R}_S^{n\times n}$ für alle $\mathbf{H}\in\mathbb{R}^{n\times m}$ und alle $\mathbf{h}\in\mathbb{R}^n$ die Beziehung

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})][\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})]^T\right)\geqq\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})][\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})]^T\right)$$

besteht. Wir werden in Kürze erkennen, dass derartige Wahlen von $\mathbf{H}$ und $\mathbf{h}$ stets möglich sind. Hierzu benötigen eine kleine Vorbereitung.

Lemma 5.4.6. *Seien $q,n\in\mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(\mathbf{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $[0,+\infty)$ bzw. $\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\sum_{j=1}^n\alpha_j\mathbf{A}_j\in\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$.*

(b) *Es existiere ein $j_0\in\mathbb{N}_{1,n}$ mit $\lambda_{j_0}\in(0,+\infty)$ mit $\mathbf{A}_{j_0}\in\mathbb{R}_{>}^{q\times q}$. Dann ist $\sum_{j=1}^n\alpha_j\mathbf{A}_j\in\mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.*

Lemma 5.4.7. *Seien $q\in\mathbb{N}$ und $\mathbf{A}=(a_{j,k})_{j,k=1}^q\in\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $s\in\mathbb{N}_{1,q}$. Dann gilt $a_{s,s}\in[0,+\infty)$.*

(b) *Es ist* $\operatorname{tr}\mathbf{A} \in [0, +\infty)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $a_{s,s} = \left[\mathbf{e}_s^{(q)}\right]^T \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{e}_s^{(q)}$ folgt aus der Wahl von $\mathbf{A}$ sogleich $a_{s,s} \in [0, +\infty)$.

Zu *(b)*: Wegen $\operatorname{tr}\mathbf{A} = \sum_{s=1}^{q} a_{s,s}$ folgt aus *(a)* dann $\operatorname{tr}\mathbf{A} \in [0, +\infty)$. □

Satz 5.4.12. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie* $m, n \in \mathbb{N}$. *Weiter seien* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *und* $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. *Dann gilt:*

(a) *Es gelten* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *und* $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$.

(b) *Sei* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$. *Dann gilt:*

*(*b1*)* *Es ist* $\mathbf{Y} - \mathbf{HX} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$.

*(*b2*)* *Es ist* $\mathbf{Y} - \mathbf{HX} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ *sowie* $\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{HX}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$.

(c) *Seien* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

*(*c1*)* *Es ist* $\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h}) \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$

*(*c2*)* *Es gilt* $[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times n}$.

*(*c3*)* *Es gilt*

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]^T\right)\\ =\,&\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{HX}, \mathbf{Y} - \mathbf{HX}) +\\ &[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]\,[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]^T.\end{aligned}$$

*(*c4*)* *Es gilt* $|\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *sowie*

$$\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})|^2\right) = \operatorname{tr}\left[\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]^T\right)\right].$$

(d) *Seien* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $\mathbf{a} := \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. *Dann gelten*

$$[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{a})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{a})]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times n}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{HX}, \mathbf{Y} - \mathbf{HX}) = \mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{a})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{a})]^T\right).$$

(e) *Sei* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *so gewählt, dass die Beziehung* $\mathbf{B}\,[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})] = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ *besteht. Sei nun* $\mathbf{b} := \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. *Weiter seien* $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ *und* $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$. *Dann gilt:*

(e1) *Es ist*

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{HX} + \mathbf{h})]^T\right)\\ =\,&\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{BX} + \mathbf{b})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{BX} + \mathbf{b})]^T\right)\\ &+ (\mathbf{B} - \mathbf{H})\,[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})]\,(\mathbf{B} - \mathbf{H})^T\\ &+ [\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]\,[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]^T.\end{aligned}$$

(e2) *Es gilt*

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right) &= \mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right)\\ &\quad+\mathrm{tr}\left[(\mathbf{B}-\mathbf{H})\left\{\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right\}(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right]\\ &\quad+\left|\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right)\right)\right|^2.\end{aligned}$$

(e3) *Es ist*

$$\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)-\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)$$

ein Element aus $\mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}$.

(e4) *Es gilt*

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right)\geqq\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right).$$

(e5) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es gilt*

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\ =&\,\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right).\end{aligned}$$

(ii) *Es gilt* $\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right)=\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right)$.

(iii) *Es gelten* $\mathbf{H}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right]=\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y},\mathbf{X}\right)$ *und* $\mathbf{h}=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)$.

(e6) *Es gilt* $\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\geqq\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)$, *wobei Gleichheit genau dann vorliegt, wenn* $\mathbf{H}\left[\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\right]=\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y},\mathbf{X}\right)$ *und* $\mathbf{h}=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(c3)* aus Satz 5.4.1.

Zu (*b1*): Dies folgt aus Satz 5.4.9.

Zu (*b2*): Wegen *(a)* folgt unter Verwendung der Teile *(a)* und *(b)* von Lemma 5.4.2 dann

$$\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{n\times 1}\tag{1}$$

und

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right).\tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist dann (*b2*) bewiesen.

Zu (*c1*): Es ist

$$\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})=(\mathbf{Y}-\mathbf{HX})-\mathbf{h}.\tag{3}$$

Wegen (*b1*) und (3) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.4.10 dann

$$\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{n\times 1}.$$

Zu (*c3*): Unter Beachtung von (3) und (*b1*) folgt mittels Teil *(c)* von Satz 5.4.10 sowie (2) nun

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\
=&\,\mathrm{E}_P\left(\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{HX})-\mathbf{h}\right]\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{HX})-\mathbf{h}\right]^T\right)\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\\
&+\left[\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)-\mathbf{h}\right]\left[\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)-\mathbf{h}\right]^T\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)+\left[\mathbf{h}-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\right]\left[\mathbf{h}-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\right]^T\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\\
&+\left[\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right]\left[\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right]^T.
\end{aligned}$$

Damit ist (*c3*) bewiesen.

Zu (*c4*): Dies folgt wegen (*c2*) aus Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4.

Zu (*d*): Wegen (*b1*) gelten nach Teil *(b)* von Satz 5.4.2 dann

$$\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{HX})-\mathbf{a}\right]\left[(\mathbf{Y}-\mathbf{HX})-\mathbf{a}\right]^T\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{n\times n}. \tag{4}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\
=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)\\
&+\left[\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]\left[\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right)\right)\right]^T.
\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen (3) und (4) gilt dann

$$\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{a})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{a})\right]^T\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{n\times n}. \tag{6}$$

Aufgrund von (*b2*) d der Konstruktion von *(a)* gilt

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P\left(\mathbf{a}\right).$$

Hieraus folgt nun

$$\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)=\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)-\mathbf{a}=\mathbf{Y}-\left(\mathbf{HX}+\mathbf{a}\right). \tag{7}$$

Aus (5) und (7) folgt nun

$$Cov_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)=\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{a})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{a})\right]^T\right). \tag{8}$$

Wegen (6) und (8) ist *(d)* bewiesen.

Zu (*e1*): Nach Teil *(b1)* von Satz 5.4.11 gilt

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX}\right)=&\,\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX}\right)\\
&+\left(\mathbf{B}-\mathbf{H}\right)\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right)\left(\mathbf{B}-\mathbf{H}\right)^T.
\end{aligned} \tag{9}$$

Aufgrund der Konstruktion von *(b)* folgt aus *(d)* weiterhin

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX}\right)=\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right). \tag{10}$$

Unter Verwendung von (*c3*), (9) und (10) folgt dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\
=&\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{HX},\mathbf{Y}-\mathbf{HX})\\
&+\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T\\
=&\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\
&+\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T\\
=&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\
&+\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T.
\end{aligned}$$

Damit ist *(e1)* bewiesen.

Zu *(e2)*: Unter Verwendung (*c4*), *(e1)* und nochmals (*c4*) folgt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_p\left[\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right]=\operatorname{tr}\left(\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\right)\\
=&\operatorname{tr}\Big(\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\
&+\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T\Big)\\
=&\operatorname{tr}\left(\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)\right)\\
&+\operatorname{tr}\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right)\\
&+\operatorname{tr}\left(\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T\right)\\
=&\mathrm{E}_p\left[\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right]+\operatorname{tr}\left((\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right)\\
&+\operatorname{tr}\left(\left|\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right|^2\right).
\end{aligned}$$

Zu *(e3)*: Wegen *(e1)* folgt

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\
&-\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)\\
=&\operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{BX},\mathbf{Y}-\mathbf{BX})+(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\\
&+\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T.
\end{aligned}\tag{11}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz 5.4.3 gilt $\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\in\mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 5.4.5 dann

$$(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}.\tag{12}$$

Wegen Lemma M.23.9.10 gilt

$$\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]\left[\mathbf{h}-(\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))\right]^T\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}.\tag{13}$$

Wegen (11) bis (13) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Lemma 5.4.6 dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\\
&-\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)\in\mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}.
\end{aligned}$$

Zu *(e4)*: Wegen *(e3)* folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 5.4.7 dann

$$\operatorname{tr}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right) \\ -\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right) \end{array}\right\} \in [0,+\infty)\,. \tag{14}$$

Unter Beachtung von $(c4)$ ergibt sich

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left\{\begin{array}{c} \mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right) \\ -\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right) \end{array}\right\} \\ =&\operatorname{tr}\left\{\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\right\} \\ &-\operatorname{tr}\left\{\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)\right\} \\ =&\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right)-\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Aus (14) und (15) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right) \geq \mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right).$$

***(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*:** Unter Verwendung von $(c4)$, (1) und nochmals $(c4)$ folgt

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right) &= \operatorname{tr}\left\{\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right]^T\right)\right\} \\ &= \operatorname{tr}\left\{\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]\left[\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right]^T\right)\right\} \\ &= \mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{b})\right|^2\right). \end{aligned}$$

Es gilt also *(ii)*.

***(ii)* $\Rightarrow$ *(iii)*:** Unter Verwendung von *(e2)* und *(ii)* folgt

$$\begin{aligned} &\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right\}+\left|\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right)\right)\right|^2 \\ =&\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{HX}+\mathbf{h})\right|^2\right)-\mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{Y}-(\mathbf{BX}+\mathbf{h})\right|^2\right) \\ =&0. \end{aligned} \tag{16}$$

Wegen (12) folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 5.4.7 dann

$$\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right\} \in [0,+\infty). \tag{17}$$

Weiterhin gilt

$$\left|\mathbf{h}-\left(\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})\right)\right)\right|^2 \in [0,+\infty). \tag{18}$$

Aus (16) bis (18) folgen nun

$$\operatorname{tr}\left\{(\mathbf{B}-\mathbf{H})\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})(\mathbf{B}-\mathbf{H})^T\right\} = 0. \tag{19}$$

und

$$|\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})))|^2 = 0. \tag{20}$$

Da $|.|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, folgt aus (20) nun, dass $\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))) = \mathbf{0}_{n\times 1}$. Somit ist

$$\mathbf{h} = (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))). \tag{21}$$

Wegen (12) und (19) folgt mittels Lemma M.23.9.12 dann, dass

$$(\mathbf{B} - \mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,(\mathbf{B} - \mathbf{H})^T = \mathbf{O}_{n\times n}. \tag{22}$$

Aus (9) und (22) folgt nun

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{X}).$$

Hieraus folgt bei Beachtung der Wahl von $\mathbf{B}$ mittels Teil *(b3)* von Satz 5.4.11 dann

$$\mathbf{H}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}). \tag{23}$$

Wegen (23) und (21) gilt dann *(iii)*.

(iii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wegen *(iii)* gilt $\mathbf{H}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$. Hieraus und aus der Wahl von $\mathbf{B}$ folgt mittels Teil *(b3)* von Satz 5.4.11 dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \mathbf{H}\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{X}, \mathbf{Y} - \mathbf{B}\mathbf{X}). \tag{24}$$

Aus (9) und (24) folgt dann

$$(\mathbf{B} - \mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,(\mathbf{B} - \mathbf{H})^T = \mathbf{O}_{n\times n}. \tag{25}$$

Wegen *(iii)* gilt $\mathbf{h} = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. Hieraus folgt

$$[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]\,[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]^T = \mathbf{0}_{n\times 1}\,(\mathbf{0}_{n\times 1})^T = \mathbf{O}_{n\times n}. \tag{26}$$

Unter Verwendung von *(e1)*, (25) und (26) folgt nun

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{h})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{H}\mathbf{X} + \mathbf{h})]^T\right)\\
=&\,\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b})]^T\right) + (\mathbf{B} - \mathbf{H})\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,(\mathbf{B} - \mathbf{H})^T\\
&+ [\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]\,[\mathbf{h} - (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{H}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]^T\\
=&\,\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y} - (\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b})]\,[\mathbf{Y} - (\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b})]^T\right).
\end{aligned}$$

Es gilt also *(i)*.

Zu *(e6)*: Dies folgt sogleich aus *(e3)* und *(e5)*. □

Satz 5.4.12 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 5.4.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Es sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ so gewählt, dass

$$\mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$$

erfüllt ist und es sei $\mathbf{b} := \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. Dann heißt $\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}$ eine *beste matrixlineare Approximation* von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$. Im Spezialfall $m = n = 1$ nennt man $BX + b$ auch eine *beste lineare Approximation* von Y durch X.

Bemerkung 5.4.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Dann gibt es eine beste matrixlineare Approximation von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$. ♣

Beweis. Dies folgt aus 5.4.7 und Satz 5.4.11. □

Bemerkung 5.4.10. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ so gewählt, dass $\det\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\right] \neq 0$. Dann gibt es genau eine beste matrixlineare Approximation $\mathbf{Z}$ von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$ nämlich

$$\mathbf{Z} = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})] + \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}). \qquad ♣$$

Beweis. Wegen $\det\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\right] \neq 0$ gibt es genau ein $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit

$$\mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}),$$

nämlich

$$\mathbf{B} = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1}.$$

Somit gibt es genau eine beste matrixlineare Approximation $\mathbf{Z}$ von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$

$$\begin{aligned}\mathbf{Z} &= \mathbf{B}\mathbf{X} + (\mathrm{E}_P(\mathbf{Y} - \mathbf{B}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X})))\\ &= \mathbf{B}[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})] + \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\\ &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^{-1} [\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})] + \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}).\end{aligned}$$ □

Lemma 5.4.8. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $T_1, T_2 \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ jeweils $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildungen, für welche ein $N \in \mathcal{N}_\mu$ mit $\{\omega \in \Omega \,|\, T_1(\omega) \neq T_2(\omega)\} \subseteq N$ erfüllt. Dann gilt $T_1[\mu] = T_2[\mu]$.*

Beweis. Sei

$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{1}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,2}. \tag{2}$$

Aus (1) und der Wahl von T_j folgt dann

$$T_j^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Wegen $N \in \mathcal{N}_\mu$ gilt

$$N \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Aus (4) und der Wahl von $\mathfrak{A}$ folgt dann

$$\Omega \setminus N \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (3) sowie (4) bzw. (5) liefert Teil *(b)* von Satz M.4.1 nun

$$T_j^{-1}(A') \cap N \in \mathfrak{A} \tag{6}$$

bzw.

$$T_j^{-1}(A') \cap [\Omega \setminus N] \in \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Weiterhin gilt

$$T_j^{-1}(A') \cap N \subseteq N. \tag{8}$$

Wegen (6) und (8) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$T_j^{-1}(A') \cap N \in \mathcal{N}_\mu. \tag{9}$$

Wegen $\Omega = N \cup (\Omega \setminus N)$ und $N \cap (\Omega \setminus N) = \varnothing$ gelten

$$\begin{aligned} T_j^{-1}(A') &= T_j^{-1}(A') \cap \Omega = T_j^{-1}(A') \cap [N \cup (\Omega \setminus N)] \\ &= \left[T_j^{-1}(A') \cap N\right] \cup \left[T_j^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right] \end{aligned} \tag{10}$$

und

$$\left[T_j^{-1}(A') \cap N\right] \cap \left[T_j^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right] = \varnothing. \tag{11}$$

Unter Verwendung von (3), (10), (11), (6), (7) und (9) folgt dann

$$\begin{aligned} \mu\left(T_j^{-1}(A')\right) &= \mu\left(\left[T_j^{-1}(A') \cap N\right] \cup \left[T_j^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right]\right) \\ &= \mu\left(T_j^{-1}(A') \cap N\right) + \mu\left(T_j^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right) \\ &= \mu\left(T_j^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right). \end{aligned} \tag{12}$$

Wegen $\{\omega \in \Omega \,|\, T_1(\omega) \neq T_2(\omega)\} \subseteq N$ gilt $T_1 \restriction (\Omega \setminus N) = T_2 \restriction (\Omega \setminus N)$. Hieraus folgt nun

$$T_1^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N) = T_2^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N). \tag{13}$$

Unter Verwendung von (2), (12), (13) und nochmals (12) folgt dann

$$\begin{aligned} T_1[\mu](A') &= \mu\left(T_1^{-1}(A')\right) = \mu\left(T_1^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right) = \mu\left(T_2^{-1}(A') \cap (\Omega \setminus N)\right) \\ &= \mu\left(T_2^{-1}(A')\right) = T_2[\mu](A'). \end{aligned} \tag{14}$$

Aus (1) und (14) folgt nun $T_1[\mu] = T_2[\mu]$. □

Satz 5.4.13. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times 1}$. Es seien nun $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2 \in \mathbb{R}^{n \times m}$ so gewählt, dass $\mathbf{B}_1 \operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ und $\mathbf{B}_2 \operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$ erfüllt sind. Ferner seien $\mathbf{b}_1 := \operatorname{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}_1 \operatorname{E}_P(\mathbf{X})$ sowie $\mathbf{b}_2 := \operatorname{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}_2 \operatorname{E}_P(\mathbf{X})$. Seien schließlich $\mathbf{Z}_1 := \mathbf{B}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1$ und $\mathbf{Z}_2 := \mathbf{B}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2$. Dann gelten:*

(a) $(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times n}$ *und* $\operatorname{E}_P\left((\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T\right) = \mathbf{O}_{n \times n}$.

(b) $|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *und* $\operatorname{E}_P\left(|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2\right) = 0$.

(c) *Es ist* $\{\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_2\} \in \mathcal{N}_P$.

(d) *Es ist* $P_{\mathbf{Z}_1} = P_{\mathbf{Z}_2}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Aus der Wahl von $\mathbf{B}_1, \mathbf{B}_2$ ergibt sich

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) - \operatorname{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) = \mathbf{O}_{n \times m}. \tag{1}$$

Aus der Definition von $\mathbf{b}_1$ und $\mathbf{b}_2$ folgt

$$\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2 = [\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}_1 \mathrm{E}_P(\mathbf{X})] - [\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}_2 \mathrm{E}_P(\mathbf{X})] = -(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2) \mathrm{E}_P(\mathbf{X}). \quad (2)$$

Aus (2) folgt dann

$$\begin{aligned} \mathbf{Z_1} - \mathbf{Z}_2 &= (\mathbf{B}_1\mathbf{X} + \mathbf{b}_1) - (\mathbf{B}_2\mathbf{X} + \mathbf{b}_2) \\ &= (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{X} + (\mathbf{b}_1 - \mathbf{b}_2) \\ &= (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathbf{X} - (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \\ &= (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})). \end{aligned} \quad (3)$$

Wegen Teil *(e)* von Satz 5.4.2 gilt

$$\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}. \quad (4)$$

Wegen (4) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4 dann

$$[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times m}. \quad (5)$$

Wegen (5) ergibt sich jetzt mittels Teil *(b)* von Lemma 5.4.2 dann

$$(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times n}. \quad (6)$$

sowie

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_P\left((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T\right) = \\ &(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T\right)(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T. \end{aligned} \quad (7)$$

Wegen (3) gilt

$$\begin{aligned} (\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T &= (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}))[(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}))]^T \\ &= (\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}))(\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}))^T(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T. \end{aligned} \quad (8)$$

Aus (6) und (8) folgt nun

$$(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n \times n}. \quad (9)$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 5.4.2 gilt

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T\right). \quad (10)$$

Unter Verwendung von (9), (8), (7), (10) und (1) folgt

$$\begin{aligned} &\mathrm{E}_P\left[(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T\right] \\ =&\mathrm{E}_P\left((\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)[\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T\right) \\ =&(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathrm{E}_P\left([\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})][\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})]^T\right)(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T \\ =&\underbrace{(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})}_{=\mathbf{O}_{n \times m}}(\mathbf{B}_1 - \mathbf{B}_2)^T \\ =&\mathbf{O}_{n \times n}. \end{aligned} \quad (11)$$

Wegen (9) und (11) ist dann *(a)* gezeigt.

Zu *(b)*: Wegen (9) folgt mittels Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4 dann

$$|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{12}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (11) weiterhin

$$\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2\right) = \mathrm{tr}\left(\mathrm{E}_P\left[(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)(\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2)^T\right]\right) = \mathrm{tr}\left(\mathbf{O}_{n\times n}\right) = 0. \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Wegen $|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \in \mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty))$ folgt aus (12) dann

$$|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{14}$$

Wegen Definition 5.1.1 gilt $\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2\right) = \int_\Omega |\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \,\mathrm{d}P$. Hieraus folgt wegen (13) dann

$$\int\limits_\Omega |\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \,\mathrm{d}P = 0. \tag{15}$$

Wegen (14) und (15) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 dann

$$\left\{|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \neq 0\right\} \in \mathcal{N}_P. \tag{16}$$

Da $|.|$ eine Norm auf $\mathbb{R}^n$ ist, gilt dann

$$\left\{|\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2|^2 \neq 0\right\} = \{\mathbf{Z}_1 - \mathbf{Z}_2 \neq \mathbf{0}_{n\times 1}\} = \{\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_2\}. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt dann $\{\mathbf{Z}_1 \neq \mathbf{Z}_2\} \in \mathcal{N}_P$.

Zu *(d)*: Dies folgt wegen *(c)* sogleich aus Lemma 5.4.8. □

Zur weiteren Untersuchung der in Definition 5.4.7 eingeführten Begriffsbildung ziehen wir ein spezielles Objekt der Matrizentheorie heran.

Satz 5.4.14. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gibt es* genau *eine Matrix $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{q\times p}$, welche den Bedingungen $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{A} = \mathbf{A}$, $\mathbf{A}^+\mathbf{A}\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^+$, $(\mathbf{A}\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^+$ und $(\mathbf{A}^+\mathbf{A})^T = \mathbf{A}^+\mathbf{A}$.*

Satz 5.4.14 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 5.4.8. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann heißt die in Satz 5.4.14 eingeführte Matrix $\mathbf{A}^+$ die MOORE[2)]-PENROSE[3)]-*Inverse von* $\mathbf{A}$.

Beispiel 5.4.2. Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt $(\mathbf{O}_{p\times q})^+ = \mathbf{O}_{q\times p}$.

[2)] ELIAKIM HASTINGS MOORE (∗28.01.1862; †30.12.1932) war ein US-amerikanischer Mathematiker. Er arbeitete in der algebraische Geometrie, Zahlentheorie und in der Theorie der Integralgleichungen. Von praktischer Bedeutung sind heute noch seine Forschungsergebnisse in der linearen Algebra, wo er für nicht reguläre Matrizen eine sogenannte Pseudoinverse definiert hat, die nach ihm und Roger Penrose als Moore-Penrose-Inverse bezeichnet wird.

[3)] ROGER PENROSE (∗08.08.1931) ist ein englischer Mathematiker und theoretischer Physiker. Seine wichtigste Entdeckung sind wohl die sogenannten Spin-Netzwerke, aus denen später die Theorie der Loop-Quantengravitation und die Twistor-Theorie entwickelt wurde. Außerdem entdeckte er 1955 als Student, die heute nach ihm benannte, Moore-Penrose-Inverse.

Bemerkung 5.4.11. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt $(\mathbf{A}^+)^+ = \mathbf{A}$. ♣

Bemerkung 5.4.12. Seien $q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A}$ eine reguläre Matrix aus $\mathbb{R}^{q\times q}$. Dann gilt $\mathbf{A}^+ = \mathbf{A}^{-1}$. ♣

Bemerkung 5.4.13. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt $(\mathbf{A}^+)^T = \left(\mathbf{A}^T\right)^+$. ♣

Bemerkung 5.4.14. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A}^T = \mathbf{A}$.

(ii) Es ist $(\mathbf{A}^+)^T = \mathbf{A}^+$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$.

(iv) Es ist $\mathbf{A}^+ \in \mathbb{R}^{q\times q}_{\geq}$. ♣

Satz 5.4.15. *Seien $p, q, r \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\mathbf{F} \in \mathbb{R}^{p\times r}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{R}(\mathbf{F}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{E})$.*

(ii) *Es gilt $\mathbf{E}\mathbf{E}^+\mathbf{F} = \mathbf{F}$.*

Beweis.

(i) ⇒ ***(ii)*****:** Wegen *(i)* folgt mittels Lemma 5.4.3 die Existenz eines $\mathbf{G} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ mit $\mathbf{E}\mathbf{G} = \mathbf{F}$. Hieraus folgt

$$\mathbf{E}\mathbf{E}^+\mathbf{F} = \mathbf{E}\mathbf{E}^+(\mathbf{E}\mathbf{G}) = \left(\mathbf{E}\mathbf{E}^+\mathbf{E}\right)\mathbf{G} = \mathbf{E}\mathbf{G} = \mathbf{F}.$$

Es gilt also *(ii)*.

(ii) ⇒ ***(i)*****:** Dies folgt sogleich aus Lemma 5.4.3. □

Satz 5.4.16. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$ und $\mathbf{D} \in \mathbb{R}^{q\times q}$ so gewählt, dass mit der Setzung $\mathbf{E} := \begin{bmatrix} \mathbf{A} & \mathbf{B} \\ \mathbf{B}^T & \mathbf{D} \end{bmatrix}$ die Beziehung $\mathbf{E} \in \mathbb{R}^{(p+q)\times(p+q)}$ besteht. Dann gelten $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{B} = \mathbf{B}$ und $\mathbf{D}\mathbf{D}^+\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T$.*

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Lemma 5.4.4 gilt $\mathcal{R}(\mathbf{B}) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{A})$ bzw. $\mathcal{R}\left(\mathbf{B}^T\right) \subseteq \mathcal{R}(\mathbf{D})$. Hieraus folgt mittels Satz 5.4.15 dann $\mathbf{A}\mathbf{A}^+\mathbf{B} = \mathbf{B}$ sowie $\mathbf{D}\mathbf{D}^+\mathbf{B}^T = \mathbf{B}^T$. □

Satz 5.4.17. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^+ \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$.*

(b) *Es gilt $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^+ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X})$.*

(c) *Seien $\mathbf{B}_0 := \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}, \mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})^+$ und $\mathbf{b}_0 := \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}_0 \cdot \mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. Dann ist $\mathbf{B}_0\mathbf{X} + \mathbf{b}_0$ eine beste matrixlineare Approximation von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(c)* von Satz 5.4.3 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}\right) \in \mathbb{R}_{\geq}^{(m+n)\times(m+n)}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 5.4.2 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}\mathbf{X}\\ \mathbf{Y}\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\\ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) & \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y})\end{pmatrix}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ergibt sich mittels Satz 5.4.16 nun

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+ \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}).$$

Zu *(b)*: Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.2 gelten

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^T \tag{3}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})^T. \tag{4}$$

Wegen (3) liefert Teil *(a)* von Bemerkung 5.4.14 dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+ = \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+\right]^T. \tag{5}$$

Unter Verwendung von (4), *(a)*, nochmals (4), (5) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})^T &= \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+ \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right]^T\\ &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})^T \cdot \left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+\right]^T \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})^T\\ &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^+ \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}).\end{aligned}$$

Zu *(c)*: Nach Definition von $\mathbf{B}_0$ gilt $\mathbf{B}_0 \in \mathbb{R}^{n\times m}$ und wegen *(b)* gilt

$$\mathbf{B}_0 \cdot \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}).$$

Hieraus und aus der Konstruktion von $\mathbf{b}_0$ folgt dann, dass $\mathbf{B}_0\mathbf{X}+\mathbf{b}_0$ eine beste matrixlineare Approximation von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$ ist. □

Satz 5.4.18. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m,n\in\mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Es sei $\mathbf{Z}$ eine beste matrixlineare Approximation von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathbf{Z}\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^+\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right].$$

(b) *Es ist $\mathbf{Z}\in\left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ sowie*

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{Z}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}).$$

(c) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

(d) *Es gelten* $\mathbf{Y}-\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{n\times m}.$$

(e) *Es gilt* $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z})$.

(f) *Es ist*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^{+}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right].$$

(g) *Es gelten* $[\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ *und*

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^{+}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\right].$$

(h) *Es gelten* $\left\{\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T,\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\right\} \subseteq \left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times n}$ *und*

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right) - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Wahl von $\mathbf{Z}$ gibt es nach Definition 5.4.7 dann ein $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{n\times m}$ mit

$$\mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}). \tag{1}$$

derart, dass mit der Setzung

$$\mathbf{b} := \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathbf{B}\,\mathrm{E}_P(\mathbf{X}). \tag{2}$$

die Beziehung

$$\mathbf{Z} = \mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b}. \tag{3}$$

besteht. Wegen (3) ergibt sich mittels Satz 5.4.9 dann

$$\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1} \tag{4}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{B}\mathbf{X}+\mathbf{b},\mathbf{B}\mathbf{X}+\mathbf{b}) = \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T. \tag{5}$$

Wegen Definition 5.4.8 gilt

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^{+}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}). \tag{6}$$

Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.2 gelten

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^T. \tag{7}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}). \tag{8}$$

Unter Verwendung von (7), (1) und (8) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})^T\,\mathbf{B}^T = (\mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}))^T \\ &= (\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}))^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,.\end{aligned} \tag{9}$$

Unter Beachtung von (5), (6), (1) und (8) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) &= \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})]^+\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T \\ &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\,[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})]^+\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y})\,.\end{aligned} \tag{10}$$

Wegen (4) und (10) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen (4) folgt aus Teil *(a)* aus Satz 5.4.2 dann

$$\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}. \tag{11}$$

Wegen Bemerkung 5.1.3 gelten

$$\mathbf{b}\cdot 1_\Omega \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1} \tag{12}$$

und

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{b}\cdot 1_\Omega) = \mathbf{b}\cdot P(\Omega) = \mathbf{b}. \tag{13}$$

Unter Beachtung von (3), (12), den Teilen *(a)* und *(b)* von Lemma 5.4.2, (13) sowie (2) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_p(\mathbf{Z}) &= \mathrm{E}_P(\mathbf{BX}+\mathbf{b}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{BX}+\mathbf{b}\cdot 1_\Omega) = \mathrm{E}_P(\mathbf{BX}) + \mathrm{E}_P(\mathbf{b}\cdot 1_\Omega) \\ &= \mathbf{B}\cdot\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) + \mathbf{b} = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\,.\end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (10) und (14) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Unter Beachtung von (3), Satz 5.4.9, (1) und (5) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) &= \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{BX}+\mathbf{b}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T \\ &= \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\,\mathbf{B}^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z})\,.\end{aligned}$$

Zu *(d)*: Wegen (4) und der Wahl von $\mathbf{Y}$ ergibt sich mittels Satz 5.4.9, dass

$$\mathbf{Y}-\mathbf{Z} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}. \tag{15}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{X})\,. \tag{16}$$

Unter Beachtung von (3), Satz 5.4.9 und (1) folgt

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{BX}+\mathbf{b},\mathbf{X}) = \mathbf{B}\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\,. \tag{17}$$

Aus (16) und (17) folgt nun

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{n\times m}. \tag{18}$$

Wegen (14) und (18) ist dann *(d)* bewiesen.

Zu *(e)*: Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.2 gelten

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Z})^T \tag{19}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z})^T. \tag{20}$$

Unter Verwendung von (19), *(c)* und (20) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Y}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Z})^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z})^T = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}). \tag{21}$$

Unter Beachtung von Satz 5.4.9 sowie *(c)* und (21) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) &= \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Z}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Y}) + \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})\\ &= \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) + \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Z})\\ &= \mathrm{Cov}(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}(\mathbf{Z},\mathbf{Z}).\end{aligned}$$

Zu *(f)*: Dies folgt sogleich aus *(e)* und (10).

Zu *(g)*: Mittels Teil *(a)* von Lemma 5.4.2 und (14) ergibt sich

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) - \mathrm{E}_P(\mathbf{Z}) = \mathbf{0}_{n\times 1}. \tag{22}$$

Wegen (15) ergeben sich mittels Teil *(c)* von Satz 5.4.2 dann

$$[\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times n}. \tag{23}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (22) zudem

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}) &= \mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right) - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\left[\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}-\mathbf{Z})\right]^T\\ &= \mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right) - \mathbf{0}_{n\times 1}\mathbf{0}_{1\times n}\\ &= \mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right).\end{aligned} \tag{24}$$

Aus (24) und *(f)* folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left([\mathbf{Y}-\mathbf{Z}][\mathbf{Y}-\mathbf{Z}]^T\right) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) - \mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{X})\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\right]^+ \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{Y}). \tag{25}$$

Wegen (23) und (25) ist dann *(g)* bewiesen.

Zu *(h)*: Aufgrund der Wahl von $\mathbf{Y}$ bzw. wegen (4) ergeben sich mittels Teil *(c)* von Satz 5.4.2 dann

$$\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times n} \tag{26}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Y},\mathbf{Y}) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right) - \mathrm{E}_P(\mathbf{Y})\cdot\mathrm{E}_P(\mathbf{Y})^T \tag{27}$$

bzw.

$$\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times n} \tag{28}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{Z},\mathbf{Z}) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\right) - \mathrm{E}_P(\mathbf{Z})\cdot\mathrm{E}_P(\mathbf{Z})^T. \tag{29}$$

Unter Verwendung von (24), *(e)*, (27), (29) und (14) folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\right]\left[\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\right]^T\right) &= \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{Y}-\mathbf{Z},\mathbf{Y}-\mathbf{Z}\right) = \mathrm{Cov}\left(\mathbf{Y},\mathbf{Y}\right) - \mathrm{Cov}\left(\mathbf{Z},\mathbf{Z}\right) \\ &= \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right) - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)\cdot\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\right)^T \\ &\quad - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\right) + \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\right)\cdot\mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\right)^T \\ &= \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Y}\mathbf{Y}^T\right) - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{Z}\mathbf{Z}^T\right). \end{aligned} \tag{30}$$

Wegen (26), (28) und (30) ist dann *(h)* bewiesen. □

Das nachfolgende Resultat vermittelt wesentliche Aufschlüsse über die Rolle des Korrelationskoeffizienten zweier Zufallsvariablen $X, Y \in \mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)$. Es zeigt nämlich, wie durch diesen *affine* Zusammenhänge zwischen X und Y reflektiert werden.

Satz 5.4.19. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $X, Y \in \mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei* $\mathrm{Var}_P\left(X\right) \neq 0$. *Dann gibt es eine* eindeutig bestimmte *beste lineare Approximation Z von Y durch X, nämlich*

$$Z = \frac{\mathrm{Cov}_P\left(Y,X\right)}{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}\left[X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right] + \mathrm{E}_P\left(Y\right).$$

(b) *Sei* $\mathrm{Var}_P\left(X\right) = 0$. *Dann ist* $\left\{B\left(X - \mathrm{E}_P\left(X\right)\right) + \mathrm{E}_P\left(Y\right) \mid B \in \mathbb{R}\right\}$ *die Menge der besten linearen Approximationen von Y durch X.*

(c) *Sei* $\mathrm{Var}_P\left(Y\right) \neq 0$ *und Z eine beste lineare Approximation von Y durch X. Dann gilt:*

(c1) *Es ist* $\frac{\mathrm{Var}_P(Z)}{\mathrm{Var}_P(Y)} = \left[\mathrm{Cor}_P\left(X,Y\right)\right]^2$.

(c2) *Sei* $\left|\mathrm{Cor}_P\left(X,Y\right)\right| = 1$, *dann ist* $\left\{Y \neq Z\right\} \in \mathcal{N}_P$.

Beweis. Wegen Teil *(c)* Lemma 5.2.3 gelten

$$\mathrm{Cov}_P\left(X,X\right) = \mathrm{Var}_P\left(X\right) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(Y\right) = \mathrm{Var}_P\left(Y\right). \tag{2}$$

Zu *(a)*: Wegen (1) ist die Behauptung von *(a)* eine Konsequenz aus Bemerkung 5.4.10.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(d)* von Satz 5.2.7 gilt

$$0 \leq \left|\mathrm{Cov}_P\left(X,Y\right)\right| \leq \sqrt{\mathrm{Var}_P\left(X\right)}\cdot\sqrt{\mathrm{Var}_P\left(Y\right)}. \tag{3}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\mathrm{Var}_P\left(X\right) = 0. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(Y,X\right) = 0. \tag{5}$$

Aus (1) und (5) folgt

$$\mathrm{Cov}_P\left(X,X\right) = 0. \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) gilt dann

$$\{B \in \mathbb{R} \,|\, B \cdot \mathrm{Cov}_P(X,X) = \mathrm{Cov}_P(Y,X)\} = \mathbb{R}. \tag{7}$$

Weiterhin ist

$$\{BX + [\mathrm{E}_P(Y) - B \cdot \mathrm{E}_P(X)] \,|\, B \in \mathbb{R}\} = \{B(X - \mathrm{E}_P(X)) + E_P(Y) \,|\, B \in \mathbb{R}\}. \tag{8}$$

Wegen (7), (8) und Definition 5.4.7 ist dann $\{B(X - \mathrm{E}_P(X)) + E_P(Y) \,|\, B \in \mathbb{R}\}$ die Menge aller besten linearen Approximationen von Y durch X.

Zu *(c1)*: Sei zunächst

$$\mathrm{Var}_P(X) \neq 0. \tag{9}$$

Wegen (9) folgt aus *(a)* dann

$$Z = \frac{\mathrm{Cov}_P(Y,X)}{\mathrm{Var}_P(X)} = [X - \mathrm{E}_P(X)] + \mathrm{E}_P(Y). \tag{10}$$

Unter Verwendung von (10), Satz 5.2.4, Folgerung 5.2.2 und Teil *(b)* von Satz 5.2.7 ergibt sich

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_P(Z) &= \mathrm{Var}_P\left(\frac{\mathrm{Cov}_P(Y,X)}{\mathrm{Var}_P(X)} = [X - \mathrm{E}_P(X)] + \mathrm{E}_P(Y)\right) \\ &= \left[\frac{\mathrm{Cov}_P(Y,X)}{\mathrm{Var}_P(X)}\right]^2 \mathrm{Var}_P(X - \mathrm{E}_P(X)) \\ &= \left[\frac{\mathrm{Cov}_P(Y,X)}{\mathrm{Var}_P(X)}\right]^2 \mathrm{Var}_P(X) = \frac{\mathrm{Cov}_P(Y,X)^2}{\mathrm{Var}_P(X)} = \frac{\mathrm{Cov}_P(X,Y)^2}{\mathrm{Var}_P(X)}. \end{aligned} \tag{11}$$

Unter Verwendung von (11) und Definition 5.4.3 ergibt sich

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Var}_P(Z)}{\mathrm{Var}_P(Y)} &= \frac{1}{\mathrm{Var}_P(Y)} \frac{\mathrm{Cov}_P(X,Y)^2}{\mathrm{Var}_P(X)} = \left[\frac{\mathrm{Cov}_P(X,Y)}{\sqrt{\mathrm{Var}_P(X)}\sqrt{\mathrm{Var}_P(Y)}}\right]^2 \\ &= \mathrm{Cor}_P(X,Y)^2. \end{aligned} \tag{12}$$

Sei nun

$$\mathrm{Var}_P(X) = 0. \tag{13}$$

Wegen (13) gilt nach Definition 5.4.3 dann

$$\mathrm{Cor}_P(X,Y) = 0. \tag{14}$$

Wegen (13) gilt nach *(b)* dann:

(I) Es ist $Z_0 := [\mathrm{E}_P(Y)] \cdot 1_\Omega$ ist eine beste lineare Approximation von Y durch X.

Aus der Gestalt von Z_0 erkennt man, dass

$$P_{Z_0} = \varepsilon_{E_P(Y),\mathfrak{B}_1}. \tag{15}$$

Wegen (15) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.2.2 dann

$$\mathrm{Var}_P(Z_0) = 0. \tag{16}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 5.4.18 und *(I)* gilt

$$\{Z_0, Z\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{17}$$

Wegen *(I)* gilt nach Teil *(c)* von Satz 5.4.13 dann

$$\{Z \neq Z_0\} \in \mathcal{N}_P. \tag{18}$$

Wegen (17) und (18) liefert Bemerkung 5.2.5 dann $\mathrm{Var}_P(Z) = \mathrm{Var}_P(Z_0)$. Hieraus folgt wegen (16) dann

$$\mathrm{Var}_P(Z) = 0. \tag{19}$$

Unter Beachtung von (19) und (14) folgt nun

$$\frac{\mathrm{Var}_P(Z)}{\mathrm{Var}_P(Y)} = \frac{0}{\mathrm{Var}_P(Y)} = 0 = \mathrm{Cov}_P(X, Y)^2. \tag{20}$$

Wegen (9), (12), (13) und (20) ist dann *(c1)* bewiesen.

Zu *(c2)*: Wegen $|\mathrm{Cov}_P(X; Y)| = 1$ folgt aus *(c1)* dann

$$\mathrm{Var}_P(Z) = \mathrm{Var}_P(Y). \tag{21}$$

Wegen Teil *(a)* bzw. *(d)* von Satz 5.4.18 gilt

$$Z \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{22}$$

bzw.

$$Y - Z \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{23}$$

Wegen Teil *(d)* von Satz 5.4.18 gilt

$$\mathrm{Cov}_P(Y - Z, Y - Z) = \mathrm{Cov}_P(Y, Y) - \mathrm{Cov}_P(Z, Z). \tag{24}$$

Wegen (22) bzw. (23) gilt nach Teil *(c)* von Lemma 5.2.3 dann

$$\mathrm{Cov}_P(Z, Z) = \mathrm{Var}_P(Z) \tag{25}$$

bzw.

$$\mathrm{Cov}_P(Y - Z, Y - Z) = \mathrm{Var}_P(Y - Z). \tag{26}$$

Unter Verwendung von (26), (24), (2), (25) und (21) folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Var}_P(Y - Z) &= \mathrm{Cov}_P(Y - Z, Y - Z) = \mathrm{Cov}_P(Y, Y) - \mathrm{Cov}_P(Z, Z) \\ &= \mathrm{Var}_P(Y) - \mathrm{Var}_P(Z) = 0. \end{aligned} \tag{27}$$

Wegen (27) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.2.2 dann

$$P_{Y-Z} = \varepsilon_{\mathrm{E}_P(Y-Z), \mathfrak{B}_1}. \tag{28}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 5.4.18 gilt

$$\mathrm{E}_P(Y) = \mathrm{E}_P(Z). \tag{29}$$

Wegen Satz 5.1.4 gilt

$$\mathrm{E}_P(Y - Z) = \mathrm{E}_P(Y) - \mathrm{E}_P(Z). \tag{30}$$

Aus (29) und (30) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\,(Y-Z)=0. \tag{31}$$

Aus (28) und (31) folgt dann

$$P_{Y-Z}=\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}. \tag{32}$$

Aufgrund der $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von Y und Z gilt nach Folgerung M.17.1 dann

$$\{Y\neq Z\}\in\mathfrak{A}. \tag{33}$$

Unter Beachtung von (32) und (33) folgt dann

$$\begin{aligned}P\,(\{Y\neq Z\})&=P\,(\{Y-Z\neq 0\})\\&=P\left((Y-Z)^{-1}\,(\mathbb{R}\setminus\{0\})\right)=P\,[Y-Z]\,(\mathbb{R}\setminus\{0\})\\&=P_{Y-Z}\,(\mathbb{R}\setminus\{0\})=\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\,(\mathbb{R}\setminus\{0\})=0.\end{aligned}$$

Somit ist also $\{Y\neq Z\}\in\mathcal{N}_P$. □

Wir knüpfen nun nochmals auf die Thematik des Lemma 5.4.8 an. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $T_1,T_2\in\mathrm{Abb}\,(\Omega,\Omega')$ jeweils $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar. Falls sich T_1 und T_2 auf der „μ-Skala" nicht unterscheiden, so zeigt Lemma 5.4.8, dass dann auch die Bildmaße μ_{T_1} und μ_{T_2} übereinstimmen. Wir zeigen nun, dass die Umkehrung dieses Resultats *nicht* gültig ist. Es wird sich zeigen, dass die Bildmaße μ_{T_1} und μ_{T_2} sogar in Situationen übereinstimmen können, in denen die Abbildungen T_1 und T_2 in keinem einzigen Punkt $\omega\in\Omega$ übereinstimmen. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Lemma 5.4.9. *Seien $n\in\mathbb{N}$ und $\Omega_n:=\mathbb{N}_{1,n}$. Es bezeichne μ_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n,\mathfrak{P}\,(\Omega_n))$. Weiter sei $T\colon\Omega_n\longrightarrow\Omega_n$, dann gilt:*

(a) *Es ist T eine $\mathfrak{P}\,(\Omega_n)$-$\mathfrak{P}\,(\Omega_n)$-messbare Abbildung und*

$$T_{\mu_n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{T(j),\mathfrak{P}(\Omega_n)}$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *T ist eine Bijektion.*

(ii) *$T_{\mu_n}=\mu_n$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a3)* von Satz M.16.1 ist T eine $\mathfrak{P}\,(\Omega_n)$-$\mathfrak{P}\,(\Omega_n)$-messbare Abbildung. Nach Konstruktion gilt

$$\mu_n=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{j,\mathfrak{P}(\Omega_n)}. \tag{1}$$

Wegen (1) ergibt sich mittels Beispiel M.16.6 dann

$$T_{\mu_n}=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\varepsilon_{T(j),\mathfrak{P}(\Omega_n)}. \tag{2}$$

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Wegen *(i)* nimmt die Folge $(T(j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ genau die Werte $\mathbb{N}_{1,n}$ an. Hieraus folgt in Verbindung mit (2) und (1) dann

$$T_{\mu_n} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{T(j),\mathfrak{P}(\Omega_n)} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j,\mathfrak{P}(\Omega_n)} = \mu_n.$$

Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wir gehen indirekt vor und nehmen an T wäre nicht bijektiv. Da Ω_n endlich ist, wäre dann $\Omega_n \backslash T(\Omega_n) \neq \varnothing$. Sei nun $k \in \Omega_n \backslash T(\Omega_n)$. Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt dann $T(j) \neq k$ und somit also

$$\varepsilon_{T(j),\mathfrak{P}(\Omega_n)}(\{k\}) = 0.$$

Hieraus folgt wegen (2) dann

$$T_{\mu_n}(\{k\}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{T(j),\mathfrak{P}(\Omega_n)}(\{k\}) = 0$$

während wegen (1) andererseits

$$T_{\mu_n}(\{k\}) = \mu_n(\{k\}) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{j,\mathfrak{P}(\Omega_n)}(\{k\}) = \frac{1}{n}.$$

erfüllt wäre, was im Widerspruch zu *(ii)* stünde. Somit war die Annahme falsch und es gilt *(i)*. □

Beispiel 5.4.3. Seien $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ sowie $\Omega_n = \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gelten:

(a) Es sei $T_1 := \mathrm{Id}_{\Omega_n}$ und es sei $T_2 \colon \Omega_n \longrightarrow \Omega_n$ definiert gemäß

$$T_2(j) := \begin{cases} j+1, & \text{falls } j \in \mathbb{N}_{1,n-1}, \\ 1, & \text{falls } j = n. \end{cases}$$

Dann sind T_1 und T_2 Bijektionen von Ω_n, welche für alle $j \in \Omega_n$ der Beziehung

$$T_1(j) \neq T_2(j).$$

genügen.

(b) Die Abbildungen T_1 und T_2 sind jeweils $\mathfrak{P}(\Omega_n)$-$\mathfrak{P}(\Omega_n)$-messbar.

(c) Es bezeichne μ_n die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_n, \mathfrak{P}(\Omega_n))$. Dann gilt

$$T_1[\mu_n] = T_2[\mu_n].$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt per Konstruktion von T_1 und T_2.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Teil *(a3)* von Satz M.16.1.

Zu *(c)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Lemma 5.4.9. □

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Ein zentrales Thema dieses Abschnittes befasste sich mit der Bestimmung bester matrixlineare Approximationen von $\mathbf{Y}$ durch $\mathbf{X}$. Nachfolgend soll nun *skizziert* werden, dass die Existenz derartiger Elemente auch aus einen allgemeinen Prinzip der Funktionalanalysis gefolgert werden kann.

Definition 5.4.9. Seien $p \in \mathbb{N}$ und M eine nichtleere Menge. Dann heißt M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-*Modul*, falls

1. Es ist eine Addition „+" auf M derart erklärt, dass $(M, +)$ eine kommutative Gruppe ist.
2. Es ist eine Linksmultiplikation mit Elementen aus $\mathbb{R}^{p\times p}$ erklärt, so dass jedem Element $(\mathbf{A}, x) \in \mathbb{R}^{p\times p} \times M$ ist in eindeutigerweise ein Element $\mathbf{A}x$ zugeordnet, wobei folgende Eigenschaften erfüllt seien:
   (i) Für alle $x \in M$ und alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ gilt
   $$(\mathbf{A} + \mathbf{B})\, x = \mathbf{A}x + \mathbf{B}x.$$
   (ii) Für alle $x, y \in M$ und alle $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ gilt
   $$\mathbf{A}\,(x + y) = \mathbf{A}x + \mathbf{A}y.$$
   (iii) Für alle $x \in M$ und alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ gilt
   $$\mathbf{A}\,(\mathbf{B}x) = (\mathbf{AB})\, x.$$
   (iv) Für alle $x \in M$ gilt
   $$\mathbf{I}_p x = x.$$

Bemerkung 5.4.15. Seien $p \in \mathbb{N}$ und M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul. Auf M werde folgenderweise Vielfachbildung mit Elementen aus $\mathbb{R}$ erklärt. Für $\alpha \in \mathbb{R}$ und $x \in M$ sei $\alpha \cdot x := (\alpha \mathbf{I}_p)\, x$. Dann ist M mit der durch die Modulstruktur aufgeprägten Addition und der eben definierten Vielfachbildung also ein linearer Vektorraum über $\mathbb{R}$. ♣

Bemerkung 5.4.16. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie V ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ (mit Addition „+" und Vielfachbildung „$\cdot$" mit Elementen aus $\mathbb{R}$). Seien

$$\mathbf{x} = (x_{j,k})_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}} \quad \text{und} \quad \mathbf{y} = (y_{j,k})_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}}$$

Elemente aus $V^{p\times q}$ sowie $\mathbf{A} = (a_{r,s})_{r,s\in\mathbb{N}_{1,r}} \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Definiert man dann

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} := (x_{j,k} + y_{j,k})_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}}$$

und

$$\mathbf{A}\mathbf{x} := \left(\sum_{s=1}^{p} a_{r,s} x_{s,t}\right)_{\substack{r\in\mathbb{N}_{1,p}\\ s\in\mathbb{N}_{1,q}}}.$$

mit den eben definierten Operationen ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul. ♣

Bemerkung 5.4.17. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $s \in [1, +\infty)$. Weiter seien $p, q \in \mathbb{N}$. Dann ist $[\mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})]^{p\times q}$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul. ♣

Definition 5.4.10. Seien $p \in \mathbb{N}$ und M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul. Weiterhin sei L eine nichtleere Teilmenge von M. Dann heißt L ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M, falls L mit der in M definierten Operation selbst ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul ist.

Unsere nächsten Überlegungen sind nun darauf gerichtet, auf linken $\mathbb{R}^{p\times p}$-Moduln ein *matrizielles* Analogon eines Semiskalar- bzw. Skalarporduktes einzuführen.

Definition 5.4.11. Seien $p \in \mathbb{N}$ und M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul. Weiter sei $\langle .,. \rangle_L : M \times M \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times p}$. Dann heißt $\langle .,. \rangle_L$ eine *linke Sesquilinearform* auf M, falls für alle $x, y, z \in M$ und alle $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ dann die Beziehungen

(I) $\langle \mathbf{A}x + \mathbf{B}y, z\rangle_L = \mathbf{A}\langle x, z\rangle_L + \mathbf{B}\langle y, z\rangle_L$,

(II) $\langle z, \mathbf{A}x + \mathbf{B}y\rangle_L = \langle z, x\rangle_L \cdot \mathbf{A}^T + \langle z, y\rangle \cdot \mathbf{B}^T$

bestehen.

Definition 5.4.12. Sei $p \in \mathbb{N}$ und M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul sowie $\langle .,. \rangle_L$ eine linke Sesquilinearform auf M.

(a) Es heißt $\langle .,. \rangle_L$ *symmetrisch*, falls für alle $x, y \in M$ gilt

$$\langle x, y\rangle_L = \langle y, x\rangle_L^T.$$

(b) Es heißt $\langle .,. \rangle_L$ *positiv semidefinit*, falls für alle $x \in M$ dann $\langle x, x\rangle_L \in \mathbb{R}_{\geq}^{p\times p}$.

(c) Es bezeichne $\mathcal{O}$ das Nullelement in M. Dann heißt $\langle .,. \rangle_L$ *stark positiv semidefinit*, falls für alle $x \in M\setminus\{\mathcal{O}\}$ gilt $\langle x, x\rangle_L \in \mathbb{R}_{\geq}^{p\times p}\setminus\{\mathbf{O}_{p\times p}\}$.

(d) Sei $\langle .,. \rangle_L$ positiv semidefinit bzw. stark positiv semidefinit. Dann heißt $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein *linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul* bzw. *linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Prähilbertmodul*.

Satz 5.4.20. *Seien $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul bzw. ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Prähilbertmodul. Dann ist $(M, \operatorname{tr}[\langle .,. \rangle_L])$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$ bzw. Prähilbertraum über $\mathbb{R}$.*

Definition 5.4.13. Sei $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul bzw. ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Prähilbertmodul. Dann heißt $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein *linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semihilbertmodul* bzw. ein *linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Hilbertmodul*, falls $(M, \operatorname{tr}[\langle .,. \rangle_L])$ ein Semihilbertraum bzw. Hilbertraum über $\mathbb{R}$ ist.

Bemerkung 5.4.18. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Die Abbildung

$$\langle .,. \rangle_L : \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q} \times \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q} \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times p}$$

sei definiert gemäß

$$(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) \longmapsto \int_\Omega \mathbf{X} \cdot \mathbf{Y}^T \mathrm{d}\mu.$$

Dann ist $\left(\left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}, \langle .,. \rangle_L\right)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semihilbertmodul. ♣

Definition 5.4.14. Seien $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul.

(a) Seien $x, y \in M$. Dann heißen x und y *orthogonal in* $(M, \langle .,. \rangle_L)$, falls $\langle x, y\rangle_L = \mathbf{O}_{p\times p}$ erfüllt ist.

(b) Sei $\mathfrak{M} \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\}$. Dann bezeichnet $\mathfrak{M}^{\perp}$ die Menge aller $x \in M$, welche für jedes $y \in \mathfrak{M}$ der Beziehung $\langle x, y\rangle_L = \mathbf{O}_{p\times p}$ genügen.

Satz 5.4.21. *Seien $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul. Weiter sei $\mathfrak{N} \in \mathfrak{P}(M) \setminus \{\varnothing\}$. Dann ist $\mathfrak{N}^{\perp}$ ein in $(M, \operatorname{tr}[\langle .,. \rangle_L])$ abgeschlossener linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M.*

Satz 5.4.22 (Orthoprojektionssatz im linken $\mathbb{R}^{p\times p}$-Hilbertmodul)**.** *Seien $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Hilbertmodul. Weiter sei $\mathfrak{N}$ ein in $(M, \operatorname{tr}[\langle .,. \rangle_L])$ abgeschlossener linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M. Dann gilt:*

(a) *Es ist*
$$\mathfrak{N}^{\perp} = \{x \in M \mid \operatorname{tr}[\langle x, y\rangle_L] = 0 \text{ für alle } y \in \mathfrak{N}\}.$$

(b) *Es ist $\mathfrak{N}^{\perp}$ ein in $(M, \operatorname{tr}[\langle .,. \rangle_L])$ abgeschlossener linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M, für den $\mathfrak{N} \oplus \mathfrak{N}^{\perp} = M$ erfüllt ist. Dabei bezeichne „$\oplus$" die direkte Summe.*

(c) *Sei $x_0 \in M$. Dann gilt:*

(c1) *Es gibt **eindeutig** bestimmte $y_0 \in \mathfrak{N}$ und $z_0 \in \mathfrak{N}^{\perp}$ mit $x_0 = y_0 + z_0$.*

(c2) *Sei $y \in \mathfrak{N}$. Dann gilt*
$$\langle x_0 - y, x_0 - y\rangle_L - \langle x_0 - y_0, x_0 - y_0\rangle_L = \langle y - y_0, y - y_0\rangle_L.$$

(c3) *Sei $y \in \mathfrak{N}$. Dann gilt*
$$\langle x_0 - y, x_0 - y\rangle_L \geqq \langle x_0 - y_0, x_0 - y_0\rangle_L$$
und die Gleichheit gilt genau dann, wenn $y = y_0$.

(d) *Es ist $\left(\mathfrak{N}^{\perp}\right)^{\perp} = \mathfrak{N}$.*

Satz 5.4.23. *Seien $p \in \mathbb{N}$, M ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul und L ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M. Für $(x, y) \in M \times M$ gelte $x \sim_L y$, falls $x - y \in L$ erfüllt ist. Dann gilt:*

(a) *Es ist „$\sim_L$" eine Äquivalenzrelation auf M.*

(b) *Seien $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ so gewählt, dass $x_1 \sim_L y_1$ und $x_2 \sim_L y_2$ erfüllt ist. Dann gilt $x_1 + x_2 \sim_L y_1 + y_2$.*

(c) *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$. Weiter seien $x, y \in M$ so gewählt, dass $x \sim_L y$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathbf{A}x \sim_L \mathbf{A}y$.*

(d) *Es bezeichne ${}^{M}\!/_{L}$ die Menge aller Äquivalenzklassen bezüglich „$\sim_L$". Für $u \in M$ bezeichne $\langle u\rangle_L$ die durch u erzeugte Äquivalenzklasse bezüglich „$\sim_L$". Unter Beachtung von* (b) *definieren wir nun für $\langle x\rangle_L, \langle y\rangle_L \in {}^{M}\!/_{L}$ dann $\langle x\rangle_L + \langle y\rangle_L := \langle x + y\rangle_L$. Unter Beachtung von* (c) *definieren wir für $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times p}$ und $\langle x\rangle_L \in {}^{M}\!/_{L}$ dann $\mathbf{A}\langle x\rangle_L := \langle \mathbf{A}x\rangle_L$. Dann ist ${}^{M}\!/_{L}$ mit den so definierten Operationen ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Modul, welcher auch als Faktormodul von M nach L bezeichnet wird.*

Satz 5.4.24. *Seien $p \in \mathbb{N}$ und $(M, \langle .,. \rangle_L)$ ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Semiprähilbertmodul. Dann gilt:*

(a) *Sei $U := \{x \in M \mid \langle x, x\rangle_L = \mathbf{O}_{p\times p}\}$. Dann ist U ein linker $\mathbb{R}^{p\times p}$-Untermodul von M.*

(b) *Seien* $x_1, x_2, y_1, y_2 \in M$ *so gewählt, dass* $x_1 \sim_U y_1$ *und* $x_2 \sim_U y_2$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$\langle x_1, y_1 \rangle_L = \langle x_2, y_2 \rangle_L .$$

(c) *Unter Beachtung von* (b) *sei die Abbildung* $(.,.)_L : {}^M\!/_U \times {}^M\!/_U \longrightarrow \mathbb{R}^{p\times p}$ *definiert gemäß* $(\langle x \rangle_U , \langle y \rangle_U) \longmapsto \langle x, y \rangle_L$ *. Dann gilt:*

(c1) *Es ist* $({}^M\!/_U, (.,.)_L)$ *ein linker* $\mathbb{R}^{p\times p}$*-Prähilbertmodul.*

(c2) *Sei* $(M, \langle .,. \rangle_L)$ *ein linker* $\mathbb{R}^{p\times p}$*-Semiprähilbertmodul. Dann ist* $({}^M\!/_U, (.,.)_L)$ *ein linker* $\mathbb{R}^{p\times p}$*-Hilbertmodul.*

Wir kommen nun vor dem Hintergrund von Hilbertmoduln nochmals auf Satz 5.4.12 zurück. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in [\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in [\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})]^{n\times 1}$. Mit der Konstruktion von Bemerkung 5.4.18 ist dann

$$\left(\left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}, \langle .,. \rangle_L \right)$$

ein linker $\mathbb{R}^{n\times n}$-Semihilbertmodul. Sei jetzt

$$U := \left\{ \mathbf{V} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1} \mid \langle \mathbf{V}, \mathbf{V} \rangle_L = \mathbf{O}_{n\times n} \right\}.$$

Dann ist U ein linker $\mathbb{R}^{n\times n}$-Untermodul von $\left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$. Es ist

$$\left({}^{\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}}\!/_U, (.,.)_L \right)$$

ein linker $\mathbb{R}^{n\times n}$-Hilbertmodul. Weiterhin ist

$$L := \left\{ \langle \mathbf{AX} + \mathbf{b} \cdot 1_\Omega \rangle_U \mid (\mathbf{A}, \mathbf{b}) \in \mathbb{R}^{n\times m} \times \mathbb{R}^n \right\}$$

ein linker $\mathbb{R}^{n\times n}$-Untermodul von ${}^{\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}}\!/_U$, welcher abgeschlossen in

$$\left({}^{\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}}\!/_U, \operatorname{tr}\left[\langle .,. \rangle_L\right] \right)$$

ist. Die Aussage von Teil *(e6)* von Satz 5.4.12 lässt sich dann auch durch Anwendung von Teil *(c)* von Satz 5.4.22 auf $\mathbf{Y}$ und L im linken $\mathbb{R}^{n\times n}$-Hilbertmodul

$$\left({}^{\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{n\times 1}}\!/_U, (.,.)_L \right)$$

gewinnen.

6. Stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen

6.1. Stochastisch unabhängige Ereignissysteme

Wir knüpfen in diesen Abschnitt an unsere früheren Betrachtungen zur stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissen an (vgl. Abschnitt 2.2). Hinsichtlich unserer weiteren Zielstellungen wird es nützlich sein, dass Phänomen der stochastischen Unabhängigkeit in einem weiteren Rahmen, nämlich im Kontext von Ereignissystemen zu diskutieren. Diesem Anliegen ist der vorliegende Abschnitt gewidmet.

Wir verallgemeinern nun Definition 2.2.1:

Definition 6.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Dann heißt $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P, falls für jede nichtleere endliche Teilmenge von I mit den Elementen $i_1, \ldots, i_n$ und jede mögliche Wahl von Ereignissen $A_{i_1} \in \mathfrak{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathfrak{E}_{i_n}$ die Beziehung

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)$$

besteht. Im dem Fall, dass für jedes $k \in I$ die Menge $\mathfrak{E}_k$ einelementig ist, wird man wieder auf Definition 2.2.3 zurückgeführt.

Bemerkung 6.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine Familie von bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen und τ eine Bijektion der Indexmenge I. Dann ist die Familie $\left(\mathfrak{E}_{\tau(k)}\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Bemerkung 6.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

- *(i)* Die Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.
- *(ii)* Für jede nichtleere endliche Teilmenge I' von I, ist $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(b) Sei *(i)* erfüllt. Dann gilt:

- *(b1)* Für $k \in I$ sei $\mathfrak{E}'_k$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{E}_k$. Dann ist $(\mathfrak{E}'_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.
- *(b2)* Sei J eine nichtleere Teilmenge von I. Dann ist $(\mathfrak{E}_k)_{k\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Wir wollen nun untersuchen, inwieweit die stochastische Unabhängigkeit einer Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ erhalten bleibt, wenn man jedes Ereignissystem $\mathfrak{E}_k$ in konkret vorgegebener Weise zu einem Ereignissystem $\widetilde{\mathfrak{E}}_k$ vergrößert. Hierbei interessiert uns insbesondere der Übergang zu den erzeugten σ-Algebren $\sigma_\Omega(\mathfrak{E}_k)$.

Den entscheidenden Schritt in die gewünschte Richtung liefert das nachfolgende Resultat über die stochastische Unabhängigkeit der erzeugten DYNKIN-Systeme.

Satz 6.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Dann ist auch die Familie $(\delta_\Omega(\mathfrak{E}_k))_{k\in I}$ der von $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ erzeugten* DYNKIN*-Systeme in Ω stochastisch unabhängig bezüglich P.*

BEWEIS. Wir beweisen diesen Satz, der eine Aussage über DYNKIN-Systeme ist, mittels der Technik der DYNKIN-Systeme (vgl. Abschnitt M.9).

Sein I' eine nichtleere *endliche* Teilmenge von I. Wegen Teil *(a)* von Bemerkung 6.1.2 ist dann das System $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Sei nun $i_0 \in I'$ und bezeichne $\mathfrak{D}_{i_0}$ die Menge aller $E \in \mathfrak{A}$ mit folgender Eigenschaft:

(i) Ersetzt man in der Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ die Menge $\mathfrak{E}_{i_0}$ durch $\{E\}$, so ist die neu enstehende Familie stochastisch unabhängig bezüglich P.

Da die Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, ergibt sich damit insbesondere, dass

$$\mathfrak{E}_{i_0} \subseteq \mathfrak{D}_{i_0}. \tag{1}$$

Wegen $\mathfrak{E}_{i_0} \neq \varnothing$ folgt aus (1) dann $\mathfrak{D}_{i_0} \neq \varnothing$. Aus der Definition von $\mathfrak{D}_{i_0}$ erkennt man dan sogleich, dass diejenige Familie stochastisch unabhängig bezüglich P ist, die man erhält indem man in der Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ das Mengensystem $\mathfrak{E}_{i_0}$ durch $\mathfrak{D}_{i_0}$ ersetzt.

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{D}_{i_0}$ ein DYNKIN-System in Ω ist. Ist dies gezeigt, so folgt wegen (1) dann mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann $\delta_\Omega(\mathcal{E}_{i_0}) \subseteq \mathfrak{D}_{i_0}$. Damit ergibt sich mittels *(b1)* von Bemerkung 6.1.2 dann, dass diejenige Familie stochastisch unabhängig bezüglich P ist, die man aus $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I'}$ dadurch erhält, in dem man $\mathfrak{E}_{i_0}$ durch $\delta_\Omega(\mathfrak{E}_{i_0})$ ersetzt. Dieses Resultat wendet man nun auf die neu entstandene Familie und einen von i_0 verschiedenen Index $j_0 \in I'$ an. Fahren wir nun in dieser Weise fort, so erhalten wir nach endlich vielen Schritten, dass die Familie $(\delta_\Omega(\mathfrak{E}_k))_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig ist. Da I' eine beliebige endliche Teilmenge von I ist, liefert Teil *(a)* von Bemerkung 6.1.2 dann, dass die Familie $(\delta_\Omega(\mathfrak{E}_k))_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Es ist also lediglich noch der Nachweis dafür zu erbringen, dass $\mathfrak{D}_{i_0}$ ein DYNKIN-System in Ω ist. Dies soll nun geschehen: Wir zeigen zunächst, dass $\Omega \in \mathfrak{D}_{i_0}$ ist. Sei J eine nichtleere endliche Teilmenge von $I'\backslash\{i_0\}$ mit den Elementen $i_1, \ldots, i_n$. Aufgrund von Teil *(a)* Bemerkung 6.1.2 ist dann die Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Seien $A_{i_1} \in \mathfrak{E}_{i_1}, \ldots, A_{i_n} \in \mathfrak{E}_{i_n}$. Dann gilt also

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right). \tag{2}$$

Unter Beachtung von $\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j} = \left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap \Omega$ sowie (2) und $P(\Omega) = 1$ folgt dann

$$P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap \Omega\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right) = \left[\prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)\right] P(\Omega). \tag{3}$$

Wegen (3) ist dann also

$$\Omega \in \mathfrak{D}_{i_0}. \tag{4}$$

Nun zeigen wir, dass $\mathfrak{D}_{i_0}$ komplementiert ist, also dass für $E \in \mathfrak{D}_{i_0}$ auch $\Omega\backslash E \in \mathfrak{D}_{i_0}$ ist. Sei also

$$E \in \mathfrak{D}_{i_0}. \tag{5}$$

Weiter sei J sowie $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ wie gerade gewählt. Wegen (5) gilt dann

$$P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E\right) = \left[\prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)\right] P(E). \tag{6}$$

Es gelten

$$\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap (\Omega\backslash E) = \left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \setminus \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E\right) \tag{7}$$

und

$$\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) \cap E \subseteq \bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}. \tag{8}$$

Unter Beachtung (7), (8) und der Subtraktivität des *endlichen* Maßes P sowie von (2), (6) und $P(\Omega\backslash E) = 1 - P(E)$ folgt dann

$$\begin{aligned} P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap (\Omega\backslash E)\right) &= P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \setminus \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E\right)\right) \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) - P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right) - \left[\prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)\right] P(E) \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)\right] P(\Omega\backslash E). \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (9) ist dann

$$\Omega\backslash E \in \mathfrak{D}_{i_0}. \tag{10}$$

Schließlich muss gezeigten werden, dass für paarweise disjunkte Ereignissen aus $\mathfrak{D}_{i_0}$ auch deren Vereinigung wieder in $\mathfrak{D}_{i_0}$ ist. Sei also $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für $k \in \mathbb{N}$ ist $E_k \in \mathfrak{D}_{i_0}$.

(II) Für $k, l \in \mathbb{N}$ und $k \neq l$ ist $E_k \cap E_l = \varnothing$.

Seien J sowie $A_{i_1}, \ldots, A_{i_n}$ wie oben gewählt. Für

$$k \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

gilt wegen *(I)* dann

$$P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right) = \left[\prod_{j=1}^{n} P\left(A_{i_j}\right)\right] P(E_k). \tag{12}$$

Weiterhin ist

$$\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right] = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right). \tag{13}$$

Sei

$$(k,l) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N} \tag{14}$$

so gewählt, dass

$$k \neq l \tag{15}$$

erfüllt ist. Wegen (14) und (15) folgt aus *(II)* dann $E_k \cap E_l = \varnothing$. Hieraus folgt dann

$$\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right) \cap \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_l\right) = \varnothing. \tag{16}$$

Aufgrund der σ-Additivität von P gilt wegen *(II)* nun

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) \tag{17}$$

sowie wegen (14) bis (16) weiterhin

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right). \tag{18}$$

Unter Beachtung von (13), (18), (11), (12) und (17)folgt dann

$$\begin{aligned} P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right]\right) &= P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right)\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right] \cap E_k\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) P(E_k) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) \sum_{k=1}^{\infty} P(E_k) \\ &= P\left(\bigcap_{j=1}^{n} A_{i_j}\right) P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Wegen (19) ist also

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k \in \mathfrak{D}_{i_0}. \tag{20}$$

Wegen (4), (5), (10), *(I)*, *(II)* und (20) ist $\mathfrak{D}_{i_0}$ dann ein Dynkin-System in Ω. Aufgrund unserer obigen Ausführung ist dann alles gezeigt. □

Folgerung 6.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $k \in I$ das Mengensystem $\mathfrak{E}_k$ sogar durchschnittsstabil ist. Dann ist auch die Familie $(\sigma_\Omega(\mathfrak{E}_k))_{k\in I}$, der von $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ erzeugten σ-Algebren stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Wegen Satz 6.1.1 ist die Familie $(\delta_\Omega(\mathfrak{E}_k))_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Nach Satz M.9.6 gilt wegen der Durchschnittsstabilität für jedes $k \in I$

$$\delta_\Omega(\mathfrak{E}_k) = \sigma_\Omega(\mathfrak{E}_k).$$

Dies liefert die Behauptung. □

Wir zeigen nun anhand eines konkreten Beispiels, dass die Voraussetzung der Durchschnittsstabilität der $\mathfrak{E}_k$ in Folgerung 6.1.1 unverzichtbar ist.

Beispiel 6.1.1. Seien $I := [0,1)$, $\mathfrak{B}_{1,I} := \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I := \lambda \restriction I$. Wir legen den nachfolgenden Überlegungen den Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P) := (I, \mathfrak{B}_{1,I}, \lambda_I)$ zugrunde. Weiter seien

$$E_1 := \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{1}{2}, \frac{3}{4}\right)$$
$$E_2 := \left[0, \frac{1}{3}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, 1\right)$$
$$F := \left[0, \frac{1}{2}\right)$$

sowie $\mathfrak{E} := \{E_1, E_2\}$und $\mathfrak{F} := \{F\}$. Dann sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ jeweils nichtleere Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Es gelten

$$P(E_1) = \lambda_I(E_1) = 2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \tag{1}$$

bzw.

$$P(E_2) = \lambda_I(E_2) = 2 \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \tag{2}$$

bzw.

$$P(F) = \lambda_I(F) = \frac{1}{2}. \tag{3}$$

Weiterhin gelten $E_1 \cap F = \left[0, \frac{1}{4}\right)$, $E_2 \cap F = \left[0, \frac{1}{3}\right)$, also

$$P(E_1 \cap F) = \frac{1}{4} \tag{4}$$

und

$$P(E_2 \cap F) = \frac{1}{3}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (4), (1) und (3) bzw. (5), (2) und (3) folgt dann

$$P(E_1 \cap F) = \frac{1}{4} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = P(E_1)\, P(F)$$

bzw.

$$P(E_2 \cap F) = \frac{1}{3} = \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(E_2)\, P(F).$$

Folglich sind $\mathfrak{E}$ und $\mathfrak{F}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Wir zeigen nun, dass $\sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ und $\sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Wegen Teil *(b)* von Satz M.4.6 gilt

$$\mathfrak{E} \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{E}) \tag{6}$$

sowie

$$\mathfrak{F} \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{F}). \tag{7}$$

Da $\sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ nach Teil *(b)* von Satz M.4.6 eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen $\mathfrak{E} = \{E_1, E_2\}$ und (6) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$E_1 \cap E_2 \in \sigma_\Omega(\mathfrak{E}). \tag{8}$$

Wegen (7) ist

$$F \in \sigma_\Omega(\mathfrak{F}). \tag{9}$$

Es ist

$$E_1 \cap E_2 = \left[0, \frac{1}{4}\right) \cup \left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right). \tag{10}$$

Aus (10) folgt dann

$$\begin{aligned} P(E_1 \cap E_2) = \lambda_I(E_1 \cap E_2) &= \lambda_I\left(\left[0, \frac{1}{4}\right)\right) + \lambda_I\left(\left[\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)\right) \\ &= \frac{1}{4} + \frac{3}{4} - \frac{2}{3} = \frac{1}{4} + \frac{1}{12} = \frac{1}{3}. \end{aligned} \tag{11}$$

Unter Beachtung von (10) folgt

$$(E_1 \cap E_2) \cap F = \left[0, \frac{1}{4}\right). \tag{12}$$

Wegen (12) gilt dann

$$P((E_1 \cap E_2) \cap F) = \lambda_I\left(\left[0, \frac{1}{4}\right)\right) = \frac{1}{4}. \tag{13}$$

Unter Beachtung von (13), (11) und (3) folgt nun

$$P((E_1 \cap E_2) \cap F) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = P(E_1 \cap E_2)\, P(F).$$

Somit sind $E_1 \cap E_2$ und F *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus folgt wegen (8) und (9), dass $\sigma_\Omega(\mathfrak{E})$ und $\sigma_\Omega(\mathfrak{F})$ *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

Es folgt nun eine erste Konsequenz aus Folgerung 6.1.1:

Satz 6.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(A_k)_{k\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(A_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(\sigma_\Omega(\{A_k\}))_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Für $k \in I$ ist $\{A_k\}$ ein Erzeuger von $\sigma_\Omega(\{A_k\})$, welcher trivialerweise durchschnittsstabil ist. Somit ergibt sich aus *(i)* mittels Folgerung 6.1.1 dann *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Dies ergibt sich wegen der für $k \in I$ gültigen Beziehung $\{A_k\} \subseteq \sigma_\Omega(\{A_k\})$ sogleich mittels Teil *(b1)* von Bemerkung 6.1.2. □

Wir verallgemeinern nun das Resultat von Folgerung 6.1.1 dahingehend, dass wir gewisse der Mengensysteme $\mathfrak{E}_k$ zu „Blöcken" zusammenfassen:

Satz 6.1.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$ derart, dass für jedes $k \in I$ stets $\mathfrak{E}_k$ ein durchschnittsstabiles Mengensystem ist. Weiter sei $(I_j)_{j\in J}$ eine Zerlegung von I, d.h. es sei $\bigcup_{j\in J} I_j = I$ und für $j, k \in J$ mit $j \neq k$ gelte $I_j \cap I_k = \varnothing$. Für $j \in J$ sei*

$$\mathfrak{A}_j \coloneqq \begin{cases} \{\varnothing, \Omega\}, & \text{falls } I_j = \varnothing, \\ \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k\in I_j} \mathfrak{E}_k\right), & \text{falls } I_j \neq \varnothing. \end{cases}$$

Dann ist das System $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis. Sei $j \in J$. Wir betrachten zunächst den Fall $I_j = \varnothing$. Setzen wir dann $\widetilde{\mathfrak{E}}_j \coloneqq \mathfrak{A}_j$, so ist $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ trivialerweise ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$.

Sei nun $I_j \neq \varnothing$. Dann bezeichne $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ das System aller Mengen der Gestalt $E_{i_1} \cap E_{i_2} \cap \ldots \cap E_{i_n}$ mit $E_{i_1} \in \mathfrak{E}_{i_1}, \ldots, E_{i_n} \in \mathfrak{E}_{i_n}$ wobei $\{i_1, \ldots, i_n\}$ eine beliebige nichtleere endliche Teilmenge von I_j ist. Da für $l \in I$ nun $\mathfrak{E}_l$ als durchschnittsstabil vorausgesetzt wurde, erkennt man sogleich, dass $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ dann auch durchschnittsstabil ist. Da $\mathfrak{A}_j$ nach Teil *(b)* von M.4.6 eine σ-Algebra in Ω ist, für welche $\bigcup_{k\in I_j} \mathfrak{E}_k \subseteq \mathfrak{A}_j$ erfüllt ist, folgt aus der nach Teil *(b)* von Satz M.4.1 vorliegenden Durchschnittsstabilität von $\mathfrak{A}_j$ und der Definition von $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ dann

$$\widetilde{\mathfrak{E}}_j \subseteq \mathfrak{A}_j.$$

Hieraus folgt dann

$$\sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right) \subseteq \sigma_\Omega\left(\mathfrak{A}_j\right) = \mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion: Für $k \in I_j$ folgt aus der Definition von $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ sogleich $\mathfrak{E}_k \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}}_j$. Damit ist aber

$$\bigcup_{k\in I_j} \mathfrak{E}_k \subseteq \widetilde{\mathfrak{E}}_j.$$

Hieraus folgt nun

$$\mathfrak{A}_j = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k\in I_j} \mathfrak{E}_k\right) \subseteq \sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\mathfrak{A}_j = \sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right).$$

Also ist in jedem Falle, $\widetilde{\mathfrak{E}}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$. Da die Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, erkennt man aus der Definition der Familie $\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right)_{j\in J}$ sogleich, dass auch diese Familie stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Wegen Folgerung 6.1.1 ist dann die Familie $\left(\sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right)\right)_{j\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt wegen

$$(\mathfrak{A}_j)_{j\in J} = \left(\sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{E}}_j\right)\right)_{j\in J},$$

dass $(\mathfrak{A}_j)_{j\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Häufig tritt in den Anwendungen jener Spezialfall auf, in dem $(\mathfrak{E}_k)_{k\in I}$ schon eine Familie von σ-Algebren in Ω ist. In diesem Falle heißt Satz 6.1.3 auch der Satz vom Zusammenfassen stochastisch unabhängiger σ-Algebren.

Wir studieren nun für einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und ein fixiertes $A \in \mathfrak{A}$ das System aller von A bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen.

Lemma 6.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$. Es bezeichne $\mathfrak{D}_{A,P}$ die Menge aller $D \in \mathfrak{A}$, welche stochastisch unabhängig von A bezüglich P sind, das heißt die Menge aller $D \in \mathfrak{A}$ mit $P(A \cap D) = P(A)\,P(D)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{D}_{A,P}$ ein* Dynkin-*System in Ω, also insbesondere $\mathfrak{D}_{A,P} \neq \varnothing$.*

(b) *Es bezeichne $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $C \in \mathfrak{A}$, für welche $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega\backslash C \in \mathcal{N}_P$ erfüllt ist. Dann gilt:*

(b1) *Sei $A \in \mathfrak{D}_{A,P}$, dann gilt $A \in \mathfrak{A}_{P,0}$.*

(b2) *Es ist*

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \bigcap_{E\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P}$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $P(\Omega) = 1$ gilt nach Teil *(c)* von Satz 2.2.2 dann

$$\Omega \in \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{1}$$

Sei

$$B \in \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 2.2.2 dann

$$\Omega\backslash B \in \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{3}$$

Sei $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{D}_{A,P}$. Wegen Teil *(b)* von Satz 2.2.4 ist dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \in \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{4}$$

Kombiniert man (1) bis (4) so erkennt man, dass $\mathfrak{D}_{A,P}$ ein Dynkin-System in Ω ist.

Zu *(b1)*: Wegen $A \in \mathfrak{D}_{A,P}$ gilt

$$P(A) = P(A \cap A) = P(A)\,P(A) = [P(A)]^2.$$

Hieraus folgt $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$, also wegen Bemerkung 2.2.2 dann $A \in \mathfrak{A}_{P,0}$.

Zu *(b2)*: Sei

$$B \in \bigcap_{E\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P}. \tag{5}$$

Aus (5) folgt wegen $B \in \mathfrak{A}$ dann $B \in \mathfrak{D}_{B,P}$. Hieraus folgt mittels Teil *(b1)* dann $B \in \mathfrak{A}_{P,0}$. Daraus folgt

$$\bigcap_{E\in\mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P} \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \tag{6}$$

Sei nun

$$B \in \mathfrak{A}_{P,0}. \tag{7}$$

Wegen (7) folgt mittels Bemerkung 2.2.2 dann $P(B) = 0$ oder $P(B) = 1$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* bzw. *(c)* von Satz 2.2.2 dann jeweils

$$B \in \bigcap_{E \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt

$$\mathfrak{A}_{P,0} \subseteq \bigcap_{E \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P}. \tag{9}$$

Daraus ergibt sich die Behauptung. □

Lemma 6.1.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ Teilmengen von $\mathfrak{A}$ mit $\varnothing \subset \mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$.*

Beweis.

***(i)* ⇒ *(ii)*:** Sei $E \in \mathfrak{E}_1$. Wegen $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{E}_2$ ist dann $E \in \mathfrak{E}_2$. Wegen *(i)* gilt dann $E \in \mathfrak{D}_{E,P}$. Hieraus folgt wegen Teil *(b1)* von Lemma 6.1.1 dann $E \in \mathfrak{A}_{P,0}$. Somit ist $\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$, also *(ii)*.

***(ii)* ⇒ *(i)*:** Unter Beachtung von *(ii)* und Teil *(b2)* von Lemma 6.1.1 folgt

$$\mathfrak{E}_1 \subseteq \mathfrak{A}_{P,0} = \bigcap_{E \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{E,P} \subseteq \bigcap_{A \in \mathfrak{E}_2} \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{1}$$

Seien $E_1 \in \mathfrak{E}_1$ und $E_2 \in \mathfrak{E}_2$. Aus (1) folgt dann $E_1 \in \mathfrak{D}_{E_2,P}$. Somit sind E_1 und E_2 stochastisch unabhängig bezüglich P. Damit sind aber $\mathfrak{E}_1$ und $\mathfrak{E}_2$ stochastisch unabhängig bezüglich P, es gilt also *(i)*. □

Lemma 6.1.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine 0 nichtenthaltende nichtleere Menge und $(\mathfrak{E}_k)_{k \in I}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Familie von nichtleeren Teilmengen von $\mathfrak{A}$. Weiter sei $\mathfrak{E}_0$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{A}_{P,0}$. Dann ist auch die Familie $(\mathfrak{E}_k)_{k \in I \cup \{0\}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Dies folgt aus Teil *(b2)* von Lemma 6.1.1. □

Unsere nächsten Überlegungen sind auf die Herleitung des Kolmogorovschen Null-Eins-Gesetzes ausgerichtet. Hierzu benötigen wir eine spezielle Begriffsbildung, zu deren Vorbereitung daran erinnert wird, dass der Durchschnitt einer beliebigen Familie von σ-Algebren in Ω wegen Satz M.4.5 selbst eine σ-Algebra in Ω ist.

Definition 6.1.2. Seien Ω eine Menge sowie $(\mathfrak{A}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von σ-Algebren in Ω. Für $m \in \mathbb{N}$ sei

$$\mathcal{T}_m := \sigma_\Omega \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right).$$

Dann heißt

$$\mathcal{T}_\infty := \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{T}_m = \bigcap_{m=1}^{\infty} \sigma_\Omega \left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k \right)$$

die zur Folge $(\mathfrak{A}_m)_{m \in \mathbb{N}}$ *terminale σ-Algebra in Ω*.

Bemerkung 6.1.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von σ-Algebren in Ω derart, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$. Es bezeichne nun $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ terminale σ-Algebra in Ω. Dann ist

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}. \qquad \clubsuit$$

Beweis. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathcal{T}_m = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k\right)$. Nach Konstruktion ist

$$\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}.$$

Damit folgt auch

$$\mathcal{T}_m = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}\right) \subseteq \mathfrak{A}.$$

Somit ist

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{T}_m \subseteq \mathfrak{A}. \qquad \square$$

Wir präsentieren nun eine im Zusammenhang mit der Konstruktion terminaler σ-Algebren typische Situation:

Lemma 6.1.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_n := \sigma_\Omega(\{A_n\})$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zur Folge $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Dann gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{T}_\infty$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{T}_\infty.$$

Beweis. Sei

$$A := \limsup_{n\to\infty} A_n. \tag{1}$$

Für

$$m \in \mathbb{N} \tag{2}$$

sei

$$Q_m := \bigcup_{k=m}^{\infty} A_k. \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann

$$A = \bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m. \tag{4}$$

Aus (2) und (3) folgt zudem

$$Q_1 \supseteq Q_2 \supseteq Q_3 \supseteq \ldots. \tag{5}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann

$$\bigcap_{m=1}^{\infty} Q_m = \bigcap_{m=n}^{\infty} Q_m. \tag{7}$$

Sei

$$\mathcal{T}_n \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{m=n}^{\infty} \mathfrak{A}_m\right). \tag{8}$$

Wegen $\bigcup_{m=1}^{\infty} \mathfrak{A}_m \supseteq \bigcup_{m=2}^{\infty} \mathfrak{A}_m \supseteq \ldots$ folgt aus (6) und (8) dann

$$\mathcal{T}_1 \supseteq \mathcal{T}_2 \supseteq \mathcal{T}_3 \supseteq \ldots. \tag{9}$$

Aus (9), (3), (6) und (8)folgt

$$Q_n \in \mathcal{T}_n. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann für $m \in \{n, n+1, \ldots\}$ dann $Q_m \in \mathcal{T}_n$. Da $\mathcal{T}_n$ eine σ-Algebra in Ω, folgt hieraus und Teil *(d)* von Satz M.4.1 dann

$$\bigcap_{m=n}^{\infty} Q_m \in \mathcal{T}_n. \tag{11}$$

Wegen (4) und (7) gilt

$$A = \bigcap_{m=n}^{\infty} Q_m. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt nun

$$A \in \mathcal{T}_n. \tag{13}$$

Aus (6) und (13) folgt dann

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = A \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{T}_n = \mathcal{T}_\infty. \tag{14}$$

Da $\mathfrak{A}$ ein σ-Algebra in Ω und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$, ist dann auch $(\Omega\backslash A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Setzen wir für $n \in \mathbb{N}$ nun $\widetilde{\mathfrak{A}}_n \coloneqq \sigma_\Omega\left(\{\Omega\backslash A_n\}\right)$ und bezeichnet $\widetilde{\mathcal{T}}_\infty$ die zur Folge $\left(\widetilde{\mathfrak{A}}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra, so folgt aus dem bereits Gezeigten

$$\limsup_{n\to\infty} (\Omega\backslash A_n) \in \widetilde{\mathcal{T}}_\infty. \tag{15}$$

Da für $n \in \mathbb{N}$

$$\mathfrak{A}_n = \sigma_\Omega\left(\{A_n\}\right) = \{\varnothing, \Omega, A_n, \Omega\backslash A_n\} = \sigma_\Omega\left(\{\Omega\backslash A_n\}\right) = \widetilde{\mathfrak{A}}_n$$

erfüllt ist, gilt dann

$$\mathcal{T}_\infty = \widetilde{\mathcal{T}}_\infty. \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt dann

$$\limsup_{n\to\infty} (\Omega\backslash A_n) \in \mathcal{T}_\infty. \tag{17}$$

Es ist

$$\liminf_{n\to\infty} A_n = \Omega\backslash \limsup_{n\to\infty} (\Omega\backslash A_n). \tag{18}$$

Da $\mathcal{T}_\infty$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (17) und (18) dann

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{T}_\infty. \qquad \square$$

Wir kommen nun zum angekündigten Resultat von A.N.Kolmogorov:

Satz 6.1.4 (KOLMOGOROVsches Null-Eins-Gesetz)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Es sei $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von σ-Algebren in Ω mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathfrak{A}_n \subseteq \mathfrak{A}$.*

(II) *Es ist $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Weiter bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω sowie $\mathfrak{A}_{P,0}$ das System aller $A \in \mathfrak{A}$ mit $A \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega\backslash A \in \mathcal{N}_P$. Dann gilt

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}.$$

Für jedes $A \in \mathcal{T}_\infty$ gilt also

$$P(A) = 1 \qquad \text{oder} \qquad P(A) = 0.$$

BEWEIS. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Es sei

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_n := \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right). \tag{2}$$

Es gilt

$$\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{n+1} \mathfrak{A}_k. \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) gilt dann

$$\widetilde{\mathfrak{A}}_1 \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}_2 \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}_3 \subseteq \ldots. \tag{4}$$

Weiter sei

$$\widetilde{\mathfrak{A}} := \bigcup_{s=1}^{\infty} \widetilde{\mathfrak{A}}_s. \tag{5}$$

Wegen (1), (2) und Teil *(b)* von Satz M.4.6 gilt $\mathfrak{A}_n \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}_n$. Hieraus folgt wegen (5) dann

$$\mathfrak{A}_n \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}. \tag{6}$$

Sei

$$m \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Aus (1), (6) und (7) folgt dann

$$\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}. \tag{8}$$

Sei

$$\mathcal{T}_m = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=m}^{\infty} \mathfrak{A}_k\right). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$\mathcal{T}_m \subseteq \sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right). \tag{10}$$

Wegen (7), (9) und Definition 6.1.2 gilt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{m=1}^{\infty} \mathcal{T}_m. \tag{11}$$

Aus (7), (10) und (11) folgt dann

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right). \tag{12}$$

Laut Voraussetzung ist $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen σ-Algebren in Ω. Für $m \in \mathbb{N}$ folgt bei Beachtung von (1), (2), (7) und (9) mittels Satz 6.1.3 dann, dass $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$ und $\mathcal{T}_{m+1}$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus folgt für $m \in \mathbb{N}$, wenn man beachtet, dass wegen (11) nun $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathcal{T}_{m+1}$ erfüllt ist, mittels Teil *(b1)* von Bemerkung 6.1.2, dass auch $\widetilde{\mathfrak{A}}_m$ und $\mathcal{T}_\infty$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Sei nun

$$A \in \mathcal{T}_\infty. \tag{13}$$

Es bezeichne nun $\mathfrak{D}_{A,P}$ die Menge aller $D \in \mathfrak{A}$, welche von A stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Aus der Definition und dem eben Gezeigten folgt bei Beachtung von (13) für $m \in \mathbb{N}$ dann $\widetilde{\mathfrak{A}}_m \subseteq \mathfrak{D}_{A,P}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (5) dann

$$\widetilde{\mathfrak{A}} \subseteq \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{14}$$

Da $\mathfrak{D}_{A,P}$ nach Teil *(a)* von 6.1.1 ein DYNKIN-System in Ω ist, folgt wegen (14) mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann

$$\delta_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right) \subseteq \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{15}$$

Wir zeigen nun die Durchschnittsstabilität von $\widetilde{\mathfrak{A}}$: Seien $E, F \in \mathfrak{A}$. Wegen (5) gibt es dann ein $j \in \mathbb{N}$ bzw. ein $k \in \mathbb{N}$ mit $E \in \widetilde{\mathfrak{A}}_j$ bzw. $F \in \widetilde{\mathfrak{A}}_k$. Sei $l := \max\{j,k\}$. Wegen (4) gilt dann $E, F \in \widetilde{\mathfrak{A}}_l$. Da $\widetilde{\mathfrak{A}}_l$ wegen (1) und (2) eine σ-Algebra in Ω ist, folgt hieraus mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann $E \cap F \in \widetilde{\mathfrak{A}}_l$. Hieraus folgt mittels (5) dann $E \cap F \in \widetilde{\mathfrak{A}}$.

Somit ist $\widetilde{\mathfrak{A}}$ also durchschnittsstabil. Hieraus folgt mittels Satz M.9.6 dann

$$\sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right) = \delta_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right). \tag{16}$$

Unter Beachtung von (12), (16) und (15) folgt nun

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \sigma_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right) = \delta_\Omega\left(\widetilde{\mathfrak{A}}\right) \subseteq \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{17}$$

Aus (13) und (17) folgt dann $A \in \mathfrak{D}_{A,P}$. Hieraus folgt mittels Teil *(b1)* von Lemma 6.1.1 dann

$$A \in \mathfrak{A}_{P,0}. \tag{18}$$

Aus (13) und (18) folgt dann

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \qquad \square$$

Folgerung 6.1.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$ Elemente von $\mathfrak{A}_{P,0}$.*

BEWEIS. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $\mathfrak{A}_n := \sigma_\Omega(\{A_n\})$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist nach Satz 6.1.2 dann auch $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von Unter-σ-Algebren von $\mathfrak{A}$ in Ω ist.

Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(\mathfrak{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige terminale σ-Algebra in Ω. Da $\limsup_{n\to\infty} A_n$ und $\liminf_{n\to\infty} A_n$ wegen Lemma 6.1.4 jeweils zu $\mathcal{T}_\infty$ gehören, liefert Satz 6.1.4 dann, dass diese auch zu $\mathfrak{A}_{P,0}$ gehören. □

In einer ganzen Reihe von Fällen, ist es wie in Satz 6.1.4 relativ leicht, die Zugehörigkeit gewisser Ereignisse zu $\mathfrak{A}_{P,0}$ nachzuweisen. Wegen Bemerkung 2.2.2 ist

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \{A \in \mathfrak{A} \mid P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}.$$

Somit wird man für ein zu $\mathfrak{A}_{P,0}$ gehörig erkanntes Ereignis versuchen festzustellen, welche der beiden Alternativen zutrifft. Dies kann sich in manchen Fällen als recht schwierig erweisen.

In der Situation von Folgerung 6.1.2 gibt das 2. Lemma von BORELL-CANTELI eine vollständige Antwort in Termen der Konvergenz der Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n).$$

6.2. Definition und Eigenschaften von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen

Das Hauptziel des vorliegenden Abschnitts besteht im Aufbau eines Konzepts zur stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsvariablen. Hierbei sollen natürlich, die in Abschnitt 6.1 erhaltenen Ergebnisse zur stochastischen Unabhängigkeit von Ereignissystemen entsprechend einfließen.

In Fortsetzung dieses Gedankengangs gilt es dann also, mit einer Zufallsvariablen in vernünftiger Weise ein Ereignissystem zu assoziieren, um hierdurch den Anschluss an Abschnitt 6.1 konkret in die Tat umzusetzen.

Ausgangspunkt für die zentrale Begriffsbildung des vorliegenden Abschnitts ist die folgende Beobachtung, welche durch eine nähere Inspektion von Satz 6.1.2 initiiert wird:

Satz 6.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_k)_{k\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(A_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $\left(1_{A_k}^{-1}(\mathfrak{B}_1)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

BEWEIS. Wegen Satz 6.1.2 ist *(i)* äquivalent zu:

(ii') Es ist $(\sigma_\Omega(\{A_k\}))_{k\in I}$ stochatisch unabhängig bezüglich P.

Wegen Teil *(a)* von Beispiel M.16.3 gilt für $k \in I$ nun

$$1_{A_k}^{-1}(\mathfrak{B}_1) = \{\Omega, A_k, \Omega\backslash A_k, \varnothing\}.$$

Hieraus folgt für $k \in I$ wegen $\sigma_\Omega(\{A_k\}) = \{\Omega, A_k, \Omega\backslash A_k, \varnothing\}$ dann

$$1_{A_k}^{-1}(\mathfrak{B}_1) = \sigma_\Omega(\{A_k\}).$$

Folglich sind *(ii)* und *(ii')* äquivalent. Damit sind also auch *(i)* und *(ii)* äquivalent. □

Satz 6.2.1 suggeriert folgende Begriffsbildung:

Definition 6.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in I$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt die *Familie* $(X_k)_{k\in I}$ *stochastisch unabhängig*, falls $\left(X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist.

Definition 6.2.1 liefert dann folgende Umformulierung von Satz 6.2.1:

Satz 6.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_k)_{k\in I}$ eine Familie von Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(A_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(1_{A_k})_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Bemerkung 6.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $k \in I$ sei derart eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable X_k auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ gewählt, dass die Familie $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Weiter sei τ eine Bijektion der Indexmenge I. Dann ist auch die Familie $\left(X_{\tau(k)}\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Beweis. Kombiniere Definition 6.2.1 und Bemerkung 6.1.1. □

Bemerkung 6.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in I$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(i) Für jede nichtleere endliche Teilmenge $I' \subseteq I$ ist $(X_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(b) Sei *(i)* erfüllt. Weiter sei J eine nichtleere Teilmenge von I. Dann ist $(X_k)_{k\in J}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Beweis. Kombiniere Definition 6.2.1 mit Bemerkung 6.1.2. □

Bemerkung 6.2.2 ermöglicht es also, das Studium der stochastischen Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen, auf das Studium der stochastischen Unabhängigkeit ihrer endlichen Teilfamilien zurückzuführen. Aus diesem Grund werden wir uns später verstärkt der Untersuchung der stochastischen Unabhängigkeit von endlichen Familien von Zufallsvariablen zuwenden.

Bemerkung 6.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in I$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\left(\widetilde{\Omega}_k, \widetilde{\mathfrak{A}}_k\right)$ ein messbarer Raum mit $\Omega_k \subseteq \widetilde{\Omega}_k$ und $\widetilde{\mathfrak{A}}_k \cap \Omega_k \subseteq \mathfrak{A}_k$. Es bezeichne dann $\widetilde{X}_k$, die durch X_k festgelegte Abbildung in $\widetilde{\Omega}_k$, das heißt für $\omega \in \Omega$ sei $\widetilde{X}_k(\omega) = X_k(\omega)$. Dann gilt:

(a) Sei $k \in I$. Dann ist $\widetilde{X}_k$ eine $\left(\widetilde{\Omega}_k, \widetilde{\mathfrak{A}}_k\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$\widetilde{X}_k^{-1}\left(\widetilde{\mathfrak{A}}_k\right) \subseteq X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k).$$

(b) Sei $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann ist auch $\left(\widetilde{X}_k\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Unsere nächsten Betrachtungen knüpfen nun an Beispiel 2.2.5 an:

Definition 6.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei $A_n := \bigcup_{j=1}^{2^{n-1}} \left[\frac{2j-2}{n}, \frac{2j-1}{n}\right)$. Es sei $1_{A_n}\colon [0,1) \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$1_{A_n}(z) := \begin{cases} 1, & \text{falls } z \in A_n, \\ 0, & \text{falls } z \in [0,1) \setminus A_n. \end{cases}$$

Dann heißt 1_{A_n} die *n-te* RADEMACHER*sche*[1)] *Funktion erster Art.*

Bemerkung 6.2.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $A \in \mathfrak{A}$. Es bezeichne $\beta_{1,P(A)}$ die Binomialverteilung mit den Parametern 1 und $P(A)$. Dann ist 1_A eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$P_{1_A} = \beta_{1,P(A)}.$$ ♣

Beispiel 6.2.1. Sei $\Omega := [0,1)$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1)$ sowie $P = \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Es ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne 1_{A_n} die n-te RADEMACHERsche Funktion 1. Art. Dann ist 1_{A_n} eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt $P_{1_{A_n}} = \beta_{1,\frac{1}{2}}$.

(c) Die Folge $(1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus $\lambda^{(1)}([0,1)) = 1 - 0 = 1$.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(a)* bzw. *(b)* aus Beispiel 2.2.5 gilt $A_n \in \mathfrak{A}$ bzw. $P(A_n) = \frac{1}{2}$. Hieraus folgt mittels Bemerkung 6.2.4 dann *(b)*.

Zu *(c)*: Wegen Teil *(c)* von Beispiel 2.2.5 ist $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt mittels Satz 6.2.2 dann *(c)*. □

Wir studieren nun die Verteilungsfunktionen des Maximums bzw. Minimums einer endlichen Anzahl von stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen.

Satz 6.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $Y := \max_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} X_j$. Dann ist Y eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gelten*

$$F_{P_Y,l} = \prod_{j=1}^{n} F_{P_{X_j},l}$$

sowie

$$F_{P_Y,r} = \prod_{j=1}^{n} F_{P_{X_j},r}.$$

[1)] HANS ADOLPH RADEMACHER (* 03.04.1892; † 07.02.1969) war ein deutscher Mathematiker, der sich insbesondere mit der Zahlentheorie beschäftigte. Er war ein Schüler von Constantin Carathéodory.

(b) *Sei* $Z \coloneqq \min_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} X_j$. *Dann ist* Z *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gelten*

$$F_{P_Z,l} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{P_{X_j},l}\right]$$

sowie

$$F_{P_Z,r} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{P_{X_j},r}\right].$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Folgerung M.18.8 ist Y eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable. Sei

$$u \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Aus der Definition von Y folgen dann

$$Y^{-1}\left((-\infty, u)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((-\infty, u)\right) \tag{2}$$

sowie

$$Y^{-1}\left((-\infty, u]\right) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((-\infty, u]\right). \tag{3}$$

Aufgrund der stochastischen Unabhängigkeit von $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P ist die Folge $\left(X_j^{-1}\left(\mathfrak{B}_1\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus sowie aus

$$\left\{(-\infty, u), (-\infty, u]\right\} \subseteq \mathfrak{B}_1$$

folgen dann

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((-\infty, u)\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left((-\infty, u)\right)\right) \tag{4}$$

sowie

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((-\infty, u]\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left((-\infty, u]\right)\right). \tag{5}$$

Unter Beachtung von (2) und (4) folgt dann

$$\begin{aligned} F_{P_Y,l}(u) = P_Y\left((-\infty, u)\right) = P\left(Y^{-1}\left((-\infty, u)\right)\right) = P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((-\infty, u)\right)\right) \\ = \prod_{j=1}^{n} P_{X_j}(-\infty, u) = \prod_{j=1}^{n} F_{P_{X_j},l}(u). \end{aligned} \tag{6}$$

Aus (1) und (6) folgt dann

$$F_{P_Y,l} = \prod_{j=1}^{n} F_{P_{X_j},l}.$$

Unter Verwendung von (3) und (15) zeigt man analog

$$F_{P_Y,r} = \prod_{j=1}^{n} F_{P_{X_j},r}.$$

Zu *(b)*: Wegen Folgerung M.18.8 ist Z eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Sei

$$u \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Aufgrund der Definition von Z gelten

$$Z^{-1}\left([u,+\infty)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left([u,+\infty)\right) \tag{8}$$

sowie

$$Z^{-1}\left((u,+\infty)\right) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((u,+\infty)\right). \tag{9}$$

Wegen der Tatsache, dass $\{[u,+\infty), (u,+\infty)\} \subseteq \mathfrak{B}_1$ und der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $\left(X_j^{-1}\left(\mathfrak{B}_1\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P, folgen dann

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left([u,+\infty)\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left([u,+\infty)\right)\right) \tag{10}$$

und

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left((u,+\infty)\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left((u,+\infty)\right)\right). \tag{11}$$

Da P_Z ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, gilt

$$P_Z\left((-\infty,u)\right) = P_Z\left(\mathbb{R}\backslash[u,+\infty)\right) = 1 - P_Z\left([u,+\infty)\right) \tag{12}$$

und analog

$$P_Z\left((-\infty,u]\right) = 1 - P_Z\left((u,+\infty)\right). \tag{13}$$

Analog ergeben sich für

$$j \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{14}$$

dann

$$P_{X_j}\left((-\infty,u)\right) = P_Z\left(\mathbb{R}\backslash[u,+\infty)\right) = 1 - P_{X_j}\left([u,+\infty)\right) \tag{15}$$

und

$$P_{X_j}\left((-\infty,u]\right) = 1 - P_{X_j}\left((u,+\infty)\right). \tag{16}$$

Unter Beachtung von (12), (8), (10), (14) und (15) folgt dann

$$\begin{aligned}
F_{P_Z,l}(u) &= P_Z\left((-\infty,u)\right) = 1 - P_Z\left([u,+\infty)\right) = 1 - P\left(Z^{-1}\left([u,+\infty)\right)\right) \\
&= 1 - P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left([u,+\infty)\right)\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left([u,+\infty)\right)\right) \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{n} P_{X_j}\left([u,+\infty)\right) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[P_{X_j}\left(\mathbb{R}\backslash(-\infty,u)\right)\right] \\
&= 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - P_{X_j}\left((-\infty,u)\right)\right] = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{P_{X_j},l}(u)\right].
\end{aligned} \tag{17}$$

Aus (7) und (17) folgt dann

$$F_{P_Z,l} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{P_{X_j},l}\right].$$

Unter Verwendung von (13), (9), (11), (14) und (16) zeigt man analog

$$F_{P_Z,r} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{P_{X_j},r}\right].$$

□

Interpretation von Satz 6.2.3. Wir geben nun eine in der Zuverlässigkeitstheorie angesiedelte Interpretation von Satz 6.2.3. Hierzu betrachten wir ein $n \in \mathbb{N}$ und ein Gerät, welches aus n Blöcken besteht. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ werde die Lebensdauer des j-ten Blockes durch die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable X_j modelliert.

Seien die Blöcke zunächst parallel geschaltet, wobei zum Funktionieren des Geräts die richtige Funktionsweise eines Blocks genügen soll. Dies bedeutet aber, dass nur der Ausfall aller Blöcke zum Ausfall des Geräts führt. Die zufällige Lebensdauer des Geräts wird dann durch die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable $Y := \max_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} X_j$ beschrieben.

Seien nun andererseits die Blöcke hintereinandergeschaltet. Dies bedeutet, dass der Ausfall eines einzigen Blocks zum Ausfall des Geräts führt. Die zufällige Lebensdauer des Geräts wird dann durch die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable $Z := \min_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} X_j$ beschrieben. Die stochastische Unabhängigkeit der $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bedeutet dann, dass die Blöcke unabhängig voneinander ausfallen. ♣

Wir verdeutlichen nun eine weitere bemerkenswerte Eigenschaft der Exponentialverteilungsfamilie:

Satz 6.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit einem gewissen $\eta_j \in (0, +\infty)$ die Verteilung P_{X_j} von X_j gerade die Exponentialverteilung E_{η_j} zum Parameter η_j ist. Weiter sei $Z := \min_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} X_j$. Dann ist Z eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_Z = E_{\sum_{j=1}^{n} \eta_j}.$$

Beweis. Sei

$$\eta \in (0, +\infty). \tag{1}$$

Wegen (1) folgt aus Teil *(b)* von Satz M.22.14.3 dann, dass

$$E_\eta \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{2}$$

Sei nun

$$u \in \mathbb{R}. \tag{3}$$

Wegen (3) folgt nun mittels Teil *(d)* von Satz M.22.14.3 dann

$$F_{E_\eta,l}(u) = \begin{cases} 0, & \text{falls } u \in (-\infty, 0], \\ 1 - \mathrm{e}^{-\eta u} & \text{falls } u \in (0, +\infty). \end{cases} \tag{4}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz 6.2.3 ist Z eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$F_{P_Z,l} = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{E_{\eta_j},l}\right]. \tag{5}$$

Sei nun

$$u \in (-\infty, 0]. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (5), (6), (1), (3) und (4) folgt dann

$$F_{P_Z,l}(u) = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{E_{\eta_j},l}(u)\right] = 1 - \prod_{j=1}^{n} [1 - 0] = 0 = F_{E_{\sum_{j=1}^{n} \eta_j},l}(u). \tag{7}$$

Sei nun

$$u \in (0, +\infty). \tag{8}$$

Unter Beachtung von (5), (6), (1), (3) und (4) folgt dann

$$\begin{aligned} F_{P_Z,l}(u) &= 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - F_{E_{\eta_j},l}(u)\right] = 1 - \prod_{j=1}^{n} \left[1 - \left(1 - \mathrm{e}^{-\eta_j u}\right)\right] \\ &= 1 - \prod_{j=1}^{n} \mathrm{e}^{-\eta_j u} = 1 - \mathrm{e}^{-\left(\sum_{j=1}^{n} \eta_j\right) u} \\ &= F_{E_{\sum_{j=1}^{n} \eta_j},l}(u). \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (6) bis (9) folgt dann

$$F_{P_Z,l} = F_{E_{\sum_{j=1}^{n} \eta_j},l}. \tag{10}$$

Wegen der Bemerkung 4.1.3 gilt

$$P_Z \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{11}$$

Wegen (1), (2), (11) und (10) folgt mittels Satz M.14.4 dann

$$P_Z = E_{\sum_{j=1}^{n} \eta_j}.$$

□

Wir untersuchen nun verschiedene Phänomene, welche sich um die stochastische Unabhängigkeit *zweier* Zufallsvariablen ranken:

Satz 6.2.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei*

$$\mathfrak{A}_{P,0} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega \setminus A \in \mathcal{N}_P\}.$$

Dann gilt:

(a) *Es gelte $X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$. Weiter seien $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie Y eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(b) *Es sei X derart beschaffen, dass für alle nichttrivialen messbaren Räume $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ und alle $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable Y auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ stochastisch unabhängig von X und Y bezüglich P vorliegt. Dann gilt $X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Nach Voraussetzung ist Y nun $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}''$-messbar. Es gilt also

$$Y^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(b2)* von Lemma 6.1.1 gilt

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{A,P}. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von X sowie wegen (2) und (1) folgt dabb

$$X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0} = \bigcap_{A \in \mathfrak{A}} \mathfrak{D}_{A,P} \subseteq \bigcap_{A \in Y^{-1}(\mathfrak{A}'')} \mathfrak{D}_{A,P}.$$

Hieraus folgt, dass für beliebige $E \in X^{-1}(\mathfrak{A}')$ und beliebige $A \in Y^{-1}(\mathfrak{A}'')$ stochastisch unabhängig von E und A bezüglich P vorliegt. Somit sind X und Y stochastisch unabhängig bezüglich P.

Zu *(b)*: Aufgrund der Wahl von X sind insbesondere X und X stochastisch unabhängig bezüglich P. Somit sind $X^{-1}(\mathfrak{A}')$ und $X^{-1}(\mathfrak{A}')$ stochastisch bezüglich P. Folglich gilt für $A \in X^{-1}(\mathfrak{A}')$ also $A \in \mathfrak{D}_{A,P}$ und somit wegen Teil *(b1)* von Lemma 6.1.1 dann $A \in \mathfrak{A}_{P,0}$. Es ist also $X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$. □

Folgerung 6.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine degenerierte $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und Y eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2.1 gilt $X^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz 6.2.5 die Behauptung. □

Folgerung 6.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ sowie X eine P-fast sicher konstante $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein nichttrivialen messbarer Raum sowie Y eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind X und Y stochastisch unabhängig.*

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz 4.2.2 ist X degeneriert. Somit liefert Folgerung 6.2.1 die Behauptung. □

Unsere nächste Überlegung ist nun folgender Thematik gewidmet:

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter seien $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f\colon \Omega' \longrightarrow \Omega''$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}''$-messbare Abbildung. Nach Satz 4.1.1 ist dann $f \circ X$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Unser nächstes Ziel besteht nun darin, jene Situation zu charakterisieren, in der X und $f \circ X$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hierbei werden wir erkennen, dass dieser Umstand „relativ selten" eintritt, also funktionale Abhängigkeit „zumeist" stochastische Abhängigkeit bezüglich P induziert.

Wir beginnen mit einer kleinen Vorbereitung:

Bemerkung 6.2.5. Sein Ω eine nichtleere Menge, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ nichttriviale messbare Räume, $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ sowie $f\colon \Omega' \longrightarrow \Omega''$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}''$-messbare Abbildung. Dann gilt

$$(f \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq T^{-1}(\mathfrak{A}'). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen der Bemerkung M.15.1 gilt

$$(f \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}'') = T^{-1}\left(f^{-1}(\mathfrak{A}'')\right). \tag{1}$$

Nach Wahl von f gilt

$$f^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq \mathfrak{A}'. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt die Behauptung. □

Satz 6.2.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$ nichttriviale messbare Räume, X eine $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $f\colon \Omega' \longrightarrow \Omega''$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}''$-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Es ist $f \circ X$ eine $(\Omega'', \mathfrak{A}'')$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Sei $\mathfrak{A}_{P,0} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega \setminus A \in \mathcal{N}_P\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(ii) *Es sind X und $f \circ X$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(f \circ X)^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$.*

(c) *Mit einem gewissen $m \in \mathbb{N}$ gelte $(\Omega'', \mathfrak{A}'') = (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind die Aussagen* (ii) *und* (ii) *aus Teil* (b) *äquivalent zu den folgenden Aussagen* (iii) *und* (iv)*:*

(iii) *Es ist $f \circ X$ eine P-fast sicher konstante Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(iv) *Es gibt ein $\mathbf{a}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $P_{f\circ X} = \varepsilon_{\mathbf{a}_0, \mathfrak{B}_m}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz 4.1.1.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung 6.2.5 gilt

$$(f \circ X)^{-1}(\mathfrak{A}'') \subseteq X^{-1}(\mathfrak{A}'). \tag{1}$$

Wegen Definition 6.2.1 ist *(ii)* äquivalent zu:

(i') Es sind $X^{-1}(\mathfrak{A}')$ und $(f \circ X)^{-1}(\mathfrak{A}'')$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Wegen (1) ist *(i')* nach Lemma 6.1.2 äquivalent zu *(ii)*. Damit sind *(ii)* und *(ii)* äquivalent.

Zu *(c)*: Die Äquivalenz von *(iii)* und *(iv)* folgt aus Teil *(a)* von Satz 4.2.1. Wegen Bemerkung 2.2.2 gilt

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \{A \in \mathfrak{A} \mid P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}.$$

Hieraus erkennt man sogleich die Äquivalenz von *(ii)* und *(iv)*. □

Satz 6.2.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ jeweils $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit der Eigenschaft, dass $\{\mathbf{X}_1 \neq \mathbf{X}_2\} \subseteq \mathcal{N}_P$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $P_{\mathbf{X}_1} = P_{\mathbf{X}_2}$.*

(b) *Seien $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ zudem stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gilt:*

(b1) *Es gibt ein $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m$ mit $P_{\mathbf{X}_1} = \varepsilon_{\mathbf{u}, \mathfrak{B}_m}$.*

(b2) *Es sind $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ jeweils P-fast sich konstant.*

Satz 6.2.8. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, I eine 0 nicht enthaltende nichtleere Menge sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $k \in I$ sei eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable X_k auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart gewählt, dass die Familie $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Weiterhin seien $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie X_0 eine degenerierte $(\Omega_0, \mathfrak{A}_0)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

Dann ist die Familie $(X_k)_{k\in I\cup\{0\}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis. Wegen Bemerkung 4.2.1 gilt $X_0^{-1}(\mathfrak{A}_0) \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$. Hieraus folgt bei Beachtung von Definition 6.2.1 mittels Lemma 6.1.3 die Behauptung. □

Folgerung 6.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $k \in I$ sei X_k eine degenerierte $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist die Familie $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweisidee. Man zeigt die Behauptung zunächst für endliche Indexmengen I durch vollständige Induktion. Hierbei benutzt man Satz 6.2.8. Ist dies gezeigt, so erbringt der Teil *(a)* von Bemerkung 6.2.2 die Behauptung. ◊

Wir beschreiben nun eine in zahlreichen Anwendungen auftretende Situation, bei der eine solche Abänderung einer Familie von stochastisch unabhängigen *reellen-* oder *numerischen* Zufallsvariablen vorgenommen wird, welche die stochastische Unabhängigkeit *erhält*. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung:

Lemma 6.2.1. *Seien Ω eine nichtleere Menge, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$, $X \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$,*

$$\mathfrak{B}_{\mathbb{K}} := \begin{cases} \mathfrak{B}_1, & \text{falls } \mathbb{K} = \mathbb{R}, \\ \overline{\mathfrak{B}}_1, & \text{falls } \mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}, \end{cases}$$

$B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{K}}$ und $Y := 1_{x^{-1}(B)} \cdot X$. Dann gilt:

(a) *Es ist $X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}})$ eine σ-Algebra in Ω und es gilt $Y \in \mathcal{M}\left(\Omega, X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}\right)$.*

(b) *Es ist $Y^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}}) \subseteq X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}})$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.15.1 ist $X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}})$ eine σ-Algebra in Ω und zudem gilt

$$X \in \mathcal{M}\left(\Omega, X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}\right). \tag{1}$$

Wegen $B \in \mathfrak{B}_{\mathbb{K}}$ gilt $X^{-1}(B) \in X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}})$. Hieraus ergibt sich mittels Teil *(b)* von Beispiel M.16.3 dann

$$1_{X^{-1}(B)} \in \mathcal{M}\left(\Omega, X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus den Sätzen M.18.8 und M.18.9 dann $Y \in \mathcal{M}\left(\Omega, X^{-1}(\mathfrak{B}_{\mathbb{K}}); \mathbb{K}\right)$.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)*. □

Satz 6.2.9. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und I eine nichtleere Indexmenge. Für $k \in I$ seien $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ einer der messbaren Räume $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ oder $\left(\overline{\mathbb{R}}^1, \overline{\mathfrak{B}}_1\right)$, $B_k \in \mathfrak{A}_k$ sowie X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $Y_k := 1_{X_k^{-1}(B_k)} \cdot X_k$. Dann gilt:*

(a) *Sei $k \in I$. Dann ist Y_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$Y_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k).$$

(b) *Sei $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann ist auch $(Y_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Lemma 6.2.1 ist Y_k eine $X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}_k$-messbare Abbildung und es gilt

$$Y_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k).$$

Hieraus und aus der nach Wahl von X_k gültigen Beziehung $X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \mathfrak{A}$ folgt dann $Y_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \mathfrak{A}$. Somit ist$Y_k$ also $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-messbar und damit eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Zu *(b)*: Nach Voraussetzung ist die Familie $\left(X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Berücksichtig man dies sowie *(a)*, so ergibt sich mittels Teil *(b1)* von Bemerkung 6.1.2, dass die Familie $\left(Y_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus folgt nun wegen Definition 6.2.1, dass die Familie $(Y_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Unsere nachfolgenden Überlegungen sind darauf gerichtet, solche Kriterien für die stochastisch Unabhängigkeit einer Familie von Zufallsvariablen herzuleiten, die dadurch gekennzeichnet sind, dass die in Definition 6.2.1 auftretende Bedingung der stochastisch Unabhängigkeit gewisser σ-Algebren durch Reduktion auf gewisse (einfacher zuhandhabende) Teilsystme dieser σ-Algebren wesentlich vereinfacht wird. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung:

Lemma 6.2.2. *Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $T\colon \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$, $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω' und $\mathcal{E}'$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω und $T^{-1}(\mathcal{E})$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $T^{-1}(\mathfrak{A}')$.*

(b) *Sei $\Omega' \in \mathcal{E}'$. Dann gilt $\Omega \in T^{-1}(\mathcal{E}')$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a1)* ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω. Wegen Satz M.4.7 gilt $\sigma_\Omega\left(T^{-1}(\mathcal{E}')\right) = T^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}'))$. Hieraus folgt wegen $\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}') = \mathfrak{A}'$ dann

$$\sigma_\Omega\left(T^{-1}(\mathcal{E}')\right) = T^{-1}(\mathfrak{A}'). \tag{1}$$

Wir zeigen nin die Durchschnittsstabilität von $T^{-1}(\mathcal{E}')$. Seien $E, F \in T^{-1}(\mathcal{E}')$. Dann gibt es Mengen $E', F' \in \mathcal{E}'$ mit $T^{-1}(E') = E$ bzw. $T^{-1}(F') = F$. Da $\mathcal{E}$ nun durchschnittsstabil ist, gilt dann $E' \cap F' \in \mathcal{E}'$. Hieraus und aus

$$E \cap F = T^{-1}(E') \cap T^{-1} = T^{-1}(E' \cap F')$$

folgt dann $E \cap F \in T^{-1}(\mathcal{E}')$. Somit ist $T^{-1}(\mathcal{E}')$ also durchschnittsstabil. Hieraus und aus (1) folgt dann *(a)*.

Zu *(b)*: Dies folgt aus $T^{-1}(\Omega') = \Omega$. □

Satz 6.2.10. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $k \in I$ seien X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $\mathcal{F}_k$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $\left(X_k^{-1}(\mathcal{F}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

***(i)*⇒*(ii)*:** Wegen *(i)* und Definition 6.2.1 ist $\left(X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt, wenn man beachtet, dass für $k \in I$ wegen $\mathcal{F}_k \subseteq \mathfrak{A}_k$ nun

$$X_k^{-1}(\mathcal{F}_k) \subseteq X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)$$

gilt, mittels Teil *(b1)* von Bemerkung 6.1.2 dann die stochastische Unabhängigkeit von $\left(X_k^{-1}(\mathcal{F}_k)\right)_{k\in I}$ bezüglich P. Es gilt also *(ii)*.

***(ii)* ⇒ *(i)*:** Berücksichtigt man, dass für $k \in I$ wegen Teil *(a)* von 6.2.2 nun $X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)$ ein σ-Algebra in Ω und $X_k^{-1}(\mathcal{F}_k)$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)$ ist, so ergibt sich wegen *(ii)* mittels Folgerung 6.1.1 die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von $\left(X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$. Somit ist wegen 6.2.1 dann $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Es gilt also *(i)*. □

Wir wenden uns nun einen in den Anwendungen häufig verwendeten Spezialfall von Satz 6.2.10 zu.

Satz 6.2.11. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_k)_{k\in I}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es sei*

$$\widetilde{I}_{m,a} := \left\{ \prod_{j=1}^{m} (-\infty, a_j] \,\middle|\, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m \right\}$$

sowie

$$\widetilde{I}_{m,a} := \left\{ \prod_{j=1}^{m} (-\infty, a_j) \,\middle|\, \mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Weiterhin bezeichne $I_{m,a}$ bzw. $I_{m,o}$ bzw. $I_{m,r}$ bzw. $I_{m,l}$ das System aller abgeschlossenen bzw. offenen bzw. nach rechts halboffenen bzw. nach links halboffenen m-dimensionalen Intervalle. Es sei $\Lambda_m \in \left\{\widetilde{I}_{m,a}, \widetilde{I}_{m,o}, I_{m,a}, I_{m,o}, I_{m,r}, I_{m,l}\right\}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *Es ist $(\mathbf{X}_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Für jede Wahl $(\Delta_k)_{k\in I}$ einer Familie aus Λ_m ist die Familie $\left(\mathbf{X}_k^{-1}(\Delta_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Wegen Satz M.14.1 bzw. M.14.2 sind $I_{m,a}$, $I_{m,o}$, $I_{m,r}$ und $I_{m,l}$ bzw. $\widetilde{I}_{m,a}$ und $\widetilde{I}_{m,o}$ jeweils durchschnittsstabile Erzeuger von $\mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt mittels Satz 6.2.10 die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Wir wenden uns nun einer wichtigen Charakterisierung der stochastischen Unabhängigkeit *endlicher* Folgen von Zufallsvariablen zu:

Satz 6.2.12. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge nichttrivialer messbarer Räume. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathcal{E}_k$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_k$ und X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(i) *Für jede nichtleere Teilmenge von $\mathbb{N}_{1,n}$ und den Elementen $i_1, \ldots, i_m$ und jede mögliche Wahl von Ereignissen $E_{i_1} \in \mathcal{E}_{i_1}, \ldots E_{i_m} \in \mathcal{E}_{i_m}$ gilt*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} X_{i_j}^{-1}\left(E_{i_j}\right)\right) = \prod_{j=1}^{m} P\left(X_{i_j}^{-1}\left(E_{i_j}\right)\right).$$

(b) *Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ gelte $\Omega_k \in \mathcal{E}_k$. Dann ist* (i) *äquivalent zu:*

(iii) *Für jede mögliche Wahl von Ereignissen $E_1 \in \mathcal{E}_1, \ldots, E_n \in \mathcal{E}_n$ gilt*

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(E_j\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_j^{-1}\left(E_j\right)\right).$$

Beweis.

(i) $\Leftrightarrow$ ***(i)*****:** Dies folgt sogleich aus Satz 6.2.10, Definition 6.2.2 und Definition 6.1.1.

(i) $\Rightarrow$ ***(iii)*****:** Dies gilt trivialerweise.

(iii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Seien $m \in \mathbb{N}_{1,n-1}$ sowie $i_1, \ldots, i_m$ paarweise verschiedene Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $F_{i_j} \in \mathcal{E}_{i_j}$. Wir definieren für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ nun

$$E_k \coloneqq \begin{cases} F_{i_j}, & \text{falls mit einem gewissen } j \in \mathbb{N}_{1,m} \text{ gilt } k = i_j, \\ \Omega_k, & \text{falls } k \in \mathbb{N}_{1,n}\backslash\{i_1, \ldots, i_n\}. \end{cases} \tag{1}$$

Wegen (1) gilt für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann $E_k \in \mathcal{E}_k$. Hieraus folgt wegen *(iii)* dann

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}\left(E_k\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k^{-1}\left(E_k\right)\right). \tag{2}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}\backslash\left\{i_1, \ldots, i_m\right\}. \tag{3}$$

Wegen (3) und (1) ist $E_k = \Omega_k$, also

$$X_k^{-1}\left(E_k\right) = X_k^{-1}\left(\Omega_k\right) = \Omega. \tag{4}$$

Wegen (4) gilt

$$P\left(X_k^{-1}\left(E_k\right)\right) = P\left(\Omega\right) = 1. \tag{5}$$

Aus (1), (3) und (4) folgt

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}\left(E_k\right) = \bigcap_{j=1}^{m} X_j^{-1}\left(F_{i_j}\right). \tag{6}$$

Unter Verwendung von (1), (6), (2), (3) und (5) folgt dann

$$P\left(\bigcap_{j=1}^{m} X_j^{-1}\left(F_{i_j}\right)\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}\left(E_k\right)\right) = \prod_{k=1}^{n} P\left(X_k^{-1}\left(E_k\right)\right) = \prod_{j=1}^{m} P\left(X_{i_j}^{-1}\left(F_{i_j}\right)\right).$$

Somit gilt also *(i)*. □

Folgerung 6.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n+1}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n+1}$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n+1}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P und zusätzlich sind die Mengen $\sigma_\Omega\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right)$ und $X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{n+1}\right)$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

***(i)* ⇒ *(ii)*:** Wegen *(i)* folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung 6.2.2 dann, dass $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Um den zweiten Teil der Aussage *(ii)* zu erhalten, werden wir Satz 6.1.3 anwenden. Wir wählen dort speziell $I := \mathbb{N}_{1,n+1}$ und für $k \in \mathbb{N}_{1,n+1}$ sei $\mathcal{E}_k := X_k^{-1}\left(\mathfrak{A}_k\right)$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n+1}$ ist $\mathcal{E}_k$ nach Teil *(a1)* von Satz M.16.1 dann eine σ-Algebra in Ω und folglich nach Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann also durchschnittsstabil. Hieraus ergibt sich mittels Satz 6.1.3 dann die stochastische Unabhängigkeit von $\sigma_\Omega\big(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\big)$ und $\sigma_\Omega\left(X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right)$ bezüglich P. Da $X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{n+1}\right)$ eine σ-Algebra in Ω ist, gilt nach Teil *(ii)* von Satz M.4.6 dann $\sigma_\Omega\left(X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{n+1}\right)\right) = X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{n+1}\right)$. Somit sond $\sigma_\Omega\big(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\big)$ und $X_{n+1}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{n+1}\right)$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Es gilt also *(ii)*.

***(ii)* ⇒ *(i)*:** Es sei

$$\mathcal{E} := \left\{ \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}\left(A_k\right) \,\middle|\, A_k \in \mathfrak{A}_k,\ k \in \mathbb{N}_{1,n} \right\}. \tag{1}$$

Seien

$$l \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{2}$$

und

$$A_l \in \mathfrak{A}_l. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann $X_l^{-1}\left(A_l\right) \in \bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)$, also wegen $\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right) \subseteq \sigma_\Omega\big(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\big)$ dann auch

$$X_l^{-1}\left(A_l\right) \in \sigma_\Omega\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right). \tag{4}$$

Da die σ-Algebra $\sigma_\Omega\big(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\big)$ nach Teil *(b)* von Satz M.4.1 nun durchschnittsstabil ist, folgt aus (2) bis (4) dann

$$\bigcap_{l=1}^{n} X_l^{-1}\left(A_l\right) \in \sigma_\Omega\left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right).$$

Hieraus folgt wegen (1) bis (3) nun

$$\mathcal{E} \subseteq \sigma_\Omega \left(\bigcup_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(\mathfrak{A}_j \right) \right). \tag{5}$$

Seien nun $A_k \in \mathfrak{A}_k$, $k \in \mathbb{N}_{1,n+1}$. Da nach *(ii)* nun $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, gilt dann

$$P \left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right) = \prod_{j=1}^{n} P \left(X_j^{-1} \left(A_j \right) \right). \tag{6}$$

Aus (1) und (5) folgt

$$\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{1} \left(A_j \right) \in \sigma_\Omega \left(\bigcup_{k=1}^{n} X_k^{-1} \left(\mathfrak{A}_k \right) \right). \tag{7}$$

Weiterhin ist

$$X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \in X_{n+1}^{-1} \left(\mathfrak{A}_{n+1} \right). \tag{8}$$

Da nach *(ii)* nun $\sigma_\Omega \left(\bigcup_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k \right)$ und $X_{n+1}^{-1} \left(\mathfrak{A}_{n+1} \right)$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind, folgt aus (7) und (8) dann

$$P \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right] \cap \left[X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \right] \right) = P \left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right) \cdot P \left(X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \right). \tag{9}$$

Unter Verwendung von (9) und (6) folgt nun

$$\begin{aligned} P \left(\bigcap_{j=1}^{n+1} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right) &= P \left(\left[\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right] \cap \left[X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \right] \right) \\ &= P \left(\bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1} \left(A_j \right) \right) \cdot P \left(X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \right) \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n} P \left(X_j^{-1} \left(A_j \right) \right) \right] \cdot P \left(X_{n+1}^{-1} \left(A_{n+1} \right) \right) \\ &= \prod_{j=1}^{n+1} P \left(X_j^{-1} \left(A_j \right) \right). \end{aligned}$$

Somit ist $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n+1}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Es gilt also *(i)*. □

Wir wenden uns nun einem Resultat zur stochastischen Unabhängigkeit von Funktionen von Zufallsvariablen zu:

Satz 6.2.13. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in I}$ und $((\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k))_{k \in I}$ Familien von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in I$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $Y_k \colon \Omega_k \longrightarrow \Omega'_k$ eine $\mathfrak{A}_k$-$\mathfrak{A}'_k$-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Sei $k \in I$. Dann ist $Y_k \circ X_k$ eine $(\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k)$-Zufallsvariable auf auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Sei $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann ist auch die Familie $(Y_k \circ X_k)_{k\in I}$ stichastisch unabhängig bezüglich P.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz 4.1.1.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung 6.2.5 gilt für

$$k \in I \tag{1}$$

nun

$$(Y_k \circ X_k)^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k). \tag{2}$$

Da die Familie $(X_k)_{k\in I}$ und damit auch die Familie $\left(X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, folgt wegen (1) und (2) mittels Teil *(b1)* von Bemerkung 6.1.2, dass auch die Familie $\left((Y_k \circ X_k)^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Somit ist aber $(Y_k \circ X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. □

Beispiel 6.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(m_k)_{k\in I}$ und $(n_k)_{k\in I}$ Familien aus $\mathbb{N}$. Für jedes $k \in I$ seien $\mathbf{X}_k$ eine $(\mathbb{R}^{m_k}, \mathfrak{B}_{m_k})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $\mathbf{A}_k \in \mathbb{R}^{n_k \times m_k}$, $\mathbf{a}_k \in \mathbb{R}^{n_k}$ sowie $\mathbf{Z}_k := \mathbf{A}_k\mathbf{X}_k + \mathbf{a}_k$. Dann gilt:

(a) Sei $k \in I$. Dann ist $\mathbf{Z}_k$ eine $(\mathbb{R}^{n_k}, \mathfrak{B}_{n_k})$-Zufallsvariabvle auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) Sei $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann ist auch $(\mathbf{Z}_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

BEWEIS. Sei $k \in I$. Es sei $T_{\mathbf{A}_k,\mathbf{a}_k}\colon \mathbb{R}^{m_k} \longrightarrow \mathbb{R}^{n_k}$ definiert gemäß $\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{A}_k\mathbf{u} + \mathbf{a}_k$. Dann ist $\mathbf{Z}_k = T_{\mathbf{A}_k,\mathbf{a}_k} \circ \mathbf{X}_k$ und wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{A}_k,\mathbf{a}_k}$ dann $\mathfrak{B}_{m_k}$-$\mathfrak{B}_{n_k}$-messbar. Hieraus folgt mittels den Teilen *(a)* und *(b)* von Satz 6.2.13 die Behauptung von *(a)* und *(b)*. □

Beispiel 6.2.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $(X_k)_{k\in I}$eine Familie von $\left(\overline{\mathbb{R}}^1, \overline{\mathfrak{B}}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $(s_k)_{k\in I}$ eine Familie aus $(0, +\infty)$. Dann gilt:

(a) Sei $k \in I$. Dann ist $|X_k|^{s_k}$ eine $\left(\overline{\mathbb{R}}^1, \overline{\mathfrak{B}}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) Sei $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann ist auch $(|X_k|^{s_k})_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

BEWEIS. Kombiniere Satz 6.2.13 mit Satz M.18.14. □

Wir wenden uns nun den in Definition 6.2.2 eingeführten RADEMACHERschen Funktionen 1. Art zu. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung:

Bemerkung 6.2.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_X = \frac{1}{2}(\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1})$. Dann gilt:

(a) Es ist $X^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{-1, 1\}) \in \mathcal{N}_P$.

(b) Sei $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$

(c) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gelten $\mathcal{M}_{k,P}(X) \in [0, +\infty)$ sowie

$$M_{k,P} = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

(d) Es ist $\mathrm{E}_P(X) = 0$ und $\mathrm{Var}_P(X) = 1$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Nach Voraussetzung ist $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt wegen $\mathbb{R}\backslash\{-1,1\} \in \mathfrak{B}_1$ dann $X^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) \in \mathfrak{A}$ sowie nach Wahl von P_X weiterhin

$$P_X(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\})\right) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1}\right](\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) = 0.$$

Es ist also $X^{-1}(\mathbb{R}\backslash\{-1,1\}) \in \mathcal{N}_P$.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* gilt nach Bemerkung M.21.3 dann $X \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Hieraus und aus der Endlichkeit von P folgt mittels Teil *(b2)* von Folgerung M.22.6.3 dann $X \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Zu *(c)*: Wegen *(b)* folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.3.1 dann $\mathcal{M}_{k,P}(X) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt unter Verwendung von Teil *(c)* von Satz 5.3.1, der Gestalt von P_X sowie Teil *(b)* von Satz M.15.1 und Teil *(b)* von Beispiel M.23.2.1 dann

$$\begin{aligned} M_{k,P}(X) &= M_k(P_X) = M_k\left(\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1}\right]\right) \\ &= \frac{1}{2}M_k(\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}) + \frac{1}{2}M_k(\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1}) \\ &= \frac{1}{2}1^k + \frac{1}{2}(-1)^k \\ &= \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases} \end{aligned}$$

Zu *(d)*: Wegen *(c)* gilt

$$\mathrm{E}_P(X) = M_{1,P}(X) = 0.$$

Unter Verwendung von Teil *(b)* von Satz 5.2.1 und *(c)* folgt

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{E}_P\left(X^2\right) - \left[\mathrm{E}_P(X)\right]^2 = \mathrm{E}_P\left(X^2\right) = M_{2,P}(X) = 1.$$ □

Beispiel 6.2.4. Seien $\Omega := [0,1)$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap \Omega$ sowie $P := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne 1_{A_n} die n-te Rademachersche Funktion 1. Art und es sei $R_n := 2 \cdot 1_{A_n} - 1$. Dann gilt:

(a) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a1) Es ist $R_n = (-1)^{1+1_{A_n}}$.

(a2) Es ist R_n eine beschränkte $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$P_{R_n} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right].$$

(a3) Sei $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $R_n \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(a4) Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gelten $M_{k,P}(R_n) \in [0, +\infty)$ und

$$M_{k,P}(R_n) = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ ungerade,} \\ 1, & \text{falls } k \text{ gerade.} \end{cases}$$

(a5) Es ist $\mathrm{E}_P(R_n) = 0$ und $\mathrm{Var}_P(R_n) = 1$.

(b) Es ist $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

BEWEIS.

Zu *(a1)*: Sei zunächst $w \in A_n$. Dann ist $1_{A_n}(\omega) = 1$, also

$$R_n(\omega) = 2 \cdot 1_{A_n}(\omega) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1 = (-1)^2 = (-1)^{1+1} = (-1)^{1+1_{A_n}}.$$

Sei $\omega \in \Omega \setminus A_n$. Dann ist $1_{A_n}(\omega) = 0$, also

$$R_n(\omega) = 2 \cdot 1_{A_n}(\omega) - 1 = 2 \cdot 0 - 1 = -1 = (-1)^1 = (-1)^{1+0} = (-1)^{1+1_{A_n}}.$$

Somit gilt $R_n = (-1)^{1+1_{A_n}}$.

Zu *(a2)*: Wegen Teil *(a)* von Beispiel 6.2.1 ist 1_{A_n} eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Beispiel 6.2.2, dass R_n eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Aus *(a1)* erkennt man sogleich, dass R_n nur die Werte -1 und 1 annimmt, also beschränkt ist. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$R_n = 2 \cdot 1_{A_n} - 1 = T_{2,-1} \cdot 1_{A_n}. \tag{1}$$

Es bezeichne $\beta_{n,\frac{1}{2}}$ die Binomialverteilung mit den Paramtern 1 und $\frac{1}{2}$. Wegen Teil *(b)* von Beispiel 6.2.1 gilt

$$P_{1_{A_n}} = \beta_{1,\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Wegen Definition M.15.1 gilt

$$\beta_{1,\frac{1}{2}} = \sum_{k=0}^{1} \binom{1}{k} \left(\frac{1}{2}\right)^k \left(1 - \frac{1}{2}\right)^{1-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (1), Satz M.16.11, (2), (3) und Beispiel M.16.6 folgt dann

$$\begin{aligned} P_{R_n} &= R_n(P) = \left(T_{2,-1} \circ 1_{A_n}\right)(P) = T_{2,-1}\left[1_{A_n}(P)\right] = T_{2,-1}\left(P_{1_{A_n}}\right) \\ &= T_{2,-1}\left(\beta_{1,\frac{1}{2}}\right) = T_{2,-1}\left(\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right]\right) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{T_{2,-1}(0),\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{T_{2,-1}(1)\mathfrak{B}_1}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Zu *(a3)* bis *(a5)*: Wegen (4) folgt *(a3)* bzw. *(a4)* bzw. *(a5)* sogleich aus Teil *(b)* bzw. *(c)* bzw. *(d)* von Bemerkung 6.2.6.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(c)* von Beispiel 6.2.1 ist die Folge $(1_{A_n})_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Beispiel 6.2.2, dass die Folge $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Dieses Beispiel führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 6.2.3. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne 1_{A_n} die in Definition 6.2.2 eingeführte n-te RADEMACHERsche Funktion 1. Art. Es sei $R_n := 2 \cdot 1_{A_n} - 1$. Dann heißt R_n die *n-te* RADEMACHER*sche Funktion 2. Art.*

Wir kommen nun zu einer Verallgemeinerung der eben eingeführten Begriffsbildung:

Definition 6.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$P_{X_n} = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right]$$

erfüllt ist. Dann heißt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine RADEMACHER*sche Folge auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Bemerkung 6.2.7. Seien $\Omega := [0,1)$, $\mathfrak{A} := \mathfrak{B}_1 \cap [0,1)$ und $P := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne R_n die n-te RADEMACHERsche Funktion 2. Art. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine RADEMACHERsche Folge auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. ♣

BEWEIS. Kombiniere Definition 6.2.4, Definition 6.2.3 sowie die Teile *(a2)* und *(b)* von Beispiel 6.2.4. □

6.3. Konsequenzen des Kolmogorovschen Null-Eins-Gesetzes

Wir knüpfen nun an die im Abschnitt 6.1 geführte Diskussion von Null-Eins-Gesetzen an. Hierzu nehmen wir zunächst eine Spezifizierung der in Definition 6.1.2 eingeführte terminale σ-Algebra vor:

Definition 6.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $X_n \colon \Omega \longrightarrow \Omega_n$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_n$-messbare Abbildung. Dann heißt die zur Folge $\left(X_n^{-1}(\mathfrak{A}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von σ-Algebren gehörige terminale σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$ in Ω, die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω.

Bemerkung 6.3.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $X_n \colon X \longrightarrow X_n$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_n$-messbare Abbildung. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ zugehörige σ-Algebra in Ω. Dann gilt $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}$. ♣

BEWEIS. Für $n \in \mathbb{N}$ gilt nach Wahl von X_n dann $X_n^{-1}(\mathfrak{A}_n) \subseteq \mathfrak{A}$. Hieraus folgt wegen Definition 6.3.1 und Bemerkung 6.1.3 dann $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}$. □

Unsere nächsten Betrachtungen sind darauf gerichtet, im Falle eines nichttrivialen messbaren Raumes $(\Omega, \mathfrak{A})$, einige uns besonders interessierende Mengen aus der zu einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gehörigen terminalen σ-Algebra herauszuheben. Wir beginnen mit einer kleinen Vorbereitung:

Lemma 6.3.1. *Seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}$, $(\beta_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ sowie $s \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Folge $\left(\alpha_n \left[\sum_{j=1}^n \beta_j\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist konvergent.*

(ii) *Die Folge $\left(\alpha_n \left[\sum_{j=1}^n \beta_j\right]\right)_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,s-1}}$ ist konvergent.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \left[\sum_{j=1}^n \beta_j\right] = \lim_{n\to\infty} \alpha_n \left[\sum_{j=s}^n \beta_j\right].$$

BEWEIS. Für $s = 1$ sind alle Behauptungen trivialerweise erfüllt. Sei nun $s \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Für

$$n \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{1}$$

gilt dann

$$\alpha_n \left[\sum_{j=1}^{n} \beta_j\right] = \alpha_n \left[\sum_{j=1}^{s-1} \beta_j\right] + \alpha_n \left[\sum_{j=s}^{n} \beta_j\right]. \tag{2}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n \left[\sum_{j=1}^{s-1} \beta_j\right] = 0. \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) erkennt man sogleich die Gültigkeit aller Behauptungen. □

Satz 6.3.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $A \in \mathcal{T}_\infty$.*

(b) *Es bezeichne B die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die die Folge $(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $B \in \mathcal{T}_\infty$.*

(c) *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}$. Es bezeichne C die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(\alpha_n(\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $C \in \mathcal{T}_\infty$.*

(d) *Es bezeichne D die Menge aller $\omega \in \Omega$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n(\omega)| \in \mathbb{R}$. Dann gilt $D \in \mathcal{T}_\infty$.*

BEWEIS. Seien

$$s \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$\mathcal{T}_s := \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} X_k^{-1}(\mathfrak{B}_1)\right). \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) folgt aus Satz M.16.4 dann

$$X_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}). \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.18.4 folgt aus (4) nun

$$X_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}). \tag{5}$$

Wegen Definition 6.3.1 sowie (1) und (2) gilt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s. \tag{6}$$

Zu *(b)*: Sei

$$s \in \mathbb{N}. \tag{7}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{8}$$

Wegen (7), (8), (1), (3) und (4) folgt mittels Satz M.18.4 dann

$$\sum_{k=s}^{n} X_k \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{9}$$

Aufgrund der Definition der Konvergenz einer Reihe ist B dann genau die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $\left(\sum_{k=s}^{n} X_k(\Omega)\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}}$ konvergiert. Berücksichtigt man dies sowie (8) und (9), so folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.18.11 dann

$$B \in \mathcal{T}_s. \tag{10}$$

Aus (6), (7) und (10) folgt dann $B \in \mathcal{T}_\infty$.

Zu *(c)*: Sei

$$s \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{12}$$

Wegen (7), (8), (1), (3) und (4) folgt mittels Satz M.18.7 und Bemerkung M.18.4 dann

$$\alpha_n \sum_{k=s}^{n} X_k \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{13}$$

Aus Teil *(a)* von Lemma 6.3.1 ergibt sich, dass C genau die Menge aller $\omega \in \Omega$ ist, für welche die Folge $\left(\alpha_n \sum_{k=s}^{n} X_k(\Omega)\right)_{n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}}$ konvergiert. Berücksichtigt man dies sowie (12) und (13), so folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.18.11 dann

$$C \in \mathcal{T}_s. \tag{14}$$

Wegen (6), (11) und (14) folgt dann $C \in \mathcal{T}_\infty$.

Zu *(d)*: Sei

$$s \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Weiter sei

$$k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{16}$$

Wegen (15), (16), (1), (3) und (5) folgt mittels Teil *(b)* Satz M.18.12

$$|X_k| \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{17}$$

Sei

$$Y_S \coloneqq \sup_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}} |X_k|. \tag{18}$$

Wegen (16) bis (18) folgt mittels Satz M.18.10 dann

$$Y_s \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{19}$$

Wegen (19) ist dann $Y_s^{-1}\left(\overline{\mathfrak{B}}_1\right) \subseteq \mathcal{T}_s$. Hieraus folgt wegen $\mathbb{R} \in \overline{\mathfrak{B}}_1$ dann $Y_s^{-1}(\mathbb{R}) \in \mathcal{T}_s$ und somit aufgrund der aus (18) und der Definition von D folgenden Beziehung $D = Y_s^{-1}(\mathbb{R})$ dann

$$D \in \mathcal{T}_s. \tag{20}$$

Wegen (6), (15) und (20) ist dann $D \in \mathcal{T}_\infty$.

Zu *(a)*: Sei

$$s \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Aufgrund der Definition des Konvergenz einer Zahlenfolge ist A dann genau die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(X_k(\omega))_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}}$ konvergiert. Berücksichtigt man dies sowie (1), (3), (5) und (21), so folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.18.11 dann

$$A \in \mathcal{T}_s. \tag{22}$$

Aus (6) bis (22) folgt dann $A \in \mathcal{T}_\infty$. □

Seien nun $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Weiter sei $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ mit zugehöriger terminaler σ-Algebra $\mathcal{T}_\infty$. Unsere nachfolgenden Überlegungen sind nun auf die Bereitstellung verschiedener aus der Folge $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ abgeleiteter Abbildungen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ ausgerichtet, welche sich sogar als zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{K})$ gehörig erweisen. Hierzu benötigen wir noch einige Vorbereitungen:

Lemma 6.3.2. *Seien Ω eine nichtleere Menge, $(\mathfrak{A}_k)_{k \in I}$ eine Familie von σ-Algebren in Ω und $\mathfrak{A} := \bigcap_{k \in I} \mathfrak{A}_k$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω.*

(b) *Seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

  (i) *Für alle $k \in I$ liegt $\mathfrak{A}_k$-$\mathfrak{A}'$-Messbarkeit von T vor.*

  (ii) *Es ist T eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz M.4.5.

***(i)* ⇒ *(ii)*:** Wegen *(i)* gilt für $k \in I$ dann $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}_k$. Hieraus folgt nun

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \bigcap_{k \in I} \mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}.$$

Somit ist T dann also $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar. Es gilt also *(ii)*.

***(ii)* ⇒ *(i)*:** Wegen *(ii)* und der Definition von $\mathfrak{A}$ gilt für $k \in I$ dann

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A} = \bigcap_{k \in I} \mathfrak{A}_k \subseteq \mathfrak{A}_k,$$

das heißt es ist T $\mathfrak{A}_k$-$\mathfrak{A}'$-messbar, also *(i)*. □

Lemma 6.3.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume. Es sei I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiterhin sei $(\Omega_k)_{k \in I}$ eine Familie aus Mengen aus $\mathfrak{A} \setminus \{\varnothing\}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist* $\bigcup_{k\in I}\Omega_k = \Omega$.

(II) *Für alle* $k,l \in I$ *mit* $k \neq l$ *sei* $\Omega_k \cap \Omega_l = \varnothing$.

Für jedes $k \in I$ *sei* $T_k\colon \Omega_k \longrightarrow \Omega$ *eine* $(\mathfrak{A}\cap\Omega_k)$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Es gibt* genau *ein* $T \in \operatorname{Abb}(\Omega,\Omega')$, *welches für alle* $k \in I$ *der Bedingung* $T \restriction \Omega_k = T_k$ *genügt.*

(b) *Die Abbildung* T *ist* $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$*-messbar.*

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $\omega \in \Omega$. Wegen *(I)* und *(II)*, gibt es dann genau ein $k \in I$ mit $\omega \in \Omega_k$. Wir definieren dann

$$T(\omega) \coloneqq T_k(\omega).$$

Aus dieser Definition von T folgt für jedes $k \in I$

$$T \restriction \Omega_k = T_k.$$

Wegen den Eigenschaften *(I)* und *(II)* ist klar, dass $T \in \operatorname{Abb}(\Omega,\Omega')$ hierdurch eindeutig bestimmt ist.

Zu *(b)*: Sei

$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{1}$$

Unter Beachtung von *(I)* und *(II)* folgt dann

$$T^{-1}(A') = \bigcup_{k\in I} T_k^{-1}(A'). \tag{2}$$

Sei

$$k \in I. \tag{3}$$

Wegen der $(\mathfrak{A}\cap\Omega_k)$-$\mathfrak{A}'$-Messbarkeit von T_k folgt aus (1) dann

$$T_k^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\cap\Omega_k. \tag{4}$$

Also wegen $\Omega_k \in \mathfrak{A}$ folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.2 dann

$$\mathfrak{A}\cap\Omega_k = \mathfrak{P}(\Omega_k)\cap\mathfrak{A}.$$

Hieraus folgt

$$\mathfrak{A}\cap\Omega_k \subseteq \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann

$$T_k^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (2), (3), (6) und der Abzählbarkeit von I dann

$$T^{-1}(A') = \bigcup_{k\in I} T_k^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) ist T dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar. □

Lemma 6.3.4. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *und* $(\Omega', \mathfrak{A}')$ *nichttriviale messbare Räume und* $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ *eine* $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung. Weiter seien* $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{P}(\Omega) \setminus \{\varnothing\}$ *und* $\widetilde{T} \coloneqq T \restriction \widetilde{\Omega}$*. Dann ist* $\widetilde{T}$ *eine* $\left(\mathfrak{A} \cap \widetilde{\Omega}\right)$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung.*

Beweis. Sei

$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Wahl von T gilt dann

$$T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Aus der Definition von $\widetilde{T}$ folgt

$$\widetilde{T}^{-1}(A') = T^{-1}(A') \cap \widetilde{\Omega}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$\widetilde{T}^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \cap \widetilde{\Omega}. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist $\widetilde{T}$ dann $\left(\mathfrak{A} \cap \widetilde{\Omega}\right)$-$\mathfrak{A}'$-messbar. □

Lemma 6.3.5. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$*. Es bezeichne* A *die Menge aller* $\omega \in \Omega$*, für welche die Folge* $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $A \in \mathfrak{A}$*.*

(b) *Sei* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$f(\omega) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n\to\infty} f_n(\omega), & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash A. \end{cases}$$

Dann gilt $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$*.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen der Bemerkung M.18.4 ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.18.11 dann $A \in \mathfrak{A}$.

Zu *(b)*: Sei zunächst $A = \Omega$. Dann liefert Folgerung M.18.10 sogleich $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Sei nun $A = \varnothing$. Dann ist $f \equiv 0$ auf Ω, also wegen Beispiel M.16.1 dann $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Sei nun

$$A \neq \varnothing. \tag{1}$$

und

$$\Omega\backslash A \neq \varnothing. \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgen aus *(a)*, (1) und (2) dann

$$A \in \mathfrak{A}\backslash\{\varnothing\} \tag{3}$$

und

$$\Omega\backslash A \in \mathfrak{A}\backslash\{\varnothing\}. \tag{4}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Wegen Lemma 6.3.4 gilt dann

$$f_n \restriction A \in \mathcal{M}\left(A, \mathfrak{A} \cap A; \mathbb{R}\right). \tag{6}$$

Wegen (5), (6) und der Definition von f ergibt sich mittels Folgerung M.18.10 dann

$$f \restriction A \in \mathcal{M}\left(A, \mathfrak{A} \cap A; \mathbb{R}\right). \tag{7}$$

Nach Definition von f ist $f \restriction \Omega \backslash A$ die Nullfunktion auf $\Omega \backslash A$. Hieraus folgt mittels Beispiel M.16.1 dann

$$f \restriction \Omega \backslash A \in \mathcal{M}\left(\Omega \backslash A, \mathfrak{A} \cap (\Omega \backslash A); \mathbb{R}\right). \tag{8}$$

Wegen (3), (4), (7) und (8) liefert Teil *(b)* von Lemma 6.3.3 dann

$$f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right). \qquad \square$$

Satz 6.3.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω sowie A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Es sei $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$X(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R})$.

Beweis. Seien

$$s \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$\mathcal{T}_s \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} X_k^{-1}\left(\mathfrak{B}_1\right)\right). \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{3}$$

Wegen (3) und (2) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.16.4 dann

$$X_k \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Wegen (3) , (4) sowie der Tatsache, dass A die Menge aller $\omega \in \Omega$ ist, für welche die Folge $(X_k(\omega))_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,s-1}}$ konvergiert, folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 6.3.5 dann

$$X \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}\right). \tag{5}$$

Wegen (1), (2) und Definition 6.3.1 gilt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s. \tag{6}$$

Wegen (1), (5) und (6) liefert Teil *(b)* von Lemma 6.3.2 dann $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R})$. $\square$

Satz 6.3.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$, die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}$. Es bezeichne B die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge*

$$\left(\alpha_n \left[\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

konvergiert. Die Abbildung $Y\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$Y(\omega) \coloneqq \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n\left[\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\right]\right), & \text{falls } \omega \in B, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash B. \end{cases}$$

Dann ist $Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R})$.

Beweis. Seien

$$s \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$\mathcal{T}_s \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} X_k^{-1}(\mathfrak{B}_1)\right). \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{3}$$

Wegen (3), (2) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.16.4 dann

$$X_k \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}). \tag{4}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{5}$$

Wegen (5), (3) und (4) folgt mittels Satz M.18.7 dann

$$\alpha_n\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Wegen Lemma 6.3.1 und der Definition von Y ist dann B genau die Menge aller derjenigen $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $\left(\alpha_n\left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]\right)_{n\in\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,s-1}}$ konvergiert und für $\omega \in \Omega$ gilt

$$Y(\omega) = \begin{cases} \lim_{n\to\infty}\left(\alpha_n\left[\sum_{k=1}^{n} X_k(\omega)\right]\right), & \text{falls } \omega \in B, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash B. \end{cases} \tag{7}$$

Wegen (5) bis (7) folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 6.3.5 dann

$$Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}). \tag{8}$$

Wegen (1), (2) und Definition 6.3.1 gilt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s. \tag{9}$$

Wegen (1), (8) und (9) liefert Teil *(b)* von Lemma 6.3.2 dann

$$Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R}). \qquad \square$$

Satz 6.3.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ein Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\limsup_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(b) *Es ist* $\liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Beweis. Seien

$$s \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$\mathcal{T}_s \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} X_k^{-1}\left(\overline{\mathfrak{B}}_1\right)\right). \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,s-1}. \tag{3}$$

Wegen (3) und (2) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.16.4 dann

$$X_k \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) folgen mittels Satz M.18.10 dan

$$\limsup_{n\to\infty} X_{s+n} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{5}$$

und

$$\liminf_{n\to\infty} X_{s+n} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \mathbb{R}\right). \tag{6}$$

Aus der Definition des Limes superior bzw. Limes inferior folgt sogleich

$$\limsup_{n\to\infty} X_{s+n} = \limsup_{n\to\infty} X_n \tag{7}$$

bzw.

$$\liminf_{n\to\infty} X_{s+n} = \liminf_{n\to\infty} X_n. \tag{8}$$

Aus (5) und (7) bzw. (6) und (8) folgt nun

$$\limsup_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{9}$$

bzw.

$$\liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_s; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{10}$$

Wegen (1), (2) und Definition 6.3.1 gilt

$$\mathcal{T}_\infty \coloneqq \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s. \tag{11}$$

Wegen (1), (9) bzw. (10) und (11) folgt mittels Teil *(b)* von Lemma 6.3.2 dann

$$\limsup_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \overline{\mathbb{R}}\right) \quad \text{bzw.} \quad \liminf_{n\to\infty} X_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \overline{\mathbb{R}}\right). \qquad \square$$

Satz 6.3.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Ferner sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}$. Dann gehören*

$$\limsup_{n\to\infty} \alpha_n \left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right] \qquad \text{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} \alpha_n \left[\sum_{k=1}^{n} X_k\right]$$

jeweils zu $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Wir nehmen nun eine Umformulierung des Kolmogorovschen Null-Eins-Gesetzes in die Sprache der Zufallsvariablen vor:

Satz 6.3.6 (Null-Eins-Gesetz von Kolmogorov)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie X_n eine $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Weiterhein sei $\mathfrak{A}_{P,0} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid A \in \mathcal{N}_P \text{ oder } \Omega\backslash A \in \mathcal{N}_P\}$. Dann gilt*

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0},$$

für alle $A \in \mathcal{T}_\infty$ gilt also $P(A) = 0$ oder $P(A) = 1$.

Beweis. Für

$$s \in \mathbb{N} \tag{1}$$

sei

$$\mathcal{T}_s \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{k=s}^{\infty} X_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right). \tag{2}$$

Aus (1), (2) und Definition 6.3.1 folgt

$$\mathcal{T}_\infty = \bigcap_{s=1}^{\infty} \mathcal{T}_s. \tag{3}$$

Aufgrund der Wahl der Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gelten:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $X_n^{-1}(\mathfrak{A}_n) \subseteq \mathfrak{A}$.

(II) Die Folge $\left(X_n^{-1}(\mathfrak{A}_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

Wegen *(I)*, *(II)* sowie (1) bis (3) folgt mittels des bisherigen Kolmogorovschen Null-Eins-Gesetzes (Satz 6.1.4) dann

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \qquad \square$$

Wir stellen nun im Fall einer stochastisch unabhängigen Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen einige mittels asymptotischer Prozeduren aus $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gebildete bemerkenswerte Ereignisse bereit, welche die Wahrscheinlichkeit 0 oder 1 besitzen. Intuitiv bedeutet dies, dass im Langzeitverhalten die Zufälligkeit nahezu verschwindet und durch Sicherheit ersetzt wird.

Satz 6.3.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $A \in \mathfrak{A}_{P,0}$.*

(b) *Es bezeichne B die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(\sum_{k=1}^n X_k(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $B \in \mathfrak{A}_{P,0}$.*

(c) *Sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge aus $\mathbb{R}$. Es bezeichne C die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(\alpha_n(\sum_{k=1}^n X_k(\omega)))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $C \in \mathfrak{A}_{P,0}$.*

(d) *Es bezeichne D die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche $\sup_{n\in\mathbb{N}} |X_n(\omega)| \in \mathbb{R}$ erfüllt ist. Dann gilt $\mathfrak{A}_{P,0}$.*

Beweis. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zur Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Wegen Satz 6.3.1 gilt $\{A, B, C, D\} \subseteq \mathcal{T}_\infty$ und wegen Satz 6.3.6 ist $\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}$. Somit gilt

$$\{A, B, C, D\} \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \qquad \square$$

Vorausschauend sei erwähnt, dass wir in unseren nächsten Untersuchungen über Gesetze der großen Zahlen[1)] eine gegebene Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die P-fast-überall-Konvergenz der Folgen $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sowie $(\sum_{k=1}^n X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ eingehend studieren werden.

Bemerkung 6.3.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Rademachersche Folge auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Es ist $(c_n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) Es bezeichne B die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(\sum_{k=1}^n c_k X_k)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt $B \in \mathfrak{A}_{P,0}$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Definition 6.2.4 ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt mittels Beispiel 6.2.2, dass $(c_n X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* folgt *(b)* sogleich aus Teil *(b)* von Satz 6.3.7. $\square$

Es folgen nun weitere Anwendungen des Kolomogorovschen Null-Eins-Gesetzes aus Satz 6.3.6.

Satz 6.3.8. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Für $n \in \mathbb{N}$ seien $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$ nichttriviale messbare Räume sowie X_n $(\Omega_n, \mathfrak{A}_n)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die terminale σ-Algebra in Ω. Weiter sei $Y \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R})$. Dann ist Y eine degenerierte $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

[1)] siehe Kapitel 9

BEWEIS. Nach Wahl von Y gilt

$$Y^{-1}(\mathfrak{B}_1) \subseteq \mathcal{T}_\infty. \tag{1}$$

Wegen Bemerkung 6.3.1 gilt

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann $Y^{-1}(\mathfrak{B}_1) \subseteq \mathfrak{A}$. Somit ist also also eine $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen Satz 6.3.6 gilt

$$\mathcal{T}_\infty \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$Y^{-1}(\mathfrak{B}_1) \subseteq \mathfrak{A}_{P,0}. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung 2.2.2 gilt

$$\mathfrak{A}_{P,0} = \{A \in \mathfrak{A} \mid P(A) = 0 \text{ oder } P(A) = 1\}. \tag{5}$$

Wegen (5) gilt für $A \in Y^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ dann $P(A)$ oder $P(A) = 1$. Hieraus folgt mittels Satz 4.2.2, dass Y degeneriert ist. □

Satz 6.3.9. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es bezeichne A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(X_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß*

$$X(\omega) := \begin{cases} \lim_{n\to\infty} X_n(\omega), & \text{falls } \omega \in \Omega, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash A. \end{cases}$$

Dann ist X eine degenerierte $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

BEWEIS. Es bezeichne $\mathcal{T}_\infty$ die zu $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gehörige terminale σ-Algebra in Ω. Nach Satz 6.3.2 gilt dann $X \in \mathcal{M}(\Omega, \mathcal{T}_\infty; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Satz 6.3.8 die Behauptung. □

6.4. Diskussion der stochastischen Unabhängigkeit von Zufallsvariablen auf der Grundlage der Verteilungen

Das Hauptziel dieses Abschnitts besteht darin, nachzuweisen, dass die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen eine wahrscheinlichkeitstheoretische Eigenschaft ist, also eine Eigenschaft der Verteilungen der betreffenden Zufallsvariablen ist. Dies ist Inhalt es nachfolgenden Satzes, der das Hauptresultat dieses Abschnittes darstellt:

Satz 6.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Es bezeichne $\bigotimes_{k=1}^n X_k$ die Produktabbildung der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\bigotimes_{k=1}^n X_k$ eine $\left(\times_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Es bezeichne $\bigotimes_{k=1}^n P_{X_k}$ das Produktmaß der Folge $(F_{X_k})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

   (i) *Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist* $P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k} = \bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt wegen Definition 4.1.1 sogleich aus Satz M.17.4.

Zu *(b)*: Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ ist $\mathfrak{A}_k$ als σ-Algebra in Ω_k wegen Teil *(b)* von Satz M.4.1 nun durchschnittsstabil und wegen Teil *(d)* von Satz M.4.6 ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_k$, wobei wegen Definition M.4.1 zudem $\Omega_k \in \mathfrak{A}_k$ erfüllt ist. Hieraus folgt mittels Satz 6.2.12 die Äquivalenz von *(i)* zu:

(i') Für jede mögliche Wahl von Ereignissen $A_j \in \mathfrak{A}_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt

$$P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k)\right) = \prod_{j=1}^{n} P\left(X_k^{-1}(A_k)\right).$$

Sei

$$\bigtimes_{k=1}^{n} A_k \in \bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.17.1 gilt

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1} \left(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k). \tag{2}$$

Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{3}$$

Unter Beachtung von Definition 4.1.4 sowie (1) bis (3) folgt dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k} = P\left(\left(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1} \left(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k\right)\right) = P\left(\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k)\right). \tag{4}$$

Wegen Definition 4.1.4 gilt für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{5}$$

weiterhin

$$P_{X_k}(A_k) = P\left(X_k^{-1}(A_k)\right). \tag{6}$$

Wegen (1), (4), (5) und (6) ist *(ii)* dann äquivalent zu

(ii') Für alle $\times_{k=1}^{n} A_k \in \boxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ gilt

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k\right) = \prod_{k=1}^{n} P_{X_k}(A_k).$$

Hieraus folgt bei Beachtung der Definition des Produktmaßes, dass *(ii')* äquivalent zu *(ii)* ist. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Satz 6.4.1 verdeutlicht die herausragende Rolle der stochastischen Unabhängigkeit einer Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von Zufallsvariablen. Genau in diesem Fall ist es nämlich möglich, eine Aussage über die Verteilung der Produktabbildung $P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k}$ der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zu treffen. Im Allgemeinen Fall weiß man nur, dass die Verteilung der Produktabbildung $P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k}$ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf

$$\left(\bigtimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k\right)$$

ist, dessen eindimensionale Randverteilungen gerade $P_{X_1}, \ldots, P_{X_n}$ sind.

Das Maß $P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k}$ wird oft auch als *gemeinsame Verteilung* der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ bezüglich P bezeichnet. Wir ziehen nun eine Reihe von Schlussfolgerungen aus Satz 6.4.1:

Wir zeigen zunächst, dass eine „geringfügige" Abänderung einer endlichen Folge stochastisch unabhängiger Zufallsvariablen *nichts* an der stochastischen Unabhängigkeit ändert.

Satz 6.4.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien X_k und Y_k jeweils $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass ein $N_k \in \mathcal{N}_P$ mit $\{X_k \neq Y_k\} \subseteq N_k$ existiert. Dann gilt:*

(a) *Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $P_{X_k} = P_{Y_k}$.*

(b) *Es sind $\bigotimes_{k=1}^n X_k$ und $\bigotimes_{k=1}^n Y_k$ jeweils $\left(\times_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k} = P_{\bigotimes_{k=1}^n Y_k}$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(Y_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Bemerkung 4.1.2.

Zu *(b)*: Es gilt

$$\left\{\bigotimes_{k=1}^n X_k \neq \bigotimes_{k=1}^n Y_k\right\} = \bigcup_{k=1}^n \{X_k \neq Y_k\} \subseteq \bigcup_{k=1}^n N_k. \tag{1}$$

Da $(N_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{N}_P$ ist, gilt wegen Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\bigcup_{k=1}^n N_k \subseteq \mathcal{N}_P. \tag{2}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz 6.4.1 sind $\bigotimes_{k=1}^n X_k$ und $\bigotimes_{k=1}^n Y_k$ jeweils $\left(\times_{k=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (2) mittels Bemerkung 4.1.2 dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k} = P_{\bigotimes_{k=1}^n Y_k}.$$

Zu *(c)*: Dies folgt wegen *(a)* und *(b)* sogleich aus Teil *(b)* von Satz 6.4.1. □

Folgerung 6.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in I$ seien X_k und Y_k $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass ein $N_k \in \mathcal{N}_P$ mit $\{X_K \neq Y_k\} \subseteq N_k$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $(X_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(ii) *Es ist $(Y_k)_{k\in I}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Bemerkung 6.2.2 ist *(i)* bzw. *(ii)* äquivalent zu:

(i') Für jede nichtleere endliche Teilmenge I' von I ist $(X_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(ii') Für jede nichtleere endliche Teilmenge I' von I ist $(Y_k)_{k\in I'}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Hieraus und aus der wegen Teil *(c)* von Satz 6.4.2 vorliegenden Äquivalenz von *(i')* und *(ii')* folgt dann die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Das nächste Resultat erinnert von seinem Charakter her an Satz 6.1.3. Wir betrachten eine endliche Folge von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen. Dann zeigt sich, dass bei „disjunkter Blockbildung" stochastisch unabhängige Blöcke entstehen.

Satz 6.4.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiterhin sei die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Sei $s \in \mathbb{N}_{1,n-1}$. Dann ist $\bigotimes_{k=1}^{s} X_k$ eine $\big(\times_{k=1}^{s} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{s} \mathfrak{A}\big)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ als auch $\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k$ eine $\big(\times_{k=s+1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=s+1}^{n} \mathfrak{A}_k\big)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es sind $\bigotimes_{k=1}^{s} X_k$ sowie $\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Aufgrund der Definition der beteiligten Größen folgt sogleich

$$\bigotimes_{k=1}^{n} X_k = \left(\bigotimes_{k=1}^{s} X_k\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k\right). \tag{1}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz 6.4.1 ist $\bigotimes_{k=1}^{n} X_k$, $\bigotimes_{k=1}^{s} X_k$ und $\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k$ eine $\big(\times_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}\big)$-Zufallsvariable, eine $\big(\times_{k=1}^{s} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{s} \mathfrak{A}\big)$-Zufallsvariable und eine $\big(\times_{k=s+1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=s+1}^{n} \mathfrak{A}\big)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Da die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, liefert Teil *(b)* von Satz 6.4.1 dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k} = \bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k}. \tag{2}$$

Da die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, liefert Teil *(b)* von Bemerkung 6.2.2 dann, dass auch $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ sowie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}\backslash\mathbb{N}_{1,s}}$ jeweils stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1 dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{s} X_k} = \bigotimes_{k=1}^{s} P_{X_k} \tag{3}$$

und

$$P_{\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k} = \bigotimes_{k=s+1}^{n} P_{X_k}. \tag{4}$$

Aufgrund der Assoziativität der Produktmaßbildung gilt

$$\bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k} = \left(\bigotimes_{k=1}^{s} P_{X_k}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=s+1}^{n} P_{X_k}\right). \tag{5}$$

Unter Beachtung von (1), (2), (5), (3) und (4) folgt nun

$$\begin{aligned} P_{\left(\bigotimes_{k=1}^{s} X_k\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k\right)} &= P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k} = \bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k} = \left(\bigotimes_{k=1}^{s} P_{X_k}\right) \otimes \left(\bigotimes_{k=s+1}^{n} P_{X_k}\right) \\ &= P_{\bigotimes_{k=1}^{s} X_k} \otimes P_{\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1 dann, dass $\bigotimes_{k=1}^{s} X_k$ und $\bigotimes_{k=s+1}^{n} X_k$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. □

Wir zeigen nun, dass sich im Falle einer gegebenen endlichen Folge $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, P_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von Wahrscheinlichkeitsräumen stets ein Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ derart bestimmen lassen, dass für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{X_k} = P_k$ ist und dass zudem die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist.

Satz 6.4.4. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, P_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Es sei*

$$(\Omega, \mathfrak{A}, P) := \left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n} P_k\right).$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ und sei $X_k \colon \Omega \longrightarrow \Omega_k$ definiert gemäß $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto \omega_k$. Dann ist X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt $P_{X_k} = P_k$.*

(c) *Die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Konstruktion von P.

Zu *(b)*: Da $(P_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, gilt

$$P_{X_k} = X_k(P) = X_k\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_j\right) = P_k. \tag{1}$$

Zu *(c)*: Aus der Definition der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ erkennt man sogleich, dass

$$\bigotimes_{k=1}^{n} X_k = \mathrm{id}_\Omega. \tag{2}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung und es gilt

$$\mathrm{id}_\Omega(P) = P. \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt nun

$$P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k} = P_{\mathrm{Id}_\Omega} = (\mathrm{id}_\Omega)(P) = P = \bigotimes_{k=1}^n P_k. \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k} = \bigotimes_{k=1}^n P_{X_k}.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1, dass die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Satz 6.4.5. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, P_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Dann gibt es einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ derart, dass für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ gerade X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{X_k} = P_k$ ist und zudem $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist.*

Beweis. Dies folgt aus Satz 6.4.4. □

Beispiel 6.4.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei X_j eine $(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass mit einem gewissen $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \times_{k=1}^n \Omega_k$ die Beziehung $P_{\bigotimes_{k=1}^n X_k} = \varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k}$ besteht. Dann gilt:

(a) Sei $s \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann ist $P_{X_s} = \varepsilon_{\omega_s,\mathfrak{A}_s}$.

(b) Die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Beispiel M.24.1.2 gilt

$$\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k} = \bigotimes_{k=1}^n \varepsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}_k}. \tag{1}$$

Sei $\pi_s\colon \times_{k=1}^n \Omega_k \longrightarrow \Omega_s$ definiert gemäß

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto \omega_s. \tag{2}$$

Da $(\varepsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}_k})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, folgt unter Beachtung von (1)

$$\pi_s\left(\bigotimes_{k=1}^n \varepsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}_k}\right) = \varepsilon_{\omega_s,\mathfrak{A}_s}. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$\pi_s\left(\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k}\right) = \varepsilon_{\omega_s,\mathfrak{A}_s}. \tag{4}$$

Aus (2) folgt

$$X_s = \pi_s \circ \bigotimes_{k=1}^{n} X_k. \tag{5}$$

Unter Verwendung von Definition 4.1.4, (5), der nach Satz M.16.11 vorliegenden Transitivität der Bildung von Bildmaßen sowie (4) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{X_s} = X_s(P) &= \left[\pi_s \circ \bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right](P) = \pi_s\left(\left[\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right](P)\right) \\ &= \pi_s\left(P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k}\right) = \pi_s\left(\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k}\right) \\ &= \varepsilon_{\omega_s,\mathfrak{A}_s}. \end{aligned}$$

Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Unter Verwendung von (1) und *(a)* ergibt sich

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{n} X_k} = \varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k} = \bigotimes_{k=1}^{n} \varepsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}_k} = \bigotimes_{k=1}^{n} P_{X_k}.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1, dass die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Beispiel 6.4.2. Sei $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Die Vektoren $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{b} \coloneqq (b_1,\ldots,b_m)^T \in \mathbb{R}^m$ seien so gewählt, dass $\mathbf{a} < \mathbf{b}$ erfüllt ist. Es sei

$$\Delta \coloneqq [\mathbf{a},\mathbf{b}]$$

und es bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei $\Delta_j \coloneqq [a_j,b_j]$ und es bezeichne μ_{Δ_j} die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ_j. Weiterhin seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und

$$\mathbf{X} = \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix}$$

eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit $P_{\mathbf{X}} = \mu_\Delta$. Dann gilt:

(a) Sei $s \in \mathbb{N}_{1,m}$. Dann ist X_s eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und es gilt

$$P_{X_s} = \mu_{\Delta_s}.$$

(b) Die Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen der Bemerkung 4.1.1 ist X_j eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz M.23.7.1 gilt

$$\mu_{\Delta_k} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right). \tag{2}$$

Wegen Teil *(a)* von Beispiel M.24.1.6 gilt

$$\mu_\Delta = \bigotimes_{k=1}^{m} \mu_{\Delta_k}. \tag{3}$$

Sei $\pi_{m;s}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_s. \tag{4}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathfrak{B}_1. \tag{5}$$

Wegen (1) bis (5) ist die Abbildung $\pi_{m;s}$ nach Satz M.24.1.19 dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbar und es gilt

$$\pi_{m;s}(\mu_\Delta) = \pi_{m;s}\left(\bigotimes_{k=1}^{m} \mu_{\Delta_k}\right) = \mu_{\Delta_s}. \tag{6}$$

Wegen (4) gilt

$$X_s = \pi_{m;s} \circ \mathbf{X}. \tag{7}$$

Unter Verwendung von Definition 4.1.4, (7) und Satz M.16.11, nochmals Definition 4.1.4 und (6) folgt nun

$$P_{X_s} = X_s(P) = (\pi_{m;s} \circ \mathbf{X})(P) = \pi_{m;s}[\mathbf{X}(P)] = \pi_{m;s}(P_{\mathbf{X}}) = \pi_{m;s}(\mu_\Delta) = \mu_{\Delta_s}. \tag{8}$$

Zu *(b)*: Es ist

$$\mathbf{X} = \bigotimes_{k=1}^{m} X_k. \tag{9}$$

Unter Verwendung von (10), (3) und *(a)* folgt dann

$$P_{\bigotimes_{k=1}^{m} X_k} = P_{\mathbf{X}} = \mu_\Delta = \bigotimes_{k=1}^{m} \mu_{\Delta_k} = \bigotimes_{k=1}^{m} P_{X_k}. \tag{10}$$

Wegen (10) ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ nach Teil *(b)* von Satz 6.4.1 stochastisch unabhängig bezüglich P. □

Die folgenden Resultate beinhalten bemerkenswerte Eigenschaften der m-dimensionalen Normalverteilung. Wir werden nämlich erkennen, dass sich die stochastische Unabhängigkeit von Teilkomponenten einer normalverteilten $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen bereits unmittelbar aus der Gestalt der Kovarianzmatrix ablesen lässt.

Satz 6.4.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m \coloneqq \sum_{j=1}^{n} m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathbf{X}_j$ eine $\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche mit einem gewissen $(\mathbf{a}_j, \mathbf{\Sigma}_j) \in \mathbb{R}^{m_j} \times \mathbb{R}_>^{m_j \times m_j}$ die Beziehung $P_{\mathbf{X}_j} = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_j, \mathbf{\Sigma}_j}$ besteht. Seien $\mathbf{a} \coloneqq (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)^T$ und $\mathbf{\Sigma} \coloneqq \operatorname{diag}(\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $(\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_>^{m\times m}$.*

(b) *Sei $\mathbf{X} \coloneqq \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist* $\mathbf{X}$ *eine* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P.

(ii) *Es ist* $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Konstruktion von $\mathbf{a}$ und $\mathbf{\Sigma}$.

Zu *(b1)*: Dies folgt aus Bemerkung 4.1.1.

Zu *(b2)*: Nach Konstruktion gilt $\mathbf{X} = \bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j$. Hieraus folgt

$$P_{\mathbf{X}} = P_{\bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j}. \tag{1}$$

Wegen Satz M.24.4.5 gilt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}. \tag{2}$$

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Wegen (1) gilt nach Teil *(b)* von Satz 6.4.1 dann

$$P_{\bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (1), (3) und (2) folgt dann

$$P_{\mathbf{X}} = P_{\bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j} = \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}.$$

Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Wegen (1), *(ii)* und (2) ergibt sich

$$P_{\bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1, dass die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Satz 6.4.7. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ *und* $\mathbf{X}$ *eine* $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$*, für welche mit einem gewissen* $(\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}) \in \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_>^{m\times m}$ *die Beziehung* $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ *besteht. Sei nun* $n \in \mathbb{N}_{2,m}$ *und* $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{N}$ *mit* $\sum_{j=1}^n m_j = m$. *Wir betrachten die Blockeinteilungen* $\mathbf{a} = \left(\mathbf{a}_1^T, \ldots, \mathbf{a}_n^T\right)^T$ *und* $\mathbf{X} = \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T$*, in denen für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gerade* $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ *und* $\mathbf{X}_j \in \mathrm{Abb}\,(\Omega, \mathbb{R}^{m_j})$ *gewählt wurde. Weiterhin betrachten wir die Blockzerlegung* $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{\Sigma}_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$*, in der für* $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ *gerade* $\mathbf{\Sigma}_{j,k} \in \mathbb{R}^{m_j\times m_k}$ *gewählt wurde. Dann gilt:*

(a) *Sei* $s \in \mathbb{N}_{1,m}$*. Dann ist* $\mathbf{X}_s$ *eine* $(\mathbb{R}^{m_s}, \mathfrak{B}_{m_s})$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gelten* $(\mathbf{a}_s, \mathbf{\Sigma}_{s,s}) \in \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}_>^{m_s\times m_s}$ *sowie*

$$P_{\mathbf{X}_s} = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_s,\mathbf{\Sigma}_{s,s}}.$$

(b) *Es ist* $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *und es gelten*

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \mathbf{a}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathbf{\Sigma}.$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Die Folge* $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *ist stochastisch unabhängig bezüglich* P.

(ii) *Es ist*

$$\mathbf{\Sigma} = \mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma}_{1,1}, \ldots, \mathbf{\Sigma}_{n,n}).$$

(iii) *Für alle* $j, k \in \mathbb{N}_{1,n}$ *mit* $j \neq k$ *gilt*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) = \mathbf{O}_{m_j\times m_k}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $\widetilde{\pi}_{m;s}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m_s}$ definiert gemäß

$$\left(\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T\right)^T \longmapsto \mathbf{u}_s, \tag{1}$$

wobei für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde. Aus (1) und der Definition der beteiligten Abbildungen folgt dann

$$\mathbf{X}_s = \widetilde{\pi}_{m;s} \circ \mathbf{X}. \tag{2}$$

Wegen Folgerung M.24.4.6 ist $\widetilde{\pi}_{m;s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_s}$-messbare Abbildung und es gelten

$$(\mathbf{a}_s, \mathbf{\Sigma}_{s,s}) \in \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_s\times m_s}_{>}$$

sowie

$$\widetilde{\pi}_{m;s}(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_s,\mathbf{\Sigma}_{s,s}}. \tag{3}$$

Wegen Bemerkung 4.1.1 ist $\mathbf{X}_s$ eine $(\mathbb{R}^{m_s}, \mathfrak{B}_{m_s})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Unter Beachtung von Definition 4.1.4, Satz M.16.11 und (3) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{X}_s} &= \mathbf{X}_s(P) = (\widetilde{\pi}_{m;s} \circ \mathbf{X})(P) = \widetilde{\pi}_{m;s}(\mathbf{X}(P)) \\ &= \widetilde{\pi}_{m;s}(P_{\mathbf{X}}) = \widetilde{\pi}_{m;s}(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{a}_s,\mathbf{\Sigma}_{s,s}}. \end{aligned}$$

Damit ist *(a)* gezeigt.

Zu *(b)*: Nach Teil *(b)* von Satz M.24.4.4 gilt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{4}$$

Wegen $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ und (4) liefert Teil *(b)* von Satz 5.4.1 dann

$$\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}. \tag{5}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz M.24.4.4 gelten

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) = \mathbf{a} \tag{6}$$

und

$$\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathbf{\Sigma}. \tag{7}$$

Wegen (5) folgen mittels Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(P_{\mathbf{X}}\right) \tag{8}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right) = \operatorname{cov}\left(P_{\mathbf{X}}\right). \tag{9}$$

Wegen $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ folgen aus (6) und (8) bzw. (7) und (9) dann

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right) = \mathbf{a} \tag{10}$$

bzw.

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X},\mathbf{X}\right) = \mathbf{\Sigma}. \tag{11}$$

Wegen (5), (10) und (11) ist dann *(b)* bewiesen.

(i) $\Leftrightarrow$ ***(ii)***: Sei

$$\widetilde{\mathbf{\Sigma}} \coloneqq \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1},\ldots,\mathbf{\Sigma}_{n,n}\right). \tag{12}$$

Wegen *(a)* und (12) ist dann *(i)* äquivalent zu:

(i') Es ist $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\widetilde{\mathbf{\Sigma}}}$.

Wegen $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ und Folgerung M.24.4.1 ist *(i')* zu $\mathbf{\Sigma} = \widetilde{\mathbf{\Sigma}}$, also wegen (12) gerade zu *(ii)*.

(ii) $\Leftrightarrow$ ***(iii)***: Sei

$$(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}. \tag{13}$$

Aus Definition 5.4.2, (11) und der gewählten Blockeinteilung von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{\Sigma}$ folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k\right) = \mathbf{\Sigma}_{j,k}. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) erkennt man sogleich die Äquivalenz von *(ii)* und *(iii)*. □

Wir studieren nun endliche Folgen von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen, deren Verteilungen stetig bezüglich des Lebesgue-Borel-Maßes sind.

Satz 6.4.8. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m \coloneqq \sum_{j=1}^{n} m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathbf{X}_j$ eine $\left(\mathbb{R}^{m_j},\mathfrak{B}_{m_j}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit $\lambda^{(m_j)}$-stetigen Verteilung P_{X_j} und es bezeichne f_j eine Dichteversion von $P_{\mathbf{X}_j}$ bezüglich $\lambda^{(m_j)}$. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne f das Tensorprodukt von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$.*

(b) *Sei $\mathbf{X} \coloneqq \left(\mathbf{X}_1^T,\ldots,\mathbf{X}_n^T\right)^T$. Dann ist $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$.*

(c) *Sei die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gilt*

$$P_{\mathbf{X}} = \left(\lambda^{(m)}\right)_f.$$

Beweis. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Wahl von $\mathbf{X}_j$ gelten dann

$$f_j \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right) \tag{2}$$

und

$$P_{\mathbf{X}_j} = \left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.2.4 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m_j}} f_j \mathrm{d}\lambda^{(m_j)} = P_{\mathbf{X}}\left(\mathbb{R}^{m_j}\right). \tag{4}$$

Wegen Bemerkung 4.1.3 gilt

$$P_{\mathbf{X}_j} \in \mathcal{M}_+^1 \left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m_j}} f_j \mathrm{d}\lambda^{(m_j)} = 1. \tag{6}$$

Wegen (2) und (6) gilt

$$f_j \in \mathscr{L}^1 \left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}, \lambda^{(m_j)}; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.5.5 dann $\{|f_j| = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(m_j)}}$, also wegen der nach (2) gültigen Beziehung $|f_j| = f_j$ dann

$$\{f_j = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(m_j)}}. \tag{7}$$

Zu *(a)*: Dies folgt wegen (1) und (2) aus Teil *(b)* von Satz M.24.2.5.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Bemerkung 4.1.1.

Zu *(c)*: Wegen Teil *(b)* von Satz 6.4.1 gilt

$$P_{\bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}} = \bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}. \tag{8}$$

Nach Konstruktion gilt

$$\mathbf{X} = \bigotimes_{j=1}^n \mathbf{X}_j. \tag{9}$$

Wegen (1), (2) und (7) gilt nach Teil *(b)* von Satz M.24.2.7 dann

$$\bigotimes_{j=1}^n \left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j} = \left(\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)}\right)_f. \tag{10}$$

Wegen Satz M.24.1.16 gilt

$$\bigotimes_{j=1}^n \lambda^{(m_j)} = \lambda^{(m)}. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}=\left(\lambda^{(m)}\right)_f. \tag{12}$$

Unter Verwendung von (9), (8), (1), (3) und (12) folgt dann

$$P_{\mathbf{X}}=P_{\bigotimes_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j}=\bigotimes_{j=1}^{n}P_{\mathbf{X}_j}=\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}=\left(\lambda^{(m)}\right)_f.$$

□

Satz 6.4.9. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit folgender Eigenschaft: Es existieren ein $n\in\mathbb{N}_{2,m}$ und eine Folge $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^{n}m_j=m$ sowie für jedes $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ ein $f_j\in\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{m_j},\mathfrak{B}_{m_j}\right)$ mit*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m_j}}f_j\mathrm{d}\lambda^{(m_j)}=1$$

derart, dass, wenn f das zu $\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$ gehörende Tensorprodukt der Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezeichnet, die Beziehung

$$P_{\mathbf{X}}=\left(\lambda^{(m)}\right)_f$$

besteht. Wir betrachten die Blockeinteilung $\mathbf{X}=\left(\mathbf{X}_1^T,\ldots,\mathbf{X}_n^T\right)^T$ in der für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gerade $\mathbf{X}_j\in\mathrm{Abb}\left(\Omega,\mathbb{R}^{m_j}\right)$ gewählt wurde. Dann gilt:

(a) *Sei $s\in\mathbb{N}_{1,n}$. Dann ist $\mathbf{X}_s$ eine $(\mathbb{R}^{m_s},\mathfrak{B}_{m_s})$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und es gilt*

$$P_{\mathbf{X}_s}=\left(\lambda^{(m_s)}\right)_{f_s}.$$

(b) *Die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Sei

$$j\in\mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Wahl von f_j gelten dann

$$f_j\in\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{m_j},\mathfrak{B}_{m_j}\right) \tag{2}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{m_j}}f_j\mathrm{d}\lambda^{(m_j)}=1. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) folgt unter Beachtung der Teile *(a)* und *(b)* von Satz M.22.2.4 dann

$$\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}\in\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^{m_j},\mathfrak{B}_{m_j}\right). \tag{4}$$

Aus (1) bis (3) folgt, wie im Beweis von Satz 6.4.8 gezeigt wurde (vergleiche dort die Formeln (1), (2), (6) und (12)) dann

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}=\left(\lambda^{(m_j)}\right)_f. \tag{5}$$

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung 4.1.1 ist $\mathbf{X}_s$ eine $(\mathbb{R}^{m_s}, \mathfrak{B}_{m_s})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Die Abbildung $\widetilde{\pi}_{m;s}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m_s}$ sei definiert gemäß

$$\left(\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T\right)^T \longmapsto \mathbf{u}_s, \tag{6}$$

wobei für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gerade $\mathbf{u}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde. Aus (6) und der Definition der beteiligten Abbildungen folgt dann

$$\mathbf{X}_s = \widetilde{\pi}_{m;s} \circ \mathbf{X}. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (1) und (4) ergibt sich mittels Satz M.24.1.19, dass $\widetilde{\pi}_{m;s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-messbare Abbildung ist sowie

$$\widetilde{\pi}_{m;s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}\right) = \left(\lambda^{(m_s)}\right)_{f_s}. \tag{8}$$

Wegen Definition 4.1.1, (7), Satz M.16.11, der Voraussetzung $P_{\mathbf{X}} = \left(\lambda^{(m)}\right)_f$ sowie (5) und (8) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\mathbf{X}_s} &= \mathbf{X}_s(P) = \left(\widetilde{\pi}_{m;s} \circ \mathbf{X}\right)(P) = \widetilde{\pi}_{m;s}\left[\mathbf{X}(P)\right] \\ &= \widetilde{\pi}_{m;s}\left(P_{\mathbf{X}}\right) = \widetilde{\pi}_{m;s}\left(\left(\lambda^{(m)}\right)_f\right) = \widetilde{\pi}_{m;s}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j}\right) \\ &= \left(\lambda^{(m_s)}\right)_{f_s}. \end{aligned} \tag{9}$$

Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Nach Konstruktion gilt

$$\mathbf{X} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (9), der Voraussetzung $P_{\mathbf{X}} = \left(\lambda^{(m)}\right)_f$ sowie von (5) und (8) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\bigotimes_{j=1}^{n}\mathbf{x}_j} = P_{\mathbf{X}} &= \left(\lambda^{(m)}\right)_f = \bigotimes_{j=1}^{n}\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_j} \\ &= \bigotimes_{j=1}^{n} P_{\mathbf{X}_j}. \end{aligned}$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1, dass die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. □

Wir studieren nun die stochastische Unabhängigkeit von Zufallsvariablen mit diskreten Verteilungen.

Satz 6.4.10. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X}$ bzw. $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$- bzw. $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, deren Verteilung $P_{\mathbf{X}}$ bzw. $P_{\mathbf{Y}}$ zur Klasse $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ bzw $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ gehört. Hierbei seien der Abschnitt I bzw. J von*

$\mathbb{N}$ *und die Folge* $(\mathbf{x}_k)_{k\in I}$ *bzw.* $(\mathbf{y}_l)_{l\in J}$ *von paarweise verschiedenen Punkten aus* $\mathbb{R}^m$ *bzw.* $\mathbb{R}^n$ *gewählt, dass die Beziehung*

$$P_{\mathbf{X}} = \sum_{k\in I} P_{\mathbf{X}}\left(\{\mathbf{x}_k\}\right) \cdot \varepsilon_{\mathbf{x}_k, \mathfrak{B}_m}$$

bzw.

$$P_{\mathbf{Y}} = \sum_{l\in J} P_{\mathbf{Y}}\left(\{\mathbf{x}_l\}\right) \cdot \varepsilon_{\mathbf{x}_l, \mathfrak{B}_n}$$

besteht. Dann gilt:

(a) *Es ist*

$$\begin{aligned} P_{\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}}} &= \sum_{k\in I} \left(\sum_{l\in J} P_{\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}}} \left(\left\{ \binom{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_l} \right\} \right) \cdot \varepsilon_{\binom{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_l}, \mathfrak{B}_{m+n}} \right) \\ &= \sum_{l\in J} \left(\sum_{k\in I} P_{\binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}}} \left(\left\{ \binom{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_l} \right\} \right) \cdot \varepsilon_{\binom{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_l}, \mathfrak{B}_{m+n}} \right). \end{aligned}$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es sind* $\mathbf{X}$ *und* $\mathbf{Y}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P*.*

(ii) *Für alle* $(k,l) \in I \times J$ *gilt*

$$P\left(\left\{ \binom{\mathbf{X}}{\mathbf{Y}} = \binom{\mathbf{x}_k}{\mathbf{y}_k} \right\} \right) = P\left(\{\mathbf{X} = \mathbf{x}_k\}\right) \cdot P\left(\{\mathbf{Y} = \mathbf{y}_l\}\right).$$

6.5. Produkte von stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Untersuchung der Erwartungswertbildung von endlichen Produkten von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen. Die nachfolgende einfache Beobachtung bestimmt die Richtung unserer weiteren Überlegungen.

Bemerkung 6.5.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie A_1 und A_2 bezüglich P stochastisch unabhängige Ereignisse aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Es sind 1_{A_1} und 1_{A_2} bezüglich P stochastisch unabhängige $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) Es gelten $\{1_{A_1}, 1_{A_2}, 1_{A_1} \cdot 1_{A_2}\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie

$$\mathrm{E}_P\left(1_{A_1} \cdot 1_{A_2}\right) = \mathrm{E}_P\left(1_{A_1}\right) \cdot \mathrm{E}_P\left(1_{A_2}\right). \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz 6.2.2.

Zu *(b)*: Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, gilt nach Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann $A_1 \cap A_2 \in \mathfrak{A}$. Wegen $\{A_1, A_2, A_1 \cap A_2\} \subseteq \mathfrak{A}$ folgt aus Bemerkung 5.1.3 dann

$$\{1_{A_1}, 1_{A_2}, 1_{A_1\cap A_2}\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(1_{A_1}\right) = P\left(A_1\right) \tag{2}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P\left(1_{A_2}\right) = P\left(A_2\right) \tag{3}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P\left(1_{A_1\cap A_2}\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right). \tag{4}$$

Wegen Teil *(c)* von Bemerkung M.19.2 gilt

$$1_{A_1\cap A_2} = 1_{A_1} 1_{A_2}. \tag{5}$$

Aufgrund der Wahl von A_1 und A_2 gilt

$$P\left(A_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right). \tag{6}$$

Wegen (1) und (5) gilt nun $\{1_{A_1}, 1_{A_2}, 1_{A_1}\cdot 1_{A_2}\} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$, während sich unter Verwendung von (5), (4), (6), (1) und (2) weiterhin

$$\mathrm{E}_P\left(1_{A_1}\cdot 1_{A_2}\right) = \mathrm{E}_P\left(1_{A_1\cap A_2}\right) = P\left(A_1 \cap A_2\right) = P\left(A_1\right) P\left(A_2\right) = \mathrm{E}_P\left(A_1\right) \mathrm{E}_P\left(A_2\right).$$

ergibt. Damit ist alles gezeigt. □

Wir werden nun zeigen, dass die Behauptung von Teil *(b)* von Bemerkung 6.5.1 auch für beliebige endliche Folgen $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von bezüglich P stochastisch unabhängigen P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen gilt.

Satz 6.5.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(a) *Es ist $\prod_{j=1}^n X_j$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt $\left|\prod_{j=1}^n X_j\right| \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right)$.*

(b) *Sei nun $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gilt:*

(b1) *Es ist*

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^n X_j\right|\right) = \prod_{j=1}^n \mathrm{E}_P\left(\left|X_j\right|\right).$$

(b2) *Sei $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right)$. Dann ist $\prod_{j=1}^n X_j \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right)$ und*

$$\mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^n X_j\right) = \prod_{j=1}^n \mathrm{E}_P\left(X_j\right).$$

(b3) *Sei $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$. Dann ist*

$$\prod_{j=1}^n X_j \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$$

und

$$\mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(X_j\right).$$

(b4) *Es sei* $\prod_{j=1}^{n} X_j \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ *und für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gelte* $X_j \notin \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$. *Dann ist* $\left(X_j\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$\mathbf{X} \coloneqq \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Da $\left(X_j\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $\left(\Omega, \mathfrak{A}, P\right)$ ist, folgt wegen (1) mittels der Bemerkung 4.1.1, dass $\mathbf{X}$ eine $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n\right)$-Zufallsvariable auf $\left(\Omega, \mathfrak{A}, P\right)$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) mittels Bemerkung 5.3.1 dann die Behauptung von *(a)*.

Zu *(b)*: Da $\left(X_j\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.4.1 dann

$$P_{\bigotimes_{j=1}^{n} X_j} = \bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}. \tag{2}$$

Wegen (1) gilt

$$\mathbf{X} = \bigotimes_{j=1}^{n} X_j. \tag{3}$$

Zu *(b1)*: Wegen Definition 5.3.1 gelten

$$\mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = \mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) \tag{4}$$

sowie für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{5}$$

weiterhin

$$\mathcal{M}_{1;P}\left(X_k\right) = \mathrm{E}_P\left(\left|X_k\right|\right). \tag{6}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz 5.3.1 gelten

$$\mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\mathbf{X}}\right) \tag{7}$$

sowie für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{8}$$

weiterhin

$$\mathcal{M}_{1;P}\left(X_k\right) = \mathcal{M}_1\left(P_{X_k}\right). \tag{9}$$

Wegen Bemerkung 4.1.3 gilt für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{10}$$

dann

$$P_{X_k} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{11}$$

Wegen (10) und (11) folgt mittels Teil *(a2)* von Satz M.24.3.5 dann

$$\mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{M}_1\left(P_{X_j}\right). \tag{12}$$

Unter Verwendung von (4), (7), (3), (2), (12), (8), (9), (5) und (6) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) &= \mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\mathbf{X}}\right) = \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\bigotimes_{j=1}^{n} X_j}\right) \\
&= \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{M}_1\left(P_{X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathcal{M}_{1;P}\left(X_j\right) \\
&= \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(|X_j|\right).
\end{aligned}$$

Damit ist *(b1)* bewiesen.

Zu *(b2)*: Wegen Teil *(c)* von Lemma M.19.3 ist

$$\prod_{j=1}^{n} X_j \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{13}$$

Aufgrund der Wahl der Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gelten $\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right| = \prod_{j=1}^{n} |X_j|$ sowie für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ $|X_k| = X_k$. Hieraus folgt in Verbindung mit *(b1)* dann

$$\mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) = \mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(|X_j|\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_p\left(X_j\right). \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) ist dann *(b2)* bewiesen.

Zu *(b3)*: Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{15}$$

Wegen $X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ liefert Teil *(b)* bzw. Teil *(c)* von Satz 5.1.1 dann

$$\mathcal{M}_1\left(P_{X_k}\right) \in [0, +\infty) \tag{16}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P\left(X_k\right) = M_1\left(P_{X_k}\right). \tag{17}$$

Wegen (10), (11), (15) und (16) folgen aus Teil *(a2)* von Satz M.24.3.5 dann

$$\mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right) \in [0, +\infty) \tag{18}$$

und

$$M_{(1,\ldots,1)}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right) = \prod_{j=1}^{n} M_1\left(P_{X_j}\right). \tag{19}$$

Unter Beachtung von (7), (3) und (2) ergibt sich dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) &= \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\mathbf{X}}\right) = \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\bigotimes_{j=1}^{n} X_j}\right) \\ &= \mathcal{M}_{(1,\ldots,1)}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right).\end{aligned} \tag{20}$$

Aus (18) und (20) folgt nun

$$\mathcal{M}_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) \in [0, +\infty). \tag{21}$$

Wegen (21) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.3.1 dann

$$\prod_{j=1}^{n} X_j \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right) \tag{22}$$

bzw.

$$M_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = M_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\mathbf{X}}\right). \tag{23}$$

Wegen (21) gilt nach Definition 5.3.1 weiterhin

$$M_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = \mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right). \tag{24}$$

Unter Verwendung von (24), (23), (3), (2), (19), (15) und (17) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_P\left(\prod_{j=1}^{n} X_j\right) &= M_{(1,\ldots,1);P}\left(\mathbf{X}\right) = M_{(1,\ldots,1)}\left(P_{\mathbf{X}}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} M_1\left(P_{X_j}\right) = M_{(1,\ldots,1)}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} P_{X_j}\right) \\ &= \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(X_j\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Wegen (22) und (25) ist dann *(b3)* bewiesen.

Zu *(b4)*: Wegen $\prod_{j=1}^{n} X_j \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ gilt nach Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 dann

$$\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right| \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right).$$

Hieraus folgt bei Beachtung der durch Definition 5.1.1 gültigen Beziehung

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) = \int\limits_{\Omega} \left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right| \mathrm{d}P$$

dann

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) \in [0, +\infty)\,. \tag{26}$$

Wegen *(b1)* gilt nun

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{j=1}^{n} X_j\right|\right) = \prod_{j=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(|X_j|\right). \tag{27}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{28}$$

Wegen $X_k \notin \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 dann

$$\mathcal{N}_{1,P}\left(X_k\right) \neq 0. \tag{29}$$

Unter Beachtung der Definition von $\mathcal{N}_{1,P}$ sowie von Definition 5.1.1 ergibt sich

$$\mathcal{N}_{1,P}\left(X_k\right) = \int\limits_{\Omega} |X_k|\, \mathrm{d}P = \mathrm{E}_P\left(|X_k|\right). \tag{30}$$

Aus (29) und (30) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(|X_k|\right) \neq 0. \tag{31}$$

Aus (26), (27), (28) und (31) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(|X_k|\right) \in (0, +\infty)\,.$$

Wegen Definition 5.1.1 gilt also

$$\int\limits_{\Omega} |X_k|\, \mathrm{d}P \in [0, +\infty)\,.$$

Somit ist $|X_k|$ dann P-integrierbar. Hieraus folgt wegen der nach Wahl von X_k gültigen Beziehung $X_k \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$ mittels Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 dann die P-Integrierbarkeit von X_k - es ist also

$$X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right). \tag{32}$$

Wegen (28) und (32) ist dann *(b4)* bewiesen. □

Es folgt nun eine erste Anwendung von Satz 6.5.1.

Satz 6.5.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\left((\Omega_k, \mathfrak{A}_k)\right)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für jedes $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien X_k eine $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $g_k \in \mathcal{M}\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \mathbb{R}\right)$. Weiterhin sei die Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $(g_k \circ X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine bezüglich* P *stochastisch unabhängige Folge von* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(b) *Es gilt*

$$\mathrm{E}_P\left(\left|\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_k\right|\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(|g_k \circ X_k|\right).$$

(c) *Sei* $(g_k \circ X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann ist* $\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt*

$$\mathrm{E}_P\left(\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(g_k \circ X_k\right).$$

(d) *Sei* $(g_k \circ X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. *So ist* $\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_K \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *und es gilt*

$$\mathrm{E}_P\left(\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(g_k \circ X_k\right).$$

(e) *Es sei* $\prod_{k=1}^{n} g_k \circ X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ *und für* $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gelte* $g_k \circ X_k \notin \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. *Dann ist* $(g_k \circ X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz 6.2.13.

Zu *(b)*-*(e)*: Wegen *(a)* ist die Behauptung von *(b)* bzw. *(c)* bzw. *(d)* bzw. *(e)* eine unmittelbare Konsequenz aus Teil *(b1)* bzw. *(b2)* bzw. *(b3)* bzw. *(b4)* von Satz 6.5.1. □

Wir studieren nun den Zusammenhang zwischen stochastischer Unabhängigkeit und Unkorreliertheit.

Satz 6.5.3. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien* X *und* Y *bezüglich* P *stochastisch unabhängig* P*-integrierbare* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. *Dann sind* X *und* Y *unkorreliert bezüglich* P.

Beweis. Wegen Teil *(b3)* von Satz 6.5.1 gelten $XY \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie

$$\mathrm{E}_P(XY) = \mathrm{E}_P(X) \cdot \mathrm{E}_P(Y).$$

Somit sind X und Y unkorreliert bezüglich P (vgl. Definition 5.2.5). □

Das folgende Beispiel zeigt, dass unkorrelierte Zufallsvariable *nicht* notwendig stochastisch unabhängig bezüglich P sind, also die Aussagen von Satz 6.5.3 *nicht* umkehrbar ist.

Beispiel 6.5.1. Seien $\Omega := \{1, 2, 3\}$, $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ und $P = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{k,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:

(a) $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist ein Wahrscheinlichkeitsraum.

(b) Es sei $X : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $Y : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$X(1) := 1,$$
$$X(2) := 0,$$
$$X(3) := -1$$

bzw.

$$\begin{aligned} Y(1) &:= 0, \\ Y(2) &:= 1, \\ Y(3) &:= 0. \end{aligned}$$

Dann gilt:

(b1) Es ist $\{X, Y, X \cdot Y\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

(b2) Es sind X und Y unkorreliert bezüglich P.

(b3) Es sind X und Y *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis.

Zu *(b1)*: Es ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ der zu Ω gehörige Laplacesche Wahrscheinlichkeitsraum.

Zu *(b2)*: Aufgrund der Gestalt von P gilt wegen Teil *(c)* von Beispiel M.22.4.4 dann

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen $\mathfrak{A} = \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt nach Teil *(a3)* von Satz M.16.1 dann

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) = \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) = \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \tag{3}$$

Aus (3) folgt dann $\{X, Y, X \cdot Y\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Zu *(b3)*: Sei

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{4}$$

Unter Verwendung von Definition 5.1.1, der Gestalt von P und Teil *(b2)* von Beispiel M.22.4.4 folgt dann

$$\mathrm{E}_P(f) = \int\limits_\Omega f \mathrm{d}P = \int\limits_\Omega f \mathrm{d}\left(\frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{k,\mathfrak{A}}\right) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} f(k). \tag{5}$$

Aus *(b1)* und (5) folgt dann

$$\mathrm{E}_P(X) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} X(k) = \frac{1}{3}(1 + 0 + -1) = 0$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P(Y) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} Y(k) = \frac{1}{3}[0 + 1 + 0] = \frac{1}{3}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P(XY) = \frac{1}{3}\sum_{k=1}^{3} (XY)(k) = \frac{1}{3}[0 + 0 + 0] = 0.$$

Hieraus folgt dann

$$\mathrm{E}_P(XY) = 0 = 0 \cdot \frac{1}{3} = \mathrm{E}_P(X) \cdot \mathrm{E}_P(Y).$$

Damit sind X und Y unkorreliert bezüglich P.

Zu *(b3)*: Es gelten $X^{-1}(\{1\}) = \{1\}$ und $Y^{-1}(\{1\}) = \{2\}$. Hieraus folgt

$$X^{-1}(\{1\}) \cap Y^{-1}(\{1\}) = \varnothing.$$

Daraus ergibt sich

$$P\left(X^{-1}(\{1\}) \cap Y^{-1}(\{1\})\right) = 0 \neq \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{3} = P(\{1\}) P(\{2\}) = P\left(X^{-1}(\{1\})\right) P\left(Y^{-1}(\{1\})\right).$$

Somit sind $X^{-1}(\{1\})$ und $Y^{-1}(\{1\})$ nicht stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt wegen $\{1\} \in \mathfrak{B}_1$, dass X und Y nicht stochastisch unabhängig bezüglich P sind. □

Wir betrachten im Weiteren stochastisch unabhängige Familien von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche zu $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gehören.

Satz 6.5.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k \in I}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Familie von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche zu $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ gehören. Dann gilt:*

(a) *Es ist $(X_k)_{k \in I}$ eine Familie aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Es ist $(X_k - \mathrm{E}_P(X_k))_{k \in I}$ eine in dem Semihilbertraum $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{P;\mathbb{R}}\right)$ orthogonale Familie.*

(c) *Sei die Familie $(X_k)_{k \in I}$ zentriert. Dann ist $(X_k)_{k \in I}$ eine in dem Semihilbertraum*

$$\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{P;\mathbb{R}}\right)$$

orthogonale Familie.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Lemma 5.2.3.

Zu *(b)*: Seien $k, l \in I$ so gewählt, dass $k \neq l$ erfüllt ist. Wegen Teil *(a)* Bemerkung 6.2.2 sind dann X_k und X_l stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt bei Beachtung von *(a)* mittels Satz 6.5.3, dass X_k und X_l unkorrelliert bezüglich P sind. Hieraus folgt mittels Teil *(d)* von Lemma 5.2.3, dass $X_k - \mathrm{E}_P(X_k)$ und $X_l - \mathrm{E}_P(X_l)$ orthogonal in $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle \cdot, \cdot \rangle_{P;\mathbb{R}}\right)$ sind.

Zu *(c)*: Dies folgt sogleich aus *(b)*. □

Bemerkung 6.5.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Rademacher*sche* Folge auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle_{P;\mathbb{R}}\right)$ orthogonale Folge. ♣

Beweis. Wegen Definition 6.2.4 ist $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung

$$P_{X_n} = \frac{1}{2}\left(\varepsilon_{-1,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right)$$

besteht. Hieraus folgt nun aufgrund der Teile *(d)* und *(b)* von Bemerkung 6.2.6, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine zentrierte Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ist. Somit liefert *(c)* von Satz 6.5.4 dann, dass $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine in $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle_{p;\mathbb{R}}\right)$ orthogonale Folge ist. □

Bemerkung 6.5.3. Seien $\Omega \coloneqq [0,1)$, $\mathfrak{A} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap \Omega$ und $P \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{A}$. Für $n \in \mathbb{N}$ bezeichne R_n die n-te RADEMACHERsche Funktion zweiter Art. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine in $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}), \langle ., . \rangle_{p;\mathbb{R}}\right)$ orthogonale Folge. ♣

BEWEIS. Nach Bemerkung 6.2.7 ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(R_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine RADEMACHERsche Folge auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung 6.5.2 die Behauptung. □

Satz 6.5.3 ermöglicht uns nun im Falle von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen mit gewissen P-Integrierbarkeitseigenschaften einen Rückgriff auf die in Kapitel 5 für unkorrelierte $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen enthaltenen Resultate.

Satz 6.5.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gelten $\sum_{k=1}^m X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ sowie*

$$\operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^n X_k\right) = \sum_{k=1}^n \operatorname{Var}_P(X_k).$$

BEWEIS. Seien $k, l \in \mathbb{N}_{1,n}$ so gewählt, dass $k \neq l$ erfüllt ist. Aus Teil *(a)* von Bemerkung 6.2.2 und der Wahl der Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergibt sich dann die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von X_k und X_l. Hieraus folgt mittels Satz 6.5.3, dass X_k und X_l unkorreliert bezüglich P sind. Hieraus folgen mittels Satz 5.2.8 alle Behauptungen. □

Satz 6.5.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m, n \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{n\times 1}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gilt*

$$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = \mathbf{O}_{m\times n}.$$

BEWEIS. Seien

$$\mathbf{X} \coloneqq \begin{pmatrix} X_1 \\ \vdots \\ X_m \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{Y} \coloneqq \begin{pmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Sei

$$(k, l) \in \mathbb{N}_{1,m} \times \mathbb{N}_{1,n}. \tag{2}$$

Bezeichnet $\mathbf{e}_k^{(m)}$ bzw. $\mathbf{e}_l^{(n)}$ den k-ten bzw. l-ten kanonischen Einheitsvektor von $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{R}^n$, so folgt aus (1) und (2) dann

$$\left(\mathbf{e}_k^{(m)}\right)^T \mathbf{X} = X_k \tag{3}$$

bzw.

$$\left(\mathbf{e}_l^{(n)}\right)^T \mathbf{Y} = Y_l. \tag{4}$$

Da $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind, folgt wegen (3) und (4) mittels Beispiel 6.2.2 dann:

(I) Es sind X_k und Y_l bezüglich P stochastisch unabhängige $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ gilt

$$\{X_k, Y_l\} \subseteq \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (5) liefert Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 dann

$$\{X_k, Y_l\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Mit *(I)* und (6) liefert Satz 6.5.3 dann, dass X_k und Y_l unkorreliert bezüglich P sind. Hieraus folgt bei Beachtung von (5) mittels Teil *(d)* von Lemma 5.2.3 dann

$$\mathrm{Cov}_P(X_k, Y_l) = 0. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (2) und (7) folgt nun

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y}) = (\mathrm{Cov}_P(X_k, Y_l))_{\substack{k \in \mathbb{N}_{1,m} \\ l \in \mathbb{N}_{1,n}}}.$$

□

Satz 6.5.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $r \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es sei $(\mathbf{a}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,r}}$ bzw. $(m_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,r}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^m$ bzw. $\mathbb{N}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,r}$ seien $\mathbf{A}_j \in \mathbb{R}^{m \times m_j}$ und $\mathbf{x}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$. Die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,r}}$ sei stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann gelten $\sum_{j=1}^r (\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j + \mathbf{a}_j) \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times 1}$ und*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\sum_{j=1}^r (\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j + \mathbf{a}_j), \sum_{j=1}^r (\mathbf{A}_j \mathbf{X}_j + \mathbf{a}_j)\right) = \sum_{j=1}^r \mathbf{A}_j \cdot \mathrm{Cov}(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_j) \cdot \mathbf{A}_j^T.$$

Beweis. Seien $j, k \in \mathbb{N}_{1,r}$ derart gewählt, dass $j \neq k$ erfüllt ist. Aufgrund der Wahl der Folge $(\mathbf{X}_s)_{s \in \mathbb{N}_{1,r}}$ folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung 6.2.2 dann, dass $\mathbf{X}_j$ und $\mathbf{X}_k$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus folgt bei Beachtung der quadratischen P-Integrierbarkeit von $\mathbf{X}_j$ und $\mathbf{X}_k$ mittels Satz 6.5.6 dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) = \mathbf{O}_{m_j \times m_k}.$$

Hieraus ergeben sich mittels Folgerung 5.4.2 dann alle Behauptungen. □

6.6. Endliche Summen von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen

In zahlreichen Anwendungen stößt man auf Phänomene, welche aus einer Überlagerung von stochastisch unabhängigen zufällgien Effekten besteht. Im vorliegenden Abschnitt beschäftigen wir uns speziell mit jener Situation, in der die angesprochene Überlagerung in additiver Weise erfolgt.

Etwas präziser formuliert, lässt sich sich das Grundthema dieses Abschnitts als die Untersuchung der Verteilung von Summen endlich vieler stochastisch unabhängiger $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen beschreiben. Unter Berücksichtigung der in Satz 6.4.1 erhaltenen Charakterisierung der stochastischen Unabhängigkeit endlicher Folgen von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen, werden wir bei der Behandlung der von uns angestrebten Zielstellung rasch auf den Begriff des Faltungsprodukts endlicher Folgen von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ geführt. Dies ermöglicht uns auf der Grundlage des in Kapitel M.25 entwickelten Apparats für den Faltungskalkül in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, einen effektiven Zugang zum Studium verschiedener Fragestellungen über endliche Summen von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen. Grundlegend für die weiteren Betrachtungen

dieses Abschnitts ist das folgende Resultat:

Satz 6.6.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Ferner sei $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann ist $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_{\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k} = \bigstar_{k=1}^n P_{\mathbf{X}_k}.$$

Beweis. Sei

$$\mathbf{X} \coloneqq \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Wahl der Folge $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist $\mathbf{X}$ nach Teil *(a)* von Satz 6.4.1 dann eine $(\mathbb{R}^{n\cdot m}, \mathfrak{B}_{n\cdot m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und wegen Teil *(b)* von Satz 6.4.1 gilt zudem

$$P_{\mathbf{X}} = \bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}. \tag{2}$$

Sei $A_{m,n}\colon \mathbb{R}^{n\cdot m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß

$$\left(\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T\right)^T \longmapsto \sum_{j=1}^n \mathbf{u}_j. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt sogleich

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k = A_{m,n} \circ \mathbf{X}. \tag{4}$$

Da $A_{m,n}$ nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 eine $\mathfrak{B}_{n\cdot m}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung ist und $\mathbf{X}$ bereits als $(\mathbb{R}^{n\cdot m}, \mathfrak{B}_{n\cdot m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ erkannt wurde, folgt bei Beachtung von (4) mittels Satz 4.1.1, dass $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Unter Verwendung von (4), Satz M.16.11, (2), (3) und Definition M.25.2.1 folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k} &= \left(\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k\right)[P] = (A_{m,n} \circ \mathbf{X})[P] = A_{m,n}\left[\mathbf{X}(P)\right] \\ &= A_{m,n}(P_{\mathbf{X}}) = A_{m,n}\left(\bigotimes_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}\right) = \bigstar_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}. \end{aligned}$$

□

Folgerung 6.6.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{X}$ ein $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$. Weiter sei $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ stochastisch unabhängig und es ist $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $P_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{Y}}$ erfüllt ist.*

Beweis. Wegen $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$ ist $\mathbf{X}$ nach Teil *(a)* von Satz 4.2.1 dann P-fast sicher konstant auf Ω. Hieraus ergibt sich mittels Folgerung 6.2.2 dann, dass $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Somit folgt aus Satz 6.6.1, dass $\mathbf{X} + \mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist sowie

$$P_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{X}} \star P_{\mathbf{Y}}. \tag{1}$$

Wegen Folgerung M.25.2.1 gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} \star P_{\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{Y}}. \tag{2}$$

Unter Verwendung von (1), $P_{\mathbf{X}} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$ und (2) folgt dann

$$P_{\mathbf{X}+\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{X}} \star P_{\mathbf{Y}} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} \star P_{\mathbf{Y}} = P_{\mathbf{Y}}. \qquad \square$$

Beispiel 6.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, deren Verteilung P_X die Standard-Cauchy-Verteilung $\gamma_{0,1}$ ist. Dann gilt:

(a) Es ist $X + X$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt $P_{X+X} = P_X \star P_X$.

(b) Es sind X und X nicht stochastisch unabhängig bezüglich P.

Beweis.

Zu *(a)*: Es ist

$$X + X = 2X. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(a)* von Satz 4.4.1, dass $X + X$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Wegen $P_X = \gamma_{0,1}$ liefert Teil *(b2)* von Satz 4.4.1 dann

$$P_{2X} = \gamma_{0,2}. \tag{2}$$

Wegen Satz M.25.4.3 gilt

$$\gamma_{0,1} \star \gamma_{0,1} = \gamma_{0+0,1+1} = \gamma_{0,2}. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (1) bis (3) und $P_X = \gamma_{0,1}$ folgt nun

$$P_{X+X} = P_{2X} = \gamma_{0,2} = \gamma_{0,1} \star \gamma_{0,1} = P_X \star P_X.$$

Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wären X und X stochastisch unabhängig bezüglich P, so gäbe es nach Teil *(c)* von Satz 6.2.6 dann $z_0 \in \mathbb{R}$ und $P_X = \varepsilon_{z_0,\mathfrak{B}_1}$. Es wäre dann also

$$\gamma_{0,1}\left(\{z_0\}\right) = P_X\left(\{z_0\}\right) = \varepsilon_{z_0,\mathfrak{B}_1}\left(\{z_0\}\right) = 1.$$

Dies steht aber im Widerspruch dazu, dass wegen der $\lambda^{(1)}$-Stetigkeit von $\gamma_{0,1}$ nach Beispiel M.22.5.1 gilt $\gamma_{0,1} \in \mathcal{M}_+^c\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und somit also $\gamma_{0,1}\left(\{z_0\}\right) = 0$ erfüllt ist. Somit sind X und X *nicht* stochastisch unabhängig bezüglich P. $\square$

Bemerkung 6.6.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ jeweils $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche die Beziehung $P_{\mathbf{X}_1} \star P_{\mathbf{X}_2} = P_{\mathbf{X}_1+\mathbf{X}_2}$ erfüllt ist. Dann sind $\mathbf{X}_1$ und $\mathbf{X}_2$ *nicht* notwendig stochastisch unabhängig bezüglich P. ♣

Beweis. Dies folgt aus Beispiel 6.6.1. $\square$

Satz 6.6.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $n_j \in \mathbb{N}$ und einem $p \in [0,1]$ gerade P_{X_j} die Binomialverteilung mit den Parametern n_j und p. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \beta_{\sum_{j=1}^n n_j, p}.$$

(b) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $\alpha_j \in [0,+\infty)$ gerade P_{X_j} die Poisson-Verteilung π_{α_j} mit Parameter α_j. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \pi_{\sum_{j=1}^n \alpha_j}.$$

(c) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $(a_j, \sigma_j) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ gerade P_{X_j} die Normalverteilung $\mathcal{N}_{a_j,\sigma_j^2}$ mit den Parametern a_j und σ_j^2. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \mathcal{N}_{\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2}.$$

(d) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $(\alpha_j, \beta_j) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ gerade P_{X_j} die Cauchy-Verteilung $\gamma_{\alpha_j,\beta_j}$ mit den Parametern α_j und β_j. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \gamma_{\sum_{j=1}^n \alpha_j, \sum_{j=1}^n \beta_j}.$$

(e) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $\alpha_j \in (0,+\infty)$ und einem $\beta \in (0,+\infty)$ gerade P_{X_j} die Gamma-Verteilung $\Gamma_{\alpha_j,\beta}$ mit den Parametern α_j und β. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \Gamma_{\sum_{j=1}^n \alpha_j, \beta}.$$

(f) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $\eta \in (0,+\infty)$ gerade P_{X_j} die Exponentialverteilung E_η zum Parameter η. Weiterhin bezeichne $\Gamma_{n,\eta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern n und η. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \Gamma_{n,\eta}.$$

(g) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei mit einem gewissen $n_j \in \mathbb{N}$ gerade P_{X_j} die zentrale Chiquadrat-Verteilung $\chi^2_{n_j}$ mit n_j Freiheitsgraden. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \chi^2_{\sum_{j=1}^n n_j}.$$

Beweis. Wegen Satz 6.6.1 gilt

$$P_{\sum_{j=1}^n X_j} = \bigstar_{j=1}^n P_{X_j}. \tag{1}$$

Wegen (1) folgt die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* bzw. *(c)* bzw. *(d)* bzw. *(e)* bzw. *(f)* bzw. *(g)* sogleich aus Beispiel M.25.3.3 bzw. Beispiel M.25.3.4 bzw. Satz M.25.4.2 bzw. Satz M.25.4.3 bzw. Satz M.25.4.4 bzw. Folgerung M.25.4.3 bzw. Folgerung M.25.4.4. □

Satz 6.6.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $t \in [0,+\infty)$ bezeichne $\nu_{\mu,t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängiger $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit einem gewissen $t_j \in [0,+\infty)$ die Beziehung $P_{\mathbf{X}_j} = \nu_{\mu,t_j}$ besteht. Dann gilt*

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \nu_{\mu, \sum_{j=1}^n t_j}.$$

Beweis. Dies folgt aus Satz 6.6.1 und Satz M.25.2.19. □

Bemerkung 6.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(\mathbf{X}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit einem gewissen $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ die Beziehung $P_{\mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}$ besteht. Dann gilt:

(a) Es ist $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(b) Es ist $\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}. \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz 4.2.1 ist $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von P-fast-sicher konstanten $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Damit ist $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ wegen Folgerung 6.2.2 aber stochastisch unabhängig bezüglich P.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* folgt mittels Satz 6.6.1, dass $\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist und dass

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \bigstar_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j} \tag{1}$$

erfüllt ist. Wegen Beispiel M.25.2.1 gilt

$$\bigstar_{j=1}^n \varepsilon_{\mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Unter Verwendung von (1), der Wahl von $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und (2) folgt damit

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \bigstar_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j} = \bigstar_{j=1}^n \varepsilon_{\mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}. \qquad \square$$

Satz 6.6.4. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist*

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}.$$

(ii) *Es gibt eine Folge $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}^m$ mit $\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j = \mathbf{a}$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt*

$$P_{\mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}.$$

Beweis. Wegen Satz 6.6.1 gilt

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \bigstar_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j}. \tag{1}$$

***(i)*⇒*(ii)*:** Aus (1) und *(i)* folgt

$$\bigstar_{j=1}^n P_{\mathbf{X}_j} = P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Da $\left(P_{\mathbf{X}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ wegen Bemerkung 4.1.3 eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$ ist, folgt wegen (2) mittels Satz M.25.7.5 dann die Existenz einer Folge $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}^m$ mit

$$\left(P_{\mathbf{X}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} = \left(\varepsilon_{\mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}. \tag{3}$$

Wegen (3) folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung 6.6.2 dann

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m}. \tag{4}$$

Aus (4) und *(i)* folgt dann $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m}$. Hieraus folgt dann

$$\mathbf{a} = \sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j. \tag{5}$$

Wegen (3) und (5) gilt dann also *(ii)*.

***(ii)*⇒*(i)*:** Unter Verwendung von Teil *(b)* von Bemerkung 6.6.2 und *(ii)* ergibt sich

$$P_{\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}.$$

Es gilt also *(i)*. □

Das nachfolgende Resultat liefert eine Verteilungsaussage, welche vom besonderen Interesse der Behandlung von Testproblemen mit normalverteilten Stichproben in der mathematischen Statistik ist.

Satz 6.6.5. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{0,1}$ bzw. χ_n^2 die Standardnormalverteilung bzw. die zentrale Chiquadratverteilung mit n Freiheitsgraden. Es sei $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ derart, dass für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gilt $P_{X_j}=\mathcal{N}_{0,1}$. Weiterhin sei $Y := \sum_{j=1}^n X_j^2$. Dann ist Y eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und es gilt*

$$P_Y = \chi_n^2.$$

Beweis. Sei

$$j\in\mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Nach Teil *(a)* von Satz 4.4.2 ist X_j^2 eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und nach Teil *(b)* von Satz 4.4.2 gilt weiterin

$$P_{X_j} = \chi_1^2. \tag{2}$$

Sei $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u\longmapsto u^2. \tag{3}$$

Aus (3) folgt dann sogleich

$$X_j^2 = g\circ X_j. \tag{4}$$

Wegen (3) gilt nach Satz M.22.14.7 dann

$$g\in\mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{R}\right). \tag{5}$$

Da die Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ nach Voraussetzung stochastisch unabhängig bezüglich P ist, folgt bei Beachtung von (1), (4) und (5) mittels Teil *(b)* von Satz 6.2.13 dann, dass auch die Folge $\left(X_j^2\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$

stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (1) und (2) mittels Teil *(g)* von Satz 6.6.2 dann

$$P_Y = P_{\sum_{j=1}^n X_j^2} = \chi_n^2.$$

□

In verschiedenen Fragestellungen der Mathematischen Statistik beschäftigt man sich mit dem arithmetischen Mittel einer endlichen Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen. Aus diesem Grunde wäre es wünschenswert, dessen Verteilung zu bestimmen. Diesem Anliegen ist unsere nächste Überlegung gewidmet. Unter verschiedenen konkreten Verteilungsannahmen wird es uns gelingen, die angesprochene Frage zu beantworten.

Satz 6.6.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $\overline{X}_n \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\overline{X}_n$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = T_{\frac{1}{n},0}\left(\bigstar_{j=1}^n P_{X_j}\right).$$

(b) *Für $(a,\sigma) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit einem gewissen $(a_j,\sigma_j) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \mathcal{N}_{a_j,\sigma_j^2}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \mathcal{N}_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j, \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}.$$

(c) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit einem gewissen $(a,\sigma) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \mathcal{N}_{a,\sigma^2}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \mathcal{N}_{a,\frac{1}{n}\sigma^2}.$$

(d) *Für $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ bezeichne $\gamma_{a,\beta}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern a und β. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit einem gewissen $(\alpha_j,\beta_j) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \gamma_{a_j,\beta_j}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \gamma_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \alpha_j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \beta_j}.$$

(e) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit einem gewissen $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \gamma_{a,\beta}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \gamma_{\alpha,\beta}.$$

(f) *Für $(a,b) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ bezeichne $\Gamma_{a,b}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern a und b. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit gewissen $\alpha_j \in (0,+\infty)$ und $\beta \in (0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \Gamma_{\alpha_j,\beta}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \Gamma_{\sum_{j=1}^n \alpha_j, n\beta}.$$

(g) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bestehe mit einem gewissen $(\alpha,\beta) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ die Beziehung $P_{X_j} = \Gamma_{a,\beta}$. Dann gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \Gamma_{n\alpha,n\beta}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\overline{X}_n = T_{\frac{1}{n},0} \circ \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right). \tag{1}$$

Da $T_{\frac{1}{n},0}$ nach Teil *(b)* von Satz M.16.1 eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und $\sum_{j=1}^{n} X_j$ nach Satz 6.6.1 eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, folgt wegen (1) mittels Satz 4.1.1 dann, dass $\overline{X}_n$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ust. Wegen Satz 6.6.1 gilt

$$P_{\sum_{j=1}^{n} X_j} = \bigstar_{j=1}^{n} P_{X_j}. \tag{2}$$

Unter Verwendung von (1), Satz M.16.11 und (2) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\overline{X}_n} &= \overline{X}_n(P) = \left[T_{\frac{1}{n},0} \circ \left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right) \right](P) = T_{\frac{1}{n},0} \left[\left(\sum_{j=1}^{n} X_j \right)(P) \right] = T_{\frac{1}{n},0} \left(P_{\sum_{j=1}^{n} X_j} \right) \\ &= T_{\frac{1}{n},0} \left(\bigstar_{j=1}^{n} P_{X_j} \right). \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Wegen Satz M.25.4.2 gilt

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{a_j,\sigma_j^2} = \mathcal{N}_{\sum_{j=1}^{n} a_j, \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}. \tag{3}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gilt für

$$(a, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty) \tag{4}$$

dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) gelten dann

$$\mathcal{N}_{\sum_{j=1}^{n} a_j, \sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2} = T_{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^{n} a_j}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \tag{6}$$

und

$$\mathcal{N}_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j, \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2} = T_{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{7}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{\frac{1}{n},0} \circ T_{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^{n} a_j} = T_{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j + 0} = T_{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} a_j}. \tag{8}$$

Wegen der nach Teil *(b)* von Satz M.16.9 vorliegenden $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit der Abbildungen $T_{\frac{1}{n},0}$ und $T_{\sqrt{\sum_{j=1}^{n} \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^{n} a_j}$ liefert Satz M.16.11 dann die $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $T_{\frac{1}{n},0} \circ$

$T_{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^n a_j}$ sowie

$$\left(T_{\frac{1}{n},0} \circ T_{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^n a_j}\right)(\mathcal{N}_{0,1}) = T_{\frac{1}{n},0}\left[T_{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^n a_j}(\mathcal{N}_{0,1})\right]. \tag{9}$$

Unter Verwendung von *(a)*, der Wahl von $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, (3), (6), (9), (8) und (7) folgt dann

$$\begin{aligned} P_{\overline{X}_n} &= T_{\frac{1}{n},0}\left(\bigstar_{j=1}^n P_{X_j}\right) = T_{\frac{1}{n},0}\left(\bigstar_{j=1}^n \mathcal{N}_{a_j,\sigma_j{}^2}\right) = T_{\frac{1}{n},0}\left(\mathcal{N}_{\sum_{j=1}^n a_j, \sum_{j=1}^n \sigma_j^2}\right) \\ &= T_{\frac{1}{n},0}\left(T_{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^n a_j}(\mathcal{N}_{0,1})\right) = \left(T_{\frac{1}{n},0} \circ T_{\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \sum_{j=1}^n a_j}\right)(\mathcal{N}_{0,1}) \\ &= T_{\frac{1}{n}\sqrt{\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j}(\mathcal{N}_{0,1}) = \mathcal{N}_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j, \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^n \sigma_j^2}. \end{aligned}$$

Zu *(c)*: Dies folgt sogleich aus *(b)*.

Zu *(d)*: Dies zeigt man unter Verwendung der nach Satz M.25.4.3 gültigen Beziehung

$$\bigstar_{j=1}^n \gamma_{\alpha_j,\beta_j} = \gamma_{\sum_{j=1}^n \alpha_j, \sum_{j=1}^n \beta_j}$$

sowie der wegen Teil *(b)* von Satz M.22.14.2 gültigen Beziehung $\gamma_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1})$ analog zum Beweis von *(b)*.

Zu *(e)*: Dies folgt sogleich aus *(d)*.

Zu *(f)*: Dies zeigt man unter Verwendung der nach Satz M.25.4.4 gültigen Beziehung

$$\bigstar_{j=1}^n \Gamma_{\alpha_j,\beta} = \gamma_{\sum_{j=1}^n \alpha_j, \beta}$$

sowie der wegen Teil *(c)* von Satz M.22.14.5 für $(\alpha, \beta) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ gültigen Beziehung $\Gamma_{\alpha,\beta} = T_{\frac{1}{\beta},0}(\Gamma_{\alpha,1})$ analog zum Beweis von *(b)*.

Zu *(g)*: Dies folgt sogleich aus *(f)*. □

Wir schälen nun spezielle Familien $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen besonders heraus, welche durch gewisse Forderungen an deren Zuwächse gekennzeichnet sind. In diesem Zusammenhang sei zur Vorbereitung der nächsten Begriffsbildung daran erinnert, dass die Menge der $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ wegen Bemerkung 4.1.1 und Satz M.18.7 einen linearen Raum über $\mathbb{R}$ bildet.

Definition 6.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und jede streng monoton wachsende Folge $(t_j)_{j\in\mathbb{N}}$ aus $[0, +\infty)$ sei die Folge $(\mathbf{Y}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, welche durch $\mathbf{Y}_1 := \mathbf{X}_{t_1}$ sowie für $j \in \mathbb{N}_{2,n}$ durch $\mathbf{Y}_j := \mathbf{X}_{t_j} - \mathbf{X}_{t_{j-1}}$ gegeben ist, stochastisch unabhängig bezüglich P. Dann sagt man, dass $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *stochastisch unabhänige Zuwächse* bezüglich P besitzt.

(b) Für alle $u, v \in [0, +\infty)$ gelte $P_{X_{u+v}-X_u} = P_{X_v-X_0}$. Dann sagt man, dass $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *stationäre Zuwächse* bezüglich P besitzt.

Wir betrachten nun Familien $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche sowohl stochastisch unabhängige- als auch stationäre Zuwächse bezüglich P besitzen. Solche Familien erzeugen, wie wir gleich sehen werden, in natürlicher Weise eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Satz 6.6.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche sowohl stochastisch unabhängige- als auch stationäre Zuwächse gegenüber P besitzt.*

Dann ist $(\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_0)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und $(P_{\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_0})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beweis. Wegen der Bemerkung 4.1.3 gilt für

$$t \in [0, +\infty) \tag{1}$$

dann

$$P_{\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_0} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{2}$$

Es ist $\mathbf{X}_0 - \mathbf{X}_0$ die auf Ω konstante Funktion mit Wert $\mathbf{0}_{m\times 1}$. Hieraus folgt mittels Satz 4.2.1 dann

$$P_{\mathbf{X}_0-\mathbf{X}_0} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}. \tag{3}$$

Sei nun

$$(u, v) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty). \tag{4}$$

Da $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ stationäre Zuwächse bezüglich P besitzt, gilt dann

$$P_{\mathbf{X}_{u+v}-\mathbf{X}_v} = P_{\mathbf{X}_u-\mathbf{X}_0}. \tag{5}$$

Es gilt nun

$$\mathbf{X}_{u+v} - \mathbf{X}_0 = (\mathbf{X}_{u+v} - \mathbf{X}_v) + (\mathbf{X}_v - \mathbf{X}_0). \tag{6}$$

Wegen (4) gilt

$$0 < v < u + v. \tag{7}$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,3}$ sei

$$\mathbf{Y}_j \coloneqq \begin{cases} \mathbf{X}_0, & \text{falls } j = 1, \\ \mathbf{X}_v - \mathbf{X}_0, & \text{falls } j = 2, \\ \mathbf{X}_{u+v} - \mathbf{X}_v, & \text{falls } j = 3. \end{cases} \tag{8}$$

Da $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ stochastisch unabhängige Zuwächse bezüglich P besitzt, folgt aus (7) und (8), dass die Folge $(\mathbf{Y}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung 6.2.2, dass $(\mathbf{Y}_j)_{j\in\mathbb{N}_{2,3}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus folgt mittels Satz 6.6.1 dann

$$P_{\mathbf{Y}_3+\mathbf{Y}_2} = P_{\mathbf{Y}_3} \star P_{\mathbf{Y}_2}. \tag{9}$$

Wegen (8) gilt

$$\mathbf{Y}_3 + \mathbf{Y}_2 = (\mathbf{X}_{u+v} - \mathbf{X}_v) + (\mathbf{X}_v - \mathbf{X}_0) = \mathbf{X}_{u+v} - \mathbf{X}_0. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (10), (9), (8) und (5) folgt dann

$$P_{\mathbf{X}_{u+v}-\mathbf{X}_0} = P_{\mathbf{Y}_3-\mathbf{Y}_2} = P_{\mathbf{Y}_3} \star P_{\mathbf{Y}_2} = P_{\mathbf{X}_{u+v}-\mathbf{X}_v} \star P_{\mathbf{X}_v-\mathbf{X}_0} = P_{\mathbf{X}_u-\mathbf{X}_0} \star P_{\mathbf{X}_v-\mathbf{X}_0}. \tag{11}$$

Wegen (1)-(4) folgt mittels Bemerkung M.25.6.3, dass $(P_{\mathbf{X}_t-\mathbf{X}_0})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist. □

Folgerung 6.6.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $P_{\mathbf{X}_0} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$ und welche sowohl stochastisch unabhängige- als auch stationäre Zuwächse bezüglich P besitzt. Dann gilt:*

(a) *Sei $u \in (0, +\infty)$. Dann gilt $P_{\mathbf{X}_u - \mathbf{X}_0} = P_{\mathbf{X}_u}$.*

(b) *Es ist $(P_{\mathbf{X}_t})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Man zeigt zunächst, dass $P_{-\mathbf{X}_0} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$. Hieraus ergibt sich mittels Folgerung 6.6.1 dann

$$P_{\mathbf{X}_u - \mathbf{X}_0} = P_{\mathbf{X}_u}.$$

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* sogleich aus Satz 6.6.7. □

Wir spezifizieren nun die Forderung der Stationärität der Zuwächse und prägen eine Begriffsbildung, welche in der Theorie der Stochastischen Prozesse eine entscheidende Rolle spielt. Für $\alpha \in [0, +\infty)$ bezeichne π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter π_α.

Definition 6.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $P_{X_0} = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$ und welche stochastisch unabhängig bezüglich P ist und für welche mit einem gewissen $\alpha \in (0, +\infty)$ für alle $u, v \in [0, +\infty)$ die Beziehung

$$P_{X_{u+v} - X_u} = \pi_{\alpha\cdot v}$$

besteht. Dann heißt $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein Poisson*scher Prozess* der Intensität α auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Bemerkung 6.6.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\alpha \in (0, +\infty)$ und $(X_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein Poisson-Prozess der Intensität α auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Ferner sei $s \in [0, +\infty)$. Dann gilt

$$P_{\mathbf{X}_s} = \pi_{\alpha\cdot s}. \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen Definition 6.6.2 und Teil *(a)* von Folgerung 6.6.2 ergibt sich

$$P_{X_s} = P_{X_s - X_0} = \pi_{\alpha\cdot s}. \qquad \square$$

Die vorangehenden Betrachtungen führen uns auf eine wichtige Klasse stochastischer Prozesse mit Zustandsraum $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche in enger Beziehung zur Klasse $\mathcal{M}_{+,u}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ stehen.

Definition 6.6.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(a) Es heißt $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein *m-dimensionaler Lévy-Prozess* auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, falls $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(I) Es ist $P_{\mathbf{X}_0} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$.

(II) Es besitzt $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ stochastisch unabhängige Zuwächse bezüglich P.

(III) Es besitzt $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ stationäre Zuwächse bezüglich P.

(IV) Für jedes $t \in [0, +\infty)$ und $\varepsilon > 0$ gilt

$$\lim_{s\to t} P(\{|\mathbf{X}_t - \mathbf{X}_s| > \varepsilon\}) = 0.$$

(b) Sei $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein m-dimensionaler Lévy-Prozess[1] auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Dann sagt man, dass $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ die *Càdlàg-Eigenschaft*[2] besitzt, falls ein $N\in\mathcal{N}_P$ derart existiert, dass für jedes $\omega\in\Omega\setminus N$ die Abbildung $h_\omega\colon\,[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^m$, welche gemäß $t\longmapsto\mathbf{X}_t(\omega)$ erklärt ist, in jedem $t\in[0,+\infty)$ rechtsseitig stetig ist und in jedem $t\in(0,+\infty)$ einen linksseitigen Grenzwert $\lim_{s\to t-0}h_\omega(t)$ besitzt.

Es folgt nun eines der wichtigsten Beispiele m-dimensionaler Lévy-Prozesse.

Definition 6.6.4. Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m\in\mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ ein m-dimensionaler Lévy-Prozess auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$. Dann heißt $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine m-dimensionale Brown*sche Bewegung* auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, falls $(\mathbf{X}_t)_{t\in[0,+\infty)}$ folgende Eigenschaften besitzt:

(I) Für $t\in(0,+\infty)$ ist $P_{\mathbf{X}_t}$ die m-dimensionale Normalverteilung $\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times1},t\cdot\mathbf{I}_m}$ mit den Parametern $\mathbf{0}_{m\times1}$ und $t\cdot\mathbf{I}_m$.

(II) Es gibt ein $N\in\mathcal{N}_P$ derart, dass für jedes $\omega\in\Omega\backslash N$ die Abbildung $h_\omega\colon\,[0,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}^m$, welche gemäß $h_\omega(t):=\mathbf{X}_t(\omega)$ erklärt ist, zu $\mathscr{C}\left(\left([0,+\infty),|\cdot|\right),\left(\mathbb{R}^m,|\cdot|\right)\right)$ gehört.

6.7. Summen einer zufälligen Anzahl von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen

Das Ziel dieses Abschnitts besteht in einer ersten Einführung in eine bedeutende Verallgemeinerung der in Abschnitt 6.6 behandelten Thematik. Die von uns vorgenommene Verallgemeinerung besteht nun nun dadurch, dass auch die Anzahl der Summanden der betrachteten Summen zufällig ist.

Diese Thematik hat sich mittlerweile zu einem eigenständigen Zweig der Wahrscheinlichkeitstheorie entwickelt, welcher verschiedene interessante- und bedeutsame Anwendungen bereit hält. Dies wird durch das nachfolgende Beispiel belegt, welches eine erste praktische Anwendung zur Thematik dieses Abschnitts vorstellt und die weitere Richtung unserer nachfolgenden Untersuchungen wesentlich bestimmt:

Beispiel 6.7.1. Eine radioaktive Substanz emittiert gewisse Elementarteilchen von einem speziellen Typ in einer solchen Weise, dass die Anzahl der im Verlauf einer Stunde emittierten Teilchen durch eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsavariable X_0 auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit Werten in $\mathbb{N}_0$ modelliert werden kann, deren Verteilung P_{X_0} gerade die Poisson-Verteilung π_α mit einem gewissen $\alpha\in(0,+\infty)$ ist. Ein Teilchenzähler (Detektor), ist jedoch in dem Sinne etwas unzuverlässig, dass er ein emittiertes Teilchen nur mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit $p\in(0,1)$ registriert bzw. mit der Wahrscheinlichkeit $1-p$ nicht registriert. Wenn wir wissen, dass die Anzahl der emittierten Teilchen während einer konkret fixierten Stunde durch die Zahl $n\in\mathbb{N}_0$ gegeben ist, dann ist die Anzahl X der registrierten Teilchen also eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, deren Verteilung P_X die Binomialverteilung $\beta_{n,p}$ mit den Parametern n und p ist.

Wenn wir jedoch den beschriebenen Vorgang während einer willkürlich gewählten Stunde beobachten, dann wird – wie wir bald erkennen – die Verteilung P_X der $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen X auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, welche die Anzahl der registrierten Teilchen modelliert, eine andere sein. In

[1] Paul Pierre Lévy (∗15.09.1886; †15.12.1971) war französischer Mathematiker; er ist vor allem für seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt geworden.

[2] Das Wort „Càdlàg" ist eine Abkürzung aus dem Französischen und steht für „continue à droite, limitée à gauche".

intuitiver Weise, gelangt man zu der Schlussfolgerung, dass aufgrund der Unzulänglichkeiten des Teilchenzählers, nur ein gewisser Bruchteil des ursprünglichen Teilchenstroms registriert wird. Da die Wirksamkeit des Teilchenzählers durch die Zahl p beschrieben wird, könnten wir deshalb zu der Vermutung gelangen, dass die Verteilung P_X der Anzahl X der registrierten Teilchen gerade die Poisson-Verteilung $\pi_{\alpha \cdot p}$ zum Parameter $\alpha \cdot p$ ist. Dies werden wir tatsächlich bestätigen.

Seien

$$k \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

und

$$H_k \coloneqq \{X_0 = k\}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$H_k = X_0^{-1}(\{k\}). \tag{3}$$

Wegen $\{k\} \in \mathfrak{B}_1$ und der Wahl von X_0 folgt aus (3) dann

$$H_k \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4), (3) und $P_{X_0} = \pi_\alpha$ folgt nun

$$\begin{aligned} P(H_k) &= P\left(X_0^{-1}(\{k\})\right) = P_{X_0}((\{k\})) = \pi_\alpha(\{k\}) \\ &= \left[\sum_{n=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} \varepsilon_{n,\mathfrak{B}_1}\right](\{k\}) \\ &= \mathrm{e}^{-\alpha} \frac{\alpha^k}{k!}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann

$$H_k \in \mathfrak{A} \backslash \mathcal{N}_P. \tag{6}$$

Sei

$$l \in \mathbb{N}_0 \backslash \{k\}. \tag{7}$$

Wegen (1), (2) und (7) ergibt sich dann

$$H_k \cap H_l = \varnothing. \tag{8}$$

Wegen $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ sowie (1) und (2) erkennt man, dass

$$\bigcup_{k=0}^{\infty} H_k = \Omega \tag{9}$$

erfüllt ist. Wegen (1), (4), (7), (8) und (9) ist dann $(H_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$. Ist dann

$$A \in \mathfrak{A}, \tag{10}$$

so berechnet sich $P(A)$ aufgrund des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (vergleiche Satz 2.1.4) bei zusätzlicher Beachtung von (1) und (6) gemäß

$$P(A) = \sum_{n=0}^{\infty} P(A \mid H_n) P(H_n). \tag{11}$$

Sei

$$s \in \mathbb{N}_0. \tag{12}$$

Aufgrund der Wahl von X und wegen $\{s\} \in \mathfrak{B}_1$ gilt dann

$$\{X = s\} = X^{-1}(\{s\}) \in \mathfrak{A}. \tag{13}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Wegen (14), (1) und (2) gilt, wie wir oben begründet haben, dass

$$P(\{X = s\} \mid H_n) = P(\{X = s\} \mid \{X_0 = n\}) = \beta_{n,p}(\{s\}). \tag{15}$$

Wegen der Definition von $\beta_{n,p}$ (vgl. Definition M.15.1) gilt

$$\beta_{n,p}(\{s\}) = \begin{cases} \binom{n}{s} p^s (1-p)^{n-s}, & \text{falls } s \in \mathbb{Z}_{0,n}, \\ 0, & \text{falls } s \in \mathbb{N}_0 \backslash \mathbb{Z}_{0,n}. \end{cases} \tag{16}$$

Unter Verwendung von (13), (10), (11), (14), (15), (16), (1) und (5) folgt dann

$$\begin{aligned} P(\{X = s\}) &= \sum_{n=0}^{\infty} P(\{X = s\} \mid H_n) \cdot P(H_n) = \sum_{n=0}^{\infty} \beta_{n,p}(\{s\}) \cdot P(H_n) \\ &= \sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} p^s (1-p) \, \mathrm{e}^{n-s-\alpha} \frac{\alpha^n}{n!} = p^s \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=s}^{\infty} \binom{n}{s} (1-p)^{n-s} \frac{\alpha^n}{n!} \\ &= p^s \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{n!}{s!\,(n-s)!} (1-p)^{n-s} \frac{\alpha^n}{n!} \\ &= \frac{\alpha^s p^s}{s!} \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{\alpha^{n-s}(1-p)^{n-s}}{(n-s)!} = \frac{(\alpha p)^s}{s!} \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=s}^{\infty} \frac{(\alpha(1-p))^{n-s}}{(n-s)!} \\ &= \frac{(\alpha p)^s}{s!} \mathrm{e}^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\alpha(1-p))^n}{n!} = \frac{(\alpha p)^s}{s!} \mathrm{e}^{-\alpha} \mathrm{e}^{\alpha(1-p)} \\ &= \frac{(\alpha p)^s}{s!} \mathrm{e}^{-\alpha p}. \end{aligned} \tag{17}$$

Wegen $X(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ gilt $X^{-1}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0) = \varnothing$. Somit ist

$$P_X(\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0) = P\left(X^{-1}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}_0)\right) = P(\varnothing) = 0. \tag{18}$$

Wegen (18) gilt nach Lemma M.7.3 dann

$$P_X = \sum_{s=0}^{\infty} P_X(\{s\}) \cdot \varepsilon_{s,\mathfrak{B}_1}. \tag{19}$$

Unter Verwendung von (19), (12), (17) und Definition M.15.5 folgt nun

$$P_X = \sum_{s=0}^{\infty} P_X(\{s\}) \, \varepsilon_{s,\mathfrak{B}_1} = \sum_{s=0}^{\infty} P(\{X = s\}) \, \varepsilon_{s,\mathfrak{B}_1} = \sum_{s=0}^{\infty} \mathrm{e}^{-\alpha p} \frac{(\alpha p)^s}{s!} \varepsilon_{s,\mathfrak{B}_1} = \pi_{\alpha p}.$$

Wir geben nun eine Darstellung von X als Summe einer Folge $(X_k)_{k \in \mathbb{N}}$ von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\beta_{1,p}$-verteilten $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen mit *zufälliger* Anzahl von Summanden an. Hierzu sei $\omega \in \Omega$. Für $k \in \mathbb{N}$ sei dann $X_k(\omega) := 1$ bzw. $X_k(\omega) := 0$, falls unter dem

Elementarereignis $\omega \in \Omega$ das k-te Teilchen registriert bzw. nicht registriert wurde. Aufgrund unserer Modellvorstellung ist für $k \in \mathbb{N}$ dann P_{X_k} die Binomialverteilung $\beta_{1,p}$ mit den Parametern 1 und p. Weiterhin ist nach Modellannahme dann $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Für $\omega \in \Omega$ gilt nach Konstruktion

$$X(\omega) = \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Das grundlegende Ziel dieses Abschnitts besteht nun in der Untersuchung von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen des Typs, welcher in Beispiel 6.7.1 auftritt. Unter Heranziehung des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit (vgl. Satz 2.1.4) sowie von Satz 6.6.1 wird es uns gelingen, die Verteilung eines solchen X zu bestimmen. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung, mit deren Hilfe geeignete Aussagen zur stochastischen Unabhängigkeit bereitgestellt werden.

Lemma 6.7.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Weiter seien $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $\mathbf{X}_0$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_{0,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Dann ist $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es sind $\mathbf{X}_0$ und $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

Beweis. Sei

$$\mathbf{Y} \coloneqq \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T. \tag{1}$$

Da $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, folgt wegen (1) mittels Bemerkung 4.4.1 dann, dass $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^{n\cdot m}, \mathfrak{B}_{n\cdot m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Unter Beachtung der in Definition M.17.2 vorgenommenen Definition der Produktabbildung, sowie der in Abschnitt M.17 vereinbarten natürlichen Identifizierung zwischen $\mathbb{R}^{n\cdot m}$ und $\times_{j=1}^n \mathbb{R}^m$ folgt aus (1) weiterhin

$$\mathbf{Y} = \bigotimes_{k=1}^n \mathbf{X}_k. \tag{2}$$

Da die Folge $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{Z}_{0,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, folgt unter Beachtung von (2) mittels Satz 6.4.3 dann:

(I) Es sind $\mathbf{X}_0$ und $\mathbf{Y}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Sei

$$\mathbf{E}_{m,n} \coloneqq (\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m) \in \mathbb{R}^{m\times(n\cdot m)}. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k = \mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{Y} + \mathbf{0}_{m\times 1}. \tag{4}$$

Weiterhin ist

$$\mathbf{X}_0 = 1 \cdot \mathbf{X}_0 + 0. \tag{5}$$

Wegen *(I)*, (4) und (5) liefert Teil *(a)* von Beispiel 6.2.2 dann, dass $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, sowie Teil *(b)* von Beispiel 6.2.2, dass $\mathbf{X}_0$ und $\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. □

Es folgt nun das erste grundlegende Resultat dieses Abschnitts.

Satz 6.7.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und X_0 eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$. Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei definiert gemäß*

$$X(\omega) \coloneqq \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{0}_{m\times 1}, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist X eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b) *Es sei $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Für $k \in \mathbb{N}_0$ sei*

$$\mu_k \coloneqq \begin{cases} \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}, & \text{falls } k = 0, \\ P_{\mathbf{X}_1}, & \text{falls } k = 1, \\ \bigstar_{j=1}^{n} P_{X_j}, & \text{falls } k \in \mathbb{N}_0 \setminus \{0,1\}. \end{cases}$$

Dann ist $(\{X_0 = k\})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt

$$P_X = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X_0 = k\})\, \mu_k.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$k \in \mathbb{N}_0 \tag{1}$$

und sei

$$H_k \coloneqq \{X_0 = k\}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$H_k = X_0^{-1}(\{k\}). \tag{3}$$

Wegen $\{k\} \in \mathfrak{B}_1$ und der Wahl von X_0 folgt aus (3) dann

$$H_k \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Sei

$$l \in \mathbb{N}_0 \setminus \{k\}. \tag{5}$$

Aus (1), (2) und (5) folgt dann

$$H_k \cap H_l = \varnothing. \tag{6}$$

Wegen $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ sowie (1) und (2) erkennt man, dass

$$\bigcup_{r=0}^{\infty} H_r = \Omega. \tag{7}$$

Wegen (1), (5) und (6) folgt mittels Teil *(c)* von Bemerkung M.19.2 dann

$$1_{\bigcup_{r=0}^{\infty} H_r} = \sum_{r=0}^{\infty} 1_{H_r}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt nun

$$1_\Omega = \sum_{r=0}^{\infty} 1_{H_r}. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (9) ergibt sich dann

$$X = 1_\Omega \cdot X = \left(\sum_{r=0}^{\infty} 1_{H_r} \right) \cdot X = \sum_{r=0}^{\infty} (1_{H_r} \cdot X). \tag{10}$$

Aus (1), (2) und der Definition von X folgt nun

$$1_{H_k} \cdot X = \begin{cases} 1_\Omega \cdot \mathbf{0}_{m\times 1}, & \text{falls } k = 0, \\ 1_{H_k} \cdot \left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s \right), & \text{falls } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{11}$$

Seien

$$\mathbf{X} = (U_1, \ldots, U_m)^T \tag{12}$$

sowie für

$$s \in \mathbb{N} \tag{13}$$

weiterhin

$$\mathbf{X}_s \coloneqq (X_{1,s}, \ldots, X_{m,s})^T. \tag{14}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{15}$$

Wir zeigen nun die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $1_{H_k} \cdot U_j$. Sei zunächst $k = 0$. Wegen (11) und (12) ist nun $1_{H_0} \cdot U_j$ eine konstante Abbildung. Hieraus folgt mittels Beispiel M.16.1 dann

$$1_{H_0} \cdot U_j \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{16}$$

Sei nun

$$k \in \mathbb{N}. \tag{17}$$

Weiter sei

$$s \in \mathbb{N}_{1,k}. \tag{18}$$

Da $\mathbf{X}_s$ nach Voraussetzung $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar ist, folgt wegen (14) und (15) mittels Satz M.17.6 dann

$$X_{j,s} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{19}$$

Wegen (18) und (19) liefert Satz M.18.7 dann

$$\sum_{s=1}^{k} X_{j,s} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{20}$$

Wegen (17), (1), (4) und (20) liefert Bemerkung M.18.5 dann

$$1_{H_k} \left(\sum_{s=1}^{k} X_{j,s} \right) \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{21}$$

Wegen (11) bis (15) gilt

$$1_{H_k} \cdot U_j = 1_{H_k} \left(\sum_{s=1}^{k} X_{j,s} \right). \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt

$$1_{H_k} \cdot U_j \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{23}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}_0. \tag{24}$$

Wegen (16), (17), (23) und (24) gilt nach Satz M.18.7 dann

$$\sum_{k=0}^{n} 1_{H_k} \cdot U_j \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{25}$$

Wegen (10), (12) und (15) gilt

$$U_j = \sum_{k=0}^{\infty} (1_{H_k} \cdot U_j). \tag{26}$$

Wegen $X \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}^m)$ folgt aus (12) und (15) dann

$$U_j \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \tag{27}$$

Wegen (24) bis (27) liefert Folgerung M.18.10 nun

$$U_j \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{28}$$

Wegen (12), (15) und (28) folgt mittels Satz M.17.6 dann die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\mathbf{X}$. Somit ist $\mathbf{X}$ also eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Zu *(b)*: Wegen (1) sowie (4) bis (7) gilt:

(I) Es ist $(H_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ ein vollständiges Ereignissystem bezüglich $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Sei

$$I' := \{k \in \mathbb{N}_0 \mid H_k \in \mathfrak{A} \setminus \mathcal{N}_P\}. \tag{29}$$

Wegen *(I)* und (29) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 2.1.4 dann

$$I' \neq \varnothing. \tag{30}$$

Sei

$$B \in \mathfrak{B}_m. \tag{31}$$

Wegen (31) folgt aus *(a)* dann

$$\mathbf{X}^{-1}(B) \in \mathfrak{A}. \tag{32}$$

Wegen *(I)* und (32) folgt bei Beachtung von (29) und (30) mittels Teil *(b)* von Satz 2.1.4 dann

$$P\left(X^{-1}(B)\right) = \sum_{k \in I'} P\left(X^{-1}(B) \,\middle|\, H_k\right) P(H_k). \tag{33}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$I' \cap \mathbb{N} \neq \varnothing. \tag{34}$$

Sei

$$k \in I' \cap \mathbb{N}. \tag{35}$$

Unter Beachtung von (35), (34), (1), (2) und der Definition von $\mathbf{X}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{X}^{-1}(B)\right] \cap H_k &= \{\mathbf{X} \in B\} \cap \{X_0 = k\} = \left\{\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s \in B\right\} \cap \{X_0 = k\} \\ &= \left[\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B)\right] \cap H_k.\end{aligned} \tag{36}$$

Unter Beachtung von (35), (29), (36) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}P\left(\mathbf{X}^{-1}(B) \,\middle|\, H_k\right) &= \frac{P\left(\mathbf{X}^{-1}(B) \cap H_k\right)}{P(H_k)} = \frac{P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B) \cap H_k\right)}{P(H_k)} \\ &= P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B) \,\middle|\, H_k\right) \\ &= P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B) \,\middle|\, X_0^{-1}(\{k\})\right).\end{aligned} \tag{37}$$

Da die Folge $(\mathbf{X}_s)_{s\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist, ist nach Teil *(b)* von Bemerkung 6.2.2 auch die Folge $(\mathbf{X}_s)_{s\in\mathbb{Z}_{0,k}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt mittels Lemma 6.7.1 dann die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von X_0 und $\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s$, also wegen Definition 6.2.1 die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von $X_0^{-1}(\mathfrak{B}_1)$ und $\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s^{-1}\right)(\mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt wegen $\{k\} \in \mathfrak{B}_1$ und (31) dann die stochastische Unabhängigkeit bezüglich P von $X_0^{-1}(\{k\})$ und $\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B)$. Hieraus folgt mittels Satz 2.2.1 dann

$$P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_S\right)^{-1}(B) \,\middle|\, X_0^{-1}(\{k\})\right) = P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B)\right). \tag{38}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung 6.6.2 ist die Folge $(\mathbf{X}_s)_{s\in\mathbb{N}_{1,k}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus folgt mittels Satz 6.6.1 dann

$$P_{\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s} = \begin{cases} P_{\mathbf{X}_1}, & \text{falls } k = 1, \\ \bigstar_{s=1}^{k} P_{\mathbf{X}_s}, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Hieraus und aus der Definition von μ_k folgt dann

$$P_{\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s} = \mu_k. \tag{39}$$

Unter Beachtung von (37) bis (39) folgt dann

$$\begin{aligned}P\left(\mathbf{X}^{-1}(B) \,\middle|\, H_k\right) &= P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B) \,\middle|\, X_0^{;1}(\{k\})\right) = P\left(\left(\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s\right)^{-1}(B)\right) \\ &= P_{\sum_{s=1}^{k} \mathbf{X}_s}(B) = \mu_k(B).\end{aligned} \tag{40}$$

Wir betrachten nun den Fall

$$0 \in I'. \tag{41}$$

Unter Beachtung von (1), (2) und der Definition von $\mathbf{X}$ folgt dann

$$\begin{aligned}\left[\mathbf{X}^{-1}(B)\right] \cap H_0 = \{\mathbf{X} \in B\} \cap \{X_0 = 0\} &= \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } \mathbf{0}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m \setminus B, \\ \{X_0 = 0\}, & \text{falls } \mathbf{0}_{m\times 1} \in B, \end{cases} \\ &= \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } \mathbf{0}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m \setminus B, \\ H_0, & \text{falls } \mathbf{0}_{m\times 1} \in B. \end{cases}\end{aligned} \tag{42}$$

Sei zunächst

$$\mathbf{0}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m \setminus B. \tag{43}$$

Unter Verwendung von (29) und (41) bis (43) und der Definition von μ_0 folgt dann

$$\begin{aligned}P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\middle|\, H_0\right) &= \frac{P\left(\left[\mathbf{X}^{-1}(B)\right] \cap H_0\right)}{P(H_0)} = \frac{P(\varnothing)}{P(H_0)} \\ &= \frac{0}{P(H_0)} = 0 = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}(B) = \mu_0(B).\end{aligned} \tag{44}$$

Sei nun

$$\mathbf{0}_{m\times 1} \in B. \tag{45}$$

Unter Beachtung von (29), (41), (42) und (45) folgt dann

$$P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\middle|\, H_0\right) = \frac{P\left(\left[\mathbf{X}^{-1}(B)\right] \cap H_0\right)}{P(H_0)} = \frac{P(H_0)}{P(H_0)} = 1 = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}(B). \tag{46}$$

Wegen (34), (35), (40), (41) sowie (43) bis (46) folgt für

$$k \in I' \tag{47}$$

dann

$$P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\middle|\, H_k\right) = \mu_k(B). \tag{48}$$

Unter Verwendung von (33), (47), (48), (29), (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned}P_{\mathbf{X}}(B) = P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\right) &= \sum_{k\in I'} P\left(\mathbf{X}^{-1}(B)\middle|\, H_k\right) \cdot P(H_k) = \sum_{k\in I'} \left[\mu_k(B)\right] P(H_k) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} P(H_k) \cdot \mu_k(B) = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X_0 = k\}) \cdot \mu_k(B).\end{aligned} \tag{49}$$

Aus (31) und (49) folgt nun

$$P_{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X_0 = k\}) \cdot \mu_k.$$

□

Wir greifen nun auf der Grundlage von Satz 6.7.1 nochmals die Situation aus Beispiel 6.7.1 auf:

Beispiel 6.7.2. Seien $\alpha \in (0, +\infty)$ sowie $p \in [0, 1]$. Es bezeichne $\beta_{1,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern 1 und p sowie π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter α. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(II) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $P_{X_k} = \beta_{1,p}$.

(III) Es ist $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ sowie $P_{X_0} = \pi_\alpha$.

Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$X(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann ist X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt

$$P_X = \pi_{\alpha p}.$$

Beweis. Die Behauptung folgt unter Verwendung von Satz 6.7.1 sowie der nach Beispiel M.25.3.3 für $n \in \mathbb{N}$ gültigen Beziehung

$$\bigstar_{k=1}^{n} \beta_{1,p} = \beta_{n,p}$$

mithilfe der in Beispiel 6.7.1 geführten Rechnung. □

Wir wenden uns nun zwei weiteren Spezifizierungen der Situation von Satz 6.7.1 zu. In beiden Fällen wird hierbei die Verteilung der $\mathbb{N}_0$-wertigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen X_0 eine Ersterfolgsverteilung sein. Hierbei sei darin erinnert, dass für einen Parameter $p \in (0,1]$ durch die Setzung

$$\widetilde{G}_p := \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1}\, p \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$$

nach Bemerkung M.15.2 ein Maß auf $\mathcal{M}_+^{1,d}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ gegeben ist, welches in Definition M.15.2 als Ersterfolgsverteilung zum Parameter p bezeichnet wurde.

Beispiel 6.7.3. Für $p \in (0,1]$ bezeichne $\widetilde{G}_p$ die Ersterfolgsverteilung zum Parameter p. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(II) Mit einem gewissen $p_1 \in (0,1]$ besteht für alle $k \in \mathbb{N}$ die Beziehung $P_{X_k} = \widetilde{G}_{p_1}$.

(III) Es ist $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ und mit einem gewissen $p_2 \in (0,1]$ gilt $P_{X_0} = \widetilde{G}_{p_2}$.

Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$X(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann ist X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und

$$P_X = \widetilde{G}_{p_1 \cdot p_2}.$$

Beispiel 6.7.4. Sei $\eta \in (0,+\infty)$ sowie $p \in (0,1]$. Es bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η sowie $\widetilde{G}_p$ die Ersterfolgsverteilung zum Parameter p. Weiter seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

(II) Für alle $k \in \mathbb{N}$ besteht die Beziehung $P_{X_k} = E_\eta$.

(III) Es ist $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ und $P_{X_0} = \widetilde{G}_p$.

Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$X(\omega) \coloneqq \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann ist X eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und

$$P_X = E_{p\cdot\eta}.$$

Wir betrachten nun eine in zahlreichen Anwendungen auftretende Spezialisierung von Satz 6.7.1: Wir gehen nun davon aus, dass die dortige Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ identisch verteilt ist, während X_0 eine Poisson-Verteilung besitzt.

Satz 6.7.2. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und X_0 eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(II) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $P_{\mathbf{X}_k} = P_{\mathbf{X}_1}$, das heißt die Folge $(\mathbf{X}_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist identisch verteilt.*

(III) *Es ist $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$ und mit einem gewissen $\alpha \in [0,+\infty)$ ist $P_{X_0} = \pi_\alpha$.*

Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$\mathbf{X}(\omega) \coloneqq \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} \mathbf{X}_k(\omega), & \textit{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ \mathbf{0}_{m\times 1}, & \textit{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Es bezeichne $\nu_{P_{\mathbf{X}_1},\alpha}$ die durch $P_{\mathbf{X}_1}$ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter α. Dann ist $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ und es gilt

$$P_{\mathbf{X}} = \nu_{P_{\mathbf{X}_1},\alpha}.$$

Beweis. Es bezeichne $\left(P_{\mathbf{X}_1}^{(s)}\right)_{s\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der zu $P_{\mathbf{X}_1}$ gehörigen Faltungspotenzen. Wegen Bemerkung M.25.2.16 gilt dann

$$\nu_{P_{\mathbf{X}_1},\alpha} = \sum_{s=0}^{\infty} \pi_\alpha(\{s\}) \cdot P_{\mathbf{X}_1}^{(s)}. \tag{1}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Wegen Definition M.25.2.4, *(II)* und (2) gilt mit den Bezeichnung von Teil *(b)* von Satz 6.7.1 dann

$$\mu_k = P_{\mathbf{X}_1}^{(k)}. \tag{3}$$

Wegen *(III)* und (2) gilt

$$P(\{X_0 = k\}) = P\left(X_0^{-1}(\{k\})\right) = P_{X_0}(\{k\}) = \pi_\alpha(\{k\}). \tag{4}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz 6.7.1 ist $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen *(I)* und *(III)* folgt mittels Teil *(a)* von Satz 6.7.1 sowie zusätzlicher Beachtung von (2), (3), (4) und (1) dann

$$P_{\mathbf{X}} = \sum_{k=0}^{\infty} P(\{X_0 = k\}) \cdot \mu_k = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_\alpha(\{k\}) P_{\mathbf{X}_1}^{(k)} = \nu_{P_{\mathbf{X}_1},\alpha}.$$

□

Wir betrachten nun die in Satz 6.7.1 betrachtete Situation speziell für den Fall $m = 1$ und einer identisch verteilten Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$. Hierbei wird es uns gelingen, für die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable X eine hinreichende Bedingung für die Endlichkeit von ersten- und zweiten absoluten Moment anzugeben sowie die Berechnung von Erwartungswert und Varianz vornehmen. Bei der Realisierung dieses Vorhabens wird uns Satz M.25.3.2 wichtige Dienste leisten.

Satz 6.7.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(II) *Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $P_{X_k} = P_{X_1}$, das heißt die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ ist identisch verteilt.*

(III) *Es ist $X_0(\Omega) \subseteq \mathbb{N}_0$.*

(IV) *Für $k \in \mathbb{Z}_{0,1}$ sei $X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

Die Abbildung $X\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$X(\omega) := \begin{cases} \sum_{k=1}^{X_0(\omega)} X_k(\omega), & \text{falls } X_0(\omega) \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{falls } X_0(\omega) = 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $X \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Es gelten*

$$\mathrm{E}_P(X) = \mathrm{E}_P(X_0)\,\mathrm{E}_P(X_1)$$

sowie

$$\mathrm{Var}_P(X) = \mathrm{Var}_P(X_1)\,\mathrm{E}_P(X_0) + [\mathrm{E}_P(X_1)]^2\,\mathrm{Var}_P(X_0).$$

(c) *Für $k \in \mathbb{Z}_{0,1}$ sei sogar $X_k \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. Dann gilt $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung 4.1.3 gilt

$$\{P_{X_0}, P_{X_1}\} \subseteq \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Unter Beachtung von (2) bezeichne $P_{X_1}^{(k)}$ die k-te Faltungspotenz von P_{X_1}. Wegen Definition M.25.2.4, *(II)* und (2) gilt mit den Bezeichnungen von Teil *(b)* von Satz 6.7.1 dann

$$\mu_k = P_{X_1}^{(k)}. \tag{3}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz 6.7.1 ist X eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen *(I)* und *(III)* folgt mittels Teil *(b)* von Satz 6.7.1, dass $(\{X_0 = k\})_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ ist, sowie unter zusätzlicher Beachtung von (2) und (3) zudem

$$P_X = \sum_{k=0}^{\infty} P\left(\{X_0 = k\}\right) \cdot \mu_k = P\left(\{X_0 = k\}\right) \cdot P_{X_1}^{(k)}. \tag{4}$$

Wegen *(IV)* liefert Teil *(b)* von Satz 5.1.1 dann

$$\{P_{X_0}, P_{X_1}\} \subseteq \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{5}$$

Wegen (1), (4) und (5) liefert Teil *(d1)* von Satz M.25.3.2 dann

$$P_X \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{6}$$

Wegen (6) folgt mittels Satz 5.1.1 dann $X \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$. Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen (1), (4) und (5) liefert Teil *(d2)* bzw. *(d4)* von Satz M.25.3.2 dann

$$M_1\left(P_X\right) = M_1\left(P_{X_0}\right) \cdot M_1\left(P_{X_1}\right) \tag{7}$$

bzw.

$$\operatorname{var}\left(P_X\right) = \operatorname{var}\left(P_{X_1}\right) \cdot M_1\left(P_{X_0}\right) + M_1\left(P_{X_1}\right)^2 \cdot \operatorname{var}\left(P_{X_0}\right). \tag{8}$$

Wegen *(a)* folgt mittels Teil *(c)* von Satz 5.1.1 bzw. Teil *(a)* von Satz 5.2.2 dann

$$\mathrm{E}_P\left(X\right) = M_1\left(P_X\right) \tag{9}$$

bzw.

$$\mathrm{Var}_P\left(X\right) = \operatorname{var}\left(P_X\right). \tag{10}$$

Wegen *(IV)* liefert Teil *(c)* von Satz 5.1.1 bzw. Teil *(a)* von Satz 5.2.2 für

$$k \in \{0, 1\} \tag{11}$$

weiterhin

$$\mathrm{E}_P\left(X_k\right) = M_1\left(P_{X_k}\right) \tag{12}$$

und

$$\mathrm{Var}_P\left(X_k\right) = \operatorname{var}\left(P_{X_k}\right). \tag{13}$$

Aus (7), (9), (11) und (12) bzw. (8) bis (13) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(X\right) = \mathrm{E}_P\left(X_0\right) \cdot E_P\left(X_1\right) \tag{14}$$

bzw.

$$\mathrm{Var}_P\left(X\right) = \mathrm{Var}_P\left(X_1\right) \cdot \mathrm{E}_P\left(X_0\right) + \left[\mathrm{E}_P\left(X_1\right)\right]^2 \cdot \mathrm{Var}_P\left(X_0\right). \tag{15}$$

Wegen (14) und (15) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Für $k \in \{0,1\}$ gilt aufgrund Wahl von X_k nach Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann $\operatorname{Var}_P(X_k) \in [0,+\infty)$. Hieraus folgt mittels (15) dann $\operatorname{Var}_P(X) \in [0,+\infty)$. Hieraus folgt durch erneute Anwendung von Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann $X \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$. □

Hinsichtlich einer umfassenden Darstellung der Thematik dieses Abschnitts sei auf die Monographie [GK96] von Boris V. Gnedenko[1)] und Viktor Yu. Korolev[2)] verwiesen.

[1)] Boris Wladimirowitsch Gnedenko (∗01.01.1912; †27.12.1997) war ein russischer Mathematiker und einer der führenden Mitglieder der russischen Schule der Wahrscheinlichkeitstheorie und Statistik. Er widmete sich auch den Anwendungen auf industrielle Massenproduktion.

[2)] Viktor Yur'evich Korolev (∗1954) ist ein russischer Mathematiker, welcher an der Lomonosov Universität in Moskau lehrt.

7. Empirische Mittel und empirische Kovarianzmatrizen

7.1. Einleitung

Die Beschreibung eines Zufallsmechanismus erfolgt in der von uns postulierten axiomatischen Vorgehensweise durch die Festlegung eines konkreten Wahrscheinlichkeitsraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Vielfach treten jedoch solche zufällige Phänomene auf, bei denen der zugrundeliegende Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *nicht* unmittelbar zugänglich ist. Wir bemerken dann nur gewisse Auswirkungen des unserer direkten Beobachtungen entzogenen Zufallsmechanismus. Diese Auswirkungen begegnen uns in Form der gemessenen Werte gewisser Kenngrößen, welche für uns aus irgendwelchen Gründen von Interesse sind.

Diese Kenngrößen modellieren wir als Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. In der Mehrzahl der Anwendungen sehen wir uns hierbei mit $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen konfrontiert. Fixieren wir nun eine solche Zufallsvariable $\mathbf{X}$, so wird unser Anliegen dann darin liegen, aus den beobachteten Messdaten Rückschlüsse über die Struktur von $\mathbf{X}$ zu gewinnen. Am lückenlosesten würde dies uns dann gelingen, wenn wir die Kenntnis der Verteilung $P_{\mathbf{X}}$ besäßen. Damit sind wir in natürlicher Weise auf ein Grundproblem der mathematischen Statistik geführt worden.

Dies ist allerdings von recht komplizierter Natur und ohne Vorinformationen über die vorliegende Verteilung nur schwer behandelbar. Aus diesem Grunde ist man deshalb vielfach gezwungen, die Ansprüche hinsichtlich der Kenntnis von $P_{\mathbf{X}}$ abzuschwächen und sich mit gewissen Teilinformationen über $P_{\mathbf{X}}$ zu begnügen. Solche Teilinformationen könnten etwa gewisse numerische Charakteristika von $P_{\mathbf{X}}$ betreffen. In den Anwendungen wird hierbei oft postuliert, dass $P_{\mathbf{X}}$ einer solchen Teilklasse von $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ angehört, welche durch die Existenz gewisser Momente charakterisiert ist. Hieraus ergibt sich die Aufgabenstellung der Schätzung genau dieser Momente auf der Grundlage des vorhandenen Datenmaterials. Die angesprochene Momentenannahme besteht hierbei in der Mehrzahl aller Situationen darin, dass $P_{\mathbf{X}}$ zur Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ der Wahrscheinlichkeitsmaße von zweiter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gehört. Dann stellt sich also konkret die Aufgabe die Schätzung der Größen $\mathfrak{M}_1(P_{\mathbf{X}})$ und $\mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}})$ (oder anders ausgedrückt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ oder $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$).

Wir kommen nun zur Konkretisierung der von uns getroffenen Modellannahmen. Wir interessieren uns also für eine gewisse durch einen Zufallsmechanismus produzierte Kenngröße. Um verlässliche Aussagen über diese treffen zu können, ist es notwendig diese hinreichend oft gemessen zu haben. Hierbei wird von der Vorstellung ausgegangen, dass zwischen den einzelnen Messungen *keine gegenseitige* Beeinflussung erfolgen. Dieser Vorstellung verleihen wir dann in einer Modellannahme über eine endliche Folge von *stochastisch unabhängigen* Zufallsvariablen mit *identischer* Verteilung Ausdruck. Dies führt uns auf den nachfolgenden Grundbegriff der mathematischen Statistik:

Definition 7.1.1. Seien $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\Omega', \mathfrak{A}')$. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge $(\Omega', \mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Beziehung $P_{X_j} = \mu$ besteht.

(a) Dann heißt $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ agierende *mathematische Stichprobe* vom Umfang n an μ.

(b) Für jedes $\omega\in\Omega$ heißt weiterhin die Folge $(X_j(\omega))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ die durch $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und ω bestimmte *konkrete Stichprobe* vom Umfang n an μ.

In der Situation von Definition 7.1.1 werden der nicht triviale messbare Raum $(\Omega',\mathfrak{A}')$ als Stichprobenraum und das Maß $\mu\in\mathcal{M}_+^1(\Omega',\mathfrak{A}')$ als Stichprobenverteilung gedeutet. Bilden wir die Produktabbildung $\bigotimes_{j=1}^n X_j$, so folgt aus der vorausgesetzten stochastischen Unabhängigkeit von $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P mittels Satz 6.4.1 dann

$$P_{\bigotimes_{j=1}^n X_j}=\bigotimes_{j=1}^n P_{X_j}=\bigotimes_{j=1}^n\mu.$$

Dies bedeutet, dass bei Vorliegen einer mathematischen Stichprobe vom Umfang n an μ *nicht primär* mit dem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega',\mathfrak{A}',\mu)$ selbst, sondern stärker mit dessen vorliegenden n-fachen Produkt

$$\left(\bigtimes_{j=1}^n\Omega',\bigotimes_{j=1}^n\mathfrak{A}',\bigotimes_{j=1}^n\mu\right)$$

operiert wird. Um eine Diskussion von Aussagen asymptotischer Natur zu ermöglichen, wird es sich als nützlich erweisen, die gerade eingeführten Begriffe endlicher Stichproben auf den *abzählbar unendlichen* Fall auszudehnen. Dies soll nun konkretisiert werden.

Definition 7.1.2. Seien $(\Omega',\mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\mu\in\mathcal{M}_+^1(\Omega',\mathfrak{A}')$. Weiterhin seien $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $(\Omega',\mathfrak{A}')$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ derart, dass für jedes $j\in\mathbb{N}$ die Beziehung $P_{X_j}=\mu$ besteht.

(a) Dann heißt $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$ eine auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ agierende *abzählbar unendliche mathematische Stichprobe* von μ.

(b) Für jedes $\omega\in\Omega$ heißt die Folge $(X_j(\omega))_{j\in\mathbb{N}}$ die durch $(X_j)_{j\in\mathbb{N}}$und ω bestimmte *konkrete abzählbar unendliche Stichprobe* von μ.

Auch in der Situation von Definition 7.1.2 werden der nicht triviale messbare Raum $(\Omega',\mathfrak{A}')$ als Stichprobenraum und das Maß $\mu\in\mathcal{M}_+^1(\Omega',\mathfrak{A}')$ als Stichprobenverteilung gedeutet.

Aus den in den Definitionen 7.1.1 und 7.1.2 eingeführten Begriffsbildungen lässt sich bereits erahnen, dass das Arbeiten mit endlichen- oder unendlichen Folgen von stochastisch unabhängigen Zufallsvariablen eine der wesentlichen Vorgehensweisen der mathematischen Statistik darstellt. Für uns bedeutet dies, dass wir in den nachfolgenden Kapiteln ganz wesentlich auf den Kapitel 6 entwickelten Apparat zurückgreifen werden.

Die im vorliegenden Kapitel betrachtete Situation lässt sich wie folgt umreißen: Bei fixiertem $m\in\mathbb{N}$ betrachten wir den Stichprobenraum $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ und legen eine Stichprobenverteilung $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ zugrunde. Wir arbeiten dann bei fixiertem $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ mit auf abstrakten Wahrscheinlichkeitsräumen $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ agierenden mathematischen Stichproben $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ vom Umfang n an μ. Unsere Zielstellung besteht dann darin, auf der Grundlage der Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Größen festzulegen, welche in irgendeinem Sinne Rückschlüsse auf die Momente $\mathfrak{M}_1(\mu)$ und $\operatorname{cov}(\mu)$ bzw. in der Sprache der Stichprobenvariablen ausgedrückt, auf die Momente $E_P(\mathbf{X}_1)$ und $\operatorname{Cov}(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1)$erlauben. Die von uns angestrebten Objekte sollten dann also Abbildungen

$$\varphi_{m,n}\colon\mathbb{R}^{n\cdot m}\longrightarrow\mathbb{R}^m$$

bzw.

$$\psi_{m,n}\colon \mathbb{R}^{n\cdot m} \longrightarrow \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$$

sein, für welche die Kompositionsabbildungen

$$\varphi_{n,m} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}$$

bzw.

$$\psi_{n,m} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}$$

in einer geeigneten Beziehung zu den Momenten $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$ bzw. $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1)$ stehen. Wünschenswert wäre etwa, wenn diese Kompositionsabbildungen P-integrierbare Zufallsvariable darstellen würden, für welche die Beziehungen

$$\mathrm{E}_P\left(\varphi_{n,m} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}\right) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1) \tag{1}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P\left(\psi_{n,m} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_m \end{bmatrix}\right) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) \tag{2}$$

erfüllt sind. Wir werden im nachfolgenden Abschnitt 7.2 geeignete Kandidaten für solche Abbildung $\varphi_{n,m}$ bzw. $\psi_{n,m}$ vorstellen und deren Eigenschaften diskutieren.

7.2. Aussagen über empirische Mittel und empirische Kovarianzmatrizen

Wir greifen nun die am Ende von Abschnitt 7.1 formulierte Aufgabenstellung auf und begeben uns auf die Suche nach geeigneten Abbildungen $\varphi_{m,n}$ bzw. $\psi_{m,n}$, welche den Bedingungen (1) und (2) genügen. Beleuchtet man diese beiden Beziehungen etwas näher, so erkennt man, dass es sich hierbei um reine Momentenidentitäten handelt. Dies lässt dann darauf schließen, dass das Bestehen von (1) bzw. (2) *nicht* an die Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit der Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gebunden sein sollte. Diese Vermutung wird sich in Kürze bestätigen. Bei allen Betrachtungen dieses Abschnitts, werden wir ursächlich keine Voraussetzungen stellen, welche in Richtung stochastische Unabhängigkeit gewisser Folgen von Zufallsvariablen abzielen. Unsere Voraussetzungen werden sich auf die Momente der zur Diskussion stehenden Zufallsvariablen beziehen. Wir beginnen nun mit der detailierten Untersuchung derjenigen Zufallsvariablen, welche im Mittelpunkt des vorliegenden Abschnitts stehen.

Vereinbarung. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Dann bezeichne $\mathfrak{B}_{m,n}$ die Borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes $\left(\mathbb{R}^{m\times n}, \varrho_{E,\mathbb{R}^{m\times n}}\right)$, wobei $\varrho_{E,\mathbb{R}^{m\times n}}\colon \mathbb{R}^{m\times n} \times \mathbb{R}^{m\times n} \longrightarrow [0,+\infty)$ gemäß

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] \longmapsto \sqrt{\mathrm{tr}\left[(\mathbf{A}-\mathbf{B})^T(\mathbf{A}-\mathbf{B})\right]}$$

erklärt ist.

Bemerkung 7.2.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und seien ferner noch die Abbildungen $\varphi_{m,n} \colon \mathbb{R}^{m \cdot n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ bzw. $\varrho_{m,n} \colon \mathbb{R}^{m \cdot n} \longrightarrow \mathbb{R}^{m \times m}_{\geq}$ definiert gemäß

$$\left(\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T\right)^T \longmapsto \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j$$

bzw.

$$\left(\mathbf{u}_1^T, \ldots, \mathbf{u}_n^T\right)^T \longmapsto \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{u}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k\right] \left[\mathbf{u}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u}_k\right]^T.$$

Dann gilt:

(a) Es ist $\varphi_{m,n}$ eine $\mathfrak{B}_{m \cdot n}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung.

(b) Die Abbildung $\varrho_{m,n}$ und $\frac{1}{n}\varrho_{m,n}$ sind jeweils $\mathfrak{B}_{m \cdot n}$-$\mathfrak{B}_{m \times m}$-messbar.

(c) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und sei $\psi_{m,n} \coloneqq \frac{1}{n-1}\varphi_{m,n}$. Dann ist $\psi_{m,n}$ eine $\mathfrak{B}_{m \cdot n}$-$\mathfrak{B}_{m \times m}$-messbare Abbildung.

(d) Es gilt

$$\varrho_{m,n}^{-1}\left(\{\mathbf{O}_{m \times m}\}\right) = \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \,\middle|\, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \right\}. \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$\mathbf{E}_{m,n} \coloneqq (\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m) \in \mathbb{R}^{m \times (m \cdot n)}. \tag{1}$$

Aus (1) und der Definiton von $\varphi_{m,n}$ folgt dann $\varphi_{m,n} = T_{\frac{1}{n}\mathbf{E}_{m.n}, \mathbf{0}_{m \times 1}}$. Hieraus ergibt sich in Verbindung mit Teil *(b)* von Satz M.16.9 die $\mathfrak{B}_{m \cdot n}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\varphi_{m,n}$.

Zu *(b)* und *(c)*: Aus den Definitionen von $\varrho_{m,n}$, $\frac{1}{n}\varrho_{m,n}$ sowie im Falle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ auch von $\psi_{m,n}$ erkennt man sogleich, dass diese Abbildungen sämtlich zu $\mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^{m \cdot n}, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}^{m \times m}, \varrho_{E, \mathbb{R}^{m \times m}}\right)\right)$ gehören. Hieraus folgt mittels Satz M.16.8 deren $\mathfrak{B}_{m \cdot n}$-$\mathfrak{B}_{m \times m}$-Messbarkeit.

Zu *(d)*: Sei

$$\mathbf{u} \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Weiterhin sei

$$\mathbf{u}^{(n)} \coloneqq (\mathbf{u}, \ldots, \mathbf{u})^T \in \mathbb{R}^{n \cdot m}. \tag{3}$$

Aus der Definition von $\varphi_{m,n}$ folgt dann

$$\varphi_{m,n}\left(\mathbf{u}^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathbf{u} = \frac{1}{n}\left(n \cdot \mathbf{u}\right) = \mathbf{u}. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (3), (4) und der Definition von $\varrho_{m,n}$ folgt nun

$$\begin{aligned} \varrho_{m,n}\left(\mathbf{u}^{(n)}\right) &= \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{u} - \varphi_{m,n}\left(\mathbf{u}^{(n)}\right)\right] \left[\mathbf{u} - \varphi_{m,n}\left(\mathbf{u}^{(n)}\right)\right]^T \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{u} - \mathbf{u}\right] \left[\mathbf{u} - \mathbf{u}\right]^T = \mathbf{0}_{m \times 1} \left(\mathbf{0}_{m \times 1}\right)^T = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{O}_{m \times m} \\ &= \mathbf{O}_{m \times m}. \end{aligned} \tag{5}$$

Aus (2), (3) und (5) folgt dann

$$\left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \middle| \, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \right\} \subseteq \varrho_{m,n}^{-1} \left(\{ \mathbf{O}_{m \times m} \} \right). \tag{6}$$

Sei nun

$$\mathbf{Y} \in \varrho_{m,n}^{-1} \left(\{ \mathbf{O}_{m \times m} \} \right). \tag{7}$$

Hierbei sei

$$\mathbf{Y} = (\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n)^T \tag{8}$$

die Blockdarstellung mit Hilfe von $\mathbb{R}^m$-Vektoren. Unter Beachtung von (8) und (7) folgt dann

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{Y}_1 - \varphi_{m,n}^{-} (\mathbf{Y}), \ldots \mathbf{Y}_n - \varphi_{m,n}^{-1} (\mathbf{Y}) \right) \left(\mathbf{Y}_1 - \varphi_{m,n}^{-} (\mathbf{Y}), \ldots \mathbf{Y}_n - \varphi_{m,n}^{-1} (\mathbf{Y}) \right)^T \\ =& \left(\mathbf{Y}_1 - \varphi_{m,n}^{-} (\mathbf{Y}), \ldots \mathbf{Y}_n - \varphi_{m,n}^{-1} (\mathbf{Y}) \right) \begin{bmatrix} \left[\mathbf{Y}_1 - \varphi_{m,n}^{-} (\mathbf{Y}) \right]^T \\ \vdots \\ \left[\mathbf{Y}_n - \varphi_{m,n}^{-} (\mathbf{Y}) \right]^T \end{bmatrix} \\ =& \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{Y}_j - \varphi_{m,n} (\mathbf{Y}) \right) \left(\mathbf{Y}_j - \varphi_{m,n} (\mathbf{Y}) \right)^T = \varrho_{m,n} (\mathbf{Y}) = \mathbf{O}_{m \times m}. \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (9) liefert Teil *(c)* von Lemma M.23.9.11 dann

$$\left(\mathbf{Y}_1 - \varphi_{m,n}^{-1} (\mathbf{Y}), \ldots \mathbf{Y}_n - \varphi_{m,n}^{-1} (\mathbf{Y}) \right) = \mathbf{O}_{m \times (m \cdot n)}.$$

Hieraus folgt dann

$$(\mathbf{Y}_1, \ldots, \mathbf{Y}_n)^T = \left(\varphi_{m,n} (\mathbf{Y}), \ldots, \varphi_{m,n} (\mathbf{Y}) \right)^T. \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt dann

$$\mathbf{Y} \in \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \middle| \, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \right\}. \tag{11}$$

Wegen (7) und (11) gilt dann

$$\varrho_{m,n}^{-1} \left(\{ \mathbf{O}_{m \times m} \} \right) \subseteq \left\{ \begin{bmatrix} \mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{u} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{m \cdot n} \middle| \, \mathbf{u} \in \mathbb{R}^m \right\}. \tag{12}$$

Aus (6) und (12) folgt dann *(d)*. □

Lemma 7.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m, n \in \mathbb{N}$ und $(\mathbf{X}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiterhin seien*

$$\overline{\mathbf{X}}_n := \frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j$$

sowie

$$\mathbf{U}_n \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_n\right] \left[\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_n\right]^T.$$

Dann gilt:

(a) *Die Abbildungen $\varphi_{m,n}$ und $\varrho_{m,n}$ wie in Bemerkung 7.2.1 definiert. Dann gelten*

$$\overline{\mathbf{X}}_n = \varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$$

und

$$\mathbf{U}_n = \varrho_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}.$$

(b) *Es ist $\overline{\mathbf{X}}_n$ bzw. $\mathbf{U}_n$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$- bzw. $(\mathbb{R}^{n\times m}, \mathfrak{B}_{n\times m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(c) *Es gilt $\mathbf{U}_n = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j \mathbf{X}_j^T - n\overline{\mathbf{X}}_n \overline{\mathbf{X}}_n^T$.*

(d) *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und sei $\psi_{m,n} \coloneqq \frac{1}{n-1}\varrho_{m-n}$. Dann gilt*

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{U}_n = \psi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt sogleich aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Da $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, liefert Bemerkung 4.1.1 sogleich, dass $\left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T$ eine $(\mathbb{R}^{n\cdot m}, \mathfrak{B}_{n\cdot m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Kombiniert man dies mit der aus den Teilen *(a)* bzw. *(b)* von der Bemerkung 7.2.1 folgenden $\mathfrak{B}_{n\cdot m}$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\varphi_{m,n}$ bzw. $\mathfrak{B}_{n\cdot m}$-$\mathfrak{B}_{m\times m}$-Messbarkeit von $\varrho_{n,m}$, so ergibt sich wegen *(a)* mittels Satz 4.1.1 dann, dass $\overline{\mathbf{X}}_n$ bzw. $\mathbf{U}_n$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$- bzw. $(\mathbb{R}^{n\times m}, \mathfrak{B}_{n\times m})$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist.

Zu *(c)*: Es gilt

$$\begin{aligned}
\mathbf{U}_n &= \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_n\right] \left[\mathbf{X}_j - \overline{\mathbf{X}}_n\right]^T = \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{X}_j\mathbf{X}_j^T - \mathbf{X}_j\overline{\mathbf{X}}_n^T - \overline{\mathbf{X}}_n\mathbf{X}_j^T + \overline{\mathbf{X}}_n\overline{\mathbf{X}}_n^T\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j\mathbf{X}_j^T - \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j\right] \overline{\mathbf{X}}_n^T - \overline{\mathbf{X}}_n \left[\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j^T\right] + n\overline{\mathbf{X}}_n\overline{\mathbf{X}}_n^T \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j\mathbf{X}_j^T - \left(n\overline{\mathbf{X}}_n\right)\overline{\mathbf{X}}_n^T - \overline{\mathbf{X}}_n\left(n\overline{\mathbf{X}}_n\right)^T + n\overline{\mathbf{X}}_n\overline{\mathbf{X}}_n^T \\
&= \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j\mathbf{X}_j^T - n\overline{\mathbf{X}}_n\overline{\mathbf{X}}_n^T.
\end{aligned}$$

Zu *(d)*: Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\frac{1}{n-1}\mathbf{U}_n = \psi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}. \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) und Teil *(c)* von Bemerkung 7.2.1 ergibt sich die Behauptung von *(d)* analog zu dem Beweis von *(b)*. □

Vor dem Hintergrund von Lemma 7.2.1 prägen wir nun die zentralen Begriffsbildungen des Abschnitts.

Definition 7.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ das *empirische Mittel* der Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.

Definition 7.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^n \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \mathbf{X}_k\right]^T$$

auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die zur Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörige *empirische Kovarianzmatrix*. Im Falle $m = 1$ spricht man dabei auch von der zur Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörigen *empirischen Varianz*.

Wir studieren nun erste Eigenschaften von empirischem Mittel und empirischer Kovarianzmatrix. Wir interessieren uns hierbei jetzt vor allem für die ersten und zweiten Momente dieser Zufallsvariablen. Von der in unseren späteren Anwendungen zugrundeliegenden Voraussetzungen der identischen Verteiltheit und stochastischen Unabhängigkeit der Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ machen wir jetzt nur teilweise Gebrauch. Für unsere jetzigen Zwecke reicht nämlich, wie wir in Kürze sehen werden, die aus der stochastischen Unabhängigkeit wegen Satz 6.5.3 folgende paarweise Unkorreliertheit der Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zusammen mit der aus der identischen Verteiltheit sich nach Teil *(c)* von Satz 5.1.1 bzw. Teil *(d)* von Satz 5.4.3 ergebenden Konstanz der Folgen $(\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bereits aus.

Satz 7.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ habe folgende Eigenschaften:*

(I) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(II) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$.*

Dann gelten

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j\right) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1).$$

(b) *Die Folge* $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *habe folgende Eigenschaften:*

(III) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt* $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(IV) *Für* $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) = \begin{cases} \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1), & \text{falls } j = k, \\ \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } j \neq k. \end{cases}$$

Dann gelten

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$$

sowie

$$\mathrm{Cov}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen *(I)* ergibt sich mittels Lemma 5.4.2 dann $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie unter zusätzlicher Beachtung von *(II)* zudem

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j) = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1) = \frac{1}{n}\cdot[n\cdot\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)] = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1).$$

Zu *(b)*: Es gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathbf{X}_j. \tag{1}$$

Wegen (1), *(III)* und *(IV)* liefert Folgerung 5.4.2 dann $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie

$$\begin{aligned}
\mathrm{Cov}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j, \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right) &= \mathrm{Cov}_P\left(\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathbf{X}_j, \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathbf{X}_j\right) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\frac{1}{n}\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_j)\cdot\left(\frac{1}{n}\mathbf{I}_m\right)^T \\
&= \frac{1}{n^2}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1) = \frac{1}{n^2}\cdot[n\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1)] \\
&= \frac{1}{n}\cdot\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1).
\end{aligned}$$

□

Aus Satz 7.2.1 erkennen wir nun, dass über das arithmetische Mittel eine Abbildung $\varphi_{m,n}$ gegeben ist, für welche die Beziehung (1) besteht. Dies ist der Inhalt der nachfolgenden Resultats.

Folgerung 7.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Außerdem sei die Abbildung $\varphi_{m,n}\colon \mathbb{R}^{m\cdot n} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß*

$$\begin{pmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{pmatrix} \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{u}_j.$$

Dann gilt:

(a) *Die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ habe folgende Eigenschaften:*

(I) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(II) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$.*

Dann gelten $\varphi_{m,n} \circ \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\varphi_{m,n} \circ \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T\right) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1).$$

(b) *Die Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ habe die folgenden Eigenschaften:*

(III) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(IV) *Für $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ gilt*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) = \begin{cases} \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1), & \text{falls } j = k, \\ \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } j \neq k. \end{cases}$$

Dann gelten $\varphi_{m,n} \circ \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_m^T\right)^T \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie

$$\mathrm{Cov}_P\left(\varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}, \varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1).$$

Beweis. Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Teil *(a)* von Satz 7.2.1 dann *(a)* bzw. *(b)*. □

Folgerung 7.2.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ der Bedingung $P_{\mathbf{X}_j} = P_{\mathbf{X}_1}$ genügen. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathbf{X}_1 \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Dann gilt:*

(a1) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, R; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(a2) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$.*

(a3) *Es gelten* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *sowie*

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1).$$

(b) *Sei* $\mathbf{X}_1 \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. *Dann gilt:*

(b1) *Sei* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. *Dann gilt* $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},R;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(b2) *Sei* $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n}$. *Dann gilt*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k) = \begin{cases}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1), & \text{falls } j=k,\\ \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } j\neq k.\end{cases}$$

(b3) *Es gelten* $\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ *sowie*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j,\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right) = \frac{1}{n}\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Wahl der Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergeben sich mittels Teil *(b)* bzw. Teil *(c)* von Folgerung 5.1.1 sogleich die Behauptungen von *(a1)* bzw. *(a2)*. Wegen *(a1)* und *(a2)* liefert Teil *(I)* von Satz 7.2.1 dann sogleich *(a3)*.

Zu *(b1)*: Wegen $P_{\mathbf{X}_j} = P_{\mathbf{X}_1}$ und $\mathbf{X}_1 \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ folgt aus Teil *(b)* von Folgerung 5.3.1 sogleich $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

Zu *(b2)*: Sei

$$(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Sei zunächst

$$j \neq k. \tag{2}$$

Wegen *(b1)* und der stochastischen Unabhängigkeit von $(\mathbf{X}_s)_{s\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezüglich P folgt bei Beachtung von (1) und (2) mittels Satz 6.5.6 dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k) = \mathbf{O}_{m\times m}. \tag{3}$$

Wegen $P_{\mathbf{X}_j} = P_{\mathbf{X}_1}$ folgt mittels Teil *(b)* von Folgerung 5.4.1 weiterhin

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_j) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1). \tag{4}$$

Wegen (1) bis (4) ist dann *(b2)* bewiesen.

Zu *(b3)*: Dies folgt wegen *(b1)* und *(b2)* sogleich aus Teil *(b)* von Satz 7.2.1. □

Wir wenden uns nun einer analogen Untersuchung der empirischen Kovarianzmatrix zu:

Satz 7.2.2. *Sei* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ *sowie* $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge von* $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt* $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(II) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt* $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$.

(III) *Für* $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt*

$$\mathrm{Cov}_p(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k) = \begin{cases} \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1), & \text{falls } j = k, \\ \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } j \neq k. \end{cases}$$

Dann gelten

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m}$$

sowie

$$\begin{aligned}\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T =& \frac{n}{n-1}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j)\right]\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j)\right]^T\right. \\ & - \left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)\right]\cdot \\ & \left.\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)\right]^T\right)\end{aligned}$$

und

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T\right) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1).$$

Beweis. Wegen der Folgerung M.22.6.2 gilt:

(i) Es ist $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Wegen *(i)*, *(I)* und (1) folgt dann

$$\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Teil *(b)* von Lemma M.23.9.2 dann

$$\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m}. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) liefert Teil *(a)* von Lemma M.23.9.2 dann

$$\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m}. \tag{4}$$

Wegen *(II)* gilt

$$\sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right] = \sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j - n \cdot \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right) = n\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(X_1\right)\right],$$

also

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right). \tag{5}$$

Unter Verwendung von *(II)* und (5) folgen nun

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\\
=&\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\\
=&\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T
\end{aligned} \tag{6}$$

sowie

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\\
=&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\\
=&\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right]\\
=&\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\right]^T\\
=&\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T.
\end{aligned} \tag{7}$$

Unter Beachtung von (6), (7) und *(II)* folgt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]\left[\mathbf{X}_j-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right]^T\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\left(\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\right)\cdot\right.\right.\\
&\left.\left.\left(\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]-\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\right)^T\right]\right\}\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right.\\
&+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\\
&\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right\}\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right.\\
&-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\\
&-\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\\
&\left.+\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\right\}\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right.\\
&\left.-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\right\}.
\end{aligned}\tag{8}$$

Sei

$$k\in\mathbb{N}_{1,n}.\tag{9}$$

Wegen *(I)* und (9) liefert Teil *(b)* von Satz 5.4.2 dann

$$\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]^T\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times m}\tag{10}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]^T\right)=\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_k,\mathbf{X}_k\right).\tag{11}$$

Wegen (9) und (10) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Lemma 5.4.2 dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]^T\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times m} \tag{12}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (11) und *(III)* weiterhin

$$\begin{aligned}\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{E}_P\left(\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]\left[\mathbf{X}_k-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_k\right)\right]^T\right)&=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_j\right)=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right)\\&=\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Wegen Bemerkung 5.1.3 gilt

$$\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\cdot 1_\Omega\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}. \tag{14}$$

Wegen *(i)*, *(I)* und (14) gilt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}. \tag{15}$$

Wegen (15) liefert Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4 dann

$$\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times m}. \tag{16}$$

Wegen *(I)* folgt aus Teil *(c3)* von Satz 5.4.1, dass $\left(\mathbf{X}_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}$ ist. Hieraus und mit *(II)* ergibt sich mittels Satz 7.2.1 dann $\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}$ sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right)=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right). \tag{17}$$

Unter Beachtung von (16), (17), *(b)* von Satz 5.4.2 und Teil *(b)* von Satz 7.2.1 dann

$$\begin{aligned}&\mathrm{E}_P\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\right)\\&=\mathrm{E}_P\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\\&=\mathrm{Cov}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l,\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right)=\frac{1}{n}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right).\end{aligned} \tag{18}$$

Unter Beachtung von (4), (8), (12), (16), (13) und (18) folgt mittels Lemma 5.4.2 dann

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left(\mathbf{X}_j-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right)\left(\mathbf{X}_j-\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l\right)^T\right)\\
=&\mathrm{E}_P\left(\frac{n}{n-1}\left\{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right.\right.\\
&\left.\left.-\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\right\}\right)\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]\left[\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)\right]^T\right)\right.\\
&\left.-\mathrm{E}_P\left(\left[\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]\left[\frac{1}{n}\sum_{l=1}^{n}\mathbf{X}_l-\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)\right]^T\right)\right\}\\
=&\frac{n}{n-1}\left\{\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right)-\frac{1}{n}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right)\right\}\\
=&\frac{n}{n-1}\frac{n-1}{n}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right)=\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right).
\end{aligned}\tag{19}$$

Wegen (4), (8) und (19) ist alles gezeigt. □

Aus Satz 7.2.2 erkennen wir nun, auf welche Weise eine Abbildung $\psi_{m,n}$, welche der Bedingung (2) genügt, definiert werden kann.

Folgerung 7.2.3. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $m\in\mathbb{N}$, $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathbf{X}_j\in\left[\mathscr{L}^2\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1}$.*

(II) *Für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right)=\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)$.*

(III) *Für $(j,k)\in\mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n}$ gilt*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k\right)=\begin{cases}\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1\right), & \text{falls } j=k,\\ \mathbf{O}_{m\times m,} & \text{falls } j\neq k.\end{cases}$$

Sei $\psi_{m,n}\colon\mathbb{R}^{n\cdot m}\longrightarrow\mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$ definiert gemäß

$$\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{bmatrix}\longmapsto\frac{1}{n-1}\sum_{j=1}^{n}\left[\mathbf{u}_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\right]\left[\mathbf{u}_j-\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathbf{u}_k\right]^T.$$

Dann gelten

$$\psi_{m,n}\circ\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n\end{bmatrix}\in\left[\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}\right)\right]^{m\times n}$$

sowie

$$\psi_{m,n} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} = \frac{n}{n-1} \left(\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right) \right] \left[\mathbf{X}_j - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right) \right]^T - \left[\frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_l\right) \right] \frac{1}{n} \sum_{l=1}^{n} \mathbf{X}_l - \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_l\right)^T \right)$$

und

$$\mathrm{E}_P \left(\psi_{m,n} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{u}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{u}_n \end{bmatrix} \right) = \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\right).$$

Beweis. Unter Beachtung von Teil *(a)* von Lemma 7.2.1 ergibt sich

$$\psi_{m,n} \circ \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} = \frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right] \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right]^T.$$

Hieraus ergeben sich in Verbindung mit Satz 7.2.2 dann alle Behauptungen. □

Folgerung 7.2.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(\mathbf{X}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass $\mathbf{X}_1 \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m \times 1}$ sowie für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ weiterhin $P_{\mathbf{X}_j} = P_{\mathbf{X}_1}$ erfüllt ist. Dann gelten:*

(a) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m \times 1}$.*

(b) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gelten $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m \times 1}$ sowie $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)$.*

(c) *Sei $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt*

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k\right) = \begin{cases} \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\right), & \text{falls } j = k, \\ \mathbf{O}_{m \times m}, & \text{falls } j \neq k. \end{cases}$$

(d) *Es gelten*

$$\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right] \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right]^T \in \left[\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m \times m}$$

und

$$\mathrm{E}_P \left(\frac{1}{n-1} \sum_{j=1}^{n} \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right] \left[\mathbf{X}_j - \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathbf{X}_k \right]^T \right) = \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1\right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies ergibt sich aus Teil *(b1)* von Folgerung 7.2.2.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* folgt mittels Teil *(c3)* dann $\mathbf{X}_j \in \left[\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m \times 1}$. Hieraus folgt mittels Teil *(a2)* von Folgerung 7.2.2 dann $\mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_j\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}_1\right)$.

Zu *(c)*: Dies folgt aus Teil *(b2)* von Folgerung 7.2.2.

Zu *(d)*: Wegen *(a)*, *(b)* und *(c)* liefert Satz 7.2.2 sogleich alle Behauptiungen von *(d)*. □

Die Folgerungen 7.2.1 und 7.2.3 liefern uns dann also insbesondere, dass unter den dortigen Voraussetzungen die Funktionen

$$\varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}$$

bzw.

$$\psi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix},$$

wenn man sie als Schätzfunktionen für die Momente $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$ bzw. $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1)$ ansieht, die vorteilhafte Eigenschaft der Erwartungstreue besitzen, denn

$$\mathrm{E}_P\left[\varphi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}\right] = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$$

bzw.

$$\mathrm{Cov}_P\left[\psi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}, \psi_{m,n} \circ \begin{pmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{pmatrix}\right] = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1).$$

Dies nährt die Hoffnung, dass diese beiden Schätzfunktionen auch unter dem Aspekt der Diskussion weiterer statistischer Gütekriterien gut abschneiden könnten. Dies wird zum Beispiel beim Studium des Grenzverhaltens der Folgen

$$\left(\varphi_{m,n} \circ \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bzw.

$$\left(\psi_{m,n} \circ \left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T\right)_{n \in \mathbb{N}}$$

bestätigt. Beim Studium der Gesetze der großen Zahlen (siehe 9), kann man sich zum Beispiel im Fall $m = 1$ überzeugen, dass diese Folgen unter geeigneten Voraussetzungen P-fast überall auf Ω gegen die auf Ω konstante Funktion mit Wert $\mathrm{E}_P(X_1)$ bzw. $\mathrm{Var}_P(X_1)$ konvergieren.

Unsere nachfolgenden Betrachtungen knüpfen eng an die Situation von Satz 7.2.2 an: Wir gehen nun auf eine spezielle lineare Transformation der $(\mathbb{R}^{n \cdot m}, \mathfrak{B}_{n \cdot m})$-Zufallsvariablen $\left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein, welche sich für unsere späteren Betrachtungen über normalverteilte Folgen von besonderem Interesse erweist.

Wir beginnen mit einer kleinen matrizenalgebraischen Vorbereitung:

Lemma 7.2.2. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{\geq}^{m \times m}$ symmetrisch und*

$$\mathbf{\Sigma}_n := \mathrm{diag}(\mathbf{\Sigma}, \ldots, \mathbf{\Sigma}) \in \mathbb{R}^{(n \cdot m) \times (n \cdot m)}$$

bzw.

$$\mathbf{E}_{m,n} := \frac{1}{n}(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m) \in \mathbb{R}^{m \times (n \cdot m)}.$$

Schließlich sei noch

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n} \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}.$$

Dann gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_n \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix}^T = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_n \left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T\right).$$

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T &= \frac{1}{n}\left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m\right) \cdot \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right) \cdot \frac{1}{n}\left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m\right)^T \\ &= \frac{1}{n^2}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right) \cdot \left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m\right)^T = \frac{1}{n^2}\left(n\boldsymbol{\Sigma}\right) \\ &= \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}. \end{aligned} \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) folgt

$$\begin{aligned} &\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T \\ =&\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T \\ =&\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right)\frac{1}{n}\left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m\right)^T - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n} \end{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} \\ =&\frac{1}{n}\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_m \\ \vdots \\ \mathbf{I}_m \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{n}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma} \\ \vdots \\ \boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} \\ \vdots \\ \frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{(n\cdot m)\times m}. \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $\boldsymbol{\Sigma}^T = \boldsymbol{\Sigma}$ gilt

$$\boldsymbol{\Sigma}_n^T = \left[\operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right)\right]^T = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}^T, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}^T\right) = \operatorname{diag}\left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma}\right) = \boldsymbol{\Sigma}_n. \tag{3}$$

Unter Beachtung von (3) und (2) folgt

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T &= \left[\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)\boldsymbol{\Sigma}_n^T\mathbf{E}_{m,n}^T\right]^T = \left[\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T\right]^T \\ &= \mathbf{O}_{(n\cdot m)\times m}^T = \mathbf{O}_{m\times(n\cdot m)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4) ergibt sich

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n} \end{bmatrix} \boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{O}_{m\times(n\cdot m)} \\ \vdots \\ \mathbf{O}_{m\times(n\cdot m)} \end{bmatrix} = \mathbf{O}_{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}. \end{aligned} \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) folgt nun

$$\begin{aligned}(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})\,\boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T &= \boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T\\ &= \boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T-\mathbf{O}_{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}\\ &= \boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T.\end{aligned}\tag{6}$$

Unter Verwendung von (1), (4), (2) und (6) folgt nun

$$\begin{aligned}&\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_n\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\end{bmatrix}^T\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\end{bmatrix}\boldsymbol{\Sigma}_n\left(\mathbf{E}_{m,n}^T,[\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}]^T\right)\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T & \mathbf{E}_{m,n}\boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T\\ (\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})\,\boldsymbol{\Sigma}_n\mathbf{E}_{m,n}^T & (\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})\,\boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma} & \mathbf{O}_{m\times(n\cdot m)}\\ \mathbf{O}_{(n\cdot m)\times m} & \boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T\end{bmatrix}\\ &=\operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma},\boldsymbol{\Sigma}_n\,(\mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n})^T\right).\end{aligned}$$

□

Satz 7.2.3. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter seien $m,n\in\mathbb{N}$ sowie $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathbf{X}_j\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(II) *Für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_j)=\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$.*

(III) *Für $(j,k)\in\mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n}$ gilt*

$$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_j,\mathbf{X}_k)=\begin{cases}\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1), & \text{falls } j=k,\\ \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } j\neq k.\end{cases}$$

Es seien $\mathbf{Y}_1:=\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathbf{X}_j$ sowie

$$\mathbf{Y}_2:=\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathbf{X}_j\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n-\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n\mathbf{X}_j\end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $\left(\mathbf{Y}_1^T,\mathbf{Y}_2^T\right)^T\in\left[\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})\right]^{(n+1)m\times 1}$.*

(b) *Seien $\mathbf{a}:=\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)$, $\boldsymbol{\Sigma}:=\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}_1,\mathbf{X}_1)$, $\boldsymbol{\Sigma}_n:=\operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma},\ldots,\boldsymbol{\Sigma})\in\mathbb{R}^{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}$, $\mathbf{E}_{m,n}:=\frac{1}{n}(\mathbf{I}_m,\ldots,\mathbf{I}_m)\in\mathbb{R}^{m\times(n\cdot m)}$ und $\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}:=\left(\mathbf{E}_{m,n}^T,\ldots,\mathbf{E}_{m,n}^T\right)^T\in\mathbb{R}^{(n\cdot m)\times(n\cdot m)}$. Dann gelten*

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \mathbf{I}_{n\cdot m}-\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \mathbf{0}_{(n\cdot m)\times 1}\end{bmatrix}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix}\right) = \mathrm{diag}\left(\frac{1}{n}\mathbf{\Sigma}, \mathbf{\Sigma}_n\left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T\right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Da $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.22.6.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus *(I)* sogleich

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{(n+1)m\times 1}.$$

Zu *(b)*: Es gilt

$$\mathbf{Y}_1 = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j = \frac{1}{n}\left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m\right)\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} = \mathbf{E}_{m,n}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Unter Beachtung (1) ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{Y}_2 &= \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n - \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n}\mathbf{X}_j\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1 - \mathbf{Y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n - \mathbf{Y}_1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \vdots\\ \mathbf{Y}_1\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T\\ \vdots\\ \mathbf{E}_{m,n}\left(\mathbf{X}_1^T, \ldots, \mathbf{X}_n^T\right)^T\end{bmatrix}\\ &= \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} - \begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \vdots\\ \mathbf{E}_{m,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix} = \left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt nun

$$\begin{bmatrix}\mathbf{Y}_1\\ \mathbf{Y}_2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{E}_{m,n}\\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Sei

$$\mathbf{a}_n \coloneqq \begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \vdots\\ \mathbf{a}\end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{n\cdot m}. \tag{4}$$

Unter Beachtung von *(II)*, der Definition von *(a)* sowie (4) folgt dann

$$\mathrm{E}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix}\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)\\ \vdots\\ \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_n)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)\\ \vdots\\ \mathrm{E}_P(\mathbf{X}_1)\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\mathbf{a}\\ \vdots\\ \mathbf{a}\end{bmatrix} = \mathbf{a}_n. \tag{5}$$

Aus (4) folgt weiterhin

$$\mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n = \frac{1}{n} \left(\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \vdots \\ \mathbf{a} \end{bmatrix} = \frac{1}{n} \left(n \cdot \mathbf{a} \right) = \mathbf{a}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6) und (4) folgt dann

$$\boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n \\ \vdots \\ \mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \mathbf{a}_n. \tag{7}$$

Unter Verwendung von (6) und (7) ergibt sich nun

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n \cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n \\ (\mathbf{I}_{n \cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}) \cdot \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n \\ \mathbf{a}_n - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \cdot \mathbf{a}_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0}_{(n \cdot m) \times 1} \end{bmatrix}. \tag{8}$$

Wegen *(I)* gilt nach Teil *(a)* von Satz 5.4.2 dann

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \in \left[\mathscr{L}^1 \left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R} \right) \right]^{m \times 1}. \tag{9}$$

Wegen (9) und (3) folgen mittels Lemma 5.4.2 dann

$$\left(\mathbf{Y}_1^T, \mathbf{Y}_2^T \right)^T \in \left[\mathscr{L}^1 \left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R} \right) \right]^{(n+1)m \times 1}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (5) und (6) weiterhin

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P \left(\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \right) &= \mathrm{E}_P \left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n \cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right) = \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n \cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \mathrm{E}_P \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n \cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{a}_n = \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{0}_{(n \cdot m) \times 1} \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen Teil *(f)* von Satz 5.4.2, *(III)* sowie den Definitionen von $\boldsymbol{\Sigma}$ und $\boldsymbol{\Sigma}_n$ folgt dann

$$\begin{aligned} \mathrm{Cov}_P \left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right) &= \left(\mathrm{Cov}_P \left(\mathbf{X}_j, \mathbf{X}_k \right) \right)_{j,k \in \mathbb{N}_{1,n}} \\ &= \mathrm{diag} \left(\mathrm{Cov}_P \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \right), \ldots, \mathrm{Cov}_P \left(\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_1 \right) \right) \\ &= \mathrm{diag} \left(\boldsymbol{\Sigma}, \ldots, \boldsymbol{\Sigma} \right) = \boldsymbol{\Sigma}_n. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen *(I)* gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \in \left[\mathscr{L}^2 \left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R} \right) \right]^{(n \cdot m) \times 1}. \tag{12}$$

Wegen Lemma 7.2.2 gilt

$$\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_n \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix}^T = \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_n \left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T \right). \tag{13}$$

Wegen (12) und (3) ergibt sich mittels Satz 5.4.9 dann erneut *(a)* sowie unter zusätzlicher Beachtung von (11) und (13) weiterhin

$$\begin{aligned} \operatorname{Cov}_P\left(\begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{Y}_1 \\ \mathbf{Y}_2 \end{bmatrix} \right) &= \operatorname{Cov}_P\left(\begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \operatorname{Cov}_P\left(\begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \mathbf{X}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{X}_n \end{bmatrix} \right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix}^T \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix} \cdot \boldsymbol{\Sigma}_n \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{E}_{m,n} \\ \mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n} \end{bmatrix}^T \\ &= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{n}\boldsymbol{\Sigma}, \boldsymbol{\Sigma}_n \left(\mathbf{I}_{n\cdot m} - \boldsymbol{\mathcal{E}}_{m,n}\right)^T \right). \end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (3), (10) und (14) ist dann *(b)* bewiesen. □

7.3. Empirische Mittel und empirische Varianz von $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen

In den Anwendungen tritt oftmals der Fall auf, dass eine endliche Anzahl stochastisch unabhängiger normalverteilter $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen beobachtet wird. Für diesen Fall lassen sich präzise Aussagen über die Verteilung von empirischen Mittel und empirische Varianz gewinnen. Deren Herleitung bildet den Inhalt dieses Abschnitts.

Eine wesentliche Rolle bei der Behandlung von statistischen Testproblemen über normalverteilte $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen, spielt die Tatsache, dass in diesem Fall das empirische Mittel und die empirische Varianz stochastisch unabhängig sind. Das Ziel der nachfolgenden Überlegungen besteht im Nachweis dieser Tatsache.

Unsere Strategie hierzu basiert wesentlich auf der Verwendung einer orthognalen Transformation des Stichprobenraums, deren erzeugende Matrix $\mathbf{H}$ die erste Zeile

$$\frac{1}{\sqrt{n}}(1, \ldots, 1) \in \mathbb{R}^n$$

besitzt. Wir beginnen nun mit den entsprechenden Detailbetrachtungen:

Lemma 7.3.1. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern $\mathbf{a}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$. Weiter seien $\mathbf{B}$ eine reguläre Matrix aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}$. Dann ist $\mathbf{BX} + \mathbf{b}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gelten $\mathbf{Ba} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{B\Sigma B}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ sowie*

$$P_{\mathbf{BX}+\mathbf{b}} = \mathcal{N}_{\mathbf{Ba}+\mathbf{b},\mathbf{B\Sigma B}^T}.$$

BEWEIS. Sei $T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß

$$\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{B}\mathbf{u} + \mathbf{b}. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(b)* von Satz M.16.9 dann:

(I) $T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}$ ist eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung.

Wegen (1) sowie der Wahl von $\mathbf{B}$ und $\mathbf{b}$ liefert Satz M.24.4.6 dann

$$\mathbf{B}\mathbf{a} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m \tag{2}$$

und

$$\mathbf{B}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>} \tag{3}$$

und

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{B}\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{B}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^T}. \tag{4}$$

Aus (1) folgt sogleich

$$\mathbf{B}\mathbf{X} + \mathbf{b} = T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ \mathbf{X}. \tag{5}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ ergibt sich mittels Satz 4.1.2, dass $\mathbf{B}\mathbf{X}+\mathbf{b}$ ein $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist sowie unter Beachtung von (5), Satz M.16.11, der Voraussetzung $P_{\mathbf{X}} = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ und (4) weiterhin

$$P_{\mathbf{B}\mathbf{X}+\mathbf{b}} = \left(T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ \mathbf{X}\right)(P) = T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(P_{\mathbf{X}}\right) = T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{B}\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathbf{B}\mathbf{\Sigma}\mathbf{B}^T}. \tag{6}$$

Wegen (2), (3) und (6) ist dann alles gezeigt. □

Lemma 7.3.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$, $\sigma \in (0,+\infty)$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Beziehung $P_{X_j} = \mathcal{N}_{a_j,\sigma^2}$ besteht. Dann gilt:*

(a) *Sei $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Dann ist $\overline{X}_n$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es gilt*

$$P_{\overline{X}_n} = \mathcal{N}_{\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n a_j, \frac{\sigma^2}{n}}.$$

(b) *Sei $\mathbf{H}$ eine orthogonale Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, welche gemäß*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n^T \end{bmatrix}$$

als Blockmatrix über die Zeilen aufgefasst werde. Es sei $\mathbf{X} := (X_1, \ldots, X_n)^T$ und für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien

$$Y_j := \mathbf{h}_j^T \mathbf{X}$$

sowie

$$W_j := \frac{1}{\sigma} Y_j.$$

Dann ist $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *bzw.* $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *jeweils eine Folge von bezüglich* P *stochastisch unabhängigen* $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *derart, dass für* $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ *mit der Setzung* $\mathbf{a}:=(a_1,\ldots,a_n)^T$ *die Beziehungen*

$$P_{Y_j}=\mathcal{N}_{\frac{1}{\sigma}h_j^T\mathbf{a},1}$$

bestehen. Weiterhin sind $(Y_2,\ldots,Y_n)^T$ *bzw.* $(W_2,\ldots,W_n)^T$ *jeweils* $\left(\mathbb{R}^{n-1},\mathfrak{B}_{n-1}\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ *und es sind* Y_1 *sowie* $(Y_2,\ldots,Y_n)^T$ *bzw.* W_1 *sowie* $(W_2,\ldots,W_n)^T$ *jeweils stochastisch unabhängig bezüglich* P*.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt sogleich aus Teil *(b)* von Satz 6.6.6.

Zu *(b)*: Nach Konstruktion gilt

$$\mathbf{X}=\begin{bmatrix}X_1\\ \vdots\\ X_n\end{bmatrix}. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Wahl der Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ liefert Bemerkung 4.1.1 dann

(I) Es ist $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_n)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$.

Nach Konstruktion gilt weiterhin

$$\mathbf{a}=\begin{bmatrix}a_1\\ \vdots\\ a_n\end{bmatrix}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) nud der Wahl der Folge $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergibt sich mittels Teil *(b2)* von Satz 6.4.6 weiterhin

$$P_{\mathbf{X}}=\mathcal{N}_{a,\sigma^2}. \tag{3}$$

Nach Wahl von $\mathbf{H}$ gilt

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T=\mathbf{I}_n. \tag{4}$$

Aus (4) folgt insbesondere

$$\det(\mathbf{H})\neq 0. \tag{5}$$

Sei

$$\mathbf{Y}:=\mathbf{H}\mathbf{X}. \tag{6}$$

Wegen *(I)* und (6) ergibt sich mittels Satz 4.1.2 dann:

(III) Es ist $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^n,\mathfrak{B}_n)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$.

Unter Beachtung (6) und (5) ergeben sich mittels Lemma 7.3.1 dann $\mathbf{H}\mathbf{a}\in\mathbb{R}^n$, $\mathbf{H}\cdot\left(\sigma^2\mathbf{I}_n\right)\cdot\mathbf{H}^T\in\mathbb{R}^{n\times n}_{>}$ und

$$P_{\mathbf{Y}}=P_{\mathbf{H}\mathbf{X}}=\mathcal{N}_{\mathbf{H}\mathbf{a},\mathbf{H}\cdot(\sigma^2\mathbf{I}_n)\cdot\mathbf{H}^T}. \tag{7}$$

Wegen (4) gilt

$$\mathbf{H}\cdot\left(\sigma^2\mathbf{I}_n\right)\cdot\mathbf{H}^T=\sigma^2\mathbf{H}\mathbf{H}^T=\sigma^2\mathbf{I}_n. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt dann

$$P_{\mathbf{Y}}=\mathcal{N}_{\mathbf{H}\mathbf{a},\sigma^2\mathbf{I}_n}. \tag{9}$$

Sei

$$\mathbf{W} \coloneqq \frac{1}{\sigma^2}\mathbf{Y}. \tag{10}$$

Aus (10) folgt dann

$$\mathbf{W} = \left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right) \cdot \mathbf{Y}. \tag{11}$$

Wegen *(III)* und (11) ergibt sich mittels Satz 4.1.2 dann:

(III) Es ist $\mathbf{W}$ eine $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Es ist

$$\det\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right) = \frac{1}{\sigma^n} \neq 0. \tag{12}$$

Unter Beachtung von (11) und (12) ergeben sich mittels Lemma 7.3.1 dann $\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\cdot\mathbf{Ha} \in \mathbb{R}^n$, $\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\left(\sigma^2\mathbf{I}_n\right)\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)^T \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>}$ und

$$P_{\mathbf{W}} = P_{\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\mathbf{Y}} = \mathcal{N}_{\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\cdot\mathbf{Ha},\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\left(\sigma^2\mathbf{I}_n\right)\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)^T}. \tag{13}$$

Es gelten

$$\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right) \cdot \mathbf{Ha} = \frac{1}{\sigma}\mathbf{Ha} \tag{14}$$

sowie

$$\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)\left(\sigma^2\mathbf{I}_n\right)\left(\frac{1}{\sigma}\mathbf{I}_n\right)^T = \mathbf{I}_n. \tag{15}$$

Aus (13) bis (15) folgt dann

$$P_{\mathbf{W}} = \mathcal{N}_{\frac{1}{\sigma}\mathbf{Ha},\mathbf{I}_n}. \tag{16}$$

Aus (6) sowie der Definition der Folge $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ folgt

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}. \tag{17}$$

Aus (10), (17) sowie der Definition der Folge $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ folgt

$$\mathbf{W} = \begin{bmatrix} W_1 \\ \vdots \\ W_n \end{bmatrix}. \tag{18}$$

Wegen *(III)*, (9) und (17) bzw. *(III)*, (16) und (18) folgt mittels Teil *(a)* von Satz 6.4.7, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann Y_j bzw. W_j eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ für welche $P_{Y_j} = \mathcal{N}_{\mathbf{h}_j^T\mathbf{a},\sigma^2}$ bzw. $P_{W_j} = \mathcal{N}_{\frac{1}{\sigma}\mathbf{h}_j^T\mathbf{a},1}$ erfüllt ist. Da $\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_n$ bzw. $\mathbf{I}_n$ eine $n \times n$-Diagonalmatrix ist, folgt bei Beachtung von (9) und (17) bzw. von (16) und (18) mittels Teil *(c)* von 6.4.7, dass die Folge $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus ergibt sich mittels Satz 6.4.3, dass $(Y_2, \ldots, Y_n)^T$ sowie $(W_2, \ldots, W_n)^T$ jeweils eine $\left(\mathbb{R}^{n-1}, \mathfrak{B}_{n-1}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist und Y_1 und $(Y_2, \ldots, Y_n)^T$ bzw. W_1 und $(W_2, \ldots, W_n)^T$ jeweils stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Damit ist alles gezeigt. □

Lemma 7.3.3. *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und bezeichne $\mathbf{1}_n$ denjenigen Vektor des $\mathbb{R}^n$, der nur aus Einsen besteht. Dann gilt:*

(a) *Es gibt eine orthogonale Matrix $\mathbf{H} \in \mathbb{R}^{n\times m}$, deren erste Zeile gerade $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n^T$ ist.*

(b) *Sei $\mathbf{H}$ wie in* (a). *Weiter seien $\mathbf{x} \coloneqq (x_1,\ldots,x_n)^T \in \mathbb{R}^n$ und $\mathbf{y} \coloneqq \mathbf{H}\mathbf{x}$, wobei $\mathbf{y} = (y_1,\ldots,y_n)^T$. Dann gelten*

$$y_1 = \sqrt{n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k$$

sowie

$$\sum_{k=2}^{n} y_k^2 = \sum_{j=1}^{n}\left(x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k\right)^2.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n^T\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n = \frac{1}{n}\mathbf{1}_n^T\mathbf{1}_n = \frac{1}{n}\cdot n = 1. \tag{1}$$

Sei

$$\mathbf{u}_1 \coloneqq \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$|\mathbf{u}_1| = 1. \tag{3}$$

Wegen (3) gilt dann $\dim\left(\operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{u_1\}\right) = 1$. Hieraus folgt dann

$$\dim\left[\mathbb{R}^n \ominus \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{u}_1\}\right] = n-1.$$

Unter Beachtung der Tatsache, dass wegen $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ nun $n-1 \in \mathbb{N}$ erfüllt ist, bezeichne $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{2,n}}$ dann eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n \ominus \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\{\mathbf{u}_1\}$. Wegen (3) ist dann $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Orthonormalbasis von $\mathbb{R}^n$. Für

$$(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n} \tag{4}$$

gilt dann also

$$\mathbf{u}_j\mathbf{u}_k^T = \langle\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_k\rangle = \begin{cases}1, & \text{falls } j=k,\\ 0, & \text{falls } j\neq k.\end{cases} \tag{5}$$

Sei

$$\mathbf{H} \coloneqq \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6), (4) und (5) folgt dann

$$\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix}\mathbf{u}_1^T\\ \vdots\\ \mathbf{u}_n^T\end{bmatrix}[\mathbf{u}_1,\ldots,\mathbf{u}_n] = \left(\mathbf{u}_j^T\mathbf{u}_k\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} = \mathbf{I}_n. \tag{7}$$

Wegen (7) ist $\mathbf{H}$ dann orthogonal und wegen (2) ist $\frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n^T$ die erste Zeile von $\mathbf{H}$.

Zu *(b)*: Nach Wahl von $\mathbf{H}$ gilt

$$y_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\mathbf{1}_n^T\mathbf{x} = \frac{1}{\sqrt{n}}(1,\ldots,1)^T \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{j=1}^n x_k = \sqrt{n}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k. \tag{8}$$

Sei

$$\overline{x} \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$y_1 = \sqrt{n}\cdot\overline{x}. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (9), der aus (7) folgenden Identität $\mathbf{H}\mathbf{H}^T = \mathbf{I}_n$ sowie von (10) folgt nun

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^n \left[x_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n x_k\right]^2 &= \sum_{j=1}^n [x_j - \overline{x}]^2 = \sum_{j=1}^n \left[x_j^2 - 2x_j\overline{x} + \overline{x}^2\right] \\
&= \sum_{j=1}^n x_j^2 - 2\overline{x}\sum_{j=1}^n x_j + n\overline{x}^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} - 2n\overline{x}^2 + n\overline{x}^2 \\
&= \mathbf{x}^T\mathbf{x} - n\overline{x}^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{I}_n\mathbf{x} - n\overline{x}^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{H}^T\mathbf{H}\mathbf{x} - n\overline{x}^2 \\
&= (\mathbf{H}\mathbf{x})^T(\mathbf{H}\mathbf{x}) - n\overline{x}^2 = \mathbf{y}^T\mathbf{y} - y_1^2 = \sum_{j=1}^n y_j^2 - y_1^2 \\
&= \sum_{j=2}^n y_j^2.
\end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (9), (10) und (11) ist dann *(b)* bewiesen. □

Lemma 7.3.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, +\infty)$ sowie $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Beziehung $P_{X_j} = \mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ besteht. Dann gilt:*

(a) *Sei $\overline{X}_n \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$. Dann ist $\overline{X}_n$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\overline{X}_n} = \mathcal{N}_{a,\frac{\sigma^2}{n}}$.*

(b) *Sei $\mathbf{1}_n \coloneqq (1,\ldots,1)^T \in \mathbb{R}^n$ und sei $\mathbf{H}$ eine orthognale Matrix aus $\mathbb{R}^{n\times n}$, für welche, wenn sie gemäß*

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} \mathbf{h}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{h}_n^T \end{bmatrix}$$

als Blockmatrix über die Zeilen aufgefasst wird, gerade die Beziehung $\mathbf{h}_1 = \frac{1}{\sqrt{n}}\cdot\mathbf{1}_n$ besteht. Weiter sei $\mathbf{X} \coloneqq (X_1,\ldots,X_n)^T$ und für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ werde definiert $Y_j \coloneqq \mathbf{h}_j^T\mathbf{X}$ sowie $W_j \coloneqq \frac{1}{\sigma}Y_j$. Dann gilt:

(b1) *Es sind $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ sowie $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ jeweils Folgen bezüglich P stochastisch unabhängiger $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.*

(b2) *Es sind* $(Y_2, \ldots, Y_n)^T$ *und* $(W_2, \ldots, W_n)^T$ *jeweils* $\left(\mathbb{R}^{n-1}, \mathfrak{B}_{n-1}\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *sowie* Y_1 *und* $(Y_2, \ldots, Y_n)$ *bzw.* W_1 *und* $(W_2, \ldots, W_n)^T$ *jeweils stochastisch unabhängig bezüglich* P*.*

(b3) *Es gelten* $P_{Y_1} = \mathcal{N}_{\sqrt{n}a,\sigma^2}$ *und* $P_{W_1} = \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n}a}{\sigma},1}$ *sowie für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *weiterhin* $P_{Y_j} = \mathcal{N}_{0,\sigma^2}$ *und* $P_{W_j} = \mathcal{N}_{0,1}$*.*

(b4) *Es gilt* $Y_1 = \sqrt{n} \cdot \overline{X}_n$*.*

(b5) *Sei* $U_n \coloneqq \sum_{j=1}^n \left(X_j - \overline{X}_n\right)^2$*. Dann ist* U_n *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gelten* $U_n = \sum_{j=2}^n Y_j^2$ *sowie* $\frac{1}{\sigma^2} U_n = \sum_{j=2}^n W_j^2$*.*

(b6) *Sei* $V_1 \coloneqq W_1 - \frac{\sqrt{n} \cdot a}{\sigma}$*. Dann gilt*

(b6.1) *Es ist* V_1 *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gilt* $P_{V_1} = \mathcal{N}_{0,1}$*.*

(b6.2) *Für* $j \in \mathbb{N}_{2,n}$ *sei* $V_j \coloneqq W_j$*. Dann ist* $(V_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P*. Weiterhin sind* V_1 *und* $(W_2, \ldots, W_n)^T$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P*.*

(b7) *Unter Verwendung der Nichtnegativität von* U_n *sei* $S_n \coloneqq \sqrt{\frac{1}{n-1} U_n}$*. Dann ist* S_n *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$*.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(c)* von Satz 6.6.6.

Zu *(b1)* und *(b2)*: Dies folgt aus *(b)* von Lemma 7.3.2.

Zu *(b3)*: Sei

$$\mathbf{a}_n \coloneqq a \cdot \mathbf{1}_n. \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) folgt für

$$j \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{2}$$

mittels Teil *(b)* von Lemma 7.3.2 dann

$$P_{Y_j} = \mathcal{N}_{\mathbf{h}_j^T \mathbf{a}_n, \sigma^2} \tag{3}$$

und

$$P_{W_j} = \mathcal{N}_{\frac{1}{\sigma} \mathbf{h}_j^T \mathbf{a}_n, 1}. \tag{4}$$

Aus (1) und der Wahl von $\mathbf{h}_1$ folgt

$$\mathbf{h}_1^T \mathbf{a}_n = \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \mathbf{1}_n\right)^T \cdot (a \cdot \mathbf{1}_n) = \frac{a}{\sqrt{n}} \cdot n = \sqrt{n} \cdot a. \tag{5}$$

Aus (3) bzw. (4) und (5) folgt dann

$$P_{Y_1} = \mathcal{N}_{\sqrt{n} \cdot a, \sigma^2} \tag{6}$$

bzw.

$$P_{W_1} = \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n} \cdot a}{\sigma}, 1}. \tag{7}$$

Sei nun

$$j \in \mathbb{N}_{2,n}. \tag{8}$$

Wegen der Orthogonalität von $\mathbf{H}$ ist $(\mathbf{h}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ dann ein Orthonormalsystem in $(\mathbb{R}^n, \langle\cdot,\cdot\rangle)$. Hieraus folgt wegen (8) dann

$$\mathbf{h}_j^T \mathbf{h}_1 = \langle \mathbf{h}_j, \mathbf{h}_1 \rangle = 0. \tag{9}$$

Aus (1) und der Wahl von $\mathbf{h}_1$ folgt

$$\mathbf{a}_n = a \cdot \mathbf{1}_n = \sqrt{n} \cdot a \left(\frac{1}{\sqrt{n}} \cdot \mathbf{1}_n \right) = \sqrt{n} \cdot a \cdot \mathbf{h}_1. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) und (9) folgt dann

$$\mathbf{h}_j^T \mathbf{a}_n = \mathbf{h}_j^T \left(\sqrt{n} \cdot a \cdot \mathbf{h}_1 \right) = \sqrt{n} \cdot a \cdot \left(\mathbf{h}_j^T \cdot \mathbf{h}_1 \right) = \sqrt{n} \cdot \mathbf{a} \cdot 0 = 0. \tag{11}$$

Aus (8), (2), (3) und (11) bzw. (8), (2), (4) und (11) folgt dann

$$P_{Y_j} = \mathcal{N}_{0,\sigma^2} \tag{12}$$

bzw.

$$P_{W_j} = \mathcal{N}_{0,1}. \tag{13}$$

Wegen (6), (7), (8), (12) und (13) ist dann *(b3)* bewiesen.

Zu *(b4)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Lemma 7.3.3.

Zu *(b5)*: Wegen Teil *(b)* von Lemma 7.2.1 ist U_n eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen Teil *(b)* von Lemma 7.3.3 gilt

$$U_n = \sum_{j=2}^{n} Y_j^2. \tag{14}$$

Aus (14) und der Definition der Folge $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergibt sich

$$\frac{1}{\sigma^2} U_n = \frac{1}{\sigma^2} \sum_{j=2}^{n} Y_j^2 = \sum_{j=2}^{n} \left(\frac{1}{\sigma} Y_j \right)^2 = \sum_{j=2}^{n} W_j^2. \tag{15}$$

Wegen (14) und (15) ist dann *(b5)* bewiesen.

Zu *(b6.1)*: Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$V_1 = T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \circ W_1. \tag{16}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{1,-\frac{\sqrt{n}a}{\sigma}}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung. Hieraus folgt wegen (16) mittels Satz M.16.11 sowie zusätzlicher Beachtung von (7) dann

$$\begin{aligned} P_{V_1} &= V_1(P) = \left(T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \circ W_1 \right)(P) = T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \left[W_1(P) \right] = T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \left(P_{W_1} \right) \\ &= T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \left(\mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma},1} \right). \end{aligned} \tag{17}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.9.2 ist $T_{1,\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{1,\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}} \left(\mathcal{N}_{0,1} \right) = \mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma},1}. \tag{18}$$

Wegen Lemma M.24.4.3 ist $T_{1,\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\left(T_{1,\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}}\right)^{-1} = T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}}. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt

$$T_{1,-\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma}}\left(\mathcal{N}_{\frac{\sqrt{n}\cdot a}{\sigma},1}\right) = \mathcal{N}_{0,1}. \tag{20}$$

Aus (17) und (20) folgt dann $P_{V_1} = \mathcal{N}_{0,1}$.

Zu *(b6.2)*: Wegen *(b1)* ist die Folge $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P. Hieraus und aus der Konstruktion der Folge $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergibt sich mittels Teil *(b)* von Beispiel 6.2.2, dass auch $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stochastisch unabhängig bezüglich P ist. Hieraus folgt mit Satz 6.4.3, dass $(V_2,\ldots,V_n)^T$ eine $\left(\mathbb{R}^{n-1},\mathfrak{B}_{n-1}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ist und dass V_1 und $(V_2,\ldots,V_n)^T$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind. Hieraus und aus der Definition von $(V_j)_{j\in\mathbb{N}_{2,n}}$ folgt dann, dass V_1 und $(W_2,\ldots,W_n)^T$ stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

Zu *(b7)*: Sei $g\colon\mathbb{R}\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto \sqrt{\frac{1}{n-1}\,|u|}. \tag{21}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen und der Definition von U_n folgt dann

$$S_n = g\circ U_n. \tag{22}$$

Aus (21) folgt sogleich $g\in\mathscr{C}\left((\mathbb{R},|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.16.8 dann die $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von g. Kombiniert man dies mit (22) sowie der Tatsache, dass U_n nach *(b5)* eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ist, so liefert Satz 4.1.1, dass S_n eine $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ist. □

Es folgt nun das erste zentrale Resultat dieses Abschnitts. Dieses enthält neben der stochastischen Unabhängigkeit von empirischen Mitteln und empirischer Varianz bei normalverteilten Stichproben auch zwei für die Anwendung in der statistischen Testheorie wesentliche Verteilungsaussagen.

Satz 7.3.1. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $a\in\mathbb{R}$, $\sigma\in(0,+\infty)$ und $(X_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$, derart dass für $j\in\mathbb{N}_{1,n}$ gerade $P_{X_j}=\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ besteht. Es werde weiter definiert $\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n X_j$, $U_n := \sum_{j=1}^n\left(X_j-\overline{X}_n\right)^2$ sowie unter Beachtung der Nichtnegativität von U_n weiterhin $S_n := \sqrt{\frac{1}{n-1}U_n}$. Dann gilt:*

(a) *Es sind $\overline{X}_n$, U_n, S_n und S_n^2 jeweils $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$.*

(b) *Es sind $\overline{X}_n$ und U_n stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(c) *Es sind $\overline{X}_n$ und S_n^2 stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(d) *Es sind $\overline{X}_n$ und S_n stochastisch unabhängig bezüglich P.*

(e) *Es ist $P_{\overline{X}_n}=\mathcal{N}_{a,\frac{\sigma^2}{n}}$.*

(f) *Sei* $Z_n \coloneqq \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_n - a\right)$. *Dann ist* Z_n *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gilt*

$$P_{Z_n} = \mathcal{N}_{0,1}.$$

(g) *Es bezeichne* χ^2_{n-1} *die zentrale Chiquadrat-Verteilung mit* $n-1$ *Freitheitsgraden. Dann ist* $\frac{1}{\sigma^2}U_n$ *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gilt*

$$P_{\frac{1}{\sigma^2}U_n} = \chi^2_{n-1}.$$

(h) *Es gelten* $\{S_n = 0\} = \{U_n = 0\} = \left\{\frac{1}{\sigma^2}U_n = 0\right\}$ *sowie* $\{S_n = 0\} \in \mathcal{N}_P$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Lemma 7.2.1 sind $\overline{X}_n$ und U_n jeweils $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt wegen $S_n^2 = \frac{1}{n-1}U_n$ mittels Satz 4.1.3, dass S_n^2 ebenfalls eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist. Wegen Teil *(b7)* von Lemma 7.3.4 ist auch S_n eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Zu *(b)*: Es bezeichne $(Y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, die in Teil *(b)* von Lemma 7.3.4 eingeführte Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Wegen *(b3)* bzw. *(b5)* von Lemma 7.3.4 gilt dann

$$\overline{X}_n = \frac{1}{\sqrt{n}}Y_1 \tag{1}$$

bzw.

$$U_n = \sum_{j=2}^{n} Y_j^2. \tag{2}$$

Aus (1) folgt sogleich

$$\overline{X}_n = T_{\frac{1}{\sqrt{n}},0} \circ Y_1. \tag{3}$$

Sei $h\colon \mathbb{R}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$\mathbf{v} \longmapsto \mathbf{v}^T\mathbf{v}. \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann

$$U_n = h \circ \begin{bmatrix} Y_2 \\ \vdots \\ Y_n \end{bmatrix}. \tag{5}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 gilt:

(I) Es ist $T_{\frac{1}{\sqrt{n}},0}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung.

Aus (4) folgt sogleich $h \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^{n-1}, |\cdot|\right), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.16.8 dann:

(II) Es ist h eine $\mathfrak{B}_{n-1}$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung.

Aufgrund der Teile *(b1)* und *(b2)* von Lemma 7.3.4 folgt:

(III) Es ist Y_1 eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, $(Y_2, \ldots, Y_n)^T$ eine $\left(\mathbb{R}^{n-1}, \mathfrak{B}_{n-1}\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und es sind Y_1 sowie $(Y_2, \ldots, Y_n)^T$ stochastisch unabhängig bezüglich P.

Wegen (3), (5), *(I)*, *(II)* und *(III)* liefert Teil *(b)* von Satz 6.2.13, dass $\overline{X}_n$ und U_n stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

Zu *(c)*: Wegen $S_n^2 = \frac{1}{n-1}U_n$ und *(b)* ergibt Teil *(b)* von Beispiel 6.2.2, dass $\overline{X}_n$ und S_n^2 stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

Zu *(d)*: Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto \sqrt{|u|}. \tag{6}$$

Aus der Definition der beteiligten Größen ergibt sich

$$S_n = f \circ S_n^2. \tag{7}$$

Aus (6) folgt sogleich $f \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.16.8 dann die $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von f. Kombiniert man dies mit (7) und *(e)*, so erbringt Teil *(b)* von Satz 6.2.13 dann, dass $\overline{X}_n$ und S_n stochastisch unabhängig bezüglich P sind.

Zu *(e)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Lemma 7.3.4.

Zu *(f)*: Es bezeichne nun W_1 bzw. V_1 die in Teil *(b)* von Lemma 7.3.4 eingeführte $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Unter Beachtung der Definition der beteiligten Abbildungen sowie von (1) folgt dann

$$Z_n = \frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\overline{X}_n - a\right) = \frac{\sqrt{n}\overline{X}_n}{\sigma} - \frac{\sqrt{n}a}{\sigma} = \frac{V_1}{\sigma} - \frac{\sqrt{n}a}{\sigma} = W_1 - \frac{\sqrt{n}a}{\sigma} = V_1.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b6.1)* von Lemma 7.3.4, dass Z_n eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$P_{Z_n} = \mathcal{N}_{0,1}$$

ist.

Zu *(g)*: Es bezeichne $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ die im Teil *(b)* von Lemma 7.3.4 eingeführte Folge. Wegen Teil *(b1)* von Lemma 7.3.4 ist dann $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung 6.2.2 dann:

(IV) Es ist $(W_j)_{j\in\mathbb{N}_{2,n}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

Wegen *(b3)* von Lemma 7.3.4 gilt:

(V) Für $j \in \mathbb{N}_{2,n}$ gilt $P_{W_j} = \mathcal{N}_{0,1}$.

Wegen *(IV)* und *(V)* liefert Satz 6.6.5 dann, dass $\sum_{j=2}^n W_j^2$ eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit

$$P_{\sum_{j=2}^n W_j^2} = \chi^2_{n-1} \tag{8}$$

ist.

Zu *(h)*: Aus der Definition von S_n folgt sogleich

$$\{S_n = 0\} = \{U_n = 0\} = \left\{\frac{1}{\sigma^2}U_n^2 = 0\right\}. \tag{9}$$

Da $\frac{1}{\sigma^2}U_n^2$ nach *(g)* eine $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ist, gilt

$$\left\{\frac{1}{\sigma^2}U_n^2 = 0\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) und (8) ergibt sich

$$P\left(\left\{\frac{1}{\sigma^2}U_n^2 = 0\right\}\right) = P\left[\left(\frac{1}{\sigma^2}U_n^2\right)^{-1}(\{0\})\right] = P_{\frac{1}{\sigma^2}U_n^2}(\{0\}) = \chi_{n-1}^2(\{0\}). \tag{11}$$

Aus der Definition von χ_{n-1}^2 erkennt man sogleich, dass χ_{n-1}^2 eine $\lambda^{(1)}$-stetiges Maß ist. Hieraus folgt mittels Beispiel M.22.5.1, dass χ_{n-1}^2 ein stetiges Maß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist. Hieraus folgt dann

$$\{0\} \in \mathcal{N}_{\chi_{n-1}^2}. \tag{12}$$

Aus (9) und (10) folgt $\{S_n = 0\} \in \mathfrak{A}$, während sich unter Beachtung von (9), (11) und (12) weiterhin

$$P(\{S_n = 0\}) = P\left(\left\{\frac{1}{\sigma^2}U_n = 0\right\}\right) = \chi_{n-1}^2(\{0\}) = 0$$

ergibt. Somit ist

$$\{S_n = 0\} \in \mathcal{N}_P. \tag{13}$$

Wegen (9) und (13) ist dann *(h)* bewiesen. □

Da in den konkreten statistischen Anwendungen *nicht* mit den zwar objektiv vorhandenen, aber schlecht zugänglichen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, sondern vielmehr mit dem Stichprobenraum $\left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right)$ gearbeitet wird, nehmen wir eine entsprechende Übertragung der Aussage von Satz 7.3.1 vor.

Satz 7.3.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, +\infty)$ sowie $(\Omega, \mathfrak{A}, P) \coloneqq \left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right)$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $X_j \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$(u_1, \ldots, u_n)^T \longmapsto u_j.$$

Die Abbildung $\varphi_{1,n} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\varrho_{1,n} \colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$(u_1, \ldots, u_n)^T \longmapsto \frac{1}{n}\sum_{j=1}^n u_j$$

bzw.

$$(u_1, \ldots, u_n)^T \longmapsto \sum_{j=1}^n \left(u_j - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n u_k\right)^2.$$

Weiter sei $\psi_{1,n} \coloneqq \frac{1}{n-1}\varrho_{1,n}$. Dann gilt:

(a) *Mit den Bezeichnungen aus Satz 7.3.1 gelten $\overline{X}_n = \varphi_{1,n}$, $U_n = \varrho_{1,n}$ sowie $S_n = \sqrt{\psi_{1,n}}$.*

(b) *Es ist $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(X_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von bezüglich P stochastisch unabhängigen $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Beziehungen $P_{X_j} = \mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ besteht.*

(c) *Es gilt* $\{\varrho_{1,n}, \psi_{1,n}\} \subseteq \operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty))$ *und es sind* $\varphi_{1,n}$, $\varrho_{1,n}$, $\sqrt{\psi_{1,n}}$ *und* $\psi_{1,n}$ *jeweils* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$.

(d) *Es sind* $\varphi_{1,n}$ *und* $\varrho_{1,n}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P.

(e) *Es sind* $\varphi_{1,n}$ *und* $\psi_{1,n}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P.

(f) *Es sind* $\varphi_{1,n}$ *und* $\sqrt{\psi_{1,n}}$ *stochastisch unabhängig bezüglich* P.

(g) *Es ist* $P_{\varphi_{1,n}} = \mathcal{N}_{a, \frac{\sigma^2}{n}}$.

(h) *Sei* $Z_n := \frac{\sqrt{n}}{\sigma}(\varphi_{1,n} - a)$. *Dann ist* Z_n *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gilt* $P_{Z_n} = \mathcal{N}_{0,1}$.

(i) *Es bezeichne* χ^2_{n-1} *die zentrale Chiquadrat-Verteilung mit* $n-1$ *Freiheitsgraden. Dann ist* $\frac{1}{\sigma^2}\varrho_{1,n}$ *eine* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariable auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *und es gilt* $P_{\frac{1}{\sigma^2}\varrho_{1,n}} = \chi^2_{n-1}$.

(j) *Es gelten* $\{\psi_{1,n} = 0\} = \left\{\sqrt{\psi_{1,n}} = 0\right\} = \{\varrho_{1,n} = 0\}$ *sowie* $\{\psi_{1,n} = 0\} \in \mathcal{N}_P$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gilt

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Aufgrund der Identifizierung von $\times_{j=1}^n \mathbb{R}$ mit $\mathbb{R}^n$ sowie wegen Satz M.17.5 gilt

$$\left(\bigtimes_{j=1}^n \mathbb{R}, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_1, \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = \left(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n, \bigotimes_{j=1}^n \mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt *(b)* aus Satz 6.4.4.

Zu *(c)* bis *(j)*: Wegen *(a)* und *(b)* sind die Behauptungen von *(c)* bis *(j)* dann eine unmittelbare Konsequenz aus den Teilen *(a)* bis *(h)* von Satz 7.3.1. □

8. Lineare Modelle und Regressionsanalyse

8.1. Einleitung

Zur statistischen Analyse gegebener Beobachtungsdaten benötigt man ein Modell, das einerseits so komplex ist, dass es den vorliegenden Sachverhalt hinreichend genau wiedergibt, andererseits aber so einfach ist, dass es eine mathematische Behandlung gestattet.

Besonders einfache derartige Modelle, sind solche bei denen die Messdaten durch eine Folge $(\mathbf{X}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen mit vorausgesetzter Normalverteilung modelliert werden und bei denen zudem vorausgesetzt wird, dass der Erwartungswertvektor

$$\mathrm{E}_P\left(\begin{bmatrix}\mathbf{X}_1\\ \vdots\\ \mathbf{X}_n\end{bmatrix}\right)$$

in einem vorgegebenen linearen Teilraum von $\mathbb{R}^{n\cdot m}$ liegt. Solche Verteilungsannahmen sind analytisch leicht handhabbar und führen deshalb häufig zu explizit angebaren Verfahren, die wegen ihrer formalen Einfachheit in der praktischen Statistik – trotz der relativ engen Modellannahmen – eine große Rolle spielen.

Diese Modelle gestatten eine kanonische Verallgemeinerung, die im Verzicht auf die Normalverteilungsannahme besteht. Vielfach kommt es nämlich nur darauf an, dass die Erwartungswertvektoren und Kovarianzmatrizen Elemente geeigneter linearer Räume bzw. konvexe Kegel sind. Dann handelt es sich also um Modelle, bei denen nur Annahmen über gewisse Momente gemacht werden.

Wir studieren nun im vorliegenden Kapitel speziell jene Situation, in der eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ vorliegt, welche als quadratisch P-integrierbar vorausgesetzt wird und von der zusätzlich bekannt ist, dass deren Erwartungswertvektor $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ einem vorgegebenen linearen Teilraum U von $\mathbb{R}^m$ angehört sowie dass deren Kovarianzmatrix $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ in spezieller Weise strukturiert ist. Aus diesem Grund hat sich hierfür die Bezeichnung „Lineare Modelle" eingebürgert.

Bei zahlreichen Fragestellungen, die im Zusammenhang mit statistischen Analysen von Mess-, Beobachtungs- und Versuchsergebnissen stehen, ist es möglich von linearen Modellen auszugehen. Die wichtigsten Beispiele statistischer Analysen, denen lineare Modelle zugrundeliegen, sind die Regressionsanalyse, die Varianzanalyse und die Kovarianzanalyse. Die dabei auftretenden linearen Modelle erweisen sich als Spezialfälle eines allgemeineren linearen Modells der Mathematischen Statistik, welchem viel Aufmerksamkeit in der statistischen Literatur beigemessen wird. Das Studium dieses Modells bestimmt den Inhalt des vorliegenden Kapitels.

Das von uns nachfolgend diskutierte lineare Modell besitzt speziell die Eigenschaft, dass die zugehörige Kovarianzmatrix invariant gegenüber orthogonalen Transformationen des $\mathbb{R}^m$ ist. Wir werden folglich auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ geführt, deren Verteilung $P_{\mathbf{X}}$ ein schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist.

Das zentrale Problem dieses Kapitels besteht dann in der Schätzung unbekannter Parameter in einem derartigen linearen Modell. Diese Thematik ist eng mit der Methode der kleinsten Quadrate verknüpft, deren Ursprünge und Grundlagen bereits auf klassische Arbeiten von Carl

Friedrich Gauss aus dem Jahr 1809 und Andrei Andrejewitsch Markov aus dem Jahr 1900 zurückgehen.

8.2. Methode der kleinsten Quadrate im schwach sphärischen linearen Modell

Wir entwickeln in diesem Abschnitt eine Theorie erwartungstreuer linearer Schätzungen, welche hinreichend allgemein genug ist, um eine spezielle Klasse von linearen Modellen zu erfassen. Unser Zugang ist darauf gerichtet, das lineare Modell unter dem Vektorraumgesichtspunkt zu betrachten. Unter Ausnutzung des Vektorraumapparats wird dann die kleinste Quadrate-Schätzung für den Erwartungswertvektor gewonnen. Wir gehen in diesem Abschnitt von der Vorstellung aus, dass die Verteilungen der von uns betrachteten $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen Maße von zweiter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sind, über deren erste beiden Momente Zusatzinformationen eines gewissen Typs vorliegen. Unser Ziel besteht dann darin, Schätzungen dieser ersten beiden Momente zu bestimmen, welche gewissen Gütekriterien genügen. Um dies zu präzisieren, werden wir zunächst einige allgemeine Ausführungen über Schätzungen darlegen und daran anschließend eine auf unsere Zwecke zugeschnittene Einengung der in Betracht kommenden Schätzungen für den Erwartungswertvektor einer $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen vornehmen.

Definition 8.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Dann heißt die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen $f \circ \mathbf{X}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die durch f *erzeugte Schätzung* von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$.

(b) Sei $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $\mathbf{Y}$ eine *Schätzung* von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$, falls eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung $f\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ existiert, mit welcher die Beziehung $\mathbf{Y} = f \circ \mathbf{X}$ besteht.

(c) Sei $\mathbf{Y}$ eine Schätzung von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$. Dann heißt $\mathbf{Y}$ eine *erwartungstreue Schätzung* für $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$, falls $\mathbf{Y} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und $\mathrm{E}_P(\mathbf{Y}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ erfüllt sind.

Legen wir die Situation von Definition 8.2.1 zugrunde, so wird dann unser Anliegen darin bestehen eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung f so festzulegen, dass die Funktion $f \circ \mathbf{X}$ in irgendeinen noch zu bestimmenden Sinn die auf Ω konstante Funktion mit Wert $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ möglichst gut approximiert. Da es aber nicht sehr aussichtsreich erscheint eine derartige Optimierungsaufgabe in der Klasse aller $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbaren Funktionen erfolgreich zu bewältigen, werden wir zunächst eine geeignete Auswahl aus der Klasse aller Schätzungen von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ vornehmen.

Bemerkung 8.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann ist $\mathbf{AX}$ eine Schätzung von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$, nämlich die durch die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ erzeugte. ♣

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und zudem gilt $\mathbf{AX} = T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{m\times 1}} \circ \mathbf{X}$. □

Diese Bemerkung führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 8.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann heißt die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{AX}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, die durch $\mathbf{A}$ *erzeugte lineare Schätzung* von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$.

(b) Sei $\mathbf{Y}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $\mathbf{Y}$ eine *lineare Schätzung* von $\mathbf{X}$, falls es ein $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ gibt mit $\mathbf{Y} = \mathbf{AX}$.

Bemerkung 8.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ mit $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann gilt:

(a) Für die durch $\mathbf{A}$ erzeugte lineare Schätzung $\mathbf{AX}$ von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ gilt

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{AX}) = \mathbf{A} \cdot \mathrm{E}_P(\mathbf{X}).$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Die durch $\mathbf{A}$ erzeugte lineare Schätzung $\mathbf{AX}$ von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ ist erwartungstreu.

(ii) Es ist $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \mathbf{A} \cdot \mathrm{E}_P(\mathbf{X})$.

(c) $\mathbf{X}$ ist eine erwartungstreue Schätzung von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$, nämlich die durch $\mathbf{I}_m$ erzeugte. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Lemma 5.4.2.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)*.

Zu *(c)*: Dies gilt trivialerweise. □

Wir studieren in diesem Abschnitt $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen deren Verteilungen zur in Abschnitt M.26 eingeführten Klasse der schwach sphärischen Maße aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gehören. Hierzu prägen wir folgende Begriffsbildung:

Definition 8.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt $\mathbf{X}$ vom *schwach sphärischen Typ* bzw. *nichtdegenerierten schwach sphärischen Typ* bzw. *degenerierten schwach sphärischen Typ*, falls $P_{\mathbf{X}}$ ein schwach sphärisches- bzw. nichtdegeneriertes schwach sphärisches- bzw. degeneriertes schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist.

Satz 8.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathbf{X}$ vom schwach sphärischen Typ. Dann gilt $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.*

(b) *Sei $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Dann gilt:*

(b1) *Folgende Aussagen sind äquivlalent:*

(i) *Es ist $\mathbf{X}$ vom schwach sphärischen Typ.*

(ii) *Es gibt ein $\sigma \in [0, +\infty)$ mit $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_m$.*

(iii) *Für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ gilt $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{BX}, \mathbf{BX}) = \mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$.*

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iv) *Es ist $\mathbf{X}$ vom nicht degenerierten schwach sphärischen Typ.*

(v) *Es gibt ein $\sigma \in (0, +\infty)$ mit $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_m$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(vi) *Es ist* $\mathbf{X}$ *vom degenerierten schwach sphärischen Typ.*

(vii) *Es ist* $\mathbf{X}$ *degeneriert.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt wegen $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ aus Teil *(b)* von Folgerung 5.4.1.

***(i)*⇔*(ii)*:** Die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)* ist eine unmittelbare Konsequenz aus Definition 8.2.3 und Satz M.26.4.

***(i)*⇔*(iii)*:** Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ gelten nach Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{X}}). \tag{2}$$

Sei nun

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{3}$$

Wegen (3) und der Wahl von $\mathbf{X}$ gilt nach Lemma 5.4.2 dann

$$\mathbf{BX} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}. \tag{4}$$

Wegen (4) liefert Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$P_{\mathbf{BX}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{5}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{BX}, \mathbf{BX}) = \mathrm{cov}(P_{\mathbf{BX}}). \tag{6}$$

Wegen (3) gilt

$$\mathbf{BX} = T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} \circ \mathbf{X}. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (7) ergibt sich mittels Satz M.16.11 dann

$$P_{\mathbf{BX}} = \mathbf{BX}(P) = \left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} \circ \mathbf{X}\right)(P) = T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(P_{\mathbf{X}}). \tag{8}$$

Aus (5)-(8) folgen nun $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(P_{\mathbf{X}}) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{BX}, \mathbf{BX}) = \mathrm{Cov}\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(P_{\mathbf{X}})\right). \tag{9}$$

Unter Beachtung von (1), (2) und (9) erkennt man aus Definition 8.2.3 und Definition M.26.5 sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(iii)*.

Zu *(b2)*: Die Äquivalenz von *(iv)* und *(v)* ist eine unmittelbare Konsequenz aus Definition 8.2.3 und Teil *(a)* von Satz M.26.5.

Zu *(c)*: Dies folgt aus Definition 8.2.3 und Teil *(b)* von Satz M.26.5. □

Wir wenden uns im restlichen Teil dieses Abschnitts einer Situation zu, in der eine Teilklasse der schwach sphärischen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen im Zentrum der Aufmerksamkeit steht. Die Auswahl dieser Teilklasse erfolgt hierbei mit der Grundlage eines fest vorgegebenen linearen Teilraumes U von $\mathbb{R}^m$, welcher die Lokalisierung des Erwartungswertvektors beschreibt. Hierzu prägen wir zunächst die zentrale Begriffsbildung dieses Abschnitts.

Definition 8.2.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Unter dem zu U gehörigen *schwach sphärischen linearen Modell* bzw. *nichtdegenerierten schwach sphärischen linearen Modell* verstehen wir dann die Menge $\widetilde{\mathcal{W}}_{U,s}$ bzw. $\mathcal{W}_{U,s}$ aller schwach sphärischen bzw. nichtdegenerierten schwach sphärischen Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, für welche $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) \in U$ erfüllt ist.

Wir interpretieren nun die soeben eingeführten Objekte in der Sprache der Zufallsvariablen.

Bemerkung 8.2.3. Sei $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\widetilde{\mathcal{W}}_{U,s}$ das zu U gehörige schwach sphärische lineare Modell. Weiterhin seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \widetilde{\mathcal{W}}_{U,s}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{X}$ vom schwach sphärischen Typ.

(b) Es ist $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(c) Es ist $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in U$.

(d) Es gibt ein $\sigma \in [0, +\infty)$ mit $\mathrm{Cov}(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$.

(e) Die Komponenten von $\mathbf{X}$ sind paarweise unkorreliert bezüglich P. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus den Definitionen 8.2.3 und 8.2.4.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)* und Teil *(a)* von Satz 8.2.1.

Zu *(c)*: Nach Konstruktion gilt $P_{\mathbf{X}} \in \widetilde{\mathcal{W}}_{U,s}$. Hieraus folgt wegen Definition 8.2.4 dann

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

sowie

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) \in U. \tag{2}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in U$.

Zu *(d)*: Dies folgt wegen *(a)* und *(b)* aus Teil *(b1)* von Satz 8.2.1.

Zu *(e)*: Dies folgt wegen *(d)* aus Lemma 5.2.2. □

Bemerkung 8.2.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell. Weiterhin seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{X}$ vom nichtdegenerierten schach sphärischen Typ.

(b) Es ist $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$.

(c) Es gibt ein $\sigma \in (0, +\infty)$ mit $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_m$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus den Definitionen 8.2.3 und 8.2.4.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Bemerkung 8.2.3.

Zu *(c)*: Dies folgt wegen *(a)* und *(b)* aus Teil *(b1)* von Satz 8.2.1. □

Unsere Zielstellung lässt sich nun wie folgt präzisieren: Ausgangspunkt unser Betrachtungen ist ein nichtdegeniertes schwach sphärisches lineares Modell $\mathcal{W}_{U,s}$, welches mit einem festen $m \in \mathbb{N}$ un einem fixierten linearen Teilraum U von $\mathbb{R}^m$ assoziiert ist. Weiterhin möge ein Zufallsmechanismus vorliegen, der durch einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit zu $\mathcal{W}_{U,s}$ gehörigen Verteilung $P_{\mathbf{X}}$ beschrieben wird. In dieser Situation sind wir dann bestrebt, gewissen Gütekriterien genügende Schätzungen von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ und $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ anzugeben. Was die Schätzungen $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ angeht, wird dies wegen Teil *(c)* von Bemerkung 8.2.4 auf die Schätzung des Parameters σ hinauslaufen. Zunächst wenden wir uns aber der Schätzung von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ zu und bereiten zunächst die uns interessierende Klasse von Schätzungen vor. Vor dem Hintergrund von Teil *(b)* von Bemerkung 8.2.2 prägen wir die folgende Begriffsbildung.

Definition 8.2.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell. Weiter sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann heißt $\mathbf{A}$ *erwartungstreu* bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$, falls für alle $\mathbf{a} \in U$ die Beziehung $\mathbf{A}\mathbf{a} = \mathbf{a}$ besteht.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathbb{R}_U^{m \times m}$ die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times m}$.

Wir interpretieren nun das eben eingeführte Objekt in der Sprache der Zufallsvariablen.

Bemerkung 8.2.5. Sei $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell sowie $\mathbb{R}_U^{m \times m}$ die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times m}$. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m \times m}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_U^{m \times m}$.

(ii) Für jeden Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ und jede $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$ ist die von $\mathbf{A}$ erzeugte lineare Schätzung $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ erwartungstreu. ♣

Beweis. Die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)* folgt aus Definition 8.2.5 und Bemerkung 8.2.2. □

Wir studieren nun für ein nichtdegeneriertes schwach sphärisches lineares Modell $\mathcal{W}_{U,s}$ die Menge $\mathbb{R}_U^{m \times m}$ aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuer Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times m}$. Wir werden in Kürze erkennen, dass diese Menge stets nichtleer ist, da diejenige Matrix $\mathbf{P}_U \in \mathbb{R}^{m \times m}$, welche bezüglich der kanonischen Basis von $\mathbb{R}^m$ die Orthoprojektion auf U vermittelt, sich als ein Element von $\mathbb{R}_U^{m \times m}$ erweisen wird. Diese Matrix $\mathbf{P}_U$ wird sogar eine besondere Rolle innerhalb der Klasse $\mathbb{R}_U^{m \times m}$ spielen. Sie wird uns nämlich innerhalb der Menge der bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen linearen Schätzungen des Erwartungswertvektors, diejenige mit minimaler Kovarianzmatrix im Sinne der Löwner-Halbordnung liefern. Dies wird die Aussage des Gauss-Markov-Theorems sein, dessen Herleitung das Ziel unserer nachfolgenden Betrachtungen darstellt.

Wir stellen zunächst einige vorbereitende Aussagen über Orthoprojektionsmatrizen bereit.

Definition E.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann heißt $\mathbf{P}$ eine $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix, falls es einen linearen Teilraum U von $\mathbb{R}^m$ derart gibt, dass mit der Setzung

$$U^\perp := \{\mathbf{z} \in \mathbb{R}^m \,|\, \text{Für alle } \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m \colon \langle \mathbf{y}, \mathbf{z}\rangle = 0\}$$

für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ die Beziehungen $\mathbf{P}\mathbf{x} \in U$ und $(\mathbf{I}_m - \mathbf{P})\,\mathbf{x} \in U^\perp$ bestehen.

Lemma E.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix. Dann gibt es* genau *einen Teilraum U von $\mathbb{R}^m$ derart, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ die Beziehungen $\mathbf{P}\mathbf{x} \in U$ und $(\mathbf{I}_m - \mathbf{P})\,\mathbf{x} \in U^\perp$ bestehen, nämlich gerade $U = \mathcal{R}(\mathbf{P})$. Für alle $u \in U$ gilt dann nämlich $\mathbf{P}u = u$.*

Satz E.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{P} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathbf{P}$ eine $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix.*

(ii) *Es gelten $\mathbf{P}^T = \mathbf{P}$ und $\mathbf{P}^2 = \mathbf{P}$.*

(iii) *Es ist $\mathbf{I}_m - \mathbf{P}$ eine $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix.*

Satz E.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$, $s = \dim U$ sowie im Falle $s \in \mathbb{N}$ weiterhin $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine in $(\mathbb{R}^m, \langle .,. \rangle)$ orthonormierte Basis von U. Dann gibt es* genau *eine $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix $\mathbf{P}_U$ mit $\mathcal{R}(\mathbf{P}_U) = U$, nämlich*

$$\mathbf{P}_U = \begin{cases} \mathbf{O}_{m\times m}, & \text{falls } s = 0, \\ (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s) \cdot (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_s)^T, & \text{falls } s \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Definition E.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathbf{P}_U$ die nach Satz 2 existierende und eindeutig bestimmte $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix mit $\mathcal{R}(\mathbf{P}_U) = U$. Dann heißt $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U.

Satz E.3. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times n}$. Dann ist $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^n$ und es gilt*

$$\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{A})} = \mathbf{A}\mathbf{A}^+.$$

Satz E.4. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Dann gilt:*

(a) *Es ist $U^\perp$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$ und es ist $\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf $U^\perp$.*

(b) *Es gelten $\mathrm{tr}\mathbf{P}_U = \dim U$ sowie $\mathrm{tr}\,(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U) = m - \dim U$.*

Bemerkung 8.2.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell, $\mathbb{R}_U^{m\times m}$ die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ sowie $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{P}_U \in \mathbb{R}_U^{m\times m}$ (also insbesondere $\mathbb{R}_U^{m\times m} \neq \varnothing$).

(b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_U^{m\times m}$. Dann gilt $(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{P}_U = \mathbf{O}_{m\times m}$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Wahl von P_U gilt nach Satz E.2 dann

$$\mathcal{R}(\mathbf{P}_U) = U. \tag{1}$$

Sei

$$\mathbf{v} \in U. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Lemma E.1 dann

$$\mathbf{P}_U \mathbf{v} = \mathbf{v}. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) gilt dann $\mathbf{P}_U \in \mathbb{R}_U^{m \times m}$.

Zu *(b)*: Sei

$$\mathbf{v} \in U. \tag{4}$$

Wege (4) und der Wahl von $\mathbf{v}$ gilt dann

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \mathbf{v}. \tag{5}$$

Aus (2) bis (5) folgt nun

$$(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{v} = \mathbf{A}\mathbf{v} - \mathbf{P}_U\mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{v} = \mathbf{0}_{m \times 1}. \tag{6}$$

Sei nun

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Wegen (7) gibt es dann eindeutig bestimmte

$$\mathbf{x}_1 \in U \tag{8}$$

und

$$\mathbf{x}_2 \in U^\perp \tag{9}$$

mit

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2. \tag{10}$$

Aus (4), (6) und (8) folgt dann

$$(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}_{m \times 1}. \tag{11}$$

Wegen (8) bis (11) gilt

$$\mathbf{P}_U \mathbf{x} = \mathbf{x}_1. \tag{12}$$

Unter Beachtung von (12) und (11) folgt nun

$$(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{P}_U\mathbf{x} = (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{x}_1 = \mathbf{0}_{m \times 1}. \tag{13}$$

Aus (7) und (13) folgt dann

$$(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{P}_U = \mathbf{O}_{m \times m}. \qquad \square$$

Bemerkung 8.2.7. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}_{1,m}$. Weiter sei $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m \times k}$ so gewählt, dass $\operatorname{Rang} \mathbf{B} = k$ erfüllt ist. Dann ist $\mathcal{R}(\mathbf{B})$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$ und es gelten $\det\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0$ sowie $\mathbf{P}_{\mathcal{R}(\mathbf{B})} = \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T$. ♣

Wir kommen nun zum ersten zentralen Resultat dieses Abschnitts.

Satz 8.2.2 (Gauß-Markov-Theorem)**.** *Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell, $\mathbb{R}_U^{m\times m}$ die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ sowie $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_U^{m\times m}$. Weiterhin seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$. Dann gelten $\{\mathbf{AX}, \mathbf{P}_U\mathbf{X}\} \subseteq \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ und*

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{AX}, \mathbf{AX}) \geqq \mathrm{Cov}_P(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})$$

sowie $\left\{\left[|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|\right]^2, \left[|P_{\mathbf{X}} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|\right]^2\right\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und

$$\mathrm{E}_P\left(\left[|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|\right]^2\right) \geqq \mathrm{E}_P\left(|P_{\mathbf{X}} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right),$$

wobei Gleichheit jeweils genau für $\mathbf{A} = P_{\mathbf{U}}$ zutrifft.

Beweis. Nach der Wahl von $\mathbf{X}$ gibt es nach Teil *(c)* von Bemerkung 8.2.4 ein

$$\sigma \in (0, +\infty) \tag{1}$$

mit

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \mathbf{I}_m. \tag{2}$$

Wegen Satz E.1 gilt

$$(\mathbf{P}_U)^T = \mathbf{P}_U. \tag{3}$$

Wegen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_U^{m\times m}$ gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung 8.2.6 dann

$$(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{P}_U = \mathbf{O}_{m\times m}. \tag{4}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung 8.2.3 dann

$$\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}. \tag{5}$$

Wegen (5) liefert Satz 5.4.9 dann

$$\{\mathbf{AX}, \mathbf{P}_U\mathbf{X}\} \subseteq \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1} \tag{6}$$

sowie zusätzlicher Beachtung von (2), (3) und (4) weiterhin

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X}) &= (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,(\mathbf{P}_U)^T = (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\left[\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m\right](\mathbf{P}_U)^T \\ &= \sigma^2(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)(\mathbf{P}_U)^T = \sigma^2(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{P}_U = \sigma^2 \cdot \mathbf{O}_{m\times m} \\ &= \mathbf{O}_{m\times m}.\end{aligned} \tag{7}$$

Unter Beachtung von Teil *(d)* von Satz 5.4.2 und (7) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = \left[\mathrm{Cov}_P((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})\right]^T = \mathbf{O}_{m\times m}^T = \mathbf{O}_{m\times m}. \tag{8}$$

Wegen (6) bis (8) liefert Folgerung 5.4.2 dann

$$\begin{aligned}&\mathrm{Cov}_P(\mathbf{P}_U\mathbf{X} + (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X} + (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) \\ =\,&\mathrm{Cov}(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X}) + \mathrm{Cov}_P((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}).\end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen $\mathbf{P}_U\mathbf{X} + (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X} = \mathbf{A}\mathbf{X}$ dann

$$\mathrm{Cov}\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}\,(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X}) + \mathrm{Cov}_P\,((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X})\,. \tag{9}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz 5.4.3 gilt

$$\mathrm{Cov}_P\,((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}) \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann

$$\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) \geqq \mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})\,. \tag{11}$$

Wegen (9) und (10) sind nach Lemma M.23.9.12 dann folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})$.

(ii) Es ist $\mathrm{Cov}_P\,((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

(iii) Es ist $\mathrm{tr}\,[\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X})] = \mathrm{tr}\,[\mathrm{Cov}_{\mathbf{P}}\,(\mathbf{P_U}\mathbf{X}, \mathbf{P_U}\mathbf{X})]$.

Unter Beachtung von Satz 5.4.5 und (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathrm{Cov}_P\,((\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}, (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathbf{X}) &= (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{X}, \mathbf{X})\,(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)^T \\ &= (\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,\sigma^2\mathbf{I}_m\,(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)^T \\ &= \sigma^2\,(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)^T\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Wegen (1) und (12) ist *(ii)* äquivalent zu:

(iv) Es ist $(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)\,(\mathbf{A} - \mathbf{P}_U)^T = \mathbf{O}_{m\times m}$.

Wegen Teil *(c)* von Lemma M.23.9.11 ist *(iv)* äquivalent zu *(v)*:

(v) Es ist $\mathbf{A} = \mathbf{P}_U$.

Aus (11) folgt

$$\mathrm{tr}\,[\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X})] \geq \mathrm{tr}\,[\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})]\,. \tag{13}$$

Wegen (6) gelten nach Teil *(b)* von Satz 5.4.2 dann

$$[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X})]\,[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X})]^T \in \left[\mathscr{L}^1\,(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m} \tag{14}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{E}_P\left([\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X})]\,[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X})]^T\right). \tag{15}$$

Wegen $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{U,s}^{m\times m}$ liefert Bemerkung 8.2.5 nun

$$\mathrm{E}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{E}_P\,(\mathbf{X})\,. \tag{16}$$

Wegen (16) folgt aus (14) bzw. (15) dann

$$[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{X})]\,[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{X})]^T \in \left[\mathscr{L}^1\,(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times m} \tag{17}$$

bzw.

$$\mathrm{Cov}_P\,(\mathbf{A}\mathbf{X}, \mathbf{A}\mathbf{X}) = \mathrm{E}_P\left([\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{X})]\,[\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P\,(\mathbf{X})]^T\right). \tag{18}$$

Wegen (17) liefert Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4 nun

$$|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{19}$$

und

$$\mathrm{tr}\left[\mathrm{E}_{\mathbf{P}}\left([\mathbf{AX} - \mathrm{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{X})][\mathbf{AX} - \mathrm{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{X})]^{\mathbf{T}}\right)\right] = \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right). \tag{20}$$

Wegen (18) und (20) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{AX}, \mathbf{AX})\right] &= \mathrm{tr}\left[\mathrm{E}_{\mathbf{P}}\left([\mathbf{AX} - \mathrm{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{X})][\mathbf{AX} - \mathrm{E}_{\mathbf{P}}(\mathbf{X})]^{\mathbf{T}}\right)\right] \\ &= \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right).\end{aligned} \tag{21}$$

Wegen Teil *(a)* von Bemerkung 8.2.6 gilt

$$\mathbf{P}_U \in \mathbb{R}_U^{m\times m}. \tag{22}$$

Wegen (22) folgt aus (19) bzw. (21) dann

$$|\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{23}$$

sowie

$$\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P(\mathbf{P}_U\mathbf{X}, \mathbf{P}_U\mathbf{X})\right] = \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right). \tag{24}$$

Aus (13), (21) und (24) folgt nun

$$\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right) = \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right). \tag{25}$$

Wegen (21), (24) und der Äquivalenz von *(i)* und *(iii)* folgt dann, dass *(i)* äquivalent ist zu:

(vi) Es gilt $\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{AX} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right) = \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right)$.

Hieraus folgt zusammen mit oben Gezeigten, das Gleichheit in (11) bzw. (25) genau für $\mathbf{A} = \mathbf{P}_U$ erfüllt ist. Beachtet man dies sowie (6), (11), (19) und (25) so erkennt man, dass alles gezeigt ist. □

Satz 8.2.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition 8.2.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell, $\mathbb{R}_U^{m\times m}$ die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ sowie $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Weiterhin seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$. Dann heißt die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{P}_U\mathbf{X}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die *Kleinste-Quadrate-* oder *Gauß-Markov-Schätzung* von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$.

Seien $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$ Wegen Teil *(b)* von Bemerkung 8.2.3 ist dann $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$. Wegen Teil *(c)* von Bemerkung 8.2.3 gilt $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in U$. Mit der Kleinste-Quadrate-Schätzung $\mathbf{P}_U\mathbf{X}$ von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ haben wir bereits eine im gewissen Sinne optimale erwartungstreue Schätzung für $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ erhalten. Im nächsten Schritt gilt es nun, eine geeignete Schätzung für $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ zu bestimmen. Hierzu sei zunächst daran erinnert, dass wegen Teil *(c)* von Bemerkung 8.2.4 mit einem gewissen $\sigma \in (0, +\infty)$ die Beziehung $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$ besteht. Somit läuft die Schätzung von $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})$ also auf die Schätzung von σ hinaus. Wir kommen nun zum zweiten Hauptresultat dieses Abschnitts.

Satz 8.2.3. *Seien $\sigma \in (0,+\infty)$, $m \in \mathbb{N}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Es bezeichne $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Weiter sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es sei $\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ so beschaffen, dass $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in U$ und $\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$ erfüllt sind. Dann gilt:*

(a) *Es gelten $(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie $\mathrm{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = \mathbf{0}_{m\times 1}$.*

(b) *Es gelten $(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$ sowie*

$$\mathrm{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = \sigma^2 \cdot (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)$$

und

$$\mathrm{tr}\left[\mathrm{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})\right] = \sigma^2(m - \dim U).$$

(c) *Es gelten $|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ und*

$$\mathrm{E}_P\left(|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2\right) = \sigma^2(m - \dim U).$$

(d) *Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\dim U \in \mathbb{Z}_{0,m-1}$. Dann gelten*

$$\frac{1}{m - \dim U}|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{m - \dim U}|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2\right) = \sigma^2.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) \in U$ und der Wahl von $\mathbf{P}_U$ gilt nach Lemma E.1 dann

$$\mathbf{P}_U[\mathrm{E}_P(X)] = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}). \tag{1}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ gilt nach Teil *(a)* von Satz 5.4.2 dann

$$\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgen mittels Lemma *(b)* von Lemma 5.4.2 dann

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1} \tag{3}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (1) weiterhin

$$\mathrm{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) - \mathbf{P}_U[\mathrm{E}_P(\mathbf{X})] = \mathbf{0}_{m\times 1}. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) ist damit *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Aufgrund der Wahl von $\mathbf{X}$ gelten nach Satz 5.4.9 dann

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1} \tag{5}$$

und

$$\mathrm{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathrm{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^T. \tag{6}$$

Aufgrund der Wahl von $\mathbf{P}_U$ folgen aus Satz E.1 dann

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^T = \mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U \tag{7}$$

und

$$(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^2 = \mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U \tag{8}$$

sowie aus Teil *(b)* von Satz E.4 weiterhin

$$\operatorname{tr}(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U) = m - \dim U. \tag{9}$$

Unter Verwendung von (6), der Voraussetzung $\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$ sowie (7) und (8) folgt dann

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X})(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^T \\ =&(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\left[\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m\right](\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^T = \sigma^2 \cdot (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^T \\ =&\sigma^2 (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)^2 = \sigma^2 (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U). \end{aligned} \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) und (9) folgt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{tr}[\operatorname{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})] &= \operatorname{tr}\left[\sigma^2 (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\right] = \sigma^2 \cdot \operatorname{tr}(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U) \\ &= \sigma^2 (m - \dim U). \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (5), (10) und (11) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Wegen (5) gelten nach Teil *(b)* von Satz 5.4.2 dann

$$\begin{aligned} &[(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} - \operatorname{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})] \cdot \\ &[(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} - \operatorname{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times m} \end{aligned} \tag{12}$$

sowie

$$\begin{aligned} &\operatorname{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) \\ =&[(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} - \operatorname{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})][(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X} - \operatorname{E}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})]^T. \end{aligned} \tag{13}$$

Wegen *(a)* folgt aus (12) bzw. (13) dann

$$[(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}][(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}]^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m \times m} \tag{14}$$

bzw.

$$\operatorname{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}) = \operatorname{E}_P\left([(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}][(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}]^T\right). \tag{15}$$

Wegen (14) liefert Teil *(b)* von Lemma M.23.9.4 nun

$$|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{16}$$

und

$$\operatorname{tr}\left[\operatorname{E}_P\left([(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}][(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}]^T\right)\right] = \operatorname{E}_P\left[|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2\right]. \tag{17}$$

Unter Verwendung (17), (15) und (11) folgt dann

$$\begin{aligned} \operatorname{E}_P\left[|(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}|^2\right] &= \operatorname{tr}\left[\operatorname{E}_P\left([(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}][(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}]^T\right)\right] \\ &= \operatorname{tr}[\operatorname{Cov}_P((\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X}, (\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U)\mathbf{X})] \\ &= \sigma^2 (m - \dim U). \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen (16) und (18) ist dann *(c)* bewiesen.

Zu *(d)*: Dies folgt wegen *(c)* sogleich aus Satz 5.1.4. □

Satz 8.2.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition 8.2.7. Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$ mit $\dim U \in \mathbb{Z}_{0,m-1}$. Es bezeichne $\mathcal{W}_{U,s}$ das zu U gehörige nicht degenerierte schwach sphärische lineare Modell sowie $\mathbf{P}_U$ die Orthoprojektionsmatrix auf U. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit $P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}$. Dann heißt die $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariable

$$\frac{1}{m - \dim U} \left|\left(\mathbf{I}_m - \mathbf{P}_U\right) \mathbf{X}\right|^2$$

auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ die *Residualschätzung* des Parameters σ^2 in $\mathcal{W}_{U,s}$.

Beispiel 8.2.1. Das Gauß-Markov-Theorem erfasst insbesondere das folgende klassische lineare Regressionsmodell von vollem Rang: Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}_{1,m}$ und ein $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times k}$ mit $\mathrm{Rang}\mathbf{B} = k$. Weiter seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und es sei

$$\boldsymbol{\varepsilon} \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1} \tag{1}$$

so gewählt, dass

$$\mathrm{E}_P\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathbf{0}_{m\times 1} \tag{2}$$

gilt sowie mit einem gewissen

$$\sigma \in (0, +\infty) \tag{3}$$

dann

$$\mathrm{Cov}_P\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \sigma^2 \mathbf{I}_m \tag{4}$$

erfüllt ist. Außerdem sei $\mathbf{X}$ eine $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ von der bekannt ist, dass mit einem gewissen $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^k$ die Beziehung

$$\mathbf{X} = \mathbf{B}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon} \tag{5}$$

besteht. Hierbei wird $\boldsymbol{\varepsilon}$ als nicht beobachtbarer Fehlervektor gedeutet. Das Problem besteht nun darin, den unbekannten Modellparameter $\mathbf{b}$ „günstig" zu schätzen. Wir wollen nun diese Problematik auf das Gauß-Markov-Theorem zurückführen. Wegen (1) und (5) liefert Satz 5.4.9 dann

$$\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)\right]^{m\times 1} \tag{6}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (4) weiterhin

$$\mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{X}, \mathbf{X}\right) = \mathrm{Cov}_P\left(\mathbf{B}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}, \mathbf{B}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathrm{Cov}_P\left(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \sigma^2 \mathbf{I}_m. \tag{7}$$

Wegen (5) folgt mittels Teil *(a)* von Lemma 5.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von Bemerkung 5.1.3 dann

$$\begin{aligned} \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right) &= \mathrm{E}_P\left(\mathbf{B}\mathbf{b} + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{B}\mathbf{b} \cdot 1_\Omega + \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{B}\mathbf{b} \cdot 1_\Omega\right) + \mathrm{E}_P\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) \\ &= \mathbf{B}\mathbf{b} \cdot P\left(\Omega\right) + \mathbf{0}_{m\times 1} = \mathbf{B}\mathbf{b}. \end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (6) folgen mittels Teil *(d)* von Satz 5.4.3 dann

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{9}$$

bzw.

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(P_{\mathbf{X}}\right) = \mathrm{E}_P\left(\mathbf{X}\right) \tag{10}$$

und

$$\operatorname{cov}(P_{\mathbf{X}}) = \operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{X}). \tag{11}$$

Aus (10) und (8) bzw. (11) und (7) dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) = \mathbf{B}\mathbf{b} \tag{12}$$

bzw.

$$\operatorname{cov}(P_{\mathbf{X}}) = \sigma^2 \mathbf{I}_m. \tag{13}$$

Sei

$$U := \mathcal{R}(\mathbf{B}). \tag{14}$$

Wegen (14) liefert Bemerkung 8.2.7 dann, dass U ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist sowie unter zusätzlicher Beachtung von $\operatorname{Rang}\mathbf{B} = k$ weiterhin $\det \mathbf{B}^T\mathbf{B} \neq 0$ und für die $m \times m$-Orthoprojektionsmatrix $\mathbf{P}_U$ auf U zudem

$$\mathbf{P}_U = \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T. \tag{15}$$

Wegen (12) und (14) gilt

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(P_{\mathbf{X}}) \in U. \tag{16}$$

Wegen (9), (3) und (13) liefert Satz M.26.5, dass $P_{\mathbf{X}}$ ein nichtdegeneriertes schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist. Hieraus folgt in Verbindung mit (16) dann

$$P_{\mathbf{X}} \in \mathcal{W}_{U,s}. \tag{17}$$

Sei nun

$$\mathbf{A} \in \mathbb{R}_U^{m\times m}. \tag{18}$$

Wegen (17) und (18) gelten nach dem Gauß-Markov-Theorem (vgl. Satz 8.2.2) dann

$$\left\{|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2, |\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{19}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right) \geqq \mathrm{E}_P\left(|\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X})|^2\right). \tag{20}$$

Wegen (8) bzw. (15) und (8) gilt

$$\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{b} \tag{21}$$

bzw.

$$\mathbf{P}_U\mathbf{X} - \mathrm{E}_P(\mathbf{X}) = \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{B}\cdot\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} - \mathbf{b}\right]. \tag{22}$$

Wegen (21) und (22) folgt aus (19) bzw. (20) dann

$$\left\{|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{b}|^2, \left|\mathbf{B}\cdot\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} - \mathbf{b}\right]\right|^2\right\} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{23}$$

bzw.

$$\mathrm{E}_P\left(|\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{B}\mathbf{b}|^2\right) \geqq \mathrm{E}_P\left(\left|\mathbf{B}\cdot\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} - \mathbf{b}\right]\right|^2\right). \tag{24}$$

Wegen (17)-(22) liefert das Gauß-Markov-Theorem (vgl. Satz 8.2.2), dass Gleichheit in (24) genau für $\mathbf{A} = \mathbf{P}_U$, also wegen (15), genau für

$$\mathbf{A} = \mathbf{B}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T$$

erfüllt ist. Wegen (8) gilt $\mathbf{B}^T \operatorname{E}_P(\mathbf{X}) = \mathbf{B}^T(\mathbf{B}\mathbf{b}) = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)\mathbf{b}$. Hieraus folgt wegen $\det\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right) \neq 0$ dann

$$\mathbf{b} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T \operatorname{E}_P(\mathbf{X}). \tag{25}$$

Wegen (25) ist der Modellparameter $\mathbf{b}$ also eindeutig durch die Matrix $\mathbf{B}$ und dem Vektor $\operatorname{E}_P(\mathbf{X})$ bestimmt. Aus (25) wird nun auch deutlich, in welcher Weise eine Schätzung des Parameters $\mathbf{b}$ vorgenommen werden könnte, nämlich in dem man in den Ausdruck auf der rechten Seite für $\operatorname{E}_P(\mathbf{X})$ gerade die Kleinste-Quadrate-Schätzung $\mathbf{P}_U\mathbf{X}$ von $\operatorname{E}_P(\mathbf{X})$ einsetzt. Diese Vorgehensweise liefert bei Beachtung, der aus (15) folgenden Beziehung

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{P}_U\mathbf{X} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\left[\mathbf{B}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\right]\mathbf{X} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$$

dann die Schätzung $\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$ von $\mathbf{b}$, welche als auch als *Kleinste-Quadrate-* oder *Gauß-Markov-Schätzung* von $\mathbf{b}$ bezeichnet wird. Unter Beachtung von Teil *(b)* von Lemma 5.4.2 und (8) ergibt sich

$$\operatorname{E}_P\left(\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}\right) = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\operatorname{E}_P(\mathbf{X}) = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{b} = \mathbf{b},$$

das heißt die Schätzung $\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$ ist eine erwartungstreue Schätzung von $\mathbf{b}$. Wegen (6) ergibt sich mittels Folgerung 5.4.2 weiterhin

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X} \in \left[\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})\right]^{m\times 1}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (7) weiterhin

$$\begin{aligned}
\operatorname{Cov}_P\left(\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}, \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}\right) &= \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X},\mathbf{X})\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\right]^T \\
&= \left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\cdot\sigma^2\mathbf{I}_m\mathbf{B}\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\right]^T \\
&= \sigma^2\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{B}\left[\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^T\right]^{-1} \\
&= \sigma^2\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}.
\end{aligned}$$

Wir wenden uns nun der Interpretation des klassischen linearen Regressionsmodells zu. Dieses erfasst ein Phänomen, welches durch eine lineare Funktion beschrieben wird, die aber durch eine stochastische Störung überlagert wird. Die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ beschreibt dann den Vektor der gemessenen Werte. Die Komponenten $X_1, \ldots, X_m$ von $\mathbf{X}$ entsprechen dann also m verschiedenen Messungen der zugrundeliegenden linearen Funktion. Die Formel (7) bringt dann zum Ausdruck, dass keine gegenseitige Beeinflussung zwischen den Messungen stattfinden soll. Die $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\boldsymbol{\varepsilon}$ auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ beschreibt dann die zugrundeliegende stochastische Störung. Sind hierbei jetzt $\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_m$ die Komponenten von $\boldsymbol{\varepsilon}$, so beschreibt für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ also ε_j dann die bei der Messung von X_j auftretende Störung. Die Bedingung (2) besagt dann, dass bei den einzelnen Messungen keine systematischen Fehler auftreten sollen. Die konkrete Gestalt, der zugrunde liegenden linearen Funktion, wird dann durch den $\mathbb{R}^k$-Vektor $\mathbf{b}$ beschrieben. Hierbei handelt es sich nämlich konkret um die Funktion

$$f_{\mathbf{b}}\colon \mathbb{R}^k \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche gemäß

$$\mathbf{u} \longmapsto \mathbf{u}^T\mathbf{b}$$

erklärt ist. Die Zeilen der $m \times k$-Matrix $\mathbf{B}$ liefern dann genau jene Stellen, an denen die Funktionswerte der Funktion $f_{\mathbf{b}}$ bestimmt werden. Schreiben wir $\mathbf{B}$ als Blockmatrix über die Zeilen gemäß

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix},$$

so gilt nämlich

$$\mathbf{B}\mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T \end{bmatrix} \mathbf{b} = \begin{bmatrix} \mathbf{b}_1^T\mathbf{b} \\ \vdots \\ \mathbf{b}_m^T\mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}_1) \\ \vdots \\ f_{\mathbf{b}}(\mathbf{b}_m) \end{bmatrix}.$$

Die Matrix $\mathbf{B}$ der „Messstellen" ist als vorgegeben anzusehen. Die oben angesprochene Problem der Wiederentdeckung der Funktion $f_{\mathbf{b}}$ aus den Messdaten, läuft dann also auf eine Schätzung des Parameters $\mathbf{b}$ hinaus. Hierfür haben wir auf der Grundlage des Gauß-Markov-Theorems die Kleinste-Quadrate-Schätzung $\left(\mathbf{B}^T\mathbf{B}\right)^{-1}\mathbf{B}^T\mathbf{X}$ von $\mathbf{b}$ bereitgestellt. Abschließend sei erwähnt, dass die Vorgabe einer Matrix

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} 1 & \alpha_1 \\ \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_m \end{bmatrix}$$

auf die Wiederentdeckung eines Polynoms ersten Grades hinausläuft.

9. Die Gesetze der großen Zahlen

9.1. Einleitung

Zur Motivation der Axiome, die man bei der Einführung des Wahrscheinlichkeitsbegriffs aufstellt, greift man in der Regel auf entsprechende Gesetzmäßigkeiten relativer Häufigkeiten zurück und dies unter gleichseitigem Hinweis auf die Erfahrungstatsache, dass sich die relative Häufigkeit $H(A_0)/n$ des eintretens eines Ereignisses A_0 bei einer „großen" Anzahl n von ohne gegenseitiger Beeinflussung ablaufenden Wiederholungen eines Zufallsexperiments „mit großer Wahrscheinlichkeit" um einen bestimmten Wert p_0 stabilisiert.

Die Gesetze der großen Zahlen erlauben es dann die gerade in Anführungszeichen gesetzten Begriffe zu präzisieren und gleichzeitig Verfahren der Mathematischen Statistik wahrscheinlichkeitstheoretisch zu begründen und zu rechtfertigen.

Diese Bemerkungen weisen schon auf die große praktische Bedeutung des Problemkreises dieses Kapitels hin. Will man nämlich die unbekannte Wahrscheinlichkeit eines zufälligen Ereignisses oder den unbekannten Erwartungswert einer $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen schätzen, so muss man nachweisen können, dass die relative Häufigkeit bzw. der Mittelwert der Stichprobe in irgendeinem Sinn gegen die entsprechende Wahrscheinlichkeit bzw. den Erwartungswert konvergiert. Diese statistische Anwendung der Gesetze der großen Zahlen wirft weitere Fragen auf:

1) Die Frage nach der Geschwindigkeit der Konvergenz der relativen Häufigkeit bzw. des Stichprobenmittelwerts.

2) Die des Verhaltens des Stichprobenmittelwerts, in dem Fall, dass die Stichprobenvariablen *nicht notwendig* stochastisch unabhängig und identisch verteilte Zufallsvariablen sind.

Die genaue Abgrenzung des Bereichs, den die Gesetze de großen Zahlen umfassen, scheint sehr schwierig zu sein. Wir werden uns darauf verständigen, dass wenn $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ den zugrundeliegenden Wahrscheinlichkeitsraum bezeichnet, jedes Gesetz der großen Zahlen dann die Konvergenz der zentrierten Mittelwertfolge

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

einer Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ in einem festgelegtem Sinn beinhalten wird. Hierbei werden wir uns vornehmlich auf die stark P-stochastische Konvergenz sowie auf die P-fast überall Konvergenz auf Ω konzentrieren. Man könnte jedoch bei völlig unvoreingenommener Herangehensweise zunächst darauf hoffen, dass es vielleicht sogar relevant wäre, die punktweise Konvergenz der Folge $\left(1/n \sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ zu untersuchen. Die Betrachtung von konkreten Beispielen zeigt jedoch, dass diese Erwartungshaltung nicht realistisch ist, da die punktweise Konvergenz auf Ω im Allgemeinen *nicht* vorliegt.

9.2. Definitionen und Zusammenhänge

Das Ziel des vorliegenden Abschnitts besteht darin, zwei Versionen von Gesetzen der großen Zahlen einzuführen und dann anschließend Wechselbeziehungen und Zusammenhänge zu untersuchen. Wir prägen zunächst die zentralen Begriffsbildungen dieses Kapitels:

Definition 9.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann heißt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem *schwachen-* bzw. *starken Gesetz der großen Zahlen* genügend, falls die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

stark P-stochastisch bzw. P-fast überall auf Ω gegen die Nullfunktion auf Ω konvergiert.

Das nachfolgende Resultat rechtfertigt die in Definition 9.2.1 eingeführte Terminologie:

Satz 9.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, welche dem starken Gesetz der großen Zahlen genügt. Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

Beweis. Dies folgt aus Definition 9.2.1 und Folgerung M.27.4.1. □

Bemerkung 9.2.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

(ii) Es konvergiert $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$ P-stochastisch gegen die Nullfunktion. ♣

Beweis. Aufgrund der Endlichkeit von P ergibt sich die Äquivalenz aus Definition 9.2.1 und Satz M.27.4.1. □

Unter Heranziehung eines grundlegenden Zusammenhangs zwischen der stark P-stochastischen Konvergenz und der Konvergenz im r-ten P-Mittel erhalten wir sogleich das nachfolgend formulierte hinreichende Kriterium für das Vorliegen des schwachen Gesetzes der großen Zahlen:

Satz 9.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$ für welche ein $r > 0$ mit*

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega}\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right|^r \mathrm{d}P = 0$$

existiert. Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. Dies folgt sogleich aus Definition 9.2.1 und Satz M.27.4.7. □

Wir verdeutlichen nun den linearen Charakter jener Phänomene, welche durch das schwache bzw. starke Gesetz der großen Zahlen erfasst werden.

Satz 9.2.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin seien $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Es mögen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügen. Dann genügt auch $(\alpha X_n + \beta Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(b) *Es mögen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem starken Gesetz der großen Zahlen genügen. Dann genügt auch $(\alpha X_n + \beta Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen.*

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Unter den Voraussetzungen von *(a)* oder *(b)* gilt dann

$$\{X_n, Y_n\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Satz 5.1.4 dann

$$\alpha X_n + \beta Y_n \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{3}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P(\alpha X_n + \beta Y_n) = \alpha \mathrm{E}_P(X_n) + \beta \mathrm{E}_P(Y_n). \tag{4}$$

Aus (1) und (4) folgt dann

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha X_k + \beta Y_k) - \mathrm{E}_P(\alpha X_k + \beta Y_k)\right] \\
=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha X_k + \beta Y_k) - (\alpha \mathrm{E}_P(X_k) + \beta \mathrm{E}_P(Y_k))\right] \\
=&\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[\alpha(X_k - \mathrm{E}_P(X_k)) + \beta(Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k))\right] \\
=&\alpha\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}_P(X_k))\right] + \beta\left[\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k))\right].
\end{aligned} \tag{5}$$

Zu *(a)*: Nach Voraussetzung konvergieren die Folgen $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}_P(X_k))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils stark P-stochastisch gegen die Nullfunktion $1_\varnothing$ auf Ω. Wegen $\alpha \cdot 1_\varnothing + \beta \cdot 1_\varnothing = 1_\varnothing$ sowie (1) und (5) ergibt sich mittels Satz M.27.4.3 dann, dass die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha X_k + \beta Y_k) - \mathrm{E}_P(\alpha X_k + \beta Y_k)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

P-stochastisch gegen $1_\varnothing$ konvergiert. Somit genügt $(\alpha X_n + \beta Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Zu *(b)*: Nach Voraussetzung konvergieren die Folgen $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(X_k - \mathrm{E}_P(X_k))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ als auch $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(Y_k - \mathrm{E}_P(Y_k))\right)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils P-fast überall gegen die Nullfunktion $1_\varnothing$ auf Ω. Wegen $\alpha \cdot 1_\varnothing + \beta \cdot 1_\varnothing = 1_\varnothing$ sowie (1) und (5) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.27.1.4 dann, dass die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[(\alpha X_k + \beta Y_k) - \mathrm{E}_P(\alpha X_k + \beta Y_k)\right]\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

P-fast überall auf Ω gegen $1_{\varnothing}$ konvergiert. Somit genügt $(\alpha X_n + \beta Y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem starken Gesetz der großen Zahlen. □

Die nachstehende Folgerung ermöglicht in vielen Fällen eine beträchtliche Vereinfachung des Nachweises von hinreichenden Kriterien für das Erfülltsein von Gesetzen der großen Zahlen. Diese Vereinfachung besteht darin, dass zunächst die Beweisführung für den Fall nichtnegativer $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen vorgenommen wird und hieran anschließend der allgemeine Fall durch Zerlegung in Positiv- und Negativteil aus dem schon Bewiesenen erschlossen wird.

Folgerung 9.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es genügen $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(ii) *Es genügen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es genügen $(X_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(X_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem starken Gesetz der großen Zahlen.*

(iv) *Es genügen $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(|X_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ jeweils dem starken Gesetz der großen Zahlen.*

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann gelten

$$X_n = X_n^+ - X_n^-, \tag{2}$$

$$|X_n| = X_n^+ + X_n^-, \tag{3}$$

$$X_n^+ = \frac{1}{2}\left[|X_n| + X_n\right] \tag{4}$$

sowie

$$X_n^- = \frac{1}{2}\left[|X_n| - X_n\right]. \tag{5}$$

Wegen (1) bis (5) ergeben sich die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* sogleich aus Teil *(a)* bzw. Teil *(b)* von Satz 9.2.3. □

Wir geben nun für den Fall, dass die betrachtete P-integrierbare Folge von $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen einen konstanten Erwartungswert besitzt, nützliche Charakterisierungen für das Erfülltsein des schwachen- bzw. starken Gesetzes der großen Zahlen besitzt.

Lemma 9.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mathrm{E}_P(X_n) = \mathrm{E}_P(X_1)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(ii) *Es konvergiert $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stark P-stochastisch gegen die auf Ω konstante Funktion mit Wert $\mathrm{E}_P(X_1)$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es genügt* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dem starken Gesetz der großen Zahlen.*

(iv) *Es konvergiert* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *P-fast überall gegen die auf* Ω *konstante Funktion mit Wert* $\mathrm{E}_P(X_1)$.

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P(X_k)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P(X_1)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P(X_1). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erkennt man sogleich die Behauptung von *(a)* und *(b)*. □

Lemma 9.2.2. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von P-integrierbaren* $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$*-Zufallsvariablen auf* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *derart, dass für* $n \in \mathbb{N}$ *gilt* $P_{X_n} = P_{X_1}$. *Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es genügt* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(ii) *Es konvergiert* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *stark P-stochastisch gegen die auf* Ω *konstante Funktion mit Wert* $\mathrm{E}_P(X_1)$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es genügt* $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *dem starken Gesetz der großen Zahlen.*

(iv) *Es konvergiert* $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *P-fast überall gegen die auf* Ω *konstante Funktion mit Wert* $\mathrm{E}_P(X_1)$.

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Unter Beachtung von $P_{X_n} = P_{X_1}$ sowie zweimaliger Verwendung von Teil *(c)* von Satz 5.1.1 folgt

$$\mathrm{E}_P(X_n) = M_1(P_{X_n}) = M_1(P_{X_1}) = \mathrm{E}_P(X_1). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* sogleich aus Teil *(a)* bzw. *(b)* von Lemma 9.2.1. □

9.3. Das schwache Gesetz der großen Zahlen

Wir studieren in diesem Abschnitt Situationen, welche auf das schwache Gesetz der großen Zahlen führen. Das nachfolgende Beispiel einer Bernouillischen Versuchsfolge stellt einen Meilenstein hinsichtlich der Entdeckung von Gesetzen der großen Zahlen dar. Es geht auf Jakob Bernoulli [1] zurück und wurde postum 1715 veröffentlicht.

[1] Jakob Bernoulli (∗06.01.1655; †16.08.1705) war ein schweizer Mathematiker und Physiker, welcher wesentlich zur Entwicklung der Wahrscheinlichkeitstheorie und der Variationsrechnung beitrug.

Beispiel 9.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $p \in [0,1]$ und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich P stochastisch unabhängige Folge von $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $n \in \mathbb{N}$ gilt

$$P_{X_n} = \beta_{1,p}.$$

Dann gilt:

(a) Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0, +\infty)$. Dann gelten $P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - p\right| \geq \alpha\right\}\right) \in \mathfrak{A}$ und

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_k - p\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{p\,(1-p)}{n\alpha^2}.$$

(b) Die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ genügt dem schwachen Gesetz der großen Zahlen und überdies konvergiert die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ stark P-stochastisch gegen die auf Ω konstante Funktion mit Wert p.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* bzw. *(b)* bzw. *(c)* von Satz M.23.6.1 gilt

$$\mathcal{M}_1\left(\beta_{1,p}\right) \in [0, +\infty) \tag{1}$$

bzw.

$$M_1\left(\beta_{1,p}\right) = 1 \cdot p = p \tag{2}$$

bzw.

$$\operatorname{var}\left(\beta_{1,p}\right) = 1 \cdot p\,(1-p) = p\,(1-p)\,. \tag{3}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wegen (4) und der Voraussetzung gilt

$$P_{X_k} = \beta_{1,p}. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) liefert Teil *(b)* von Satz 5.1.1 dann

$$X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right). \tag{6}$$

Wegen (4) und (6) folgt mittels Teil *(c)* von Satz 5.1.1 und zusätzlicher Beachtung von (5) und (2) dann

$$\mathrm{E}_P\left(X_k\right) = M_1\left(P_{X_k}\right) = M_1\left(\beta_{1,p}\right) = p \tag{7}$$

sowie mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.2 und zusätzlicher Beachtung von (5) und (3) weiterhin

$$\operatorname{Var}_P\left(X_k\right) = \operatorname{var}\left(P_{X_k}\right) = \operatorname{var}\left(\beta_{1,p}\right) = p\,(1-p)\,. \tag{8}$$

Sei

$$S_n := \sum_{k=1}^n X_k. \tag{9}$$

Wegen (4), (6) und (9) folgt mittels Satz 5.1.4 dann

$$\frac{1}{n} S_n \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right) \tag{10}$$

sowie bei zusätzlicher Beachtung von (7) weiterhin

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}_P\left(X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p = p. \tag{11}$$

Wegen (10) ergibt sich mittels Satz 5.2.4 dann

$$\mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(S_n\right). \tag{12}$$

Da die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}}$ laut Voraussetzung stochastisch unabhängig bezüglich P ist, gilt dies wegen Teil *(b)* von Bemerkung 6.2.2 auch für die Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Hieraus sowie aus (4) und (6) ergibt sich mittels Satz 6.5.5 sowie zusätzlicher Beachtung von (8) dann

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\mathrm{Var}\left(X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} p\left(1-p\right) = np\left(1-p\right). \tag{13}$$

Unter Verwendung von (12), (9) und (13) folgt nun

$$\mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(S_n\right) = \frac{1}{n^2}np\left(1-p\right) = \frac{p\left(1-p\right)}{n}. \tag{14}$$

Wegen (10) liefert die Ungleichung von Čebyšëv dann

$$\left\{\left|\frac{1}{n}S_n - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right)\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A} \tag{15}$$

und

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}S_n - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right)}{\alpha^2}. \tag{16}$$

Wegen (9) und (11) gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p = \frac{1}{n}S_n - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}S_n\right). \tag{17}$$

Wegen (17) folgt aus (15) bzw. (16) und (14) dann

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A} \tag{18}$$

bzw.

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - p\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{p\left(1-p\right)}{n\alpha^2}. \tag{19}$$

Wegen (18) und (19) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Seien

$$\alpha \in (0, +\infty) \tag{20}$$

und

$$n \in \mathbb{N}. \tag{21}$$

Unter Beachtung von (21), (4) und (7) folgt dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - p\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k - p. \tag{22}$$

Wegen (22) folgt aus (18) bzw. (19) dan

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right)\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A}$$

bzw.

$$0 \leq P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{p\left(1-p\right)}{n\alpha^2}. \tag{23}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{p\left(1-p\right)}{n\alpha^2} = \frac{p\left(1-p\right)}{\alpha^2}\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty}P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) = 0. \tag{25}$$

Wegen (20) und (25) konvergiert

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left(X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

dann stark P-stochastisch gegen die Nullfunktion auf Ω. Somit genügt die Folge $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen. Hieraus folgt bei Beachtung der wegen (4) und (7) für $n \in \mathbb{N}$ gültigen Beziehung $\mathrm{E}_P\left(X_n\right) = p$ mittels Teil *(a)* von Lemma 9.2.1 dann, dass die Folge

$$\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

stark P-stochastisch gegen die auf Ω konstante Funktion mit Wert p konvergiert. □

Analysiert man die Überlegungen von Beispiel 9.3.1 und befreit man diese von einigen speziellen Annahmen, so gelangt man zu einem viel allgemeineren Resultat, welches auf A. A. Markov zurückgeht. Dieses basiert auf der nachfolgend bereitsgestellten Ungleichung.

Lemma 9.3.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $n \in \mathbb{N}$ und $\left(X_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$. Weiter sei $\alpha \in (0, +\infty)$. Dann gelten*

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A}$$

sowie

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n}X_k\right).$$

BEWEIS. Aufgrund der Wahl der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ergibt sich mittels Satz 5.1.4 dann

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right) \tag{1}$$

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(X_k\right). \tag{2}$$

Wegen (1) ergeben sich mittels der Ungleichung von ČEBYŠEV (vergleiche Satz 5.2.6) dann

$$\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

sowie

$$P\left(\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)\right| \geq \alpha\right\}\right) \leq \frac{1}{\alpha^2}\,\mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right). \tag{4}$$

Aufgrund der Wahl der Folge $(X_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ mittels Satz 5.1.4 weiterhin

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right). \tag{5}$$

Wegen (5) ergibt sich mittels Satz 5.2.4 dann erneut (1) sowie

$$\mathrm{Var}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right). \tag{6}$$

Wegen (2) gilt

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right] = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\mathrm{E}_P\left(X_k\right) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k - \mathrm{E}_P\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right). \tag{7}$$

Wegen (7) folgt aus (3) dann $\left\{\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right| \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A}$ sowie aus (4) und (6) weiterhin

$$P\left(\left|\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right)\right]\right| \geq \alpha\right) \leq \frac{1}{\alpha^2}\cdot\frac{1}{n^2}\cdot\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right). \qquad \square$$

Satz 9.3.1 (von MARKOV)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0.$$

Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. Sei

$$\alpha \in (0, +\infty)\,. \tag{1}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen Lemma 9.3.1 gelten dann

$$\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right) \right] \right| \geq \alpha \right\} \in \mathfrak{A}$$

und

$$0 \leq P\left(\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right) \right] \right| \geq \alpha \right\} \right) \leq \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right). \tag{3}$$

Aus der Voraussetzung folgt sogleich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\alpha^2} \cdot \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \cdot \mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k \right) = \frac{1}{\alpha^2} \cdot 0 = 0. \tag{4}$$

Wegen (2) bis (4) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} P\left(\left\{ \left| \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right) \right] \right| \geq \alpha \right\} \right) = 0. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) konvergiert dann $\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left[X_k - \mathrm{E}_P\left(X_k\right) \right] \right)_{n\in\mathbb{N}}$ stark P-stochastisch gegen die Nullfunktion auf Ω. Somit genügt $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen. □

Folgerung 9.3.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren und bezüglich P paarweise unkorrelierten $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_P\left(X_k\right) = 0$ gilt. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right)$.*

(b) *Es genügt $\left(X_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wäre dann $\mathrm{Var}_P\left(X_n\right) = +\infty$, so wäre für $s \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,n-1}$ also

$$\frac{1}{s^2} \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Var}_P\left(X_k\right) = +\infty$$

und somit also

$$\lim_{s\to\infty} \frac{1}{s^2} \sum_{k=1}^{s} \mathrm{Var}_P\left(X_k\right) = +\infty,$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung steht. Somit ist also

$$\mathrm{Var}_P\left(X_n\right) \in [0, +\infty)\,.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann

$$X_n \in \mathscr{L}^2\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right).$$

Zu *(b)*: Sei $n \in \mathbb{N}$. Aufgrund der Identität von BIENAYMÉE (vergleiche Satz 5.2.8) gelten dann

$$\sum_{k=1}^{n} X_k \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{2}$$

sowie

$$\operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k). \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) und der Wahl der Folge $(X_s)_{s\in\mathbb{N}}$ folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k) = 0. \tag{4}$$

Wegen (4) folgt mittels Satz 9.3.1 dann, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. □

Folgerung 9.3.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von P-integrierbaren und bezüglich P paarweise unkorrelierten $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$, für welche die Folge $(\operatorname{Var}_P(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Dann gilt:*

(a) *Es ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.*

(b) *Es genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung gibt es ein $L \in (0, +\infty)$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$\operatorname{Var}_P(X_n) \leq L$$

besteht. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k) \leq \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} L = \frac{L}{n}.$$

Hieraus folgt wegen $\lim_{n\to\infty} \frac{L}{n} = 0$ dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k) = 0.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* bzw. Teil *(b)* von Folgerung 9.3.1 dann *(a)* bzw. *(b)*. □

Folgerung 9.3.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von quadratisch P-integrierbaren und bezüglich P paarweise stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ derart, dass für $n \in \mathbb{N}$ die Beziehung $P_{X_n} = P_{X_1}$ besteht. Dann gilt:*

(a) *Es genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ den schwachen Gesetz der großen Zahlen.*

(b) *Die Folge $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} X_k\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark P-stochastisch gegen die auf Ω konstante Funktion mit Wert $\mathrm{E}_P(X_1)$.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ liefert Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 dann:

(I) Es ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$.

Da die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise stochastisch unabhängig bezüglich P ist, liefert Satz 6.5.3 dann:

(II) Es ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ paarweise unkorrelliert bezüglich P.

Sei

$$n\in\mathbb{N}. \tag{1}$$

Unter zweimaliger Verwendung von Teil *(a)* von Satz 5.2.2 sowie $P_{X_n}=P_{X_1}$ ergibt sich

$$\operatorname{Var}_P(X_n)=\operatorname{var}(P_{X_n})=\operatorname{var}(P_{X_1})=\operatorname{Var}_P(X_1). \tag{2}$$

Wegen $X_1\in\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R})$ gilt nach Teil *(a)* von Satz 5.2.1 dann

$$\operatorname{Var}_P(X_1)\in[0,+\infty). \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) gilt dann:

(III) Die Folge $(\operatorname{Var}_P(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Wegen *(I)* bis *(III)* liefert Teil *(b)* von Folgerung 9.3.2 dann, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt.

Zu *(b)*: Wegen *(I)*, *(a)* und der für $n\in\mathbb{N}$ gültigen Beziehung $P_{X_n}=P_{X_1}$ folgt die Behauptung von *(b)* sogleich aus Teil *(a)* von Lemma 9.2.2. □

Unsere nächsten Überlegungen sind nun darauf gerichtet, in einer konkreten Situation für eine vorgegebene Folge von $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf Grundlage von Folgerung 9.3.1 den Nachweis dafür zu erbringen, dass diese Folge dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig.

Bemerkung 9.3.1. Sei $f\colon(1,+\infty)\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß $x\longmapsto\frac{x}{\ln x}$. Dann ist f in $(1,e]$bzw. $[e,+\infty)$ streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend und im Punkt $x=e$ besitzt f ein lokales Minimum. ♣

BEWEIS. Aus der Definition von f erkennt man sogleich, dass f in $(1,+\infty)$ differenzierbar ist und dass für

$$x\in(1,+\infty) \tag{1}$$

die Beziehung

$$f'(x)=\frac{\ln x-1}{(\ln x)^2} \tag{2}$$

besteht. Da ln eine streng monoton wachsende Funktion auf $(0,+\infty)$ ist und da $\ln e=1$ erfüllt ist, erkennt man aus (1) und (2), dass $f'(e)=0$ und dass für $x\in(1,e)$ bzw. $x\in(e,+\infty)$ die Beziehung $f'(x)\in(-\infty,0)$ bzw. $f'(x)\in(0,+\infty)$ erfüllt ist. Somit ist $f\in(1,e)$ bzw. $[e,+\infty)$ streng monoton fallend bzw. streng monoton wachsend. Hieraus folgt dann sogleich, dass f im Punkt $x=e$ ein lokales Minimum besitzt. □

Lemma 9.3.2. *Seien $n\in\mathbb{N}$ sowie*

$$\mu_n:=\left(1-\frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right)\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}+\frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)}\left(\varepsilon_{-(n+1),\mathfrak{B}_1}+\varepsilon_{n+1,\mathfrak{B}_1}\right).$$

Dann gilt:

(a) *Es ist* $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Es ist* $M_1(\mu_n) = 0$.

(c) *Es ist* $\operatorname{var}(\mu_n) = \frac{n+1}{\ln(n+1)}$.

(d) *Es gilt*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{1}{m^2} \sum_{k=1}^{m} \operatorname{var}(\mu_k) = 0.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$\left\{1 - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}, \frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)}\right\} \subseteq (0, +\infty) \tag{1}$$

sowie

$$1 - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)} + 2\frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)} = 1. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) liefern die Teile *(a)* und *(c)* von Satz M.6.1 dann

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Wegen (3) und der Konstruktion von μ_n folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Zu *(b)*: Unter Beachtung von *(a)* und der Konstruktion von μ_n ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\begin{aligned} M_1(\mu_n) &= 0 \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) + (-[n+1]) \cdot \frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)} \\ &\quad + (n+1) \cdot \frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)} \\ &= 0. \end{aligned}$$

Zu *(c)*: Unter Beachtung von *(a)* und der Konstruktion von μ_n ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\begin{aligned} \operatorname{var}(\mu_n) &= 0^2 \cdot \left(1 - \frac{1}{(n+1)\ln(n+1)}\right) + (-[n+1])^2 \cdot \frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)} \\ &\quad + (n+1)^2 \cdot \frac{1}{2(n+1)\ln(n+1)} \\ &= \frac{n+1}{\ln(n+1)}. \end{aligned} \tag{4}$$

Unter Beachtung von Teil *(d)* von Satz M.23.4.2 sowie *(b)* und (4) dann

$$\operatorname{var}(\mu_n) = M_2(\mu_n) - [M_1(\mu_n)]^2 = M_2(\mu_n) = \frac{n+1}{\ln(n+1)}.$$

Zu *(d)*: Sei

$$s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) sei

$$k \in \mathbb{N}_{2,s}. \tag{6}$$

Aus (6) folgt dann

$$k+1 \in \mathbb{N}\setminus\{1,2\} \subseteq [e,+\infty). \tag{7}$$

Wegen (7) liefert Bemerkung 9.3.1 dann

$$\frac{k+1}{\ln(k+1)} \leq \frac{s+1}{\ln(s+1)}. \tag{8}$$

Unter Beachtung von *(c)*, (5), (6) und (8) folgt nun

$$\begin{aligned} 0 &\leq \frac{1}{s^2}\sum_{k=1}^{s} \operatorname{var}(\mu_k) = \frac{1}{s^2}\sum_{k=1}^{s}\frac{k+1}{\ln(k+1)} = \frac{1}{s^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{s^2}\sum_{k=2}^{s}\frac{k+1}{\ln(k+1)} \\ &\leq \frac{1}{s^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{1}{s^2}\sum_{k=2}^{s}\frac{s+1}{\ln(s+1)} = \frac{1}{s^2}\frac{2}{\ln 2} + \frac{s-1}{s^2}\cdot\frac{s+1}{\ln(s+1)} \\ &= \frac{2}{s^2\ln 2} + \frac{s^2-1}{s^2\ln(s+1)} \leq \frac{2}{s^2\ln 2} + \frac{s^2}{s^2\ln(s+1)} = \frac{2}{s^2\ln 2} + \frac{1}{\ln(s+1)}. \end{aligned} \tag{9}$$

Weiterhin ist

$$\lim_{s\to\infty}\left[\frac{2}{s^2\ln 2} + \frac{1}{\ln(s+1)}\right] = 0. \tag{10}$$

Wegen (5), (9) und (10) gilt dann

$$\lim_{s\to\infty}\frac{1}{s^2}\sum_{k=1}^{s}\operatorname{var}(\mu_n) = 0.$$

□

Beispiel 9.3.2. Sei $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum, $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von bezüglich P paarweise unkorrelierten $(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen auf $(\Omega,\mathfrak{A},P)$ derart, dass für $n\in\mathbb{N}$ mit den Bezeichnungen von Lemma 9.3.2 die Beziehung

$$P_{X_n} = \mu_n$$

besteht. Dann genügt die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(a)* von Lemma 9.3.2 gilt dann

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1). \tag{2}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$P_{X_n} = \mu_n. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) folgt mittels Teil *(b)* von Satz 5.1.1 dann

$$X_n \in \mathscr{L}^1(\Omega,\mathfrak{A},P;\mathbb{R}). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4), Teil *(a)* von Satz 5.2.2, (2) und (3) ergibt sich

$$\mathrm{Var}_P(X_n) = \mathrm{var}(P_{X_n}) = \mathrm{var}(\mu_n). \tag{5}$$

Unter Beachtung von (1), (5) und Teil *(d)* von Lemma 9.3.2 ergibt sich dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_P(X_k) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{var}(\mu_n) = 0. \tag{6}$$

Wegen (1), (4) und (6) liefert Folgerung 9.3.1 dann, dass $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. □

Wir betrachten nun einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ sowie eine Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$, für welche die Folge $(\mathrm{Var}_P(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ beschränkt ist. Wir präsentieren dann verschiedene Situationen in denen die Folge $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen genügt. Unsere Beweisstrategie ist hierbei auf die Anwendung von Satz 9.3.1 gerichtet.

Satz 9.3.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie ferner $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Die Folge $(\mathrm{Var}_P(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

(II) *Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt*

$$\mathrm{Cov}_P(X_k, X_l) \in (-\infty, 0].$$

Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ist, liefert Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 dann die Aussage:

(A) Es ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Sei

$$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{1}$$

Unter Beachtung von Teil *(c)* von Lemma 5.2.3, Satz 5.2.10, (1), *(II)* und nochmals Teil *(c)* von Lemma 5.2.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \mathrm{Cov}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \mathrm{Cov}_P(X_k, X_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}_P(X_k, X_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \mathrm{Cov}_P(X_k, X_l) \\
&\leq \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Cov}_P(X_k, X_k) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Var}_P(X_k) \\
&\leq n \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}_P(X_k),
\end{aligned}$$

also

$$0 \leq \frac{1}{n^2} \mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq \frac{1}{n} \sup_{k\in\mathbb{N}} \mathrm{Var}_P(X_k). \tag{2}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und Voraussetzung *(I)* gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}_P(X_k) = 0. \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2} \operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0. \tag{4}$$

Wegen *(A)* und (4) liefert Satz 9.3.1 dann die Behauptung. □

Satz 9.3.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum sowie ferner $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Die Folge $(\operatorname{Var}_P(X_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.*

(II) *Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $|k-l| > 1$ gilt $\operatorname{Cov}_P(X_k, X_l) = 0$.*

Dann genügt $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dem schwachen Gesetz der großen Zahlen.

Beweis. Da $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$ ist, liefert Teil *(a)* von Lemma 5.2.3 dann die Aussage:

(A) Es ist $(X_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R})$.

Sei

$$C := \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}_P(X_k). \tag{1}$$

Aus (1) und *(I)* folgt dann

$$C \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{3}$$

Unter Beachtung von Teil *(c)* von Lemma 5.2.3, Satz 5.2.10, *(II)* und nochmals Teil *(c)* von Lemma 5.2.3 ergibt sich

$$\begin{aligned}
\operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) &= \operatorname{Cov}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k, \sum_{k=1}^{n} X_k\right) = \sum_{k=1}^{n}\sum_{l=1}^{n} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_k) + \sum_{k=1}^{n}\sum_{\substack{l=1\\ l\neq k}}^{n} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_l) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}_P(X_{k+1}, X_k) \\
&= \sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k) + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}_P(X_k, X_{k+1}) + \sum_{k=1}^{n-1} \operatorname{Cov}_P(X_{k+1}, X_k).
\end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (1) gilt

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{Var}_P(X_k) \leq n \cdot \sup_{k\in\mathbb{N}} \operatorname{Var}_P(X_k) = n \cdot C. \tag{5}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,n-1}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von Teil *(d)* von Satz 5.2.7 sowie (1) und (2) folgt dann

$$|\mathrm{Cov}_P(X_k, X_{k+1})| \leq \sqrt{\mathrm{Var}_P(X_k)\,\mathrm{Var}_P(X_{k+1})} \leq \sqrt{C^2} = C \tag{7}$$

und

$$|\mathrm{Cov}_P(X_{k+1}, X_k)| \leq \sqrt{\mathrm{Var}_P(X_{k+1})\,\mathrm{Var}_P(X_k)} \leq \sqrt{C^2} = C. \tag{8}$$

Wegen (6) sowie (7) bzw. (8) folgt

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Cov}_P(X_{k+1}, X_k) \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\mathrm{Cov}_P(X_{k+1}, X_k)| \leq n \cdot C \tag{9}$$

bzw.

$$\sum_{k=1}^{n-1} \mathrm{Cov}_P(X_k, X_{k+1}) \leq \sum_{k=1}^{n-1} |\mathrm{Cov}_P(X_k, X_{k+1})| \leq n \cdot C. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (4), (5), (9) und (10) folgt dann

$$\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq 3 \cdot n \cdot C,$$

also

$$0 \leq \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) \leq \frac{3C}{n}. \tag{11}$$

Da $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ und Voraussetzung *(I)* gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{3C}{n} = 0.$$

Wegen (3) und (11) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n^2}\,\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} X_k\right) = 0. \tag{12}$$

Wegen *(A)* und (12) liefert Satz 9.3.1 dann die Behauptung. □

9.4. Weitere Aussagen zu Null-Eins-Gesetzen

Wir greifen im vorliegenden Abschnitt erneut eine zentrale Thematik der Wahrscheinlichkeitstheorie auf. Null-Eins-Gesetze beschreiben solche Situationen, in denen der Zufall fast vollständig verdrängt werden kann.

Unser ersten Beispiel eines Null-Eins-Gesetzes war das in Abschnitt 2.2 (vgl. dort insbesondere Sätze 2.2.10 und 2.2.11) vorgestellt klassische zweite Lemma von Borel-Cantelli. Dort war bereits zu erkennen, dass die innere Natur des dem Borel-Cantelli-Resultats zugrundeliegenden Phänomens wesentlich durch die stochastische Unabhängigkeit bestimmt wird.

Aus dieser Motivation heraus, haben wir uns im Abschnitt 6.1 von höherer Warte aus erneut Null-Eins-Gesetzen zugewandt und speziell das Kolmogorovsche Null-Eins-Gesetz für Folgen

von stochastisch unabhängigen σ-Algebren hergeleitet (vgl. Satz 6.1.4). Im Abschnitt 6.3 haben wir dann noch eine Umformulierung des KOLMOGOROVschen Null-Eins-Gesetzes vorgenommen (vgl. Satz 6.3.6) und schließlich eine ganze Reihe nützlicher Anwendungen dieses Resultats aufgezeigt (vgl. die Sätze 6.3.7 bis 6.3.9).

Die im vorliegenden Abschnitt geführte Diskussion von Null-Eins-Gesetzen knüpft unmittelbar an die Untersuchungen im Abschnitt 2.2 über das zweite Lemma von BOREL-CANTELLI an. Wir stellen hier ein auf K.L. CHUNG[1)] zurückgehende Verschärfung dieses Resultats vor. Die Verschärfung besteht hierbei konkret darin, dass die ursprüngliche Voraussetzung der stochastischen Unabhängigkeit durch paarweise stochastische Unabhängigkeit ersetzt wird. Das folgende Resultat spielt eine Schlüsselrolle bei der Herleitung des Hauptresultats dieses Abschnitts:

Satz 9.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$, für welche*

$$\sum_{n=1}^{\infty} P(A_n) = +\infty \qquad \textit{und} \qquad \liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 1$$

erfüllt ist. Dann ist $\limsup A_n \in \mathfrak{A}$ *und es gilt*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

BEWEIS. Wegen Teil *(d)* von Satz M.4.1 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Folgerung 5.2.4 dann

$$\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{3}$$

sowie

$$\begin{aligned} \operatorname{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} \left[P(A_j \cap A_k) - P(A_j)\,P(A_k)\right] \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k) - \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j)\,P(A_k) \\ &= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k) - \left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Aufgrund von Bemerkung 5.1.3 sowie Satz 5.1.4 gelten weiterhin

$$\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}) \tag{5}$$

[1)] KAI LAI CHUNG (∗19.09.1917; †01.06.2009) war ein chinesisch-stämmiger US-amerikanischer Mathematiker, der sich vor allem mit der Wahrscheinlichkeitstheorie beschäftigte. Chung galt als führende Wissenschaftler in der Theorie stochastischer Prozesse.

sowie

$$\mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} \mathrm{E}_P\left(1_{A_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right). \tag{6}$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} P\left(A_k\right) = +\infty$ und der Endlichkeit von P gibt es ein

$$n_0 \in \mathbb{N} \tag{7}$$

derart, dass für alle

$$n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n_0-1} \tag{8}$$

die Beziehung

$$\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \in (0, +\infty) \tag{9}$$

besteht. Sei

$$\varepsilon \in (0, +\infty). \tag{10}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n_0-1}. \tag{11}$$

Wegen (8) bis (11) gilt dann

$$\varepsilon \cdot \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \in (0, +\infty). \tag{12}$$

Wegen (5) und (12) liefert die Ungleichung Čebyšev (vergleiche Satz 5.2.6) dann

$$\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right\} \in \mathfrak{A} \tag{13}$$

und

$$P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \mathrm{E}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right\}\right) \leq \frac{\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)}{\left[\varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2}. \tag{14}$$

Wegen (4) gilt

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{Var}_P\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)}{\left[\varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right]^2} &= \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right) - \left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}{\varepsilon^2 \left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right)}{\varepsilon^2 \left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - 1\right). \end{aligned} \tag{15}$$

Wegen (6) und (13) bzw. (6), (14) und (5) gilt dann

$$\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_j\right)\right\} \in \mathfrak{A} \tag{16}$$

bzw.

$$\begin{aligned} 0 &\leq P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_j\right)\right\}\right) \\ &\leq \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right)}{\varepsilon^2\left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - 1\right). \end{aligned} \tag{17}$$

Beachtet man nun die Voraussetzung

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} = 1,$$

so folgt bei Beachtung von (10) dann

$$\begin{aligned} 0 &\leq \liminf_{n\to\infty} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_j\right)\right\}\right) \\ &\leq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right)}{\varepsilon^2\left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2} - 1\right) \\ &= \frac{1}{\varepsilon^2}\left(\left[\liminf_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_j \cap A_k\right)}{\varepsilon^2\left[\sum_{j=1}^{n} P\left(A_j\right)\right]^2}\right] - 1\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\left(1-1\right) = \frac{1}{\varepsilon^2}\cdot 0 = 0 \end{aligned}$$

und somit also

$$\liminf_{n\to\infty} P\left(\left\{\left|\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| \geq \varepsilon \sum_{k=1}^{n} P\left(A_j\right)\right\}\right) = 0. \tag{18}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Wegen (19), (2) und (3) gilt dann insbesondere $\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.4 dann

$$\left\{\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{20}$$

Sei

$$\omega \in \left\{\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} < \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right\}. \tag{21}$$

Unter Verwendung von (21) folgt dann

$$\begin{aligned} \left|\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)(\omega) - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| &\geq \left|\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right)\right| - \left|\left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)(\omega)\right| = \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)(\omega) \\ &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) + \left[\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) - \left(\sum_{k=1}^{n} 1_{A_k}\right)(\omega)\right] \\ &\geq \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right). \end{aligned}$$

Es ist also

$$\omega \in \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\}. \tag{22}$$

Aus (21) und (22) folgt dann

$$\left\{ \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \subseteq \left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\}. \tag{23}$$

Wegen $\frac{1}{2} \in (0, +\infty)$ folgt aus (10) und (16) dann

$$\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \in \mathfrak{A}. \tag{24}$$

Wegen (23), (20), (24) und der Isotonie von P folgt dann

$$0 \leq \left\{ \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \leq P\left(\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \right). \tag{25}$$

Wegen $\frac{1}{2} \in (0, +\infty)$ folgt aus (10) und (18) dann

$$\liminf_{n \to \infty} P\left(\left\{ \left| \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} - \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right| \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \right) = 0. \tag{26}$$

Unter Beachtung von (19), (25) und (26) folgt dann

$$\liminf_{n \to \infty} P\left(\left\{ \sum_{k=1}^{n} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n} P\left(A_k\right) \right\} \right) = 0. \tag{27}$$

Wegen (27) gilt dann:

(I) Es gibt eine streng monoton wachsende Folge $(n_s)_{s \in \mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ derart, dass für alle $s \in \mathbb{N}$ die Ungleichung

$$P\left(\left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P\left(A_k\right) \right\} \right) < \frac{1}{2^s}$$

besteht.

Aus *(I)* folgt nun

$$\sum_{s=1}^{\infty} P\left(\left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P\left(A_k\right) \right\} \right) \leq \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 1.$$

Hieraus folgt aufgrund des ersten Lemmas von Borel-Cantelli (vergleiche Satz M.5.2) dann

$$\limsup_{s \to \infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P\left(A_k\right) \right\} \in \mathcal{N}_P. \tag{28}$$

Aufgrund der für $s \in \mathbb{N}$ gültigen Beziehung

$$\Omega \setminus \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} = \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\}$$

ergibt sich

$$\begin{aligned} \liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} &= \liminf_{s\to\infty} \Omega \setminus \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \\ &= \Omega \setminus \limsup_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\}. \end{aligned} \tag{29}$$

Wegen $\mathcal{N}_P \subseteq \mathfrak{A}$ und der Wahl von $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra in Ω folgt aus (28) dann

$$\Omega \setminus \limsup_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \in \mathfrak{A}. \tag{30}$$

Unter Verwendung von (29) und (30) folgt dann

$$\liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \in \mathfrak{A} \tag{31}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (28) weiterhin

$$\begin{aligned} &P\left(\liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \right) \\ &= P\left(\Omega \setminus \limsup_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \right) \\ &= P(\Omega) - P\left(\limsup_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} < \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \right) \\ &= 1 - 0 = 1. \end{aligned} \tag{32}$$

Da $(n_s)_{s\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge aus $\mathbb{N}$ ist, gilt $\lim_{s\to\infty} n_s = +\infty$. Hieraus folgen dann

$$\sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \tag{33}$$

und

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k). \tag{34}$$

Nach Definition gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty} \bigcup_{k=n}^{\infty} A_k.$$

Hieraus folgt dann

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} 1_{A_n} = +\infty \right\}. \tag{35}$$

Sei

$$\omega \in \liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\}. \tag{36}$$

Aufgrund von (36) und der Definition des Limes inferiors einer Mengenfolge gibt es dann ein

$$s_0 \in \mathbb{N} \tag{37}$$

mit

$$\omega \in \bigcap_{s=s_0}^{\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\}. \tag{38}$$

Unter Verwendung von (33), (37), (38), (34) und der Verwendung $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} \right)(\omega) &= \lim_{s\to\infty} \left(\sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \right)(\omega) \geq \lim_{s\to\infty} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) = \frac{1}{2} \lim_{s\to\infty} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \\ &= \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty. \end{aligned}$$

Somit ist also

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty} 1_{A_k} \right)(\omega) = +\infty. \tag{39}$$

Aus (35) und (39) folgt nun

$$\omega \in \limsup_{n\to\infty} A_n. \tag{40}$$

Aus (36) und (40) folgt dann

$$\liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n. \tag{41}$$

Wegen (31), (32), (1), (41), der Isotonie von P und der Wahl von P als Wahrscheinlichkeitsmaß folgt dann

$$1 = P\left(\liminf_{s\to\infty} \left\{ \sum_{k=1}^{n_s} 1_{A_k} \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{n_s} P(A_k) \right\} \right) \leq P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n \right) \leq 1.$$

Somit ist also

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n \right) = 1. \tag{42}$$

Wegen (1) und (42) ist dann alles gezeigt. □

Lemma 9.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiter sei $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise stochastisch unabhängigen Ereignisse aus $\mathfrak{A}$, für welche*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$$

erfüllt ist. Dann gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 1.$$

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\} \tag{1}$$

sowie

$$\widetilde{I}_n := \{(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n} \,|\, j \neq k\}\,. \tag{2}$$

Sei

$$(j,k) \in \widetilde{I}_n. \tag{3}$$

Wegen (2), (3) und der Wahl der Folge $(A_s)_{s\in\mathbb{N}}$sind dann A_j und A_k stochastisch unabhängig bezüglich P, das heißt es gilt

$$P(A_j \cap A_k) = P(A_j)\,P(A_k)\,. \tag{4}$$

Wegen (1) und (2) gilt

$$\mathbb{N}_{1,n} \times \mathbb{N}_{1,n} = \widetilde{I}_n \cup \{(j,j) \,|\, j \in \mathbb{N}_{1,n}\} \tag{5}$$

und

$$\widetilde{I}_n \cap \{(j,j) \,|\, j \in \mathbb{N}_{1,n}\} = \varnothing. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (5), (6), (3), (4) sowie nochmals (5) und (6) folgt dann

$$\begin{aligned}
\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k) &= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}_{1,n}^2} P(A_j \cap A_k) = \sum_{(j,k)\in\widetilde{I}_n} P(A_j \cap A_k) + \sum_{j=1}^{n} P(A_j \cap A_j) \\
&= \sum_{(j,k)\in\widetilde{I}_n} P(A_j)\,P(A_k) + \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \\
&= \sum_{(j,k)\in\mathbb{N}_{1,n}^2} P(A_j)\,P(A_k) - \sum_{j=1}^{n} P(A_j)^2 + \sum_{j=1}^{n} P(A_j) \\
&= \sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j)\,P(A_k) + \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\,[1 - P(A_j)] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]\left[\sum_{k=1}^{n} P(A_k)\right] + \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\,[1 - P(A_j)] \\
&= \left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2 + \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\,[1 - P(A_j)]\,.
\end{aligned} \tag{7}$$

Sei jetzt

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{8}$$

Dann ist

$$P(A_j) \in [0,1]\,. \tag{9}$$

Aus (9) folgt dann

$$1 - P(A_j) \in [0,1]\,. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann

$$0 \leq P(A_j)\,[1 - P(A_j)] \leq P(A_j)\,. \tag{11}$$

Aus (8) und (11) ergibt sich nun

$$0 \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right] \leq \sum_{j=1}^{n} P(A_j). \tag{12}$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ und der Endlichkeit des Wahrscheinlichkeitsmaßes P gibt es

$$n_0 \in \mathbb{N}\setminus\{1\} \tag{13}$$

derart, dass für alle

$$n \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n_0-1} \tag{14}$$

die Beziehung

$$\sum_{j=1}^{n} P(A_j) \in (0, +\infty) \tag{15}$$

besteht. Sei

$$n \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n_0-1}. \tag{16}$$

Wegen (16), (1), (12), (13), (14) und (15) gilt dann

$$0 \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} \leq \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)}. \tag{17}$$

Wegen $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)} = 0. \tag{18}$$

Aus (13), (16), (17) und (18) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 0. \tag{19}$$

Sei wiederum

$$n \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n_0-1}. \tag{20}$$

Wegen (20), (13), (1) und (7) folgt dann

$$\begin{aligned} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} &= \frac{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2 + \sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} \\ &= 1 + \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2}. \end{aligned} \tag{21}$$

Unter Beachtung von (13), (20), (21) und (19) folgt schließlich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} == 1 + \lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\left[1 - P(A_j)\right]}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 1 + 0 = 1.$$

□

Satz 9.4.2 (Lemma von Borel-Cantelli-Chung)**.** *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum,* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge von paarweise bezüglich* P *stochastisch unabhängigen Ereignissen aus* $\mathfrak{A}$*, für welche*

$$\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$$

erfüllt ist. Dann ist $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ *und es gilt*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Beweis. Wegen Lemma 9.4.1 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sum_{j=1}^{n}\sum_{k=1}^{n} P(A_j \cap A_k)}{\left[\sum_{j=1}^{n} P(A_j)\right]^2} = 1.$$

Hieraus folgt mittels Satz 9.4.1 dann

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}$$

und

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

□

Folgerung 9.4.1. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ *ein Wahrscheinlichkeitsraum. Weiterhin sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathfrak{A}$*, welche eine Teilfolge* $(A_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ *von paarweise bezüglich* P *stochastisch unabhängigen Ereignissen enthält, für welche* $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_{n_k}) = +\infty$ *erfüllt ist. Dann ist* $\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}$ *und es gilt*

$$P\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 1.$$

Beweis. Wegen Teil *(d)* von Satz M.4.1 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Wegen Satz 9.4.2 gelten

$$\limsup_{k\to\infty} A_{n_k} \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

und

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}\right) = 1. \tag{3}$$

Nach Definition des Limes superiors einer Mengenfolge gelten

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k=n}^{\infty} A_k \tag{4}$$

und

$$\limsup_{k\to\infty} A_{n_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty}\bigcup_{s=k}^{\infty} A_{n_k}. \tag{5}$$

Sei $k \in \mathbb{N}$. Da $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine streng monoton wachsende Folge aus $\mathbb{N}$ ist, gilt $n_k \geq k$. Hieraus folgt

$$\bigcup_{s=k}^{\infty} A_{n_s} \subseteq \bigcup_{s=k}^{\infty} A_s.$$

In Verbindung mit (5) und (4) folgt hieraus dann

$$\limsup_{k\to\infty} A_{n_k} = \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s=k}^{\infty} A_{n_s} \subseteq \bigcap_{k=1}^{\infty} \bigcup_{s=k}^{\infty} A_s = \limsup_{k\to\infty} A_k. \tag{6}$$

Wegen (3), (1), (2), (6), der Isotonie von P und der Tatsache, dass P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist, folgt dann

$$1 = P\left(\limsup_{k\to\infty} A_{n_k}\right) \leq P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) \leq 1.$$

Somit ist also

$$P\left(\limsup_{k\to\infty} A_k\right) = 1. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) ist alles gezeigt. □

Die Kombination von Satz 9.4.2 mit den ersten Lemma von Borel-Cantelli (vergleiche dazu Satz M.5.2) führt uns auf die folgende Verschärfung von Satz 2.2.4.

Satz 9.4.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise bezüglich P stochastisch unabhängigen Ereignissen aus $\mathfrak{A}$. Weiter sei $A := \limsup_{n\to\infty} A_n$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $A \in \mathfrak{A}$ und es gilt $P(A)$ oder $P(A) = 1$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$.*

  (ii) *Es ist $P(A) = 0$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (iii) *Es ist $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$.*

  (iv) *Es ist $P(A) = 1$.*

Beweis. Wegen Teil *(d)* von Satz M.4.1 gilt $A \in \mathfrak{A}$. In jedem Falle ist weiterhin genau eine der Aussagen *(i)* oder *(iii)* erfüllt. Falls *(i)* bzw. *(iii)* erfüllt ist, so liefert Satz M.5.2 bzw. Satz 9.4.2 dann $P(A) = 0$ bzw. $P(A) = 1$. Somit sind also *(a)* sowie die Implikationen „*(i)* $\Rightarrow$ *(ii)*" und „*(iii)* $\Rightarrow$ *(iv)*" gezeigt. Falls nun *(ii)* bzw. *(iv)* erfüllt ist, so ergibt sich aus dem schon Gezeigten dann $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) < +\infty$ bzw. $\sum_{k=1}^{\infty} P(A_k) = +\infty$, das heißt, es gilt *(i)* bzw. *(iii)*. Damit sind auch *(b)* und *(c)* bewiesen. □

Teil II.

Maß- und Integrationstheorie

Grundlagen der Maßtheorie

M.1. Ringe und Halbringe von Mengen

Hauptgegenstand der Maßtheorie ist die Untersuchung $[0, +\infty]$-wertiger Mengenfunktionen, deren Definitionsbereich eine gewisse Teilmenge der Potenzmenge $\mathfrak{P}(\Omega)$ einer Grundmenge Ω ist. Es ist hierbei abzusichern, dass die Mengensysteme, welche als Definitionsbereich in Erscheinung treten, gewisse Stabilitätseigenschaften gegenüber mengentheoretischen Operationen besitzen.

Definition M.1.1. Es sei Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{R}$ ein *Ring*, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es gilt $\varnothing \in \mathfrak{R}$.

(II) Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $A \setminus B \in \mathfrak{R}$.

(III) Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{R}$.

Beispiel M.1.1. Es sind $\mathfrak{P}(\Omega)$ und $\{\varnothing\}$ jeweils Ringe in Ω.

Satz M.1.1. *Es seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{R}$ ist ein Ring.*

(ii) *$\mathfrak{R}$ hat folgende Eigenschaften:*

  (I) *Es ist $\varnothing \in \mathfrak{R}$.*

  (II) *Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ gilt $A \triangle B \in \mathfrak{R}$, wobei $A \triangle B \coloneqq (A \setminus B) \cup (B \setminus A)$ ist.*

  (III) *Für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ ist $A \cap B \in \mathfrak{R}$.*

(iii) *$\mathfrak{R}$ besitzt die Eigenschaften* (I) *und* (II) *sowie für alle $A, B \in \mathfrak{R}$ ist $A \cup B \in \mathfrak{R}$.*

Satz M.1.2. *Sei Ω eine Menge und $(\mathfrak{R}_j)_{j \in I}$ eine Familie von Ringen in Ω. Dann ist $\bigcap_{j \in I} \mathfrak{R}_j$ ein Ring in Ω.*

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Es bezeichnet $R_\Omega(\mathcal{E})$ die Menge aller Ringe $\mathfrak{R}$ in Ω mit $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{R}$.

Satz M.1.3. *Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{P}(\Omega) \in R_\Omega(\mathcal{E})$, also ist insbesondere $R_\Omega(\mathcal{E}) \neq \varnothing$.*

(b) *Es sei*

$$\rho_\Omega(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcap_{\mathfrak{R} \in R_\Omega(\mathcal{E})} \mathfrak{R}.$$

Dann ist $\rho_\Omega(\mathcal{E}) \in R_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $\mathfrak{R} \in R_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\rho_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{R}$.

(c) *Sei $\mathfrak{R}_0 \in R_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, dass für alle $\mathfrak{R} \in R_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathfrak{R}_0 \subseteq \mathfrak{R}$ besteht. Dann gilt $\mathfrak{R}_0 = \rho_\Omega(\mathcal{E})$.*

(d) *Ist $\mathcal{E}$ selbst ein Ring in Ω, so gilt $\mathcal{E} = \rho_\Omega(\mathcal{E})$.*

(e) *Es gilt $\rho_\Omega(\rho_\Omega(\mathcal{E})) = \rho_\Omega(\mathcal{E})$.*

Definition M.1.2. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $\rho_\Omega(\mathcal{E})$ erklärt wie in Teil *(b)* von Satz M.1.3. Dann heißt $\rho_\Omega(\mathcal{E})$ der *von $\mathcal{E}$ erzeugte Ring in Ω*.

Definition M.1.3. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω. Weiter sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ ein *Erzeuger von* $\mathfrak{R}$, falls $\rho_\Omega(\mathcal{E}) = \mathfrak{R}$ gilt.

Wir wenden uns nun Halbringen zu.

Definition M.1.4. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann bezeichne $\mathfrak{A}^+$ das System aller $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$, für welche es ein $n \in \mathbb{N}$ gibt und eine Folge $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ gibt, so dass

$$A = \bigcup_{k=1}^{n} A_k$$

erfüllt ist.

Bemerkung M.1.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Menge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt

$$\mathfrak{A}^+ = \left\{ \bigcup_{j=1}^{n} A_j \;\middle|\; n \in \mathbb{N},\ A_j \in \mathfrak{A} \text{ paarweise disjunkt},\ j \in \mathbb{N}_{1,n} \right\}. \qquad \clubsuit$$

Bemerkung M.1.2. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Menge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Es gilt unter den Bedingungen der Definition von $\mathfrak{A}^+$ dann $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{A}^+$. $\clubsuit$

Definition M.1.5. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{H}$ ein *Halbring* in Ω, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es ist $\varnothing \in \mathfrak{H}$.

(II) Für alle $A, B \in \mathfrak{H}$ gilt $A \cap B \in \mathfrak{H}$.

(III) Für alle $A, B \in \mathfrak{H}$ gilt $A \setminus B \in \mathfrak{H}^+$.

Bemerkung M.1.3. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ ein System mit den Eigenschaften *(I)* und *(II)* aus Definition M.1.5 sowie der Eigenschaft, dass für alle $A, B \in \mathfrak{H}$ auch $A \setminus B \in \mathfrak{H}$ gilt. Dann ist $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω. $\clubsuit$

Bemerkung M.1.4. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω. Dann ist $\mathfrak{R}$ auch ein Halbring in Ω. $\clubsuit$

Definition M.1.6. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Mengen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathfrak{C}_j$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega_j)$. Ist für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ dann $A_j \in \mathfrak{C}_j$, so heißt

$$\bigtimes_{j=1}^{n} A_j$$

eine zur Folge $(\mathfrak{C}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörige *Rechteckmenge*. Existiert ein $j_0 \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $A_{j_0} = \varnothing$, so gilt

$$\bigtimes_{j=1}^{n} A_j = \varnothing.$$

Zudem bezeichne

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j$$

das zur Folge $(\mathfrak{C}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörige *System von Rechteckmengen*. Es ist also

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j = \left\{ \bigtimes_{j=1}^{n} A_j \,\middle|\, \text{für alle } j \in \mathbb{N}_{1,n} \text{ gilt } A_j \in \mathfrak{C}_j \right\}.$$

Satz M.1.4. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Mengen. Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathfrak{H}_j$ ein Halbring in Ω_j. Es bezeichne $\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{H}_j$ dass zur Folge $(\mathfrak{H}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörige System von Rechteckmengen. Dann ist $\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{H}_j$ ein Halbring in $\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$.*

Es folgen nun generische Beispiele von Halbringen im $\mathbb{R}^m$.

Definition M.1.7. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Weiterhin seien $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Man sagt dann $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, wenn für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ auch $a_j < b_j$ gilt. Wir setzen dann

$$[\mathbf{a},\mathbf{b}] \coloneqq \bigtimes_{j=1}^{m} [a_j, b_j]\,,\ (\mathbf{a},\mathbf{b}) \coloneqq \bigtimes_{j=1}^{m} (a_j, b_j)\,,\ [\mathbf{a},\mathbf{b}) \coloneqq \bigtimes_{j=1}^{m} [a_j, b_j) \text{ und } (\mathbf{a},\mathbf{b}] \coloneqq \bigtimes_{j=1}^{m} (a_j, b_j]\,.$$

Bezeichnung. Es bezeichne $I_{m,a}$, $I_{m,o}$, $I_{m,l}$ und $I_{m,r}$ das S*ystem aller m-dimensionalen Intervalle des* $\mathbb{R}^m$ des entsprechenden Typs, wobei alle Systeme durch die leere Menge ergänzt werden.

Beispiel M.1.2. Sei $m \in \mathbb{N}$ beliebig. Dann sind $I_{m,l}$ und $I_{m,r}$ jeweils Halbringe in $\mathbb{R}^m$.

Satz M.1.5. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω. Dann gilt*

$$\rho_\Omega(\mathfrak{H}) = \mathfrak{H}^+.$$

Folgerung M.1.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Mengen. Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathfrak{H}_j$ ein Halbring in Ω_j. Dann gilt*

$$\rho_{\bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{H}_j\right) = \left(\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{H}_j\right)^+.$$

M.2. Inhalte und Prämaße auf Halbringen

Wir stellen zunächst einige Begriffsbildungen bereit.

Definition M.2.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$.

(a) μ heißt *isoton*, falls für alle $A, B \in \mathfrak{A}$, mit $A \subseteq B$, stets $\mu(A) \leq \mu(B)$ gilt.

(b) μ heißt *additiv*, falls für alle ***disjunkten*** $A, B \in \mathfrak{A}$, mit $A \cup B \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$$

gilt.

(c) μ heißt *endlich additiv*, falls für alle endlichen Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von ***paarweise disjunkten*** Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

gilt.

(d) μ heißt *σ-additiv*, falls für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ***paarweise disjunkten*** Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt.

(e) μ heißt *subadditiv*, falls für alle endlichen Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit der Eigenschaft $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

gilt.

(f) μ heißt *σ-subadditiv*, falls für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$$

gilt.

(g) μ heißt *superadditiv*, falls für alle endlichen Folgen $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von ***paarweise disjunkten*** Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \geq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$$

gilt.

(h) μ heißt *σ-superadditiv*, falls für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von ***paarweise disjunkten*** Mengen aus $\mathfrak{A}$, mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$, stets

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n\right) \geq \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(A_n\right)$$

gilt.

Definition M.2.2. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und $\mu\colon \mathfrak{H} \longrightarrow [0,+\infty]$.

(a) μ heißt ein *Inhalt* auf $\mathfrak{H}$, falls $\mu(\varnothing) = 0$ und außerdem μ auch endlich additiv ist.

(b) μ heißt ein *Prämaß* auf $\mathfrak{H}$, falls $\mu(\varnothing) = 0$ und außerdem μ auch σ-additiv ist.

Bemerkung M.2.1. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$, dann ist μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. ♣

Definition M.2.3. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt oder Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Dann heißt μ *endlich*, falls für alle $A \in \mathfrak{H}$ stets $\mu(A) \in [0,+\infty)$ gilt.

Satz M.2.1. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Es bezeichne $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ den auf $\mathfrak{H}$ in Ω erzeugten Ring. Dann gilt:*

(a) *Es gibt* genau einen *Inhalt ν auf $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ mit $\nu \restriction \mathfrak{H} = \mu$.*

(b) *Sei $A \in \rho_\Omega(\mathfrak{H})$. Dann gelten:*

(b1) *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ und eine Folge $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{H}$ mit $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$.*

(b2) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{H}$ mit $A = \bigcup_{j=1}^{n} A_j$. Dann gilt $\nu(A) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j)$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *μ ist endlich.*

(ii) *ν ist endlich.*

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$.*

(iv) *Es ist ν ein Prämaß auf $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$.*

(e) *Es bezeichne $\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathfrak{H} \mid \mu(A) = 0\}$ bzw. $\mathcal{N}_\nu := \{A \in \rho_\Omega(\mathfrak{H}) \mid \nu(A) = 0\}$ das System der Nullmengen von μ bzw. ν. Dann gilt $\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\mu^+$.*

(f) *Seien*

$$\mathfrak{H}_{\mu,e} := \{E \in \mathfrak{H} \mid \mu(E) \in [0,+\infty)\}$$

und

$$[\rho_\Omega(\mathfrak{H})]_{\nu,e} := \{F \in \rho_\Omega(\mathfrak{H}) \mid \nu(F) \in [0,+\infty)\}.$$

Dann gilt $[\rho_\Omega(\mathfrak{H})]_{\nu,e} = (\mathfrak{H}_{\mu,e})^+$.

M.3. Inhalte und Prämaße auf Ringen

Wir spezifizieren die Situation von Abschnitt M.2 für Ringe von Mengen.

Satz M.3.1. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R}$ eine Ring auf Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $A, B \in \mathfrak{R}$. Dann gelten $\{A \cap B, A \cup B\} \subseteq \mathfrak{R}$, sowie*

$$\mu(A \cup B) + \mu(A \cap B) = \mu(A) + \mu(B).$$

(b) *μ ist isoton.*

(c) *Seien $A, B \in \mathfrak{R}$ so gewählt, dass $A \subseteq B$ und $\mu(A) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Dann gelten $B \setminus A \in \mathfrak{R}$ und $\mu(B \setminus A) = \mu(B) - \mu(A)$.*

(d) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{R}$. Dann gelten $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}$ sowie*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(e) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{R}$. Dann gelten $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{R}$ sowie*

$$\mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \mu(A_j).$$

(f) *μ ist σ-superadditiv.*

Unsere nächste Überlegung ist eine Verallgemeinerung von Teil *(a)* von Satz M.3.1 auf beliebige endliche Folgen $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathfrak{R}_{\mu,e}$ gewidmet.

Satz M.3.2 (Sylvester[1]-Poincarésche[2]-Siebformel)**.** *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{R}_{\mu,e} := \{A \in \mathfrak{R} \mid \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Ferner seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{R}_{\mu,e}$. Für $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $\tau_{n,m}$ die Menge aller m-Tupel $(i_1, \ldots, i_m) \in \times_{j=1}^{m} \mathbb{N}_{1,n}$, für welche $1 \leq i_1 < \ldots < i_m \leq n$ erfüllt ist.*
Dann gilt $\bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathfrak{R}_{\mu,e}$, für jedes $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und jedes $(i_1, \ldots, i_m) \in \tau_{n,m}$ ist $\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k} \in \mathfrak{R}_{\mu,e}$ und es gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \left[\sum_{(i_1, \ldots i_m) \in \tau_{n,m}} \mu\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right)\right].$$

Spezialfälle der Sylvester-Poincare*schen Siebformel.* Es ist für
$n = 2$**:**

$$\mu(A_1 \cup A_2) = \mu(A_1) + \mu(A_2) - \mu(A_1 \cap A_2).$$

[2] James Joseph Sylvester (*03.09.1814; †15.03.1897) war ein britischer Mathematiker. Er erfand mehrere geometrische Instrumente, wie den Plagiographen (Schiefantograph) und den geometrischen Fächer. Ferner forschte er auf dem Gebiet der Invariantentheorie.

[2] Jules Henri Poincaré (*29.04.1854; †17.07.1912) war ein bedeutender französischer Mathematiker, theoretischer Physiker und Philosoph. Seine Forschungen hatten auch starke Wirkung auf die Astronomie, die Geodäsie, die Potentialtheorie und die Quantenphysik.

$n = 3$**:**

$$\begin{aligned}\mu(A_1 \cup A_2 \cup A_3) =& \mu(A_1) + \mu(A_2) + \mu(A_3) \\ &- \mu(A_1 \cap A_2) - \mu(A_1 \cap A_3) - \mu(A_2 \cap A_3) \\ &+ \mu(A_1 \cap A_2 \cap A_3).\end{aligned}$$ ♣

Wir wenden uns nun einer Situation zu, in der sich die Formel aus Satz M.3.2 wesentlich verschärft.

Definition M.3.1. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{R}$. Dann heißt $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *austauschbar bezüglich* μ, falls für alle $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Funktion

$$f_{n,m}\colon \tau_{n,m} \longrightarrow [0,+\infty), \quad (i_1,\ldots,i_m) \longmapsto \mu\left(\bigcap_{k=1}^{m} A_{i_k}\right)$$

jeweils konstant ist.

Bemerkung M.3.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $m \in \{1,\ldots,n\}$. Es seien $\tau_{n,m}$ wie in Satz M.3.2 erklärt. Dann ist $\tau_{n,m}$ eine endliche Menge und es gilt $\operatorname{card}\tau_{n,m} = \binom{n}{m}$. ♣

Folgerung M.3.1. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Weiterhin bezeichne $\mathfrak{R}_{\mu,e} := \{A \in \mathfrak{R} \mid \mu(A) \in [0,+\infty)\}$. Außerdem seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine bezüglich μ austauschbare Folge von Mengen aus $\mathfrak{R}_{\mu,e}$. Für $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $c_{m,n}$ den Wert der dann konstanten Funktion $f_{n,m}$ (siehe Definition M.3.1).*
Dann ist $(c_{n,m})_{m\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$ und es gilt:

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{n} A_m\right) = \sum_{m=1}^{n} (-1)^{m+1} \binom{n}{m} \cdot c_{n,m}.$$

M.4. Sigma-Algebren

Wir wenden uns in diesem Abschnitt den wichtigen Mengensystemen zu.

Definition M.4.1. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine *σ-Algebra* in Ω, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es ist $\Omega \in \mathfrak{A}$.

(II) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$.

(III) Für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}$.

Wir nennen nun einige einfache Eigenschaften.

Satz M.4.1. *Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\varnothing \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann gelten $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$ und $\bigcap_{k=1}^{n} A_k \in \mathfrak{A}$.*

(c) *Seien $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann sind $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ und $A \triangle B \in \mathfrak{A}$.*

(d) *Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$\left\{ \bigcap_{n=1}^{\infty} A_n, \limsup_{n\to\infty} A_n, \liminf_{n\to\infty} A_n \right\} \subseteq \mathfrak{A}.$$

Beispiel M.4.1. Sei Ω eine Menge. Dann sind $\{\varnothing, \Omega\}$ und $\mathfrak{P}(\Omega)$ jeweils σ-Algebren in Ω.

Satz M.4.2. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω sowie $\Omega' \subseteq \Omega$ eine beliebige Teilmenge. Es sei $\mathfrak{A}_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathfrak{A}\}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\Omega'}$ eine σ-Algebra in Ω'.*

(b) *Sei $\Omega' \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $\mathfrak{A}_{\Omega'} = \mathfrak{P}(\Omega') \cap \mathfrak{A}$.*

Satz M.4.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.4.2. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω sowie $\Omega' \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Es sei $\mathfrak{A}_{\Omega'} := \{A \cap \Omega' \mid A \in \mathfrak{A}\}$. Dann heißt $\mathfrak{A}_{\Omega'}$ die *Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in Ω'*.

Definition M.4.3. Seien Ω und Ω' jeweils nichtleere Mengen. Seien weiterhin $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ und $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{P}(\Omega')$. Dann wird definiert:

$$T^{-1}(\mathfrak{A}') := \begin{cases} \left\{ T^{-1}(A') \,\middle|\, A' \in \mathfrak{A}' \right\}, & \text{falls } \mathfrak{A}' \neq \varnothing, \\ \varnothing, & \text{falls } \mathfrak{A}' = \varnothing. \end{cases}$$

$T^{-1}(\mathfrak{A}')$ heißt dann das *volle Urbild von $\mathfrak{A}'$ unter T*.

Satz M.4.3. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω sowie $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$. Weiter sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω.*

Satz M.4.4. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω sowie $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$. Weiterhin seien $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω, sowie $\mathfrak{A}_T := \left\{ A' \in \mathfrak{P}(\Omega') \,\middle|\, T^{-1}(A') \in \mathfrak{A} \right\}$. Dann ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra in Ω'.*

Satz M.4.5. *Seien Ω eine Menge und $(\mathfrak{A}_j)_{j\in I}$ eine Familie von σ-Algebren in Ω. Dann ist auch $\bigcap_{j\in I}\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω.*

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{P}(\Omega)$. Mit $\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ wird die Menge aller σ-Algebren $\mathfrak{A}$ in Ω, die $\mathcal{E}$ enthalten, für die also $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{A}$ erfüllt ist, bezeichnet.

Satz M.4.6. *Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{P}(\Omega)\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$.*

(b) *Es sei*

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcap_{\mathfrak{A}\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})}\mathfrak{A}.$$

Dann ist $\sigma_\Omega(\mathcal{E})\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $\mathfrak{A}\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E})\subseteq\mathfrak{A}$.

(c) *Sei $\mathfrak{A}_0\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, dass für jedes $\mathfrak{A}\in\Sigma_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathfrak{A}_0\subseteq\mathfrak{A}$ besteht. Dann ist $\mathfrak{A}_0=\sigma_\Omega(\mathcal{E})$.*

(d) *Sei $\mathcal{E}$ selbst eine σ-Algebra in Ω, so gilt $\sigma_\Omega(\mathcal{E})=\mathcal{E}$.*

(e) *Es ist $\sigma_\Omega(\sigma_\Omega(\mathcal{E}))=\sigma_\Omega(\mathcal{E})$.*

Mit Satz M.4.6 wird nun die folgende Begriffsbildung ermöglicht.

Definition M.4.4. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt das in Satz M.4.6 eingeführte Mengensystem $\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ die *von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra in Ω*.

Definition M.4.5. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und $\mathcal{E}\subseteq\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ *ein Erzeuger der σ-Algebra $\mathfrak{A}$*, falls $\mathfrak{A}=\sigma_\Omega(\mathcal{E})$ gilt.

Bezeichnung. Sei (Ω,ϱ) ein metrischer Raum. Dann bezeichne $\mathcal{O}(\Omega,\varrho)$ das System der offenen Mengen in Ω. Weiterhin bezeichne $\mathcal{A}(\Omega,\varrho)$ das System der abgeschlossenen Mengen in Ω.

Definition M.4.6. Sei (Ω,ϱ) ein metrischer Raum. Dann heißt das erzeugte Mengensystem $\mathfrak{B}\coloneqq\sigma_\Omega(\mathcal{O}(\Omega,\varrho))$ die Borel*sche*[1] *σ-Algebra von (Ω,ϱ)*.

Bemerkung M.4.1. Sei (Ω,ϱ) ein metrischer Raum. Dann gilt

$$\sigma_\Omega(\mathcal{O}(\Omega,\varrho))=\sigma_\Omega(\mathcal{A}(\Omega,\varrho)).$$ ♣

Satz M.4.7. *Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen. Weiter seien $T\in\mathrm{Abb}(\Omega,\Omega')$ und $\mathcal{E}'\subseteq\mathfrak{P}(\Omega')$. Dann gilt*

$$\sigma_\Omega\left(T^{-1}(\mathcal{E}')\right)=T^{-1}(\sigma_{\Omega'}(\mathcal{E}')).$$

[1] Émile Borel (*07.01.1871; †03.02.1956) war französischer Mathematiker. Er leistete wesentliche Beiträge zur Topologie sowie Maß-, Wahrscheinlichkeits-, Funktionen- und Spieltheorie.

M.5. Maße

Definition M.5.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann heißt das geordnete Paar $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein *messbarer Raum*.

Definition M.5.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A})$ *nichttrivial*, falls $\Omega \neq \varnothing$ ist.

Definition M.5.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$. Dann heißt μ ein *Maß* auf $\mathfrak{A}$, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es gilt $\mu(\varnothing) = 0$.

(II) μ ist σ-additiv.

Definition M.5.4. Ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, so heißt das Tripel $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein *Maßraum*. Ein Maßraum heißt *nichttrivial*, falls der messbare Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ nichttrivial ist.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Die Menge aller Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet.

Beispiel M.5.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mathfrak{o} \colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $A \longmapsto 0$. Dann ist $\mathfrak{o}$ ein Maß.

Definition M.5.5. Das in Beispiel M.5.1 definierte Maß $\mathfrak{o}$ bezeichnen wir als *Nullmaß* auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Bemerkung M.5.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist μ sowohl ein Prämaß als auch ein Inhalt auf $\mathfrak{A}$. ♣

Definition M.5.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

(a) Es heißt μ *endlich*, falls $\mu(\Omega) \in [0, +\infty)$ gilt.

(b) Es heißt μ ein *Wahrscheinlichkeitsmaß*, falls $\mu(\Omega) = 1$ ist.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum.

(a) Es bezeichnet $\mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller **endlichen** Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es bezeichnet $\mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller **Wahrscheinlichkeitsmaße** auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beispiel M.5.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Wir definieren $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ gemäß

$$\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}(A) \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus A. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es gilt $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei $\widetilde{\omega} \in \Omega$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \neq \varepsilon_{\widetilde{\omega},\mathfrak{A}}$.

(ii) Es gibt ein $A \in \mathfrak{A}$ mit $\omega \in A$ und $\widetilde{\omega} \in \Omega \setminus A$.

(iii) Es gibt disjunkte Mengen A und $\widetilde{A}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $\omega \in A$ und $\widetilde{\omega} \in \widetilde{A}$.

(c) Es sei $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$. Dann sind äquivalent:

(iv) Es ist $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} \neq \varepsilon_{\widetilde{\omega},\mathfrak{A}}$.

(v) Es ist $\omega \neq \widetilde{\omega}$.

(d) Sei $\mathfrak{A} := \{\varnothing, \Omega\}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein σ-Algebra in Ω und es gilt $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = \varepsilon_{\widetilde{\omega},\mathfrak{A}}$.

Definition M.5.7. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Sei $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ wie in Beispiel M.5.2 definiert. Dann heißt $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ ein *Dirac-Maß auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *mit Einheitsmasse in* ω.

Satz M.5.1. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum und sei* $\mathcal{N}_\mu := \{A \in \mathfrak{A} \mid \mu(A) = 0\}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathcal{N}_\mu \neq \varnothing$.

(b) *Sei* $B \in \mathcal{N}_\mu$. *Dann gilt* $\mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}(B) \subseteq \mathcal{N}_\mu$.

(c) *Sei* $n \in \mathbb{N}$ *und* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{N}_\mu$. *Dann gilt* $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \in \mathcal{N}_\mu$.

(d) *Sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{N}_\mu$. *Dann gilt* $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{N}_\mu$.

Satz M.5.2 (Erstes Lemma von Borel-Cantelli[1]). *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein Maßraum. Ferner sei* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *ein Folge aus* $\mathfrak{A}$ *mit* $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) < +\infty$. *Dann gilt*

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

Beweis. Sei $\varepsilon > 0$ beliebig vorgegeben. Da die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$ konvergiert, existiert ein $k_0 \in \mathbb{N}$ mit

$$\sum_{n=k_0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \varepsilon. \tag{1}$$

Nach Teil *(d)* von Satz M.4.1 gilt

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Weiter ist nun

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \bigcap_{m=1}^{\infty} \bigcup_{n=m}^{\infty} A_n \subseteq \bigcup_{n=k_0}^{\infty} A_n. \tag{3}$$

Da nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,k_0-1}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra ist, gilt

$$\bigcup_{n=k_0}^{\infty} A_n \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Damit erhalten wir nun aus (2), (3), (4) sowie der Isotonie und σ-Subadditivität von μ und (1) schließlich

$$0 \leq \mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) \leq \mu\left(\bigcup_{n=k_0}^{\infty} A_n\right) \leq \sum_{n=k_0}^{\infty} \mu(A_n) \leq \varepsilon. \tag{5}$$

[1] Francesco Paolo Cantelli (*20.12.1875; †21.07.1966) war italenischer Mathematiker. Er ist vor allem für das nach ihm benannte Lemma von Borel-Cantelli bekannt. Weiterhin bewies er eine Version des starken Gesetzes der großen Zahlen.

Da $\varepsilon > 0$ beliebig gewählt war, können wir aus (5)

$$\mu\left(\limsup_{n\to\infty} A_n\right) = 0$$

schließen. Also ist

$$\limsup_{n\to\infty} A_n \in \mathcal{N}_\mu.$$

□

Satz M.5.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum mit endlichem Maß μ, $(A_j)_{j\in I}$ eine Familie von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ und $I_0 \coloneqq \{j \in I \,|\, \mu(A_j) \neq 0\}$. Dann ist I_0* höchstens abzählbar.

Satz M.5.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum mit endlichem Maß μ. Weiter seien $X_{\mathfrak{A}} \coloneqq \{\omega \in \Omega \,|\, \{\omega\} \in \mathfrak{A}\}$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} \coloneqq \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann gilt*

$$X_{\mathfrak{A},\mu} = \{\omega \in X_{\mathfrak{A}} \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$$

und zudem ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ ist höchstens abzählbar.

M.6. Operationen mit Maßen

Wir wollen nun einige Operationen studieren, mit deren Hilfe man aus Maßen auf einen messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ wieder Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ konstruieren kann.

Satz M.6.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Weiter seien $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ sowie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Man beachte, dass $0 \cdot (+\infty) := 0$ gesetzt wird.

(b) *Es sei $\pi\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{N}$ eine Bijektion (also eine Permutation der natürlichen Zahlen). Dann gilt:*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_{\pi(n)} \mu_{\pi(n)}.$$

(c) *Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(c1) *Es ist*

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n\right)(\Omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n.$$

(c2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \mu_n \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(ii) *Es ist*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n = 1.$$

Satz M.6.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Weiter seien $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ sowie $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Maßen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Falls $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(b) *Sei $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist*

$$\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j\right)(\Omega) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j.$$

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(ii) *Es ist*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1.$$

Folgerung M.6.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \setminus \{\mathfrak{o}\}$, wobei $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichne. Dann ist $\mu(\Omega) \in (0, +\infty)$ und*

$$\nu = \frac{1}{\mu(\Omega)} \mu \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Wir wenden uns nun der Vererbung von Maßeigenschaften auf auf Teil-σ-Algebren zu.

Satz M.6.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\widetilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$.*

(b) *Es sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\widetilde{\mu} := \mu \restriction \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$. Dann ist $\widetilde{\mu} \in \mathcal{M}_+(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}})$ und es gilt $\widetilde{\mu}(\widetilde{\Omega}) = \mu(\widetilde{\Omega})$.*

(c) *Sei $\widetilde{\mu} \in \mathcal{M}_+(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}})$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $A \longmapsto \widetilde{\mu}(A \cap \widetilde{\Omega})$. Dann ist μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, für das $\mu(\Omega) = \widetilde{\mu}(\widetilde{\Omega})$ sowie $\widetilde{\mu} = \mu \restriction \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$ erfüllt sind.*

Satz M.6.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$. Es sei $\mu_{[A]}\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $B \longmapsto \mu(B \cap A)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu_{[A]}$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, für das $\mu_{[A]} \leq \mu$, sowie $\Omega \setminus A \in \mathcal{N}_{\mu_{[A]}}$ und $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_{\mu_{[A]}}$ erfüllt sind.*

(b) *Es gilt $\mu_{[A]}(\Omega) = \mu(A)$.*

(c) *Es bezeichne $\mathfrak{A}_A$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in A. Dann ist $\mathfrak{A}_A$ eine σ-Algebra in A, für welche $\mathfrak{A}_A \subseteq \mathfrak{A}$ erfüllt ist und es gilt $\mu \restriction \mathfrak{A}_A = \mu_{[A]} \restriction \mathfrak{A}_A$.*

Bemerkung M.6.1. Es seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Mit den Bezeichnungen aus Satz M.6.4 sei ν_A definiert gemäß

$$\nu_A := \frac{1}{\mu(A)} \mu_{[A]},$$

das heißt, für jedes $B \in \mathfrak{A}$ ist

$$\nu_A(B) := \frac{1}{\mu(A)} \mu(B \cap A).$$

Dann gilt $\nu_A \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$, $\Omega \setminus A \in \mathcal{N}_{\nu_A}$ und $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_{\nu_A}$. ♣

Bemerkung M.6.1 führt uns nun auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.6.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Es sei ν_A wie in Bemerkung M.6.1 definiert. Man nennt dann ν_A die *μ-Gleichverteilung auf A*.

Satz M.6.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass $\{\mu(B_1), \mu(B_2)\} \subseteq (0, +\infty)$ erfüllt ist. Es bezeichne ν_{B_1} bzw. ν_{B_2} die μ-Gleichverteilung auf B_1 bzw. B_2. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist $\nu_{B_1} = \nu_{B_2}$.*

  (ii) *Es ist $B_1 \triangle B_2 \in \mathcal{N}_\mu$.*

(b) *Es gilt $\{B_1 \cup B_2, B_1 \cap B_2\} \subseteq \mathfrak{A}$ und falls* (i) *erfüllt ist, gilt auch $\mu(B_1) = \mu(B_2) = \mu(B_1 \cap B_2) = \mu(B_1 \cup B_2)$ sowie $\nu_{B_1} = \nu_{B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2} = \nu_{B_1 \cup B_2}$.*

Folgerung M.6.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum sowie $B_1, B_2 \in \mathfrak{A}$ derart gewählt, dass dann $\{\mu(B_1 \cap B_2), \mu(B_1) \cdot \mu(B_2)\} \subseteq (0, +\infty)$ erfüllt ist, so gilt:*

(a) *Es ist $\mu(B_1 \cup B_2) \in (0, +\infty)$.*

(b) *Sei $\nu_{B_1 \cup B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2}$. Dann gilt $\nu_{B_1} = \nu_{B_2} = \nu_{B_1 \cap B_2}$.*

M.7. Maße auf total atomar messbaren Räumen

Im Zentrum dieses Abschnittes stehen Maßräume mit spezieller Struktur.

Definition M.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann heißt $(\Omega, \mathfrak{A})$ *total atomar*, falls für alle $\omega \in \Omega$ auch $\{\omega\} \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist.

Beispiel M.7.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ total atomar.

Beispiel M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{B})$ ein metrischer Raum mit zugehöriger BORELscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$ in Ω und Metrik ϱ. Dann ist $(\Omega, \mathfrak{B})$ total atomar.

BEWEIS. Sei $\omega \in \Omega$ beliebig gewählt. Dann in $\{\omega\} \in \mathcal{A}(\Omega, \varrho)$. Damit folgt $\{\omega\} \in \mathfrak{B}$. □

Bemerkung M.7.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomar messbarer Raum. Weiter sei A eine höchstens abzählbare Teilmenge von Ω. Dann gilt:

(a) Es ist $A \in \mathfrak{A}$.

(b) Es ist $\{A \cap B \mid B \in \mathfrak{A}\} = \mathfrak{P}(A)$. ♣

Wir wenden uns nun speziellen Klassen von total atomaren messbaren Räumen zu.

Definition M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ *diskret*, falls es eine höchstens abzählbare Teilmenge N von Ω existiert, so dass $\Omega \setminus N \in \mathcal{N}_\mu$ gilt.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein.

(a) Die Menge aller diskreten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}) := \{\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A}) \mid \mu \text{ ist diskret}\}.$$

(b) Die Menge aller endlichen diskreten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet. Es gilt

$$\mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(c) Die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ wird mit $\mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet. Es gilt

$$\mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Bemerkung M.7.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomar messbarer Raum. Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Lemma M.7.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt*

$$\sum_{j\in I} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(b) *Seien $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $(0, +\infty]$ und $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ mit der Eigenschaft $\sum_{j\in I} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.*

Wir analysieren nun die Struktur von diskreten Maßen auf total atomar messbaren Räumen.

Lemma M.7.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $[0,+\infty]$, $(\omega_j)_{j\in I}$ eine Folge aus Ω und $\mu \coloneqq \sum_{j\in I} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.*

(b) *Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und sei $I' \coloneqq \{j \in I \,|\, \alpha_j \in (0,+\infty]\}$. Weiter sei $X_{\mathfrak{A},\mu} \coloneqq \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann gilt:*

$$\mu = \begin{cases} \mathfrak{o}, & \text{falls } I' = \varnothing, \\ \sum_{j\in I'} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}, & \text{falls } I' \neq \varnothing, \end{cases}$$

sowie

$$X_{\mathfrak{A},\mu} = \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } I' = \varnothing, \\ \bigcup_{j\in I'} \{\omega_j\}, & \text{falls } I' \neq \varnothing. \end{cases}$$

(c) *Für alle $k,l \in I$ mit $k \neq l$ gelte $\omega_k \neq \omega_l$. Weiter sei $j \in I$. Dann gilt:*

$$\mu(\{\omega_j\}) = \alpha_j.$$

Lemma M.7.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und μ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, für das eine höchstens abzählbare Menge X von Ω und $\Omega \setminus X \in \mathcal{N}_\mu$ existiert. Dann gelten $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\mu = \sum_{\omega\in X} \mu(\{\omega\}) \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$.*

Satz M.7.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} \coloneqq \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ höchstens abzählbar und es gilt $X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu = \mathfrak{o}$.*

(ii) *Es ist $X_{\mathfrak{A},\mu} = \varnothing$.*

(c) *Es gilt*

$$\mu = \begin{cases} \mathfrak{o}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} = \varnothing, \\ \sum_{\omega\in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\}) \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} \neq \varnothing. \end{cases}$$

Folgerung M.7.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Seien $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} \coloneqq \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ eine nichtleere höchstens abzählbare Teilmenge von Ω und es gilt*

$$\mu = \sum_{\omega\in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\}) \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$$

sowie

$$\sum_{\omega\in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\}) = 1.$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) *Es gibt einen Abschnitt* I *von* $\mathbb{N}$ *sowie Folgen* $(\alpha_j)_{j\in I}$ *aus* $[0, +\infty)$ *und* $(\omega_j)_{j\in I}$ *aus* Ω *derart, dass*

$$\mu = \sum_{j\in I} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j, \mathfrak{A}}$$

und

$$\sum_{j\in I} \alpha_j = 1$$

erfüllt sind.

Folgerung M.7.2. *Seien* Ω *eine nichtleere höchstens abzählbare Menge und außerdem* $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ *ein total atomarer messbarer Raum.*

(b) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.

(c) *Seien* I *ein Abschnitt von* $\mathbb{N}$ *und* $(\omega_j)_{j\in I}$ *eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus* Ω *mit* $\Omega = \bigcup_{j\in I} \{\omega_j\}$. *Dann gilt:*

(c1) *Es ist*

$$\mu = \sum_{j\in I} \mu(\{\omega_j\})\, \varepsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}.$$

(c2) *Sei* μ *das Zählmaß auf* $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. *Dann gilt*

$$\mu = \sum_{j\in I} \varepsilon_{\omega_j, \mathfrak{P}(\Omega)}.$$

Definition M.7.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ *molekular*, falls es eine endliche Menge $N \subseteq \Omega$ mit $\mu(\Omega \setminus N) = 0$ gibt.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

(a) $\mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller molekularen Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}) := \{\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A}) \mid \mu \text{ ist molekular}\}.$$

(b) $\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller molekularen beschränkten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(c) $\mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller molekularen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Bemerkung M.7.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Lemma M.7.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Lemma M.7.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$, $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus Ω und $\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.*

(b) *Für alle $k, l \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $k \neq l$ gelte $\omega_k \neq \omega_l$. Weiter sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $\mu(\{\omega_j\}) = \alpha_j$.*

Lemma M.7.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+^{mol}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $X_{\mathfrak{A},\mu} := \{\omega \in \Omega \,|\, \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ eine endliche Menge.*

Lemma M.7.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,mol}(\Omega, \mathfrak{A})$.*

(ii) *Es gibt ein $n \in \mathbb{N}$ sowie Folgen $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $[0, +\infty)$ und $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus Ω, so dass*

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}$$

und

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j = 1$$

gilt.

Lemma M.7.8. *Seien Ω eine nichtleere endliche Menge und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann gelten:*

(a) *$(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$ ist ein total atomarer messbarer Raum.*

(b) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$.*

(c) *Sei $n := \operatorname{card}\Omega$ und $(\omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus Ω mit $\Omega = \bigcup_{j=1}^{n} \{\omega_j\}$. Dann gilt:*

(c1) *Es ist*

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \mu(\{\omega_j\}) \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{P}(\Omega)}.$$

(c2) *Sei μ das Zählmaß auf $(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega))$. Dann gilt*

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{P}(\Omega)}.$$

Wir betrachten nun eine Klasse von Maßen auf einem total atomarer messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, welche in gewissem Sinne, als das Gegenstück der Klasse $\mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ anzusehen sind.

Definition M.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt μ *stetig*, falls für alle $\omega \in \Omega$ die Beziehung $\mu(\{\omega\}) = 0$ besteht.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Wir führen die folgenden Bezeichnungen ein:

(a) $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller stetigen Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}) \coloneqq \{\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A}) \mid \mu \text{ ist stetig}\}.$$

(b) $\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller stetigen beschränkten Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A}) \coloneqq \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(c) $\mathcal{M}_+^{1,c}(\Omega, \mathfrak{A})$ bezeichnet die Menge aller stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Es gilt also

$$\mathcal{M}_+^{1,c}(\Omega, \mathfrak{A}) \coloneqq \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Bemerkung M.7.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\mathfrak{o} \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Bemerkung M.7.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei A eine höchstens abzählbare Teilmenge von Ω. Dann gilt $A \in \mathcal{N}_\mu$. ♣

Bemerkung M.7.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und I ein Abschnitt $\mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Seien $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ und $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist

$$\sum_{j\in I} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}).$$

(b) Seien $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$, für welche $\sum_{j\in I} \alpha_j \mu_j \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ erfüllt ist. Dann ist $(\mu_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Bemerkung M.7.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A}) = \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A}) = \{\mathfrak{o}\}.$$ ♣

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz M.7.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Sei $X_{\mathfrak{A},\mu} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \mu(\{\omega\}) \neq 0\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{A},\mu}$ höchstens abzählbar und es gilt $X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ und es sei*

$$\mu_d \coloneqq \begin{cases} \mathfrak{o}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} = \varnothing, \\ \sum_{\omega\in X_{\mathfrak{A},\mu}} \mu(\{\omega\})\, \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}, & \text{falls } X_{\mathfrak{A},\mu} \neq \varnothing. \end{cases}$$

Dann gilt:

(b1) *Mit der Bezeichnung von Satz M.6.4 gilt* $\mu_d = \mu_{[X_{\mathfrak{A},\mu}]}$.

(b2) *Es gilt* $\mu_d \leq \mu$.

(b3) *Es ist* $\mu_d \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt* $\mu_d(\Omega) = \mu(X_{\mathfrak{A},\mu})$.

(c) *Sei* $\mu_c \coloneqq \mu - \mu_d$. *Dann gilt:*

(c1) *Es ist* $\mu_c \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt* $\mu = \mu_c + \mu_d$.

(c2) *Es ist* $\Omega \setminus X_{\mathfrak{A},\mu} \in \mathfrak{A}$ *und mit der Bezeichnung von Satz M.6.4 gilt* $\mu_c = \mu_{[\Omega \setminus X_{\mathfrak{A},\mu}]}$ *sowie* $\mu_c(\Omega) = \mu(\Omega \setminus X_{\mathfrak{A},\mu})$.

(d) *Es gibt genau ein* $\widetilde{\mu}_c \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ *und genau ein* $\widetilde{\mu}_d \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$ *mit* $\mu = \widetilde{\mu}_c + \widetilde{\mu}_d$, *nämlich* $\widetilde{\mu}_c = \mu_c$ *und* $\widetilde{\mu}_d = \mu_d$.

(e) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) *Es ist* $\mu = \mu_d$.

(iii) *Es ist* $\mu_c = \mathfrak{o}$.

(f) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iv) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$.

(v) *Es ist* $\mu = \mu_c$.

(vi) *Es ist* $\mu_d = \mathfrak{o}$.

Der Satz M.7.2 führt uns nun auf die folgende Begriffsbildung.

Definition M.7.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißen die in Satz M.7.2 eingeführten Maße $\mu_c \in \mathcal{M}_+^{c,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\mu_d \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega, \mathfrak{A})$ der *stetige* und *diskrete Anteil von* μ.

M.8. Absolutstetigkeit und Singularität von Maßen

Das Hauptziel dieses Abschnittes besteht im Studium von Wechselbeziehungen zwischen Maßen μ und ν auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$. Insbesondere interessiert uns die gegenseitige Konstellation der System $\mathcal{N}_\mu$ und $\mathcal{N}_\nu$.

Definition M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

(a) Es heißt ν *absolutstetig bezüglich* μ, falls $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ erfüllt ist. In diesem Falle schreibt man $\nu \ll \mu$.

(b) Es heißen μ und ν *äquivalent*, falls $\mathcal{N}_\nu = \mathcal{N}_\mu$. In diesem Falle schreibt man $\nu \sim \mu$.

Bemerkung M.8.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum. Dann gilt:

(a) Die in der obigen Definition definierte Relation $\ll$ ist reflexiv und transitiv.

(b) Die in der obigen Definition definierte Relation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. ♣

Beispiel M.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und $\widetilde{\Omega}$ eine Menge aus $\mathfrak{A}$, für die $\mu(\widetilde{\Omega}) \in (0, +\infty)$ erfüllt ist. Es bezeichne $\nu_{\tilde{\Omega}}$ die μ-Gleichverteilung auf $\widetilde{\Omega}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\nu_{\tilde{\Omega}} \ll \mu$.

(b) Die folgenden Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \sim \nu_{\tilde{\Omega}}$.

(ii) Es ist $\Omega \setminus \widetilde{\Omega} \in \mathcal{N}_\mu$.

(c) Sei *(ii)* erfüllt. Dann gelten $\mu(\Omega) \in (0, +\infty)$ sowie

$$\nu_{\tilde{\Omega}} = \frac{1}{\mu(\Omega)}\mu.$$

Bemerkung M.8.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei ν ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, welches bezüglich μ absolutstetig ist. Dann gilt $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$. Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ gilt $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\mu$. Da ν bezüglich μ absolutstetig ist, gilt $\mathcal{N}_\nu \subseteq \mathcal{N}_\mu$ und folglich $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\nu$. Also gilt $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Wir wenden uns nun einer Klasse von Maßen auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ zu, welche im gewissen Sinne diametral zu der Klasse bezüglich μ absolut stetigen Maßen anzusehen sind.

Definition M.8.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt ν *singulär bezüglich* μ, falls ein $N \in \mathcal{N}_\mu$ existiert, für welches $\Omega \setminus N \in \mathcal{N}_\nu$ gilt. Man schreibt dann $\nu \perp \mu$.

Definition M.8.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann heißt A *Träger von* μ, falls $\Omega \setminus A \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist.

Lemma M.8.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\nu \perp \mu$.*

(ii) *Es ist* $\mu \perp \nu$.

(iii) *Es gibt einen Träger* C *von* μ *und einen Träger* D *von* ν *mit* $C \cap D = \varnothing$.

(iv) *Es gibt ein* $N \in \mathcal{N}_\mu$ *derart, dass für alle* $A \in \mathfrak{A}$ *dann* $\nu(A) = \nu(A \cap N)$ *gilt.*

(v) *Es gibt ein* $N \in \mathcal{N}_\nu$ *derart, dass für alle* $A \in \mathfrak{A}$ *dann* $\mu(A) = \mu(A \cap N)$ *gilt.*

Bemerkung M.8.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\nu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\nu \perp \mu$. ♣

Beweis. Da ν ein diskretes Maß ist, existiert eine höchstens abzählbare Teilmenge N von Ω mit $\Omega \setminus N \in \mathcal{N}_\nu$. Da N eine höchstens abzählbare Teilmenge von Ω ist und μ als stetiges Maß vorausgesetzt wurde, folgt nach Bemerkung M.7.5 dann $N \in \mathcal{N}_\mu$. Somit gilt $\mu \perp \nu$. □

Bemerkung M.8.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomarer messbarer Raum. Weiter seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\alpha_j)_{j\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$, $(\omega_j)_{j\in I}$ eine Folge aus Ω und $\nu := \sum_{j\in I} \alpha_j \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\nu \in \mathcal{M}_+^d(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt $\nu \perp \mu$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Lemma M.7.2.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* und Bemerkung M.8.3. □

Das folgende Resultat zeigt, dass sich die Begriffe „absolutstetig bezüglich μ“ und „singulär bezüglich μ“ diametral gegenüber stehen.

Satz M.8.1. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein messbarer Raum und* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. *Weiter bezeichne* $\mathfrak{o}$ *das Nullmaß auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gelten* $\nu \ll \mu$ *und* $\nu \perp \mu$.

(ii) *Es ist* $\nu = \mathfrak{o}$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Wegen $\mu \perp \nu$ gibt es ein $N \in \mathfrak{A}$ mit $N \in \mathcal{N}_\mu$ und $\Omega \setminus N \in \mathcal{N}_\nu$. Wegen $\nu \ll \mu$ gilt $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ und somit $N \in \mathcal{N}_\nu$. Wegen $\{N, \Omega \setminus N\} \subseteq \mathcal{N}_\nu$ und $\Omega = N \cup (\Omega \setminus N)$ liefert Teil *(c)* von Satz M.5.1 dann $\Omega \in \mathcal{N}_\nu$. Damit ist aber $\nu = \mathfrak{o}$ und es gilt *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Wegen $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathfrak{A} = \mathcal{N}_\mathfrak{o}$gilt $\mathfrak{o} \ll \mu$ und wegen $\varnothing \in \mathcal{N}_\mu$, sowie $\Omega \setminus \varnothing = \Omega \in \mathcal{N}_\mathfrak{o}$ ist $\mathfrak{o} \perp \mu$. Hieraus folgt wegen *(ii)* dann *(i)*. □

Folgerung M.8.1. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein messbarer Raum und* $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. *Es bezeichne* $\mathfrak{o}$ *das Nullmaß auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu \perp \mu$.

(ii) *Es gilt* $\mu = \mathfrak{o}$.

M.9. Dynkin[1)]-Systeme

Häufig muss festgestellt werden, ob ein Mengensystem eine σ-Algebra ist. Dies ist nicht immer auf dem direkten Weg möglich. Ein hilfreicher Umweg ist der über den in diesem Abschnitt definierten Dynkin-System.

Definition M.9.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{D}$ *Dynkin-System in* Ω, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es ist $\Omega \in \mathfrak{D}$.

(II) Für alle $D \in \mathfrak{D}$ gilt $\Omega \setminus D \in \mathfrak{D}$.

(III) Für alle Folgen $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten aus $\mathfrak{D}$ gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}$.

Bemerkung M.9.1. Sei Ω eine Menge und $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System in Ω. Dann gelten:

(a) Es ist $\varnothing \in \mathfrak{D}$.

(b) Sei $n \in \mathbb{N}$ und $(D_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{D}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{n} D_j \in \mathfrak{D}$. ♣

Beispiel M.9.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ ein Dynkin-System in Ω.

Wir wollen nun einige Charakterisierungen von Dynkin-Systemen herleiten. Hierzu benötigen wir noch eine Begriffsbildung.

Definition M.9.2. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$.

(a) Es heißt $\mathfrak{A}$ *komplementiert*, falls für alle $A \in \mathfrak{A}$ auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$ gilt.

(b) Es heißt $\mathfrak{A}$ *relativ komplementiert*, falls für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $B \subseteq A$ auch $A \setminus B \in \mathfrak{A}$ gilt.

Bemerkung M.9.2. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ ein relativ komplementiertes Mengensystem in Ω mit $\Omega \in \mathfrak{A}$. Dann ist $\mathfrak{A}$ komplementiert. ♣

Lemma M.9.1. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ ein komplementiertes Mengensystem in Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathfrak{A}$ relativ komplementiert.*

(ii) *Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ mit $A \cap B = \varnothing$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{A}$.*

Satz M.9.1. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω.*

(ii) *$\mathfrak{D}$ besitzt die Eigenschaften* (I) *und* (III) *aus Definition M.9.1 und ist relativ komplementiert.*

Satz M.9.2. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω.*

[1)] Eugene B. Dynkin: (* 11.05.1924) ist ein russischer Mathematiker. Er leistete wesentliche Beiträge zur Theorie der Markow-Ketten.

(ii) $\mathfrak{D}$ *hat die folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist* $\Omega \in \mathfrak{D}$.

(II) $\mathfrak{D}$ *ist komplementiert.*

(III) *Für alle* $A, B \in \mathfrak{D}$ *mit* $A \cap B = \varnothing$ *gilt* $A \cup B \in \mathfrak{D}$.

(IV) *Für jede isotone Folge* $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathfrak{D}$ *gilt* $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}$.

(iii) $\mathfrak{D}$ *erfüllt* (I) *bis* (III) *sowie:*

(V) *Für jede antitone Folge* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* $\mathfrak{D}$ *gilt* $\bigcap_{n=1}^{\infty} E_n \in \mathfrak{D}$.

(iv) $\mathfrak{D}$ *erfüllt* (I) *und* (IV) *und ist relativ komplementiert.*

(v) $\mathfrak{D}$ *erfüllt* (I) *und* (V) *und ist relativ komplementiert.*

Ein zentrales Thema dieses Abschnittes ist die Diskussion des Verhältnisses zwischen Dynkin-Systemen und σ-Algebren.

Beispiel M.9.2. Sei $\Omega := \{1, 2, 3, 4\}$ und sei $\mathfrak{D} := \{\varnothing, \{1, 2\}, \{3, 4\}, \{1, 3\}, \{2, 4\}, \Omega\}$. Dann ist $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System in Ω, aber *keine* σ-Algebra in Ω.

Definition M.9.3. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ *vereinigungsstabil* bzw. *durchschnittsstabil*, falls für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ auch $A \cup B \in \mathfrak{A}$ bzw. $A \cap B \in \mathfrak{A}$ gilt.

Es folgt nun das erste Hauptresultat dieses Abschnittes.

Satz M.9.3. *Seien* Ω *eine Menge und* $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\mathfrak{D}$ *ist eine* σ*-Algebra in* Ω.

(ii) $\mathfrak{D}$ *ist ein Dynkin-System in* Ω *und für alle* $A, B \in \mathfrak{D}$ *gilt* $A \setminus B \in \mathfrak{D}$.

(iii) $\mathfrak{D}$ *ist ein* durchschnittsstabiles *Dynkin-System in* Ω.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Wegen *(i)* folgt aus Definition M.4.1 und Definition M.9.1 sogleich, dass $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System ist. Ferner folgt aus *(i)* mittels Teil *(c)* von Satz M.4.1 für $A, B \in \mathfrak{D}$ auch $A \setminus B \in \mathfrak{D}$. Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(iii)*****:** Seien $A, B \in \mathfrak{D}$. Da $\mathfrak{D}$ nach *(ii)* ein Dynkin-System ist, gilt wegen $B \in \mathfrak{D}$ auch $\Omega \setminus B \in \mathfrak{D}$. Wegen $A \in \mathfrak{D}$ und $\Omega \setminus B \in \mathfrak{D}$ folgt mit *(ii)* dann $A \setminus (\Omega \setminus B) \in \mathfrak{D}$. Hieraus und aus $A \cap B = A \cap [\Omega \setminus (\Omega \setminus B)] = A \setminus (\Omega \setminus B)$ folgt dann $A \cap B \in \mathfrak{D}$. Also ist $\mathfrak{D}$ durchschnittsstabil. Es gilt somit *(iii)*.

(iii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Da $\mathfrak{D}$ nach *(iii)* ein Dynkin-System ist, folgt aus Teil *(I)* von Definition M.9.1 dann $\Omega \in \mathfrak{D}$ sowie aus Teil *(II)* von Definition M.9.1 für $A \in \mathfrak{D}$ weiterhin $\Omega \setminus A \in \mathfrak{D}$. Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{D}$ gegenüber endlicher Vereinigungsbildung abgeschlossen ist. Seien $A, B \in \mathfrak{D}$. Da $\mathfrak{D}$ nach *(iii)* durchschnittsstabil ist, gilt dann $A \cap B \in \mathfrak{D}$. Wegen $A \setminus B = A \setminus (A \cap B)$, $\{A, A \cap B\} \subseteq \mathfrak{D}$ und $A \cap B \subseteq A$ folgt, da $\mathfrak{D}$ nach *(iii)* ein Dynkin-System in Ω ist, mittels Satz M.9.1 dann $A \setminus B \in \mathfrak{D}$. Ferner folgt aus $\{B, A \setminus B\} \subseteq \mathfrak{D}$, $A \cup B = B \cup (A \setminus B)$ und $B \cap (A \setminus B) = \varnothing$ mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.9.1 dann $A \cup B \in \mathfrak{D}$, da $\mathfrak{D}$ nach *(iii)* ein Dynkin-System in Ω ist. Somit ist also $\mathfrak{D}$ bezüglich endlicher Vereinigungsbildung

abgeschlossen.
Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{D}$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $D_n \coloneqq \bigcup_{k=1}^{n} A_n$. Nach dem eben Gezeigten gilt dann $D_n \in \mathfrak{D}$. Außerdem gilt weiter $D_n \subseteq D_{n+1}$. Hieraus folgt mittels Teil *(ii)* aus Satz M.9.2 dann $\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}$, da $\mathfrak{D}$ nach *(iii)* ein Dynkin-System in Ω ist. Ferner folgt aus der Konstruktion der Folge $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} D_n$. Es ist also $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathfrak{D}$. Somit ist $\mathfrak{D}$ eine σ-Algebra in Ω, es gilt also *(i)*. □

Satz M.9.4. *Seien Ω eine Menge, $(\mathfrak{D}_j)_{j\in I}$ eine Familie von Dynkin-Systemen in Ω. Dann ist auch $\bigcap_{j\in I} \mathfrak{D}_j$ ein Dynkin-System in Ω.*

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Mit $\Delta_\Omega(\mathcal{E})$ wird die Menge aller Dynkin-Systeme $\mathfrak{D}$ in Ω, für die $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}$ erfüllt ist, bezeichnet. Es gilt damit

$$\Delta_\Omega(\mathcal{E}) \coloneqq \{\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega) \mid \mathfrak{D} \text{ ist Dynkin-System in } \Omega,\ \mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}\}.$$

Satz M.9.5. *Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{P}(\Omega) \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$, also insbesondere $\Delta_\Omega(\mathcal{E}) \neq \varnothing$.*

(b) *Es sei*

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) \coloneqq \bigcap_{\mathfrak{D}\in\Delta_\Omega(\mathcal{E})} \mathfrak{D}.$$

Dann ist $\delta_\Omega(\mathcal{E}) \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ und für jedes $\mathfrak{D} \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ gilt $\delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}$.

(c) *Sei $\mathfrak{D}_0 \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ so beschaffen, dass für jedes $\mathfrak{D} \in \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ die Inklusion $\mathfrak{D}_0 \subseteq \mathfrak{D}$ besteht. Dann ist $\mathfrak{D}_0 = \delta_\Omega(\mathcal{E})$.*

(d) *Sei $\mathcal{E}$ selbst ein Dynkin-System in Ω, so gilt $\delta_\Omega(\mathcal{E}) = \mathcal{E}$.*

(e) *Es ist $\delta_\Omega(\delta_\Omega(\mathcal{E})) = \delta_\Omega(\mathcal{E})$.*

Satz M.9.5 führt auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.9.4. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt das in Satz M.9.5 definierte Dynkin-System $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ das *von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System* in Ω.

Definition M.9.5. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{D}$ ein Dynkin-System in Ω. Weiter sei $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathcal{E}$ ein *Erzeuger von $\mathfrak{D}$*, falls $\delta_\Omega(\mathcal{E}) = \mathfrak{D}$ erfüllt ist.

Wir beziehen uns nun auf die Bezeichnungen aus Abschnitt M.4 (vgl. Satz M.4.6).

Bemerkung M.9.3. Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten $\Sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \Delta_\Omega(\mathcal{E})$ sowie $\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \delta_\Omega(\mathcal{E})$ und $\sigma_\Omega(\delta_\Omega(\mathcal{E})) = \sigma_\Omega(\mathcal{E})$. ♣

Es folgt nun das zentrale Resultat dieses Abschnittes.

Satz M.9.6. *Seien Ω eine Menge und $\mathcal{E}$ eine* durchschnittsstabile *Teilmenge von $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt*

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) = \sigma_\Omega(\mathcal{E}).$$

Beweis. Wegen Bemerkung M.9.3 gilt

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra in Ω ist. Da $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ nach Satz M.9.5 ein Dynkin-System ist, genügt es nach Satz M.9.3 nachzuweisen, dass $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ durchschnittsstabil ist. Dies soll nun geschehen. Sei

$$D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{2}$$

Dann wird definiert

$$\mathfrak{D}_D \coloneqq \{Q \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid Q \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E})\}. \tag{3}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{D}_D$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wegen (2) und $\Omega \cap D = D$ folgt aus (3) dann

$$\Omega \in \mathfrak{D}_D. \tag{4}$$

Sei nun

$$Q \in \mathfrak{D}_D. \tag{5}$$

Wegen (5) und (3) ist dann

$$Q \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{6}$$

Da $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (2) und $Q \cap D \subseteq D$ mittels Satz M.9.1 dann $D \setminus (Q \cap D) \in \delta_\Omega(\mathcal{E})$, also wegen $(\Omega \setminus Q) \cap D = D \setminus (Q \cap D)$ dann $(\Omega \setminus Q) \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E})$. Hieraus folgt wegen (3) dann

$$\Omega \setminus Q \in \mathfrak{D}_D. \tag{7}$$

Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{D}_D$. Damit ist auch $(Q_n \cap D)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen, welche wegen (3) aus $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ ist. Hieraus folgt, da $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, dann $\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap D) \in \delta_\Omega(\mathcal{E})$. Nun ist

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(Q_n \cap D) = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) \cap D,$$

also gilt $(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n) \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E})$. Dies impliziert wegen (3) dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathfrak{D}_D.$$

Kombiniert man dies mit (4), (5) und (6), so erkennt man, dass $\mathfrak{D}_D$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wir zeigen nun, dass $\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_D$ erfüllt ist. Sei also

$$E \in \mathcal{E}. \tag{8}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.9.5 gilt

$$\mathcal{E} \subseteq \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$E \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{10}$$

Wegen (10) folgt aus dem schon Gezeigten, dass $\mathfrak{D}_E$ ein Dynkin-System in Ω ist. Wir zeigen nun, dass die Inklusion $\delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_E$ gültig ist. Sei

$$F \in \mathcal{E}. \tag{11}$$

Da $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist, folgt aus (8) und (11)

$$F \cap E \in \mathcal{E}. \tag{12}$$

Aus (9) und (12) folgt dann

$$F \cap E \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{13}$$

Wegen (10), (13), (2) und (3) folgt dann

$$F \in \mathfrak{D}_E. \tag{14}$$

Aus (11) und (14) folgt dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_E. \tag{15}$$

Da $\mathfrak{D}_E$ bereits als Dynkin-System in Ω erkannt wurde, folgt aus (15) mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann

$$\delta(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_E. \tag{16}$$

Wir zeigen nun, dass $\delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_D$ erfüllt ist. Sei dazu

$$D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{17}$$

Wegen (16) und (17) gilt dann

$$D \in \mathfrak{D}_E. \tag{18}$$

Aus (18) und (3) folgt dann

$$E \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{19}$$

Ferner gilt wegen (19) und (3)

$$E \in \mathfrak{D}_D. \tag{20}$$

Weiterhin können wir aus (8) und (20) dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_D \tag{21}$$

folgern. Da $\mathfrak{D}_D$ bereits als Dynkin-System in Ω erkannt wurde, folgt wegen (21) mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_D. \tag{22}$$

Seien

$$C, D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{23}$$

Wegen (22) ist dann $C \in \mathfrak{D}_D$. Hieraus folgt wegen (3) nun

$$C \cap D \in \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{24}$$

Da $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (23) und (24) mittels Satz M.9.3, dass $\delta_\Omega(\mathcal{E})$ eine σ-Algebra in Ω ist. Hieraus folgt bei Beachtung von (9) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.6 dann

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \delta_\Omega(\mathcal{E}). \tag{25}$$

Aus (1) und (25) folgt schließlich

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) = \sigma_\Omega(\mathcal{E}). \qquad \square$$

M.10. Eindeutigkeitssätze für Maße

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Wir sind nun daran interessiert, inwieweit wir aus der Übereinstimmung von μ_1 und μ_2 auf gewissen Teilsystemen von $\mathfrak{A}$, auf die Gleichheit $\mu_1 = \mu_2$ schließen zu können. Unser Vorgehen basiert maßgeblich auf der Technik der Dynkin-Systeme.

Lemma M.10.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin sei $E \in \mathfrak{A}$ so beschaffen, dass $\mu_1(E) = \mu_2(E)$ und $\mu_1(E) \in [0, +\infty)$ erfüllt sind. Unter Beachtung der Durchschnittsstabilität von $\mathfrak{A}$ werde die Setzung*

$$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E} \coloneqq \{D \in \mathfrak{A} \mid \mu_1(D \cap E) = \mu_2(D \cap E)\}$$

vorgenommen. Dann ist $\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2}$ ein Dynkin-System in Ω.

Bemerkung M.10.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ derart beschafften, so dass $\mu_1(\Omega) = \mu_2(\Omega)$ gilt. Es sei

$$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid \mu_1(A) = \mu_2(A)\}.$$

Dann ist $\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2}$ ein Dynkin-System in Ω. ♣

Lemma M.10.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mathcal{E}$ ein* durchschnittsstabiler *Erzeuger von $\mathfrak{A}$. Weiter seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ so beschaffen, dass $\mu_1 \restriction \mathcal{E} = \mu_2 \restriction \mathcal{E}$ erfüllt ist und sei $E \in \mathcal{E}$ so gewählt, dass $\mu_1(E) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Weiterhin werde wieder die Setzung*

$$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E} \coloneqq \{D \in \mathfrak{A} \mid \mu_1(D \cap E) = \mu_2(D \cap E)\}$$

vorgenommen. Dann gilt

$$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E} = \mathfrak{A}.$$

Beweis. Sei

$$D \in \mathcal{E}. \tag{1}$$

Wegen $E \in \mathcal{E}$ und (1) folgt aus der Durchschnittsstabilität von $\mathcal{E}$ dann $E \cap D \in \mathcal{E}$. Hieraus folgt wegen $\mu_1 \restriction \mathcal{E} = \mu_2 \restriction \mathcal{E}$ dann $\mu_1(E \cap D) = \mu_2(E \cap D)$, also nach Definition von $\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E}$ dann

$$D \in \mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt dann

$$\mathcal{E} \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E}. \tag{3}$$

Da $\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E}$ nach Lemma M.10.1 ein Dynkin-System in Ω ist, folgt wegen (3) mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E}. \tag{4}$$

Da $\mathcal{E}$ durchschnittsstabil ist, liefert Satz M.9.6 dann

$$\delta_\Omega(\mathcal{E}) = \sigma_\Omega(\mathcal{E}). \tag{5}$$

Nach Voraussetzung gilt

$$\sigma_\Omega(\mathcal{E}) = \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6), (5) und (4) folgt nun

$$\mathfrak{A} = \sigma_\Omega(\mathcal{E}) = \delta_\Omega(\mathcal{E}) \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E} \subseteq \mathfrak{A}$$

und somit gilt

$$\mathfrak{D}_{\mu_1,\mu_2;E} = \mathfrak{A}.$$ □

Satz M.10.1. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein messbarer Raum und* $\mathcal{E}$ *ein* durchschnittsstabiler *Erzeuger von* $\mathfrak{A}$ *mit* $\Omega \in \mathcal{E}$. *Weiter seien* $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ *und* $\mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ *so beschaffen, dass* $\mu_1 \restriction \mathcal{E} = \mu_2 \restriction \mathcal{E}$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Wegen Lemma M.10.2 gilt mit den dortigen Bezeichnungen $\mathfrak{D}_{\mu_1\mu_2;\Omega} = \mathfrak{A}$. Dies impliziert aber $\mu_1 = \mu_2$. □

Folgerung M.10.1. *Sei* (Ω, ϱ) *ein metrischer Raum mit der zugehörigen* Borel*schen* σ*-Algebra* $\mathfrak{B}$. *Weiter seien* $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ *und* $\mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu_1 = \mu_2$.

(ii) *Es gilt* $\mu_1 \restriction \mathcal{O}(\Omega, \varrho) = \mu_2 \restriction \mathcal{O}(\Omega, \varrho)$.

(iii) *Es gilt* $\mu_1 \restriction \mathcal{A}(\Omega, \varrho) = \mu_2 \restriction \mathcal{A}(\Omega, \varrho)$.

Beweis. Da $\mathcal{O}(\Omega, \varrho)$ und $\mathcal{A}(\Omega, \varrho)$ jeweils durchschnittsstabile von $\mathfrak{B}$ sind, welche Ω enthalten, liefert Satz M.10.1 die Äquivalenzen von *(i)* bis *(iii)*. □

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann bezeichne $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B)$ die Menge alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$ mit $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Es gilt also

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \coloneqq \left\{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}} \,\middle|\, B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Satz M.10.2. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein messbarer Raum und* $\mathcal{E}$ *ein* durchschnittsstabiler *Erzeuger von* $\mathfrak{A}$. *Weiter seien* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ *so beschaffen, dass* $\mu_1 \restriction \mathcal{E} = \mu_2 \restriction \mathcal{E}$ *erfüllt ist. Ferner sei* $A \in \mathfrak{A}$ *so gewählt, dass eine Folge* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathcal{E}}(A)$ *existiert, welche für alle* $n \in \mathbb{N}$ *der Bedingung* $\mu_1(E_n) \in [0, +\infty)$ *genügt. Dann gilt*

$$\mu_1(A) = \mu_2(A).$$

Satz M.10.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein messbarer Raum und* $\mathcal{E}$ *ein* durchschnittsstabiler *Erzeuger von* $\mathfrak{A}$, *welcher eine Folge* $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *mit* $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$ *enthält. Weiterhin seien* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ *so beschaffen, dass* $\mu_1 \restriction \mathcal{E} = \mu_2 \restriction \mathcal{E}$ *erfüllt ist und zudem für alle* $n \in \mathbb{N}$ *die Bedingung* $\mu_1(E_n) \in [0, +\infty)$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Satz M.10.3 ist eine unmittelbare Konsequenz von Satz M.10.2. Man wähle $A = \Omega$. □

M.11. Äußere Maße

Wir formulieren zunächst eine grundlegende Aufgabenstellung der Maßtheorie. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Dann stellt sich die Frage nach der Existenz eines Maßes μ_0 auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$, für das $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist. Im Fall einer positiven Antwort ist hieran anschließend noch die Eindeutigkeit einer derartigen Fortsetzung zu diskutieren. Im ersten Schritt unserer Konstruktion eines solchen Maßes μ_0 werden wir zunächst ausgehend von μ eine Mengenfunktion μ^* auf $\mathfrak{P}(\Omega)$ konstruieren, welche mit μ geeignet harmoniert. Hierzu führen wir folgende Begriffsbildung ein:

Definition M.11.1. Sei Ω eine beliebige Menge. Die Abbildung $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ heißt ein *äußeres Maß* auf Ω, falls sie folgende Eigenschaften besitzt:

(I) Es gilt $\mu^*(\varnothing) = 0$.

(II) Für alle $A_1, A_2 \in \mathfrak{P}(\Omega)$ mit $A_1 \subseteq A_2$ gilt $\mu^*(A_1) \leq \mu^*(A_2)$.

(III) Für jede Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$ gilt

$$\mu^*\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(B_n).$$

In den meisten Lehrbüchern wird die Aussage *(ii)* des folgenden Lemmas als Definition des äußeren Maßes verwendet.

Lemma M.11.1. *Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *μ^* ist ein äußeres Maß auf Ω.*

(ii) *μ^* hat die Eigenschaften* (I) *und* (III) *aus der obigen Definition und ist σ-subadditiv.*

(iii) *μ^* besitzt die Eigenschaften* (I) *aus der obigen Definition und für alle $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ sowie für alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{P}(\Omega)$, welche $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ erfüllen, gilt*

$$\mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu^*(A_n).$$

Wir wenden uns nun dem Carathéodoryschen[1)] Konzept der Messbarkeit von Mengen zu. Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$. Da μ^* nicht notwendig additiv ist, erscheint es sinnvoll, jenen Teilmengen von Ω besondere Aufmerksamkeit zu schenken, welche sich für jedes $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ in einer solchen Weise zerlegen lassen, dass sich μ^* additiv verhält. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung, welche eine zentrale Rolle in der Maßtheorie einnimmt.

Definition M.11.2. Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$. Weiter sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt A eine *μ^*-messbare Menge*, falls für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ die Beziehung

$$\mu^*(Q) = \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$$

besteht.

[1)] Constantin Carathédory (*13.09.1873; †02.02.1950) war Mathematiker griechischer Herkunft. Er lieferte viele bedeutende Beiträge in vielen Bereichen der Mathematik, vor allem in den Bereichen der Funktionentheorie, partielle Differentialgleichungen sowie Maß- und Integrationstheorie.

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,+\infty]$. Die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von Ω, werde mit $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ bezeichnet. Es gilt also

$$\mathfrak{A}_{\mu^*} \coloneqq \{A \in \mathfrak{P}(\Omega) \mid A \text{ ist } \mu^*\text{-messbar}\}.$$

Bemerkung M.11.1. Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,+\infty]$ eine subadditive Abbildung. Weiter sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

(ii) Für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$. ♣

Bemerkung M.11.2. Seien Ω eine Menge und μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Dann gilt:

(a) Es ist μ^* subadditiv.

(b) Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$.

(ii) Für alle $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $\mu^*(Q) \geq \mu^*(Q \cap A) + \mu^*(Q \setminus A)$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Für $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n}$ sei $A_k \coloneqq \varnothing$. Wegen Definition M.11.1 ist für $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n}$ dann $\mu^*(A_k) = 0$. Weiterhin ist $\bigcup_{k=1}^{n} A_k = \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$. Unter Beachtung der nach Lemma M.11.1 vorliegenden σ-Subadditivität von μ^* folgt dann

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k)) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(A_k).$$

Somit ist μ^* subadditiv.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)* und Bemerkung M.11.1. □

Unser nächstes Ziel lautet wie folgt: Seien Ω eine Menge und $\mu^*\colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0,+\infty]$. Im Falle $\mathfrak{A}_{\mu^*} \neq \varnothing$ sei $\mu \coloneqq \mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Wir untersuchen dann die Struktur von $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ sowie die Eigenschaften von μ. Wir bereiten dies nun vor.

Definition M.11.3. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt $\mathfrak{A}$ eine *Algebra in* Ω, falls folgende Eigenschaften erfüllt sind:

(I) Es gilt $\Omega \in \mathfrak{A}$.

(II) Für alle $A \in \mathfrak{A}$ ist $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}$.

(III) Für alle $A, B \in \mathfrak{A}$ gilt $A \cup B \in \mathfrak{A}$.

Beispiel M.11.1. Sei Ω eine Menge. Dann ist $\mathfrak{P}(\Omega)$ eine Algebra in Ω.

Lemma M.11.2. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\varnothing \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Seien $A, B \in \mathfrak{A}$. Dann gehören $A \cap B$, $A \setminus B$ und $A \triangle B$ zu $\mathfrak{A}$.*

Bemerkung M.11.3. Sei Ω eine Menge. Dann gilt:

(a) Sei $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω. Dann ist $\mathfrak{A}$ ein Ring in Ω.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω. ♣

Lemma M.11.3. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{D} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$\mathfrak{D}$ ist eine σ-Algebra in Ω.*

(ii) *$\mathfrak{D}$ ist ein Dynkin-System in Ω und eine Algebra in Ω.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Dies folgt aus Satz M.9.3 und Teil *(b)* von Bemerkung M.11.3.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Aus *(ii)* und Teil *(b)* von Lemma M.11.2 folgt, dass $\mathfrak{D}$ ein durchschnittsstabiles Dynkin-System in Ω ist. Hieraus folgt mittels Satz M.9.3 dann sofort *(i)*. □

Satz M.11.1 (von C. Carathéodory)**.** *Seien Ω eine Menge und $\mu^* \colon \mathfrak{P}(\Omega) \longrightarrow [0, +\infty]$ eine Abbildung, welche $\mu^*(\varnothing) = 0$ erfüllt. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine Algebra in Ω.*

(b) *Seien $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$, $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und es gilt*

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_j).$$

(c) *Sei $\mu \coloneqq \mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist μ ein Inhalt auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$.*

(d) *Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(B_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$, für die es eine Folge $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ gibt, so dass jedes $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Beziehung $B_k \subseteq A_k$ gilt. Dann ist*

$$\mu^*\left(\bigcup_{j=1}^{n} B_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \mu^*(B_j).$$

Es folgt nun eines der zentralen Theoreme der Maßtheorie. Bei dessen Beweis werden wir wesentlichen Gebrauch von der Technik der Dynkin-Systeme machen.

Satz M.11.2. *Seien Ω eine Menge und μ^* ein äußeres Maß auf Ω. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω.*

(b) *Sei $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$ und $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und es gilt*

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k).$$

(c) *Sei* $\mu := \mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*}$. *Dann ist* μ *ein Maß auf* $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$.

(d) *Sei* $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *eine Folge auf* $\mathfrak{P}(\Omega)$, *für welche es eine Folge* $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *von paarweise disjunkten Mengen aus* $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ *gibt, welche für jedes* $k \in \mathbb{N}$ *der Bedingung* $B_k \subseteq A_k$ *genügt. Dann gilt*

$$\mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(B_k).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Wahl von μ^* gilt

$$\mu^*(\varnothing) = 0. \tag{1}$$

Wegen (1) und Teil *(a)* von Satz M.11.1 gilt dann:

$$\text{Es ist } \mathfrak{A}_{\mu^*} \text{ eine Algebra in } \Omega. \tag{2}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ein Dynkin-System in Ω ist. Aus (2) folgt sogleich $\Omega \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ sowie für $A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$ auch $\Omega \setminus A \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Sei nun $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Weiter sei $Q \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Sei nun $m \in \mathbb{N}$. Da $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ist, gilt nach Teil *(b)* von Satz M.11.1 dann

$$\bigcup_{k=1}^{m} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*} \tag{3}$$

sowie

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) = \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{4}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{m} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gilt $Q \setminus (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) \subseteq Q \setminus (\bigcup_{k=1}^{m} A_k)$. Damit folgt wegen der Isotonie des äußeren Maßes μ^* dann

$$\mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \leq \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right). \tag{5}$$

Unter Verwendung von (3) bis (5) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mu^*(Q) &= \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \\
&= \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{m} A_k\right) \\
&\geq \sum_{k=1}^{m} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right).
\end{aligned}$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $m \to \infty$ nun

$$\mu^*(Q) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{6}$$

Aufgrund der nach Lemma M.11.1 vorliegenden σ-Subadditivität des äußeren Maßes μ^* gilt weiterhin

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (Q \cap A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\mu^*(Q) \geq \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) + \mu^*\left(Q \setminus \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right). \tag{8}$$

Wegen (8) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.11.2 dann

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Somit ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ ein Dynkin-System in Ω. Hieraus folgt wegen (2) mittels Lemma M.11.2, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω ist.

Zu *(b)*: Aus *(a)* folgt sogleich $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Sei nun $n \in \mathbb{N}$. Dann ist $(A_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Wegen (1) liefert Teil *(b)* von Satz M.11.1 dann

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{9}$$

Wegen $\bigcup_{k=1}^{n} A_k \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ gilt $Q \cap (\bigcup_{k=1}^{n} A_k) \subseteq Q \cap (\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k)$. Damit folgt wegen der Isotonie des äußeren Maßes μ^* sowie aufgrund von (9) dann

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu^*(Q \cap A_k).$$

Hieraus folgt durch Grenzübergang $n \to \infty$ nun

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) \geq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{10}$$

Da μ^* nach Lemma M.11.1 nun σ-subadditiv ist, gilt

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} (Q \cap A_k)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$\mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k). \tag{12}$$

Damit ist *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Da $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ nach *(a)* eine σ-Algebra in Ω ist, gilt nach Teil *(a)* von Satz M.4.1 dann $\varnothing \in \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Unter Beachtung von (1) folgt dann

$$\mu(\varnothing) = \mu^*(\varnothing) = 0.$$

Sei nun $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_{\mu^*}$. Wählen wir in (12) dann speziell $Q = \Omega$, so ergibt sich

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \mu^*\left(Q \cap \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(Q \cap A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu^*(A_k).$$

Somit ist μ^* ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$.

Zu *(d)*: Aufgrund der Wahl der Folgen $(B_k)_{k\in\mathbb{N}}$und $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ gilt

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cap \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A_k) = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k \tag{13}$$

sowie für $l \in \mathbb{N}$ weiterhin

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} B_k\right) \cap A_l = \bigcup_{k=1}^{\infty} (B_k \cap A_l) = B_l \cap A_l = B_l. \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) folgt *(d)* durch die spezielle Wahl $Q = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$ aus (12). □

M.12. Konstruktion äußerer Maße

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Bereitstellung eines weitreichenden Prinzips zur Konstruktion äußerer Maße. Dieses Prinzip wird uns bei der Behandlung der Fortsetzung von Prämaßen auf einem Halbring zu einem Maß auf der von dem Halbring erzeugten σ-Algebra wesentliche Dienste leisten.

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$ und $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Mit $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B)$ bezeichnen wir die Menge aller Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}$, für welche $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ erfüllt ist. Es gilt also

$$\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \coloneqq \left\{ (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathfrak{A}^{\mathbb{N}} \;\middle|\; B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \right\}.$$

Satz M.12.1. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, mit $\varnothing \in \mathfrak{A}$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ so beschaffen, dass $\mu(\varnothing) = 0$ ist. Dann gilt:*

(a) *Es gibt* genau *ein äußeres Maß μ^* auf Ω, welches die folgenden Eigenschaften besitzt:*

(i) *Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.*

(ii) *Falls ν ein äußeres Maß auf Ω ist, welches für alle $A \in \mathfrak{A}$ der Bedingung $\nu(A) \leq \mu(A)$, so ist für alle $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ dann $\nu(B) \leq \mu^*(B)$*

(b) *Für $A \in \mathfrak{A}$ ist $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A) \neq \varnothing$ und für $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt*

$$\mu^*(B) = \begin{cases} \inf\limits_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B)} \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(A_n), & \text{falls } \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{falls } \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) = \varnothing. \end{cases}$$

Der letzte Satz führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.12.1. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, mit $\varnothing \in \mathfrak{A}$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ so beschaffen, dass $\mu(\varnothing) = 0$ erfüllt ist. Dann heißt das in Satz M.12.1 eingeführte äußere Maß μ^* auf Ω das zu μ *zugehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I.*

Wir wollen nun jene Situationen charakterisieren, in welchen unter den Voraussetzungen von Satz M.12.1 die Beziehung $\mu^* \restriction \mathfrak{A} = \mu$ besteht.

Satz M.12.2. *Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$, mit $\varnothing \in \mathfrak{A}$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ so beschaffen, dass $\mu(\varnothing) = 0$ ist. Es bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt:*

(a) *Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu^*(A) = \mu(A)$.*

(ii) *Für alle $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)$ gilt*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist $\mu^* \restriction \mathfrak{A} = \mu$.*

(iv) *Für alle* $A \in \mathfrak{A}$ *und alle* $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)$ *gilt*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(c) *Sei* (iii) *erfüllt. Weiter sei* η *ein äußeres Maß auf* Ω*, für das* $\eta \restriction \mathfrak{A} = \mu$ *erfüllt ist. Dann gilt*

$$\eta \leq \mu^*.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $A \in \mathfrak{A}$ folgt aus Teil *(a)* von Satz M.12.1 dann $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A) \neq \varnothing$. Hieraus folgt aufgrund der Definition von μ^* dann

$$\mu^*(A) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{1}$$

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)$. Wegen *(i)* und (1) gilt nun

$$\mu(A) = \mu^*(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Wegen $A \in \mathfrak{A}$ gilt nach Teil *(b)* von Satz M.12.1 dann

$$\mu^*(A) \leq \mu(A). \tag{2}$$

Sei $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)$. Wegen *(ii)* folgt dann $\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n)$. Hieraus und aus (1) folgt dann

$$\mu(A) \leq \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu^*(A). \tag{3}$$

Aus (3) folgt damit $\mu(A) = \mu^*(A)$. Es gilt also *(i)*.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)*.

Zu *(c)*: Sei $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Falls $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) = \varnothing$ erfüllt ist, gilt nach der Definition von μ^* dann $\mu^*(B) = +\infty$ und somit also $\eta(B) \leq +\infty = \mu^*(B)$. Sei nun $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \neq \varnothing$. Weiter sei

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B). \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann:

(I) Es ist $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$.

(II) Für alle $n \in \mathbb{N}$ ist $A_n \in \mathfrak{A}$.

Da η ein äußeres Maß auf Ω ist, folgt wegen *(I)* mittels Lemma M.11.1 dann

$$\eta(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \eta(A_n). \tag{5}$$

Wegen $\eta \restriction \mathfrak{A} = \mu$ und *(II)* gilt für $n \in \mathbb{N}$ dann $\eta(A_n) = \mu(A_n)$. Hieraus und aus (5) folgt dann

$$\eta(B) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n). \tag{6}$$

Aus (4), (6) und $\mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \neq \varnothing$ folgt dann

$$\eta(B) \leq \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) = \mu^*(B).$$

Damit ist *(c)* bewiesen. □

M.13. Fortsetzung von Prämaßen auf Halbringen zu Maßen

Wir wenden uns nun einer zentralen Aufgabenstellung der Maßtheorie zu. Gegeben seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Dann ist die Frage der Existenz von Maßen μ_0 auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$, für welche $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist, zu klären. Im Falle einer positiven Antwort ist die Eindeutigkeit derartiger Fortsetzungen zu diskutieren. Wir wenden uns zunächst dem Nachweis der Existenz solcher Fortsetzungen zu. Unsere Strategie lässt sich wie folgt beschreiben: Zunächst bilden wir das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Es bezeichne wieder $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von Ω. Da μ^* ein äußeres Maß ist, ist $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*}$ ein Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$. Falls es nun gelingt die Beziehung $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu$ nachzuweisen, so ist der Existenzteil unseres Fortsetzungsproblems gelöst.

Wir wenden uns zunächst der Herleitung der Beziehung $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu$ zu.

Lemma M.13.1. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und $\mu\colon \mathfrak{H} \longrightarrow [0, +\infty]$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$.*

(ii) *Es gelten die folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $\mu(\varnothing) = 0$.*

(II) *Sind $A \in \mathfrak{H}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{H}$, für welche $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \subseteq A$ erfüllt ist, so gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \mu(A_j) \leq \mu(A).$$

(III) *Sind $A \in \mathfrak{H}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge von Mengen aus $\mathfrak{H}$, für welche $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$ erfüllt ist, so gilt*

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

(iii) *Es besitzt μ neben den Eigenschaften* (I) *und* (III) *aus* (ii) *noch die Eigenschaft*

(IV) *Sind $A \in \mathfrak{H}$ und $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkten von Mengen aus $\mathfrak{H}$, für welche $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \subseteq A$ erfüllt ist, so gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n) \leq \mu(A).$$

Satz M.13.1. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt*

$$\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu.$$

Beweis. Sei $A \in \mathfrak{H}$ und sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(A)$. Dann ist also $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{H}$ und es gilt $A \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$. Hieraus folgt, da μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$ ist, mittels Lemma M.13.1 dann

$$\mu(A) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Hieraus ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.12.2 dann $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu$. □

Das nächste Resultat zeigt, dass die Aussage von Satz M.13.1 für Inhalte, welche keine Prämaß sind, falsch ist.

Satz M.13.2. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt:*

(a) *Sei $A \in \mathfrak{H}$. Dann gilt $\mu^*(A) \leq \mu(A)$.*

(b) *Sei μ kein Prämaß. Dann gibt es ein $E \in \mathfrak{H}$ mit $\mu^*(E) < \mu(E)$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$.*

  (ii) *Es gilt $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu$.*

Unsere nächste Aufgabe besteht im Nachweis der Inklusion $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Hierbei werden wir zeigen, dass die Aussage sogar im Falle eines Inhaltes μ auf $\mathfrak{H}$ wahr ist. Dieser Nachweis verläuft in mehreren Schritten. Im ersten Schritt zeigen wir die Aussage zunächst für einen Inhalt μ auf einem Ring $\mathfrak{R}$ in Ω.

Lemma M.13.2. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{R}$. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{R}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt*

$$\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Bei der angestrebten Verallgemeinerung der Aussage von Lemma M.13.2 auf Halbringe werden wir sicherlich von dem in Satz M.2.1 enthaltenen grundlegenden Zusammenhang über die eindeutige Fortsetzbarkeit eines Inhaltes μ auf einem Halbring $\mathfrak{H}$ in einer Menge Ω zu einem Inhalt ν auf dem von $\mathfrak{H}$ erzeugten Ring $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ in Ω Gebrauch machen. Darüber hinaus benötigen wir aber noch Kenntnisse über dem Zusammenhang zwischen den zu μ bzw. ν zugehörigen äußeren Maßen μ^* bzw. ν^* auf Ω vom Typ I.

Bezeichnung. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A} \subseteq \mathfrak{P}(\Omega)$. Weiter sei $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann bezeichne $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{A}}(B)$ die Menge alle Folgen $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ von paarweise disjunkte Mengen aus $\mathfrak{A}$ mit $B \subseteq \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$. Es gilt also

$$\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{A}}(B) \coloneqq \left\{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{A}}(B) \,\middle|\, (A_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ ist Folge von paarweise disjunkte Mengen}\right\}.$$

Satz M.13.3. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Es bezeichne $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ den von $\mathfrak{H}$ erzeugten Ring in Ω, sowie ν den nach Satz M.2.1 existierenden und eindeutig bestimmten Inhalt auf $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$, für den $\nu \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bzw. $\varnothing \in \rho_\Omega(\mathfrak{H})$ und $\nu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* bzw. ν^* das zu μ bzw. ν zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\mu^* = \nu^*$.*

(b) *Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ so gewählt, dass $\mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(A) \neq \varnothing$ ist. Dann gelten $\widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{H}}(A) \neq \varnothing$ sowie*

$$\mu^*(A) = \inf_{(C_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \widetilde{\mathcal{U}}_{\mathfrak{A}}(A)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(C_n).$$

Satz M.13.4. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Es bezeichne $\sigma_\Omega(\mathfrak{H})$ die von $\mathfrak{H}$ erzeugte σ-Algebra in Ω. Dann gilt*

$$\mathfrak{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Beweis. Es bezeichne $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ den von $\mathfrak{H}$ erzeugten Ring in Ω. Nach Teil *(b)* von Satz M.1.3 gilt dann

$$\mathfrak{H} \subseteq \rho_\Omega(\mathfrak{H}). \tag{1}$$

Weiterhin bezeichne ν den nach Satz M.2.1 existierenden und eindeutig bestimmten Inhalt auf $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$, für den $\nu \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist. Unter Beachtung von $\varnothing \in \rho_\Omega(\mathfrak{H})$ und $\nu(\varnothing) = 0$ bezeichne ν^* das zu ν gehörige äußere Maß vom Typ I. Da $\rho_\Omega(\mathfrak{H})$ ein Ring in Ω ist, gilt nach Lemma M.13.2 dann $\rho_\Omega(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\nu^*}$, während nach Teil *(a)* von Satz M.13.3 weiterhin $\mu^* = \nu^*$ erfüllt ist. Hieraus folgt in Verbindung mit (1) dann

$$\mathfrak{H} \subseteq \rho_\Omega(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\nu^*} = \mathfrak{A}_{\mu^*}.$$

Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ nach Teil *(a)* von Satz M.12.2 eine σ-Algebra in Ω ist, so folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.6 dann $\mathfrak{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$. □

Satz M.13.5 (von Fréchet[1)]-Hahn[2)])**.** *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ zugehörige äußere Maß auf Ω von Typ I. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und $\mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*} = \mu$.*

(b) *Sei $\widetilde{\mu} := \mu^* \restriction \mathfrak{A}_{\mu^*}$. Dann ist $\mathfrak{A}_{\mu^*}$ eine σ-Algebra in Ω, $\widetilde{\mu}$ ein Maß $(\Omega, \mathfrak{A}_{\mu^*})$ und es gilt $\widetilde{\mu} \restriction \mathfrak{H} = \mu$.*

(c) *Es sei $\mu_0 := \mu^* \restriction \sigma_\Omega(\mathfrak{H})$. Dann gilt $\mathfrak{H} \subseteq \sigma_\Omega(\mathfrak{H}) \subseteq \mathfrak{A}_{\mu^*}$ und es ist μ_0 ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$, für das $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist.*

Satz M.13.5 lässt nun folgende Begriffsbildung zu.

Definition M.13.1. Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Weiterhin sei μ_0 das im Teil *(c)* von Satz M.13.5 eingeführte Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$. Dann heißt μ_0 die *Carathéodory-Fortsetzung von μ.*

Das nachfolgende Resultat beschreibt eine wichtige Extremaleigenschaft der Carathéodory-Fortsetzung eines Prämaßes.

Satz M.13.6. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Es bezeichne μ_0 die Carathéodory-Fortsetzung von μ. Weiter sei ν ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$, für das $\nu \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\nu \leq \mu_0.$$

Wir wenden uns nun dem Eindeutigkeitsaspekt unseres Fortsetzungsproblem zu. Hierbei wird die folgende Begriffsbildung eine entscheidende Rolle spielen.

[2)] Maurice René Fréchet (*02.09.1878; †04.07.1973) war französischer Mathematiker, der grundlegende Arbeiten in der Funktionalanalysis verfasste

[2)] Hans Hahn (*27.09.1879; †24.07.1934) war österreichischer Mathematiker und Philosoph, der vor allem durch den Satz von Hahn-Banach bekannt ist.

Definition M.13.2. Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Weiter sei

$$\mathfrak{H}_{\mu,e} \coloneqq \{A \in \mathfrak{H} \,|\, \mu(A) \in [0,+\infty)\}.$$

Dann heißt μ *σ-endlich*, falls es eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{H}_{\mu,e}$ gibt, so dass

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$$

gilt.

Bemerkung M.13.1. Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein σ-endlicher Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Weiter seien $\mathfrak{G}$ ein Halbring in Ω, für den $\mathfrak{H} \subseteq \mathfrak{G}$ erfüllt ist, und ν ein Inhalt auf $\mathfrak{G}$, für den $\nu \restriction \mathfrak{H} = \mu$ gilt. Dann ist ν ebenfalls σ-endlich. ♣

Bemerkung M.13.2. Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein endlicher Inhalt auf $\mathfrak{H}$. Dann gilt:

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) μ ist σ-endlich.

(ii) Es existiert eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{H}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.

(b) Sei $\mathfrak{H}$ sogar eine Algebra in Ω. Dann ist μ σ-endlich. ♣

Bemerkung M.13.3. Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ ein messbarer Raum und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann ist μ σ-endlich. ♣

Wir erkennen nun, dass die σ-Endlichkeit eines Prämaßes auf einem Halbring eine hinreichende Bedingung für die Eindeutigkeit der Fortsetzung zu einem Maß liefert.

Satz M.13.7. *Seien eine Menge Ω, $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω und μ ein σ-endliches Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt* genau *ein Maß μ_0 auf $(\Omega,\sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$, für das $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist.*

(b) *Unter Beachtung von $\varnothing \in \mathfrak{H}$ und $\mu(\varnothing) = 0$ bezeichne μ^* das zu μ gehörige äußere Maß auf Ω vom Typ I. Dann gilt $\mu_0 = \mu^* \restriction \sigma_\Omega(\mathfrak{H})$.*

(c) *μ_0 ist σ-endlich.*

(d) *Sei $B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann ist $\mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(B) \neq \varnothing$ und es gilt*

$$\mu^*(B) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

Beweis. Als Halbring in Ω ist $\mathfrak{H}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\sigma_\Omega(\mathfrak{H})$ (vergleiche Definition M.1.5). Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass aufgrund der σ-Endlichkeit von μ eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{H}_{\mu,e}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ existiert, so liefert Satz M.10.3, dass höchstens ein Maß $\mu_0 \in \mathcal{M}_+(\Omega,\sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$ existiert, für das $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ erfüllt ist. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.13.5, dass genau ein Maß μ_0 auf $(\Omega,\sigma_\Omega(\mathfrak{H}))$ mit $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$, und zwar ist dies genau $\mu_0 = \mu^* \restriction \sigma_\Omega(\mathfrak{H})$. Wegen $\mu_0 \restriction \mathfrak{H} = \mu$ und der σ-Endlichkeit von μ folgt mittels Bemerkung M.2.1

und Bemerkung M.13.1 die σ-Endlichkeit von μ_0. Damit sind *(a)* bis *(c)* gezeigt.
Wir zeigen nun *(d)*. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ gibt es eine Folge $(E_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{H}_{\mu,e}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$. Hieraus folgt $B \subseteq \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$. Somit ist $\mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(B) \neq \varnothing$ und nach Definition von μ^* gilt also

$$\mu^*(B) = \inf_{(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathcal{U}_{\mathfrak{H}}(B)} \sum_{n=1}^{\infty} \mu(A_n).$$

□

Folgerung M.13.1. *Seien eine Menge Ω sowie $\mathfrak{H}$ ein Halbring in Ω, so dass eine Folge $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$ existiert. Weiter sei μ ein endliches Prämaß auf $\mathfrak{H}$. Dann ist μ σ-endlich und es gelten die Aussagen* (a) *bis* (d) *von Satz M.13.7.*

Folgerung M.13.2. *Seien Ω eine Menge, $\mathfrak{A}$ eine Algebra in Ω und μ ein endliches Prämaß auf $\mathfrak{A}$. Dann ist μ σ-endlich und es gelten die Aussagen* (a), (b) *und* (d) *von Satz M.13.7 sowie ist μ_0 endlich.*

Beweis. Kombiniere Teil *(b)* von Bemerkung M.13.2 mit Satz M.13.7. □

Wir beschreiben nun eine Situation, in der eine Menge Ω, ein Ring $\mathfrak{R}$ in Ω und ein endliches Prämaß auf $\mathfrak{R}$ gegeben sind, für das es *überabzählbar viele* Maßfortsetzungen auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{R}))$ gibt.

Beispiel M.13.1. Seien Ω eine nichtleere Menge und $\mathfrak{R} := \{\varnothing\}$. Weiter sei $\mu\colon \mathfrak{R} \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß $\mu(\varnothing) := 0$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathfrak{R}$ ein Ring in Ω und μ ein Prämaß auf $\mathfrak{R}$.

(b) Sei $\omega \in \Omega$. Weiter seien $\alpha \in [0,+\infty]$ sowie $\mu_\alpha := \alpha \cdot \varepsilon_{\omega,\sigma_\Omega(\mathfrak{R})}$. Dann ist μ_α ein Maß auf $(\Omega, \sigma_\Omega(\mathfrak{R}))$, für dass $\mu_\alpha(\Omega) = \alpha$ und $\mu_\alpha \restriction \mathfrak{R} = \mu$ erfüllt sind.

M.14. Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Die in den Anwendungen am häufigsten vertretenen Maße sind solche, die auf der BORELschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_m$ des EUKLIDischen metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ definiert sind. Wegen Beispiel M.7.2 ist der messbare Raum $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ total atomar. Somit stehen uns insbesondere die Resultate von Abschnitt M.7 zur Verfügung. Besonderen Augenmerk werden wir auf die Klasse $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ legen. Wir wenden uns nun interessanten Erzeugern von $\mathfrak{B}_m$ zu. Hierbei kommen wir zunächst auf die in Definition M.1.7 eingeführten Systeme von m-dimensionalen Intervallen zurück.

Satz M.14.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind $I_{m,a}$, $I_{m,o}$, $I_{m,r}$ und $I_{m,l}$ jeweils durchschnittsstabile Erzeuger von $\mathfrak{B}_m$.*

Bemerkung M.14.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $\mathbf{1}_m := (1, \ldots, 1)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann ist

$$([-n \cdot \mathbf{1}_m, n \cdot \mathbf{1}_m])_{n\in\mathbb{N}}$$

bzw.

$$((-n \cdot \mathbf{1}_m, n \cdot \mathbf{1}_m))_{n\in\mathbb{N}}$$

bzw.

$$([-n \cdot \mathbf{1}_m, n \cdot \mathbf{1}_m))_{n\in\mathbb{N}}$$

bzw.

$$((-n \cdot \mathbf{1}_m, n \cdot \mathbf{1}_m])_{n\in\mathbb{N}}$$

eine isotone Folge aus $I_{m,a}$ bzw. $I_{m,o}$ bzw. $I_{m,l}$ bzw. $I_{m,r}$, deren Vereinigung jeweils $\mathbb{R}^m$ ergibt. ♣

Satz M.14.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Es seien*

$$\widetilde{I}_{m,a} := \left\{ \bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, a_j] \,\middle|\, (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}$$

sowie

$$\widetilde{I}_{m,o} := \left\{ \bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, a_j) \,\middle|\, (a_1, \ldots, a_m) \in \mathbb{R}^m \right\}.$$

Dann sind $\widetilde{I}_{m,a}$ sowie $\widetilde{I}_{m,o}$ durchschnittsstabile Erzeuger von $\mathfrak{B}_m$.

Bemerkung M.14.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, n] \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

bzw.

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, n) \right)_{n\in\mathbb{N}}$$

eine isotone Folge aus $\widetilde{I}_{m,a}$ bzw. $\widetilde{I}_{m,o}$, deren Vereinigung jeweils $\mathbb{R}^m$ ergibt. ♣

Satz M.14.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien μ_1 und μ_2 jeweils Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, für welche eine der beiden Situationen vorliegt:*

(I) *Es ist $\mu_1 \restriction \widetilde{I}_{m,a} = \mu_2 \restriction \widetilde{I}_{m,a}$ und für alle $A \in \widetilde{I}_{m,a}$ gilt $\mu(A) \in [0, +\infty)$.*

(II) *Es ist* $\mu_1 \restriction \widetilde{I}_{m,o} = \mu_2 \restriction \widetilde{I}_{m,o}$ *und für alle* $A \in \widetilde{I}_{m,o}$ *gilt* $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

Dann gilt

$$\mu_1 = \mu_2.$$

Beweis. Wegen Satz M.14.2 und Bemerkung M.14.2 liefert Satz M.10.3 die Behauptung. □

Satz M.14.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.14.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt die Funktion

$$F_{\mu,l} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \mu\left(\bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, x_j)\right)$$

bzw.

$$F_{\mu,r} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty), \quad \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} \longmapsto \mu\left(\bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, x_j]\right)$$

die *linke* bzw. *rechte Verteilungsfunktion von* μ.

Satz M.14.4. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *sowie* $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu_1 = \mu_2$.

(ii) *Es ist* $F_{\mu_1,l} = F_{\mu_2,l}$.

(iii) *Es ist* $F_{\mu_1,r} = F_{\mu_2,r}$.

Bemerkung M.14.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$0 \leq F_{\mu,l}(\mathbf{x}) \leq F_{\mu,r}(\mathbf{x}) \leq \mu(\mathbb{R}^m). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$. Wegen $\bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, x_j) \subseteq \bigtimes_{j=1}^{m} (-\infty, x_j]$ folgt alles aus der Isotonie von μ. □

Beispiel M.14.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\mathfrak{o}_m \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es ist sowohl $F_{\mathfrak{o}_m,l}$ als auch $F_{\mathfrak{o}_m,r}$ jeweils die Nullfunktion auf $\mathbb{R}^m$.

Definition M.14.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ sowie $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann schreiben wir $\mathbf{a} \leq \mathbf{b}$ bzw. $\mathbf{a} < \mathbf{b}$, falls für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ die Ungleichung $a_j \leq b_j$ bzw. $a_j < b_j$ gilt.

Beispiel M.14.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ gilt

$$F_{\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m},l}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{a} < \mathbf{x}, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

sowie

$$F_{\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m},r}(\mathbf{x}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{a} \leq \mathbf{x}, \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Beispiel M.14.3. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine streng monoton wachsende Folge aus $\mathbb{R}$. Es sei

$$\mu \coloneqq \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann gilt:

(a) Es ist

$$\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$$

sowie

$$X_{\mathfrak{B}_1,\mu} = \bigcup_{j=1}^{n} \{a_j\}$$

und für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt

$$\mu\left(\{a_j\}\right) = \frac{1}{n}.$$

(b) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten

$$F_{\mu,l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, a_1], \\ \frac{j}{n}, & \text{falls } j \in \mathbb{N}_{1,n-1} \text{ und } x \in (a_j, a_{j+1}], \\ 1, & \text{falls } x \in (a_n, +\infty) \end{cases}$$

sowie

$$F_{\mu,r}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, a_1), \\ \frac{j}{n}, & \text{falls } j \in \mathbb{N}_{1,n-1} \text{ und } x \in [a_j, a_{j+1}), \\ 1, & \text{falls } x \in [a_n, +\infty). \end{cases}$$

Lemma M.14.1. *Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei*

$$\mu \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j.$$

Dann ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gelten

$$F_{\mu,l} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_{\mu_j,l}$$

sowie

$$F_{\mu,r} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j F_{\mu_j,r}.$$

Im Falle $m > 1$ ist bei vorgegebenen Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Handhabung der Funktionen $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ recht schwerfällig. Wir betrachten deshalb den Fall $m = 1$. In diesem Falle spielen $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ eine, auf Satz M.14.4 basierende, traditionell starke Rolle. Einerseits enthalten sie nämlich alle Informationen über das Maß μ und andererseits sind sie leichter zu handhaben als das Maß μ selbst.

Lemma M.14.2. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei* $x \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\})$.

(b) *Seien* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in (a, +\infty)$. *Dann gilt:*

(b1) *Es ist* $\mu([a,b]) = F_{\mu,r}(b) - F_{\mu,l}(a)$.

(b2) *Es ist* $\mu((a,b]) = F_{\mu,r}(b) - F_{\mu,r}(a)$.

(b3) *Es ist* $\mu([a,b)) = F_{\mu,l}(b) - F_{\mu,l}(a)$.

(b4) *Es ist* $\mu((a,b)) = F_{\mu,l}(b) - F_{\mu,r}(a)$.

Es folgt nun ein spezielles Resultat über monotone Funktionen.

Satz M.14.5. *Seien* $a \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *sowie* $b \in (a, +\infty)$ *und sei* $f\colon (a,b) \longrightarrow \mathbb{R}$ *eine monoton wachsende oder monoton fallende Funktion. Weiter sei* $x \in (a,b)$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $u \in \mathbb{R}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\lim\limits_{y \to x-0} f(y) = u$.

(ii) *Für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (a,x) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(iii) *Für alle monoton wachsenden Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (a,x) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt dann* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(iv) *Es gibt eine monoton wachsende Folgen* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (a,x), *für die gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = u$.

(b) *Sei* $u \in \mathbb{R}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(v) *Es gilt* $\lim\limits_{y \to x+0} f(y) = u$.

(vi) *Für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*aus* (x,b) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(vii) *Für alle monoton fallenden Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (x,b) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt dann* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = u$.

(viii) *Es gibt eine monoton fallende Folgen* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (x,b), *für die gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = u$.

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(ix) f *ist linksseitig stetig in* x.

(x) *Für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*aus* (a,x) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xi) *Für alle monoton wachsenden Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (a,x) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt dann* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xii) *Es gibt eine monoton wachsende Folgen* $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *aus* (a,x), *für die gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} y_n = x$ *und* $\lim\limits_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$.

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(xiii) f *ist rechtsseitig stetig in* x.

(xiv) *Für alle Folgen* $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$*aus* (x,b) *mit* $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x$ *gilt* $\lim\limits_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.

(xv) *Für alle monoton fallenden Folgen $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b) mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$ gilt dann $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.*

(xvi) *Es gibt eine monoton fallende Folgen $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus (x,b), für die gilt $\lim_{n\to\infty} y_n = x$ und $\lim_{n\to\infty} f(y_n) = f(x)$.*

Der folgende Satz wird später als Ausgangspunkt für eine Charakterisierung von linken- und rechten Verteilungsfunktionen von Maßen auf $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ dienen.

Satz M.14.6. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es sind $F_{\mu,l}$ und $F_{\mu,r}$ monoton wachsend.*

(b) *Es ist $F_{\mu,l}$ bzw. $F_{\mu,r}$ linksseitig bzw. rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$.*

(c) *Es gelten*

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,l}(x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,l}(x) = \mu(\mathbb{R})$$

sowie

$$\lim_{x\to-\infty} F_{\mu,r}(x) = 0$$

und

$$\lim_{x\to+\infty} F_{\mu,r}(x) = \mu(\mathbb{R}).$$

Satz M.14.7. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\lim_{y\to x+0} F_{\mu,l}(y) = \lim_{y\to x+0} F_{\mu,r}(y).$$

(b) *Es ist*

$$\lim_{y\to x-0} F_{\mu,r}(y) = \lim_{y\to x-0} F_{\mu,l}(y).$$

Satz M.14.8. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *$F_{\mu,l}$ ist stetig in x.*

(ii) *$F_{\mu,r}$ ist stetig in x.*

(iii) *Es ist $\{x\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

(iv) *Es ist $F_{\mu,l}(x) = F_{\mu,r}(x)$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(v) *$F_{\mu,l}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

(vi) *$F_{\mu,r}$ ist stetig auf $\mathbb{R}$.*

(vii) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(viii) *Es ist $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$.*

(c) *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gilt* $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$ *und zudem ist* $F_{\mu,l}$ *gleichmäßig stetig auf* $\mathbb{R}$.

Beweis.

Zu *(a)*:

(i) $\Leftrightarrow$ ***(iii)*:** Wegen Teil *(b)* von Satz M.14.6 gilt

$$\lim_{y \to x-0} F_{\mu,l}(y) = F_{\mu,l}(x). \tag{1}$$

Aus Teil *(a)* von Satz M.14.7 und Teil *(a)* von Lemma M.14.2 ergeben sich:

$$\lim_{y \to x+0} F_{\mu,r}(y) = F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\}). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) erkennt man sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(iii)*.

(ii) $\Leftrightarrow$ ***(iii)*:** Aus Teil *(b)* von Satz M.14.6 sowie Teil *(a)* von Lemma M.14.2 ergibt sich:

$$\lim_{y \to x+0} F_{\mu,r}(y) = F_{\mu,r}(x) = F_{\mu,l}(x) + \mu(\{x\}). \tag{3}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.14.7 gilt:

$$\lim_{y \to x-0} F_{\mu,r}(y) = F_{\mu,l}(x). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) erkennt man sogleich die Äquivalenz von *(ii)* und *(iii)*.

(iii) $\Leftrightarrow$ ***(iv)*:** Dies folgt sogleich aus Teil *(a)* von Lemma M.14.2.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)*.

Zu *(c)*: Aufgrund der Wahl von μ ergibt sich aus *(b)* dann $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$, sowie die Stetigkeit von $F_{\mu,l}$. Nach Teil *(c)* von Satz M.14.6 gelten weiterhin:

$$\lim_{x \to -\infty} F_{\mu,l}(x) = 0 \tag{5}$$

und

$$\lim_{x \to +\infty} F_{\mu,l}(x) = \mu(\mathbb{R}). \tag{6}$$

Sei $\varepsilon > 0$ beliebig. Wegen (5) gibt es dann ein $a \in \mathbb{R}$, so dass für alle $x \in (-\infty, a)$ unter Beachtung von $F_{\mu,l}(x) \in [0, +\infty)$ die Ungleichung

$$0 \leq F_{\mu,l}(x) < \varepsilon \tag{7}$$

besteht. Wegen (6) gibt es ein $b \in (a, +\infty)$, so dass für alle $x \in (b, +\infty)$ unter Beachtung von $F_{\mu,l}[0, \mu(\mathbb{R}))$ die Ungleichung

$$0 \leq \mu(\mathbb{R}) - F_{\mu,l}(x) < \varepsilon \tag{8}$$

besteht. Da $F_{\mu,l}$ auf ganz $\mathbb{R}$ stetig ist, ist $F_{\mu,l}$ nach einem Satz[1)] von Cantor[2)] dann auf $[a - \varepsilon, b + \varepsilon]$ gleichmäßig stetig. Somit gibt es ein

$$0 < \delta < \varepsilon \tag{9}$$

[1)] Es handelt sich hierbei um den bekannten Satz, dass eine auf dem kompakten Intervall $[a, b]$ stetige Funktion f, dort auch gleichmäßig stetig ist. Allgemeiner gilt: Seien (M_1, d_1) und (M_2, d_2) metrische Räume und gelte $X \subseteq M_1$. Ist nun X eine kompakte Menge sowie $f\colon X \longrightarrow M_2$ stetig in X, dann ist f gleichmäßig stetig auf X.

[2)] Georg Ferdinand Ludwig Philipp Cantor (*03.03.1845; †06.01.1918) war deutscher Mathematiker, der wichtige Beiträge zur modernen Mathematik lieferte. Er gilt als Begründer der Mengenlehre.

derart, dass für alle

$$x_1, x_2 \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon] \tag{10}$$

mit

$$|x_1 - x_2| < \delta \tag{11}$$

die Ungleichung

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \varepsilon \tag{12}$$

erfüllt sind. Seien nun $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ so gewählt, dass

$$x_1 \leq x_2 \tag{13}$$

und

$$|x_1 - x_2| < \delta \tag{14}$$

erfüllt sind. Aus (13), (14) und (9) folgt dann

$$x_2 - x_1 = |x_1 - x_2| < \delta < \varepsilon. \tag{15}$$

Wir betrachten zunächst den Fall $x_2 \in (-\infty, a)$. Aus (13) und Teil *(a)* von Satz M.14.6 und (7) folgt dann:

$$0 \leq F_{\mu,l}(x_2) - F_{\mu,l}(x_1) \leq F_{\mu,l}(x_2) < \varepsilon,$$

also

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \varepsilon. \tag{16}$$

Sei nun $x_2 \in [a, b+\varepsilon]$. Wegen (15) gilt nun

$$x_1 > x_1 - \varepsilon \geq a - \varepsilon,$$

also wegen (13) und $x_2 \leq b + \varepsilon$ ist dann

$$x_1 \in [a-\varepsilon, b+\varepsilon]. \tag{17}$$

Wegen $x_2 \in [a, b+\varepsilon] \subseteq [a-\varepsilon, b+\varepsilon]$, (17), (14), (10), (11) und (12) folgt dann

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \varepsilon. \tag{18}$$

Sei nun $x_2 \in (b+\varepsilon, +\infty)$. Aus (15) folgt dann

$$x_1 > x_2 - \varepsilon > (b+\varepsilon) - \varepsilon = b. \tag{19}$$

Aus (13), Teil *(b)* von Satz M.14.6, der nach Bemerkung M.14.3 gültigen Ungleichung $F_{\mu,l}(x) \leq \mu(\mathbb{R})$, (19) und (8) folgt dann

$$0 \leq F_{\mu,l}(x_2) - F_{\mu,l}(x_1) \leq \mu(\mathbb{R}) - F_{\mu,l}(x_1) < \varepsilon,$$

also

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \varepsilon. \tag{20}$$

Wegen (16), (18) und (20) gilt in jedem Falle also

$$|F_{\mu,l}(x_1) - F_{\mu,l}(x_2)| < \varepsilon.$$

Somit ist $F_{\mu,l}$ gleichmäßig stetig auf $\mathbb{R}$. □

Folgerung M.14.1. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiterhin seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$ so gewählt, dass $\{a\}$ und $\{b\}$ jeweils zu $\mathcal{N}_\mu$ gehören. Dann gilt*

$$\mu([a,b]) = \mu([a,b)) = \mu((a,b]) = \mu((a,b)) = F_{\mu,l}(b) - F_{\mu,l}(a) = F_{\mu,r}(b) - F_{\mu,r}(a).$$

Satz M.14.9. *Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *F ist monoton wachsend.*

(II) *F ist links- bzw. rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$.*

(III) *F ist beschränkt.*

(IV) *Es ist*

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

Dann gilt:

(a) *Es gibt* genau ein *Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit $F = F_{\mu,l}$ bzw. $F = F_{\mu,r}$.*

(b) *Es gilt*

$$\mu(\mathbb{R}) = \sup_{x \in \mathbb{R}} F(x) = \lim_{x \to +\infty} F(x).$$

Wir entwickeln nun eine Theorie, in der sich der Beweis von Satz M.14.9 erschließen lässt.

Definition M.14.3. Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann heißt F eine *linke-* bzw. *rechte maßerzeugende Funktion*, falls es ein $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ derart gibt, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $b \in (a, +\infty)$ die Beziehung

$$\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$$

bzw.

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

gilt.

Lemma M.14.3. *Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion. Dann ist F monoton wachsend sowie links- bzw. rechtsseitig stetig.*

Satz M.14.10. *Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion. Dann gibt es* genau ein *Maß $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ derart, so dass für alle $a \in \mathbb{R}$ und alle $b \in (a, +\infty)$ die Beziehung*

$$\mu([a,b)) = F(b) - F(a)$$

bzw.

$$\mu((a,b]) = F(b) - F(a)$$

besteht.

Beweis. Wegen Bemerkung M.14.1 und Satz M.14.1 liefert Satz M.10.3 die Behauptung. □

Der letzte Satz lässt nun folgende Definition zu.

Definition M.14.4. Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion. Man nennt das nach Satz M.14.10 eindeutig bestimmte Maß $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, dass *zu F assoziierte Maß*.

Bemerkung M.14.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann ist $F_{\mu,l}$ bzw. $F_{\mu,r}$ eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. ♣

Beweis. Dies folgt aus Teil *(b1)* und *(b2)* von Lemma M.14.2. □

Bemerkung M.14.5. Seien F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ und $c \in \mathbb{R}$. Dann ist die Funktion $F_c := F + c$ eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. ♣

Bemerkung M.14.6. Seien F und G linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktionen, welche dasselbe assoziierte Maß μ besitzen. Dann gibt es ein $c \in \mathbb{R}$ mit $F = G + c$. ♣

Satz M.14.11. *Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(ii) *F ist beschränkt.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt und sei*

$$c := \inf_{x \in \mathbb{R}} F(x).$$

Dann ist $c \in \mathbb{R}$ und es gilt $F = F_{\mu,l} + c$ bzw. $F = F_{\mu,r} + c$.

Bemerkung M.14.7. Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. Dann gilt:

(a) Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\mu(\{x\}) \in [0, +\infty)$.

(b) Sei $G\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto F(x) + \mu(\{x\})$ bzw. $x \longmapsto F(x) - \mu(\{x\})$. Dann ist G eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. ♣

Definition M.14.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ ein *Borel-Maß* auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, falls für jede im Euklidischen metrischen Raum $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ kompakte Menge K dann $\mu(K) \in [0, +\infty)$.

Bezeichnung. Sei $m \in \mathbb{N}$. Man bezeichnet mit $\widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Menge aller Borel-Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Bemerkung M.14.8. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei

$$(\mathfrak{B}_m)_{\mu,e} := \{A \in \mathfrak{B}_m \mid \mu(A) \in [0, +\infty)\}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Es ist $I_{m,a} \subseteq (\mathfrak{B}_m)_{\mu,e}$.

(iii) Es ist $I_{m,o} \subseteq (\mathfrak{B}_m)_{\mu,e}$.

(iv) Es ist $I_{m,l} \subseteq (\mathfrak{B}_m)_{\mu,e}$.

(v) Es ist $I_{m,r} \subseteq (\mathfrak{B}_m)_{\mu,e}$.

(vi) Für jede in $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ beschränkte Menge $B \in \mathfrak{B}_m$ gilt $\mu(B) \in [0 + \infty)$. ♣

Beispiel M.14.4. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\lambda^{(m)} \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Bemerkung M.14.9. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ σ-endlich. ♣

Bemerkung M.14.10. Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ. Dann gilt $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Definition M.14.5 und Bemerkung M.14.8. □

Satz M.14.12. *Sei $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\widetilde{F}_{\mu,l}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\widetilde{F}_{\mu,r}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$\widetilde{F}_{\mu,l}(x) \coloneqq \begin{cases} \mu([0,x)), & \text{falls } x \geq 0, \\ -\mu([x,0)), & \text{falls } x < 0 \end{cases}$$

bzw.

$$\widetilde{F}_{\mu,r}(x) \coloneqq \begin{cases} \mu((0,x]), & \text{falls } x \geq 0, \\ -\mu((x,0]), & \text{falls } x < 0. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $\widetilde{F}_{\mu,l}$ bzw. $\widetilde{F}_{\mu,r}$ eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ und es gilt $\widetilde{F}_{\mu,l}(0) = 0$ bzw. $\widetilde{F}_{\mu,r}(0) = 0$.*

(b) *Sei F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß μ und gelte $F(0) = 0$. Dann gilt $F = \widetilde{F}_{\mu,l}$ bzw. $F = \widetilde{F}_{\mu,r}$.*

(c) *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt $\widetilde{F}_{\mu,l} = F_{\mu,l} + \mu((-\infty, 0))$ bzw. $\widetilde{F}_{\mu,r} = F_{\mu,r} + \mu((-\infty, 0])$.*

Satz M.14.13. *Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mu_{F,l}\colon I_{1,l} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß $\mu_{F,l}(\varnothing) \coloneqq 0$ und $\mu_{F,l}([a,b)) \coloneqq F(b) - F(a)$. Dann gilt:*

(a1) *Es ist $\mu_{F,l}$ ein endlicher- und σ-endlicher Inhalt auf $I_{1,l}$.*

(a2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist F linksseitig stetig auf $\mathbb{R}$.*

(ii) *Es ist $\mu_{F,l}$ ein Prämaß auf $I_{1,l}$.*

(a3) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gibt es* genau *ein Maß $\mu_{F,l,0} \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit*

$$\mu_{F,l,0} \restriction I_{1,l} = \mu_{F,l}.$$

Es ist F eine linke maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß $\mu_{F,l,0}$.

(b) *Sei $\mu_{F,r}\colon I_{1,r} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß $\mu_{F,r}(\varnothing) \coloneqq 0$ und $\mu_{F,r}((a,b]) \coloneqq F(b) - F(a)$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist $\mu_{F,r}$ ein endlicher- und σ-endlicher Inhalt auf $I_{1,r}$.*

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist F rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$.*

(iv) *Es ist $\mu_{F,r}$ ein Prämaß auf $I_{1,r}$.*

(b3) *Sei* (iii) *erfüllt. Dann gibt es* genau *ein Maß $\mu_{F,r,0} \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit*

$$\mu_{F,r,0} \restriction I_{1,r} = \mu_{F,r}.$$

Es ist F eine rechte maßerzeugende Funktion mit assoziiertem Maß $\mu_{F,r,0}$.

Definition M.14.6. Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend sowie linksseitig- bzw. rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$. Dann heißt das in Teil *(a)* von Satz M.14.13 eingeführte Maß $\mu_{F,l,0}$ bzw. das in Teil *(b)* von Satz M.14.13 eingeführte Maß $\mu_{F,r,0}$ dass *durch F linksseitig-* bzw. *rechtsseitig erzeugte Lebesgue-Stieltjes-Maß* auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Satz M.14.14. *Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ monoton wachsend und stetig. Dann gilt $\mu_{F,l,0} = \mu_{F,r,0}$.*

Satz M.14.15. *Sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist F eine linke- bzw. rechte maßerzeugende Funktion.*

(ii) *F ist monoton wachsend sowie linksseitig- bzw. rechtsseitig stetig auf $\mathbb{R}$.*

Beweis. Kombiniere Lemma M.14.3 und Satz M.14.13. □

Beispiel M.14.5. Sei $F \coloneqq \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$. Dann ist F sowohl eine linke- als auch eine rechte maßerzeugende Funktion und das auf zu F linksseitig- bzw. rechtsseitig assoziierte Lebesgue-Stieltjes-Maß ist das Lebesue-Borel-Maß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Definition M.14.7. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty]$. Dann heißt f eine *Riemann*[3)]*-Dichte*, falls das uneigentliche Riemann-Integral

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x$$

existiert. Im Falle

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = 1$$

heißt f eine *Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte*.

Bemerkung M.14.11. Sei f eine Riemann-Dichte und $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Dann gilt:

(a) F ist monoton wachsend.

(b) F ist stetig.

[3)] Georg Friedrich Bernhard Riemann (*17.09.1826; †20.07.1866) war ein deutscher Mathematiker, der trotz seines kurzen Lebens auf vielen Gebieten der Analysis, Differentialgeometrie, mathematischen Physik und der analytischen Zahlentheorie bahnbrechend wirkte. Er gilt als einer der bedeutendsten Mathematiker.

(c) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$0 \leq F(x) \leq \int_{-\infty}^{+\infty} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi < +\infty,$$

also ist F insbesondere beschränkt.

(d) Es gilt

$$\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0.$$

♣

Satz M.14.16. *Sei f eine Riemann-Dichte und sei $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$x \longmapsto \int_{-\infty}^{x} f(\xi)\,\mathrm{d}\xi.$$

Dann gilt:

(a) *Es gibt* genau *ein Maß $\mu_{(f)} \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $F_{\mu_{(f)},l} = F$.*

(b) *Es ist $\mu_{(f)}$ stetig und es gilt $F_{\mu_{(f)},r} = F$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Kombiniere Bemerkung M.14.11 und Satz M.14.9.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.14.11 ist F stetig. Hieraus folgt wegen Teil *(a)* von Satz M.14.8 und *(a)* dann *(b)*. □

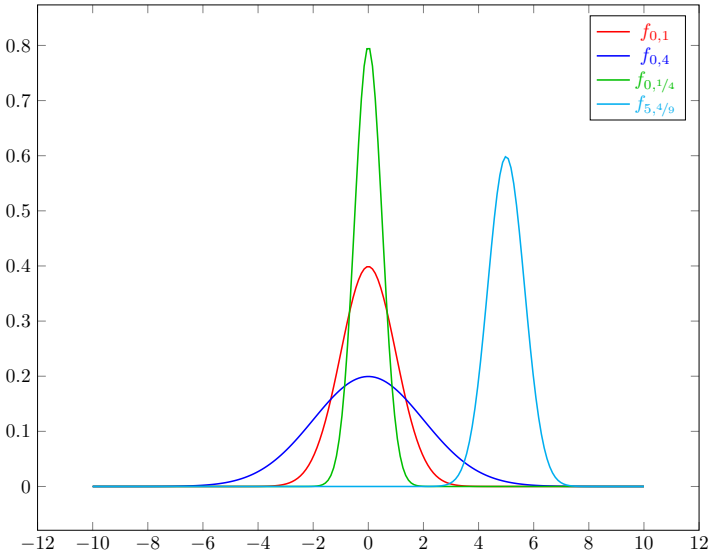
Definition M.14.8. Sei f eine Riemann-Dichte und sei $\mu_{(f)}$ wie im Satz M.14.16 erklärt. Dann heißt $\mu_{(f)}$ das *zu f gehörige Maß* aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Es folgen nun einige Beispielverteilungen mit Riemann-Dichten.

Beispiel M.14.6. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Weiter sei $f_{\alpha,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(x-\alpha)^2}{2\sigma^2}}.$$

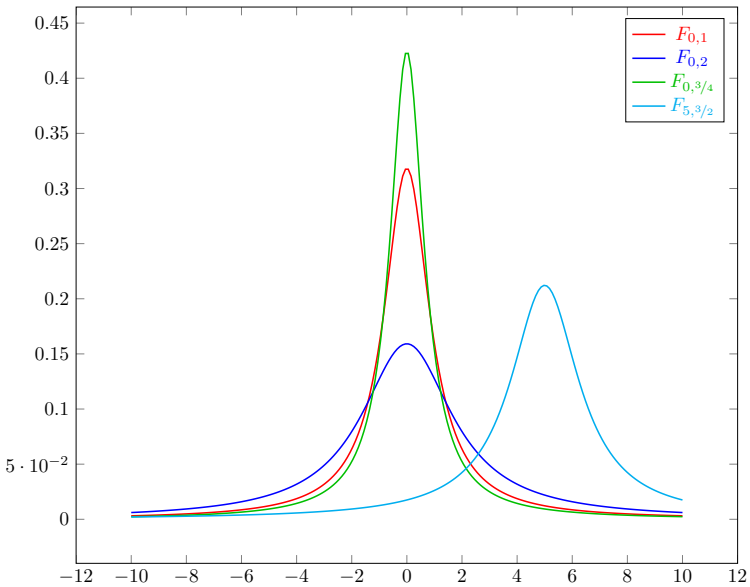
Dann ist f_{α,σ^2} eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und das zu f_{α,σ^2} gehörige Maß aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt *Normalverteilung* mit den Parametern α und σ^2. Man bezeichnet die Normalverteilung mit $\mathcal{N}_{\alpha,\sigma^2}$. Das Maß $\mathcal{N}_{0,1}$ heißt auch *Standardnormalverteilung*.



Beispiel M.14.7. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0, +\infty)$. Weiter sei $F_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \frac{\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta^2 + (x - \alpha)^2}.$$

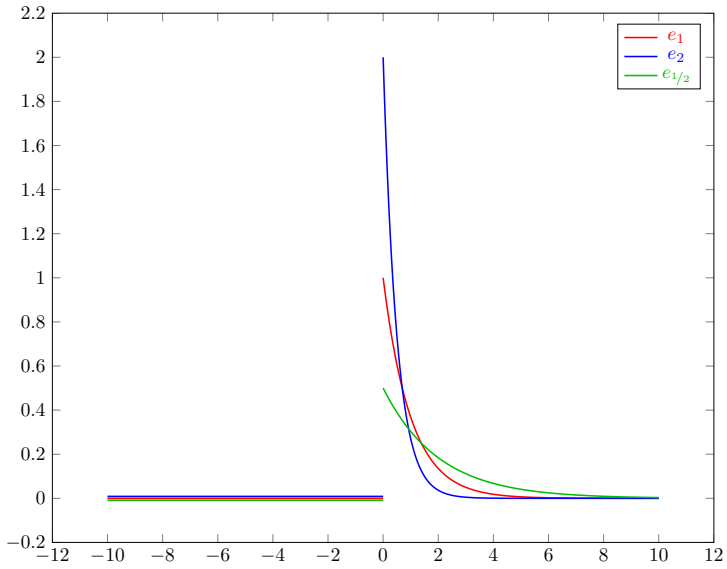
Dann ist $F_{\alpha,\beta}$ eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und das zu $F_{\alpha,\beta}$ gehörige Maß aus der Menge $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt *Cauchy-Verteilung* mit den Parametern α und β. Man bezeichnet die Cauchy-Verteilung mit $\gamma_{\alpha,\beta}$. Das Maß $\gamma_{0,1}$ heißt auch *Standard-Cauchy-Verteilung*.



Beispiel M.14.8. Sei $\eta \in (0, +\infty)$. Weiter sei $e_\eta \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$e_\eta(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x < 0, \\ \eta \cdot \mathrm{e}^{-\eta x}, & \text{falls } x \geq 0. \end{cases}$$

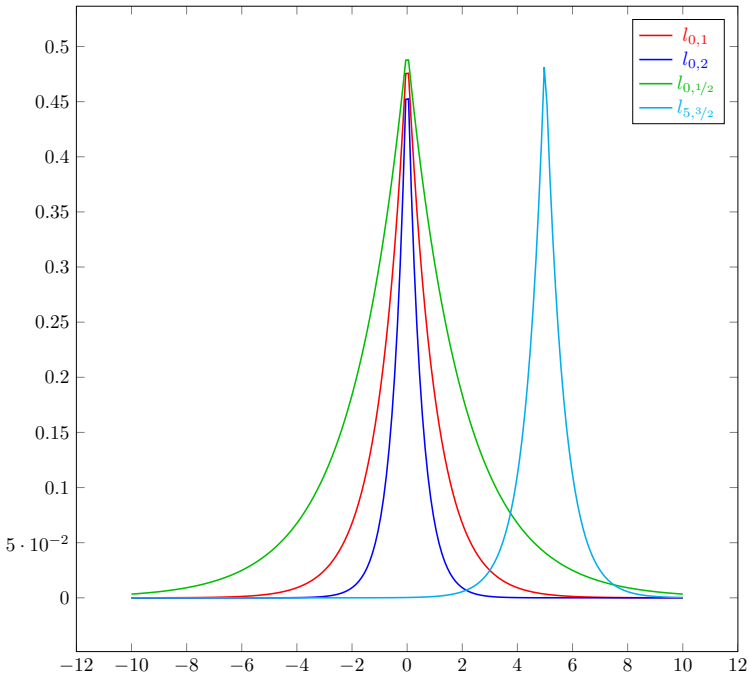
Dann ist e_η eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und das zu e_η gehörige Maß E_η aus der Menge $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt *Exponentialverteilung* zum Parameter η.



Beispiel M.14.9. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\eta \in (0, +\infty)$. Weiter sei $l_{\alpha,\eta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \frac{1}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\eta|x-\alpha|}.$$

Dann ist $l_{\alpha,\eta}$ eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und das zu $l_{\alpha,\eta}$ gehörige Maß aus der Menge $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt *Laplace-Verteilung* mit den Parametern α und η. Man bezeichnet die Laplace-Verteilung mit $L_{\alpha,\eta}$. Das Maß $L_{0,1}$ heißt auch *Standard-Laplace-Verteilung*.

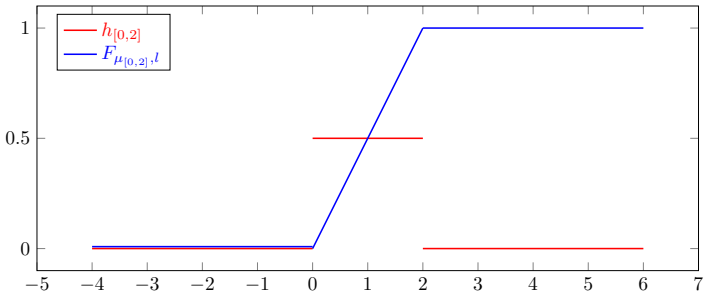


Beispiel M.14.10. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (\alpha, +\infty)$. Es sei $\lambda^{(1)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Es bezeichne $\mu_{[\alpha,\beta]}$ die *$\lambda^{(1)}$-Gleichverteilung auf* $[\alpha, \beta]$ (auch *kontinuierliche Gleichverteilung* auf $[\alpha, \beta]$ genannt). Dann lässt sich $\mu_{[\alpha,\beta]}$ auch über eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte erzeugen, nämlich über die Funktion $h_{[\alpha,\beta]} \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$h_{[\alpha,\beta]}(x) := \begin{cases} \frac{1}{\beta-\alpha}, & \text{falls } x \in [\alpha, \beta], \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta]. \end{cases}$$

Für $x \in \mathbb{R}$ gilt dann

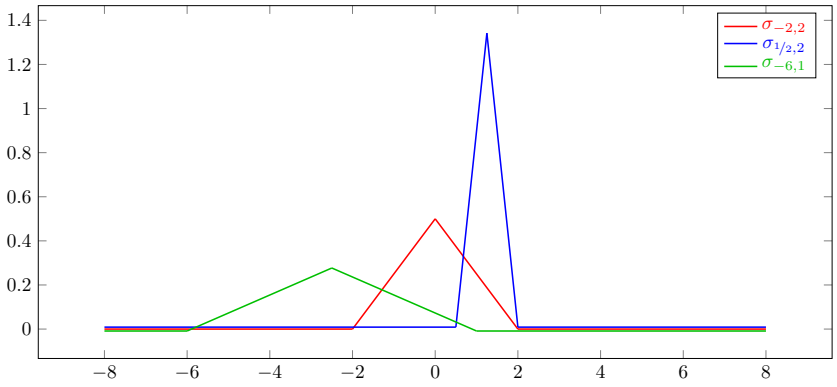
$$F_{\mu_{[\alpha,\beta]},l}(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, \alpha), \\ \frac{x-\alpha}{\beta-\alpha}, & \text{falls } x \in [\alpha, \beta], \\ 1, & \text{falls } x \in (\beta, +\infty). \end{cases}$$



Beispiel M.14.11. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (\alpha, +\infty)$. Weiter sei $\sigma_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$\sigma_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus [\alpha, \beta], \\ \frac{4(x-\alpha)}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } x \in \left[\alpha, \frac{\alpha+\beta}{2}\right], \\ \frac{4(\beta-x)}{(\beta-\alpha)^2}, & \text{falls } x \in \left(\frac{\alpha+\beta}{2}, \beta\right]. \end{cases}$$

Dann ist $\sigma_{\alpha,\beta}$ eine Riemann-Wahrscheinlichkeitsdichte und man nennt das zu $\sigma_{\alpha,\beta}$ gehörige Maß aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *Simpson-Verteilung* (oder auch *Dreiecksverteilung*) mit den Parametern α und β. Man bezeichnet die Simpson-Verteilung mit $\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$. Im Falle $\beta \in (0, +\infty)$ heißt $\mathcal{S}_{-\beta,\beta}$ auch die *symmetrische Simpson-Verteilung* zum Parameter β.

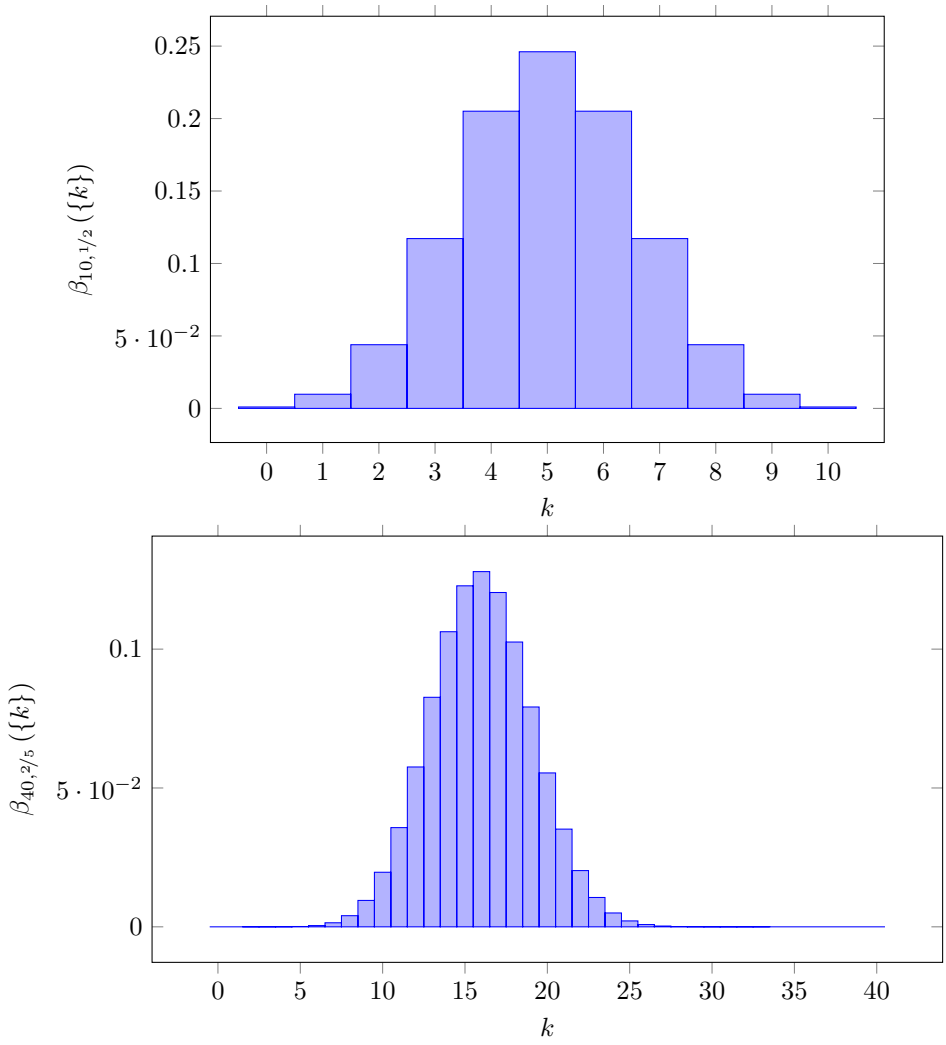


M.15. Einige diskrete Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Definition M.15.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [0,1]$. Dann heißt

$$\beta_{n,p} := \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$$

die *Binomialverteilung* mit den Parametern n und p. Die Binomialverteilung $\beta_{1,p}$ wird auch *Bernoulli-Verteilung* zum Parameter p genannt.



Bemerkung M.15.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $p \in [0,1]$. Dann gilt $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$, $\beta_{n,1} = \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}$ und $\beta_{n,0} = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. ♣

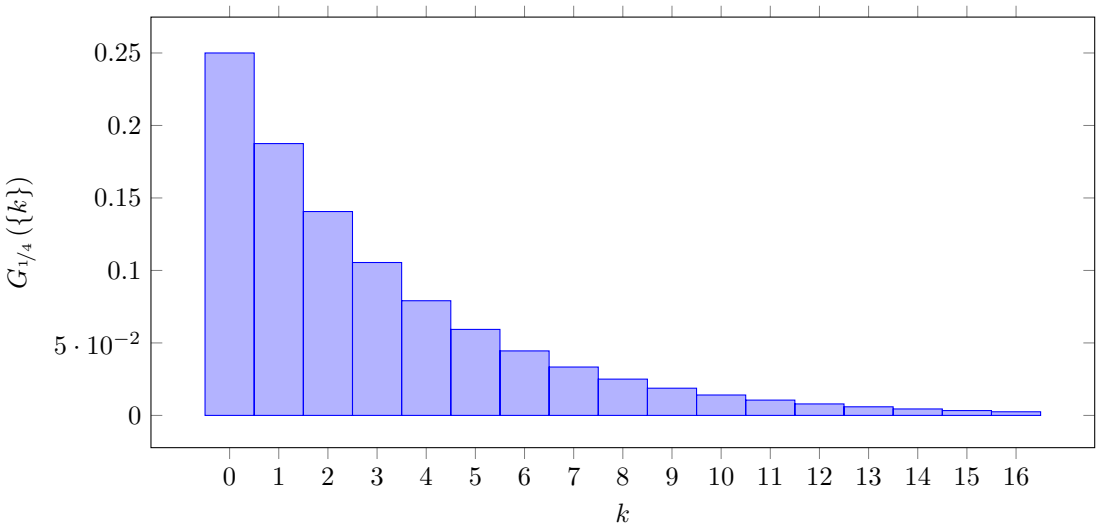
Definition M.15.2. Seien $p \in (0,1]$,

$$G_p := \sum_{k=0}^{\infty} (1-p)^k \cdot p \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$$

und

$$\widetilde{G}_p := \sum_{k=1}^{\infty} (1-p)^{k-1} \cdot p \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann heißt G_p bzw. $\widetilde{G}_p$ die *geometrische Verteilung* zum Parameter p bzw. die *Ersterfolgsverteilung* zum Parameter p.

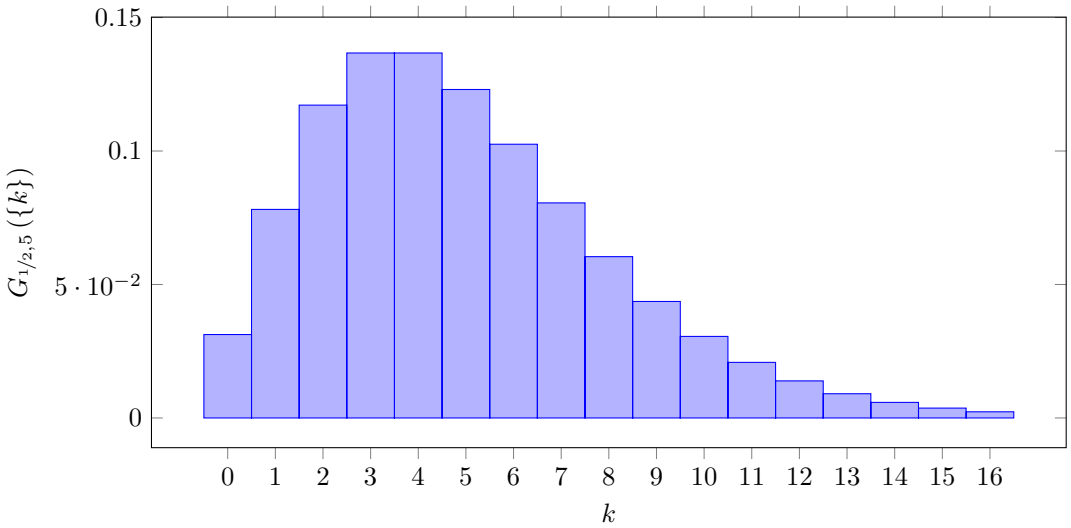


Bemerkung M.15.2. Sei $p \in (0,1]$. Dann gehören G_p und $\widetilde{G}_p$ zu $\mathcal{M}_+^{1,d}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und es gilt $G_1 = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$ sowie $\widetilde{G}_1 = \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}$. ♣

Definition M.15.3. Seien $p \in (0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$. Weiter sei

$$G_{p,r} := \sum_{k=0}^{\infty} \binom{k+r-1}{k} \cdot (1-p)^k \cdot p^r \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann heißt $G_{p,r}$ die *negative Binomialverteilung* mit den Parametern p und r.

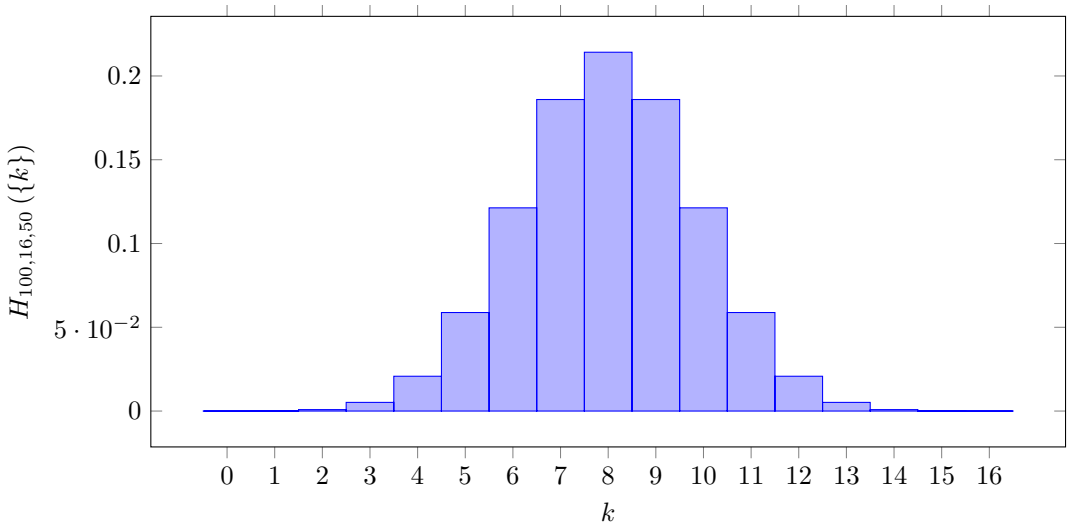


Bemerkung M.15.3. Seien $p \in (0,1]$ und $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt $G_{p,r} \in \mathcal{M}_+^{1,d}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, $G_{p,1} = G_1$ und $G_{1,r} = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. ♣

Definition M.15.4. Seien $M, N, \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n \leq M$ und $M \leq N$ erfüllt ist. Weiter sei

$$H_{N,M,n} \coloneqq \sum_{k=0}^{n} \frac{\binom{M}{k} \cdot \binom{N-M}{n-k}}{\binom{N}{n}} \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Es heißt $H_{N,M,n}$ die *hypergeometrische Verteilung* mit den Parametern M, N und n.



Bemerkung M.15.4. Seien $M, N, \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $n \leq M$ und $M \leq N$ erfüllt ist. Dann gelten $H_{N,M,n} \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und

$$\{k \in \mathbb{R} \,|\, H_{N,M,n}(\{k\}) \neq 0\} = \{k \in \mathbb{N}_0 \,|\, \max\{0, n+M-N\} \leq k \leq \min\{n, M\}\}. \qquad ♣$$

Herkunft dieses Maßes. Wenn wir eine Urne betrachten mit M weißen und $N-M$ schwarzen Kugeln und n mal Ziehen ohne Zurücklegen, dann ist $H_{N,M,n}(\{k\})$ die Wahrscheinlichkeit gerade k weiße Kugeln gezogen zu haben. ♣

Wir präsentieren nun einen asymptotischen Zusammenhang zwischen den hypergeometrischen Verteilungen und den Binomialverteilungen.

Satz M.15.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$, $(M_N)_{N \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n-1}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Für $N \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n-1}$ gilt $M_N \leq N$.*

(II) *Die Folge $\left(\frac{M_n}{N}\right)_{N \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n-1}}$ konvergiert gegen eine Zahl $p \in (0,1)$.*

Dann gelten folgende Aussagen:

(a) *Es gilt*

$$\lim_{N \to \infty} M_N = +\infty$$

und

$$\lim_{n \to \infty} (n + M_n - N) = -\infty.$$

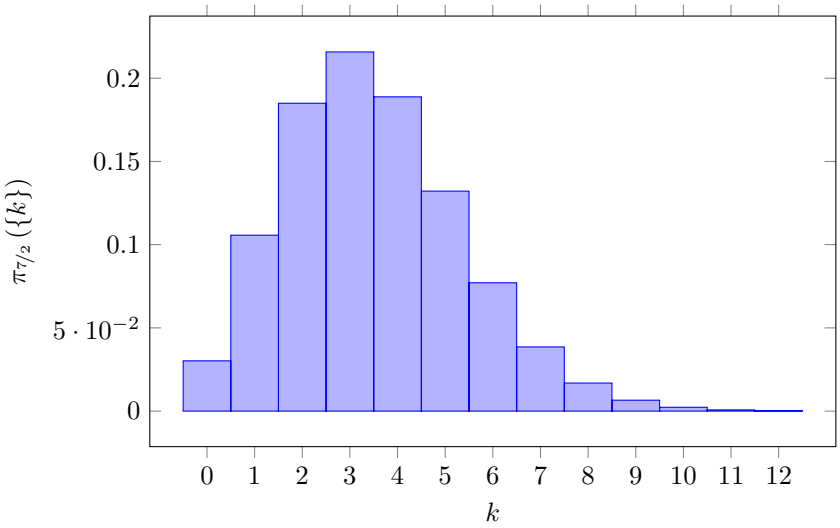
(b) *Sei* $k \in \mathbb{Z}_{0,n}$. *Dann gilt*

$$\lim_{N\to\infty} H_{N,M,n}\left(\{k\}\right) = \beta_{n+p}\left(\{k\}\right).$$

Definition M.15.5. Seien $\alpha \in [0, +\infty)$ und

$$\pi_\alpha := \sum_{k=0}^{\infty} \exp\left(-\alpha\right) \frac{\alpha^k}{k!} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann heißt π_α die *Poisson*[1)]*-Verteilung* zum Parameter α.



Bemerkung M.15.5. Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann gilt $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $\pi_0 = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. ♣

Bemerkung M.15.6. Seien $\alpha \in [0, +\infty)$, $p \in [0, 1]$. Dann folgt $\alpha \cdot p \in [0, +\infty)$ sowie

$$\sum_{k=0}^{\infty} \pi_\alpha\left(\{k\}\right) \beta_{k,p} = \pi_{\alpha\cdot p}.$$

♣

Wir leiten nun einen Zusammenhang zwischen den Familien der Poisson-Verteilung und der Binomialverteilung her. In vielen konkreten Anwendungen treten Binomialverteilungen auf. Im Falle großer n ist die Berechnung der Einzelwahrscheinlichkeiten bei der Binomialverteilung durch das Auftreten der Fakultäten numerisch schwierig. Deshalb suchen wir geeignete Approximationen. Wir nehmen derartige Approximationen, die auf dem Grenzwertsatz von Siméon Denis Poisson basiert. Dieser markiert einen Meilenstein in der Geschichte der Wahrscheinlichkeitstheorie. Wir benötigen hierzu noch eine paar kleine Vorbereitungen.

Lemma M.15.1. *Seien* $n \in \mathbb{N}$, $a, b \in \mathbb{C}$. *Dann gilt:*

(a) $a^n - b^n = (a-b)\sum_{k=0}^{n-1} a^k b^{n-1-k}$.

(b) *Seien* $a, b \in K_{|\cdot|,\mathbb{C}}\left(0,1\right) := \{z \in \mathbb{C} \,|\, |z| \leq 1\}$. *Dann gilt:*

$$|a^n - b^n| \leq n\,|a-b|.$$

[1)] Siméon Denis Poisson (*21.06.1781; †25.04.1840) war ein französischer Mathematiker und Physiker. Im Jahre 1838 veröffentlichte er ein Werk zur Wahrscheinlichkeitstheorie. Darin leitete er die Poisson-Verteilung her.

Lemma M.15.2. *Seien $\alpha \in [0,+\infty)$ sowie $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = \alpha.$$

Dann gilt:

$$\lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{\alpha_n}{n}\right)^n = \exp(-\alpha).$$

Satz M.15.2 (Grenzwertsatz von Poisson)**.** *Sei $(p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $[0,1]$, für welche die Folge $(n\cdot p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und bezeichne α den zugehörigen Grenzwert. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}(\{k\}) = \pi_\alpha(\{k\}).$$

Beweis. Wegen $\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n = \alpha$, der Nichtnegativität der Folge $(n\cdot p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\alpha \in (0,+\infty)$ folgt aus Lemma M.15.2

$$\lim_{n\to\infty} \left[(1-p_n)^n\right] = \lim_{n\to\infty} \left[\left(1 - \frac{n\cdot p_n}{n}\right)^n\right] = \exp(-\alpha). \tag{1}$$

Sei zunächst $k = 0$. Für $n \in \mathbb{N}_0$ gilt dann

$$\beta_{n,p_n}(\{0\}) = \binom{n}{0} \cdot p_n^0 (1-p_n)^{n-0}\, 0 = (1-p_n)^n. \tag{2}$$

Aus (2) und (1) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}(\{0\}) = \exp(-\alpha) = \pi_\alpha(\{0\}). \tag{3}$$

Sei nun $k \in \mathbb{N}$. Für $n \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,k-1}$ gilt dann

$$\begin{aligned} \beta_{n,p_n}(\{k\}) = \binom{n}{k} p_n^k (1-p_n)^{n-k} &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(n-j)\right] p_n^k (1-p_n)^{n-k} \\ &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1}(n\cdot p_n - j p_n)\right](1-p_n)^{n-k}. \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n = \alpha$ und $\lim_{n\to\infty} {}^1\!/_n = 0$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} p_n = \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot p_n \cdot \frac{1}{n}\right) = \lim_{n\to\infty} n\cdot p_n \cdot \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = \alpha\cdot 0 = 0. \tag{5}$$

Aus (5) folgt $j \in \mathbb{Z}_{0,k-1}$ dann

$$\lim_{n\to\infty}(n\cdot p_n - j\cdot p_n) = \lim_{n\to\infty} n\cdot p_n - j\cdot \lim_{n\to\infty} p_n = \alpha - 0 = \alpha. \tag{6}$$

Aus (5) und (1) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty}\left[(1-p_n)^{n-k}\right] = \lim_{n\to\infty}\left[(1-p_n)^n\right]\left(1 - \lim_{n\to\infty} p_n\right)^{-k} = \exp(-\alpha). \tag{7}$$

Aus (4), (6) und (7) folgt

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} \beta_{n,p_n}\left(\{k\}\right) &= \frac{1}{k!}\left[\prod_{j=0}^{k-1} \lim_{n\to\infty}\left(n\cdot p_n - j\cdot p_n\right)\right]\cdot \lim_{n\to\infty}\left(1-p_n\right)^{n-k} = \frac{\alpha^k}{k!}\exp\left(-\alpha\right) \\ &= \pi_\alpha\left(\{k\}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (3) und (8) ist dann alles gezeigt. □

Im Folgenden betrachten wir den Grenzwertprozess beispielhaft für die Folge $\left(n\cdot p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ mit

$$p_n = \frac{4}{n+3}, \qquad \text{für alle } n\in\mathbb{N}.$$

Mit dieser Wahl gilt natürlich

$$\lim_{n\to\infty} n\cdot p_n = 4.$$

Die erste Abbildung zeigt die Binomialverteilung $\beta_{10,4/13}$ (blau) in Gegenüberstellung zur Poisson-Verteilung π_4 (rot). Analog stellen die weiteren Abbildungen eine Gegenüberstellung von $\beta_{50,4/53}$ und π_4 bzw. $\beta_{100,4/103}$ und π_4 dar (siehe Abbildung M.1).

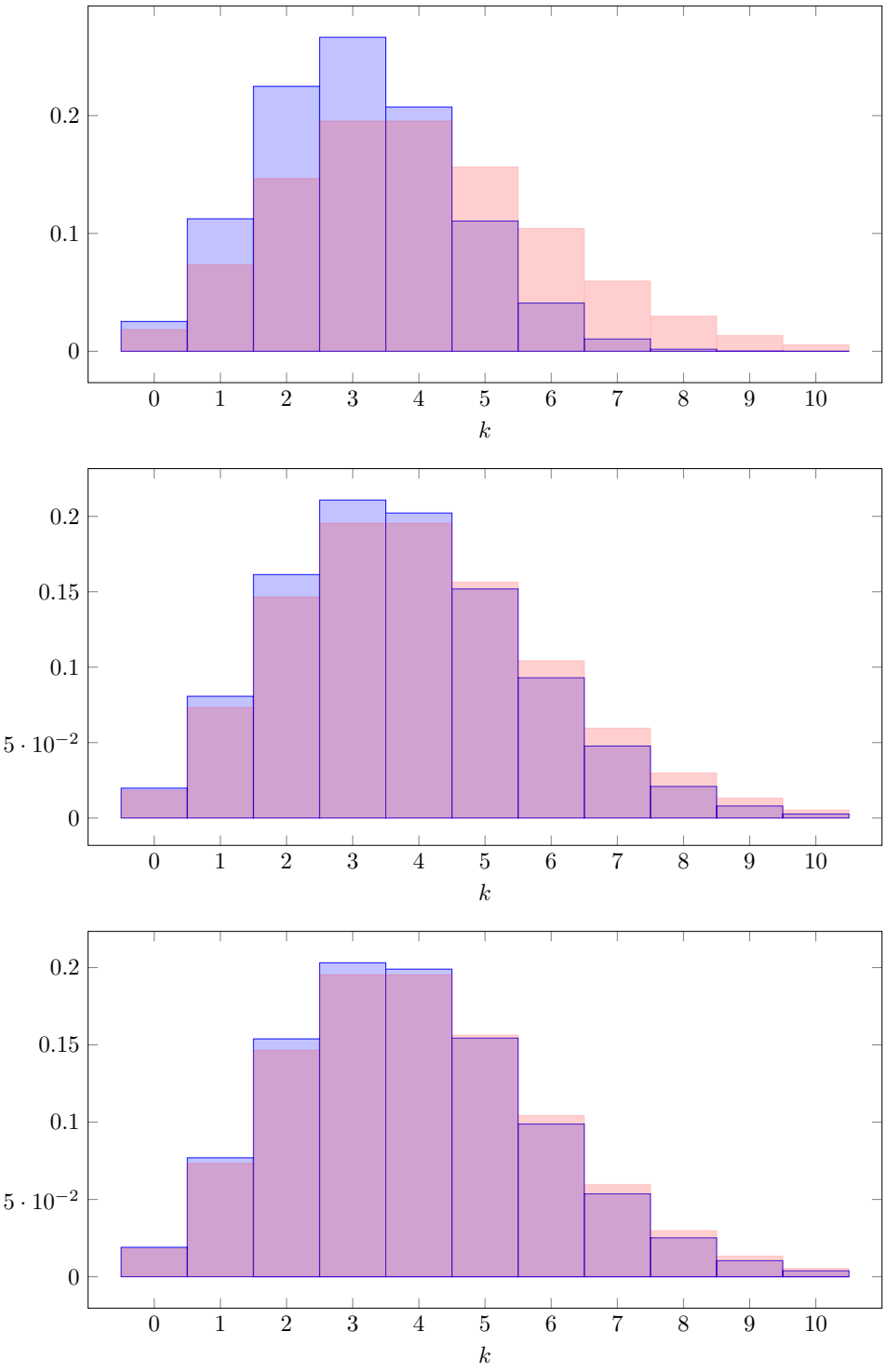


Abbildung M.1.: Darstellung des Grenzwertprozesses

M.16. Messbare Abbildungen und Bildmaße

Oftmals steht man vor Situationen, in denen ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ sowie ein nichttrivialer messbarer Raum $(\Omega', \mathfrak{A}')$ vorliegen und mittels eines geeigneten Mechanismus das Maß μ auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ verpflanzt werden soll. Eine solche Situation ist zum Beispiel in weiten Teilen der Stochastik anzutreffen. Das vorliegende Kapitel wird sich mit der Untersuchung dieser Mechanismen beschäftigen. Vor diesem Hintergrund treffen wir folgende Begriffsbildung.

Definition M.16.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$. Dann heißt T eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung*, falls für jedes $A' \in \mathfrak{A}'$ die Beziehung $T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist.

Beispiel M.16.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine konstante Abbildung. Dann ist $T^{-1}(\mathfrak{A}') = \{\varnothing, \Omega\}$ und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar.

Beispiel M.16.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ nichttrivialer messbarer Raum und bezeichne id_Ω die identische Abbildung auf Ω. Dann ist id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung.

Das nachfolgende Resultat sollte im Zusammenhang mit den Sätzen M.4.3 und M.4.4 betrachtet werden.

Satz M.16.1. *Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen sowie $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$.*

(a) *Sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann gilt:*

(a1) *Es ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$ eine σ-Algebra in Ω und T ist $T^{-1}(\mathfrak{A}')$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

(a2) *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

(ii) *Es ist $T^{-1}(\mathfrak{A}') \subseteq \mathfrak{A}$.*

(a3) *T ist $\mathfrak{P}(\Omega)$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

(b) *Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω und sei $\mathfrak{A}_T := \{A' \in \mathfrak{P}(\Omega') \mid T^{-1}(A') \in \mathfrak{A}\}$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist $\mathfrak{A}_T$ eine σ-Algebra in Ω' und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_T$-messbar.*

(b2) *Sei $\mathfrak{A}'$ eine σ-Algebra in Ω'. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(iii) *T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

(iv) *Es ist $\mathfrak{A}' \subseteq \mathfrak{A}_T$.*

(b3) *Sei $\mathfrak{A}'_0 := \{\varnothing, \Omega'\}$. Dann ist $\mathfrak{A}'_0$ eine σ-Algebra in Ω' und T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'_0$-messbar.*

Folgerung M.16.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{C})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume und ferner sei $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ dann $\mathfrak{C}$-$\mathfrak{A}'$-messbar. Weiter sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω mit $\mathfrak{C} \subseteq \mathfrak{A}$. Dann ist T auch $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

Satz M.16.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume sowie $\mathcal{E}'$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}'$. Weiter sei $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *T ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

(ii) *Es ist $T^{-1}(\mathcal{E}') \subseteq \mathfrak{A}$.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Dies folgt wegen $\mathcal{E}' \subseteq \mathfrak{A}'$ sogleich aus Definition M.16.1.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen Teil *(b)* von Satz M.4.6 dann

$$\sigma_\Omega\left(T^{-1}\left(\mathcal{E}'\right)\right) \subseteq \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Nach Satz M.4.7 gilt

$$\sigma_\Omega\left(T^{-1}\left(\mathcal{E}'\right)\right) = T^{-1}\left(\sigma_\Omega\left(\mathcal{E}'\right)\right). \tag{2}$$

Nach der Wahl von $\mathcal{E}'$ gilt

$$\sigma_\Omega\left(\mathcal{E}'\right) = \mathfrak{A}'. \tag{3}$$

Aus (1), (2) und (3) folgt dann $T^{-1}\left(\mathfrak{A}'\right) \subseteq \mathfrak{A}$. Somit ist T dann $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbar. Es gilt also *(i)*. □

Bemerkung M.16.1. Seien Ω_1, Ω_2 und Ω_3 nichtleere Mengen sowie $T_1 \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1, \Omega_2\right)$ und $T_2 \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_2, \Omega_3\right)$. Weiter sei $A \in \mathfrak{P}\left(\Omega_3\right)$. Dann gilt

$$\left(T_1 \circ T_2\right)^{-1}(A) = T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(A)\right). \qquad \clubsuit$$

Satz M.16.3. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie $(\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ nicht triviale messbare Räume. Weiter seien $T_1 \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1, \Omega_2\right)$ bzw. $T_2 \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_2, \Omega_3\right)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$-messbare bzw. $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung. Dann ist $T_2 \circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung.*

Beweis. Nach Voraussetzung gelten

$$T_1^{-1}\left(\mathfrak{A}_2\right) \subseteq \mathfrak{A}_1 \tag{1}$$

und

$$T_2^{-1}\left(\mathfrak{A}_3\right) \subseteq \mathfrak{A}_2. \tag{2}$$

Unter Verwendung von Bemerkung M.16.1 sowie (2) und (1) folgt dann

$$\left(T_2 \circ T_1\right)^{-1}\left(\mathfrak{A}_3\right) = T_1^{-1}\left(T_2^{-1}\left(\mathfrak{A}_3\right)\right) \subseteq T_1^{-1}\left(\mathfrak{A}_2\right) \subseteq \mathfrak{A}_1.$$

Somit ist $T_2 \circ T_1$ dann eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung. □

Folgerung M.16.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $T \in \operatorname{Abb}\left(\Omega, \Omega\right)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung. Weiter sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist T^k eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung. Dabei sei $T^0 \coloneqq \mathrm{id}_\Omega$.*

Satz M.16.4. *Sei Ω eine nichtleere Menge und sei $\left((\Omega_\iota, \mathfrak{A}_\iota)\right)_{\iota \in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $\iota \in I$ sei $T_\iota \in \operatorname{Abb}\left(\Omega, \Omega_\iota\right)$. Ferner sei*

$$\mathfrak{A} \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}\left(\mathfrak{A}_\iota\right)\right).$$

Dann gilt:

(a) *Sei $\iota \in I$. Dann ist T_ι $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_\iota$-messbar.*

(b) *Sei $\widetilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra in Ω derart, dass für jedes $\iota \in I$ die $\widetilde{\mathfrak{A}}$-$\mathfrak{A}_\iota$-Messbarkeit von T_ι vorliegt. Dann gilt $\mathfrak{A} \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) \subseteq \bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) \subseteq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right) = \mathfrak{A}.$$

Somit ist T_ι also $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_\iota$-messbar.

Zu *(b)*: Sei $\iota \in I$. Nach Voraussetzung ist T_ι dann $\widetilde{\mathfrak{A}}$-$\mathfrak{A}_\iota$-messbar. Es gilt also $T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}$. Hieraus folgt dann

$$\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}.$$

Hieraus ergibt sich, da $\widetilde{\mathfrak{A}}$ eine σ-Algebra in Ω ist, mittels Teil *(b)* von Satz M.4.6 dann

$$\mathfrak{A} = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right) \subseteq \widetilde{\mathfrak{A}}.$$

□

Satz M.16.4 führt auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.16.2. Es liege die Situation von Satz M.16.4 vor. Dann heißt die σ-Algebra

$$\mathfrak{A} \coloneqq \sigma_\Omega\left(\bigcup_{j \in I} T_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)\right)$$

die *von der Familie* $(T_j)_{j \in I}$ von Abbildungen sowie *der Familie* $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j \in I}$ von nichttrivialen messbaren Räumen *erzeugte σ-Algebra* in Ω.

Wir zeigen nun, dass die Konstruktion aus Definition M.16.2 verträglich mit der Komposition von Abbildungen ist.

Lemma M.16.1. *Es seien Ω und Ω' nichtleere Mengen sowie $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$. Außerdem sei $((\Omega_\iota, \mathfrak{A}_\iota))_{\iota \in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $\iota \in I$ sei $T_\iota \in \operatorname{Abb}(\Omega', \Omega_\iota)$. Ferner seien*

$$\mathfrak{A}' \coloneqq \sigma_{\Omega'}\left(\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right) \quad \text{und} \quad \mathfrak{A} \coloneqq T^{-1}(\mathfrak{A}').$$

Dann gilt

$$\mathfrak{A} = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota \in I} (T_\iota \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right).$$

Beweis. Für $\iota \in I$ gilt wegen Bemerkung M.16.1 nun

$$(T_\iota \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) = T^{-1}\left(T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right).$$

Hieraus folgt

$$\bigcup_{\iota \in I} (T_\iota \circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_\iota) = \bigcup_{\iota \in I} T^{-1}\left(T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right) = T^{-1}\left(\bigcup_{\iota \in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.4.7 dann

$$\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}(T_\iota\circ T)^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)=\sigma_\Omega\left(T^{-1}\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)\right)=T^{-1}\left(\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)\right)$$
$$=T^{-1}(\mathfrak{A}')=\mathfrak{A}.$$

□

Beispiel M.16.3. Seien Ω eine nichtleere Menge und $A\in\mathfrak{P}(\Omega)$. Es sei $1_A\colon\Omega\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß

$$1_A(\omega):=\begin{cases}1, & \text{falls } \omega\in A,\\ 0, & \text{falls } \omega\in\Omega\setminus A.\end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es ist $1_A^{-1}(\mathfrak{B}_1)=\{\varnothing,A,\Omega\setminus A,\Omega\}$.

(b) Sei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) 1_A ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.

(ii) Es ist $A\in\mathfrak{A}$.

Satz M.16.5. *Seien Ω und Ω_0 nichtleere Mengen sowie $\mathfrak{A}_0$ eine σ-Algebra in Ω_0 und $S\in\operatorname{Abb}(\Omega_0,\Omega)$. Weiter sei $((\Omega_\iota,\mathfrak{A}_\iota))_{\iota\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $\iota\in I$ sei $T_\iota\in\operatorname{Abb}(\Omega,\Omega_\iota)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist $\mathfrak{A}_0$-$\left[\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)\right]$-messbar.*

(ii) *Für jedes $\iota\in I$ ist $T_\iota\circ S$ eine $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_\iota$-messbare Abbildung.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Sei $k\in I$. Nach Teil *(a)* von Satz M.16.4 ist T_k dann $\left[\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)\right]$-$\mathfrak{A}_k$-messbar. Hieraus folgt bei Beachtung von *(i)* mittels Satz M.16.3 dann $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_k$-Messbarkeit von $T_k\circ S$. Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Sei $\mathcal{E}:=\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)$. Per Konstruktion ist $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)$. Sei $E\in\mathcal{E}$. Dann gibt es also ein $k\in I$ ein $A_k\in\mathfrak{A}_k$ mit $E=T_k^{-1}(A_k)$. Hieraus folgt bei Beachtung von Bemerkung M.16.1 dann

$$S^{-1}(E)=S^{-1}\left(T_k^{-1}(A_k)\right)=(T_k\circ S)^{-1}(A_k).\tag{1}$$

Wegen *(ii)* und $A_k\in\mathfrak{A}_k$ gilt

$$(T_k\circ S)^{-1}(A_k)\in\mathfrak{A}_0.\tag{2}$$

Damit ist aber wegen (1) und (2) nun

$$S^{-1}(\mathcal{E})\subseteq\mathfrak{A}_0.\tag{3}$$

Da $\mathcal{E}$ ein Erzeuger von $\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)$ ist, folgt wegen (3) mittels Satz M.16.2 dann die $\mathfrak{A}_0$-$\left[\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I}T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right)\right]$-Messbarkeit von S. Es gilt also *(i)*. □

Satz M.16.6. *Seien Ω eine nichtleere Menge und $((\Omega_\iota, \mathfrak{A}_\iota))_{\iota\in I}$ eine Familie von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $\iota \in I$ sei $\mathcal{E}_\iota$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_\iota$ und $T_\iota \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega_\iota)$. Dann gilt*

$$\sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I} T_\iota^{-1}(\mathcal{E}_\iota)\right) = \sigma_\Omega\left(\bigcup_{\iota\in I} T_\iota^{-1}(\mathfrak{A}_\iota)\right).$$

Wir zeigen nun die Borel-Messbarkeit stetiger Abbildungen auf metrischen Räumen.

Definition M.16.3. Sei (Ω, ϱ) ein metrischer Raum. Weiter seien $\omega_0 \in \Omega$ und $r > 0$. Dann heißt

$$K_\varrho(\omega_0, r) \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \varrho(\omega_0, \omega) < r\}$$

bzw.

$$\overline{K}_\varrho(\omega_0, r) \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid \varrho(\omega_0, \omega) \leq r\}$$

die *offene* bzw. *abgeschlossene Kugel in* (Ω, ϱ) mit Mittelpunkt ω_0 und Radius r.

Bemerkung M.16.2. Sei (Ω, ϱ) ein metrischer Raum sowie $\omega_0 \in \Omega$ und $r > 0$. Dann gelten $K_\varrho(\omega_0, r) \in \mathcal{O}(\Omega, \varrho)$ sowie $\overline{K}_\varrho(\omega_0, r) \in \mathcal{A}(\Omega, \varrho)$. ♣

Definition M.16.4. Seien (Ω, ϱ) und (Ω', ϱ') metrische Räume sowie $f \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$.

(a) Sei $\omega_0 \in \Omega$. Dann heißt f *ϱ-ϱ'-stetig in ω_0*, falls zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ derart existiert, so dass für $\omega \in K_\varrho(\omega_0, \delta)$ stets $f(\omega) \in \overline{K}_\varrho(\omega_0, \varepsilon)$ gilt.

(b) f heißt *ϱ-ϱ'-stetig*, falls ϱ-ϱ'-Stetigkeit in jedem $\omega_0 \in \Omega$ vorliegt.

Bezeichnung. Seien (Ω, ϱ) und (Ω', ϱ') metrische Räume. Die Menge aller ϱ-ϱ'-stetigen Abbildungen wird mit $\mathscr{C}((\Omega, \varrho), (\Omega', \varrho'))$ bezeichnet.

Definition M.16.5. Seien (Ω, ϱ) ein metrischer Raum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$.

(a) Sei $\omega \in \Omega$. Dann heißt x ein *Berührungspunkt* von A in (Ω, ϱ), falls für jedes $r > 0$ dann $K_\varrho(\omega, r) \cap A \neq \varnothing$ gilt.

(b) Die Menge $\overline{A}$ aller Berührungspunkte von A in (Ω, ϱ) heißt der *Abschluss* von A in (Ω, ϱ).

Satz M.16.7. *Seien (Ω, ϱ) und (Ω', ϱ') metrische Räume sowie $f \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $f \in \mathscr{C}((\Omega, \varrho), (\Omega', \varrho'))$.*

(ii) *Für jedes $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$ gilt $f(\overline{A}) \subseteq \overline{f(A)}$.*

(iii) *Für jedes $A' \in \mathcal{A}(\Omega', \varrho')$ gilt $f^{-1}(A') \in \mathcal{A}(\Omega, \varrho)$.*

(iv) *Für jedes $B' \in \mathcal{O}(\Omega', \varrho')$ gilt $f^{-1}(B') \in \mathcal{O}(\Omega, \varrho)$.*

Satz M.16.8. *Seien (Ω, ϱ) und (Ω', ϱ') metrische Räume mit* Borelschen *σ-Algebren $\mathfrak{B}$ und $\mathfrak{B}'$. Weiter sei $f \in \mathscr{C}((\Omega, \varrho), (\Omega', \varrho'))$. Dann ist f eine $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{B}'$-messbare Abbildung.*

Beweis. Nach Definition von $\mathfrak{B}$ bzw. $\mathfrak{B}'$ gelten

$$\mathcal{O}(\Omega, \varrho) \subseteq \mathfrak{B} \tag{1}$$

bzw.

$$\sigma_{\Omega'}(\mathcal{O}(\Omega', \varrho')) = \mathfrak{B}'. \tag{2}$$

Wegen $f \in \mathscr{C}\left((\Omega, \varrho), (\Omega', \varrho')\right)$ gilt nach Satz M.16.7 nun

$$f^{-1}\left(\mathcal{O}\left(\Omega', \varrho'\right)\right) \subseteq \mathcal{O}\left(\Omega, \varrho\right). \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$f^{-1}\left(\mathcal{O}\left(\Omega', \varrho'\right)\right) \subseteq \mathfrak{B}. \tag{4}$$

Wegen (2) und (4) liefert Satz M.16.2 die $\mathfrak{B}$-$\mathfrak{B}'$-Messbarkeit von f. □

Satz M.16.9. *Seien $l, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Sei $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}^l, |\cdot|\right)\right)$.*

(b) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung.*

Die nachfolgende Konstruktion nimmt eine *herausragende* Position in der Stochastik ein.

Satz M.16.10. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $T \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Es sei $T(\mu) : \mathfrak{A}' \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$A' \longmapsto \mu\left(T^{-1}\left(A'\right)\right).$$

Dann gelten $T(\mu) \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$ und $[T(\mu)](\Omega') = \mu(\Omega)$.

Beweis. Aufgrund der Wahl von T ist $T(\mu)$ wohldefiniert. Wegen $T^{-1}(\varnothing) = \varnothing$ und $\mu(\varnothing) = 0$ ergibt sich

$$[T(\mu)](\varnothing) = \mu\left(T^{-1}(\varnothing)\right) = \mu(\varnothing) = 0. \tag{1}$$

Sei nun $(A'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}'$. Dann ist $\left(T^{-1}(A'_n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ und es gilt

$$T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(A'_n\right). \tag{2}$$

Aufgrund der σ-Additivität von μ gilt

$$\mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(A'_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(T^{-1}\left(A'_n\right)\right). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}[T(\mu)]\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right) &= \mu\left(T^{-1}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A'_n\right)\right) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} T^{-1}\left(A'_n\right)\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu\left(T^{-1}\left(A'_n\right)\right)\\ &= \sum_{n=1}^{\infty} [T(\mu)]\left(A'_n\right).\end{aligned}$$

Somit ist $T(\mu)$ also σ-additiv. Hieraus und aus (1) folgt nun $T(\mu) \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$. Wegen $T^{-1}(\Omega') = \Omega$ gilt zudem

$$[T(\mu)](\Omega') = \mu\left(T^{-1}(\Omega')\right) = \mu(\Omega).$$ □

Satz M.16.10 führt nun auf die folgende Begriffsbildung.

Definition M.16.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Dann heißt das in Satz M.16.10 eingeführte Maß $T(\mu)$ auf $(\Omega', \mathfrak{A}')$ das *Bildmaß von μ bei der Abbildung T*.

Beispiel M.16.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und bezeichne id_Ω die identische Abbildung auf Ω. Dann ist id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung es gilt $(\mathrm{id}_\Omega)(\mu) = \mu$.

Beispiel M.16.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Dann gilt:

(a) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ bzw. $\mathfrak{o}'$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gilt $T(\mathfrak{o}) = \mathfrak{o}'$.

(b) Sei $\omega_0 \in \Omega$. Dann gilt $T(\varepsilon_{\omega_0, \mathfrak{A}}) = \varepsilon_{T(\omega_0), \mathfrak{A}'}$.

Bemerkung M.16.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume. Weiterhin sei $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Schließlich seien I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\mu_\iota)_{\iota \in I}$ bzw. $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty]$. Dann ist $\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \mu_\iota \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$T\left(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \mu_\iota\right) = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \left[T(\mu_\iota)\right].$$

♣

Beispiel M.16.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Weiterhin sei I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\omega_\iota)_{\iota \in I}$ bzw. $(\alpha_\iota)_{\iota \in I}$ Folgen aus Ω bzw. $[0, +\infty]$. Dann ist $\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \varepsilon_{\omega_\iota, \mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$T\left(\sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \varepsilon_{\omega_\iota, \mathfrak{A}}\right) = \sum_{\iota \in I} \alpha_\iota \varepsilon_{T(\omega_\iota), \mathfrak{A}'}.$$

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.16.3 mit Teil *(b)* von Beispiel M.16.5. □

Wir zeigen nun die Transitivität der Bildung von Bildmaßen.

Satz M.16.11. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$, $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie $(\Omega_3, \mathfrak{A}_3)$ nicht triviale messbare Räume. Weiter seien $T_1 \in \mathrm{Abb}(\Omega_1, \Omega_2)$ bzw. $T_2 \in \mathrm{Abb}(\Omega_2, \Omega_3)$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_2$-messbare bzw. $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Dann ist $T_2 \circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung und es gilt*

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2\left[T_1(\mu)\right].$$

Beweis. Wegen Satz M.16.3 ist $T_2 \circ T_1$ eine $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}_3$-messbare Abbildung. Sei $A \in \mathfrak{A}_3$. Unter Beachtung der nach Bemerkung M.16.1 gültigen Identität

$$(T_2 \circ T_1)^{-1}(A) = T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(A)\right)$$

folgt dann

$$\begin{aligned}\left[(T_2 \circ T_1)(\mu)\right](A) &= \mu\left((T_2 \circ T_1)^{-1}(A)\right) = \mu\left(T_1^{-1}\left(T_2^{-1}(A)\right)\right) = \left[T_1(\mu)\right]\left(T_2^{-1}(A)\right) \\ &= \left(T_2\left[T_1(\mu)\right]\right)(A).\end{aligned}$$

Somit gilt

$$(T_2 \circ T_1)(\mu) = T_2\left[T_1(\mu)\right].$$

□

Folgerung M.16.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *und* $(\Omega', \mathfrak{A}')$ *nicht triviale messbare Räume. Weiterhin sei* $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ *eine bijektive* $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung mit* $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$*-messbarer Umkehrabbildung* T^{-1}*. Dann gilt*

$$T^{-1}\left[T(\mu)\right] = \mu.$$

Beweis. Nach Voraussetzung ist $T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_\Omega$. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.16.11 und Beispiel M.16.4 dann

$$T^{-1}\left[T(\mu)\right] = \left(T^{-1} \circ T\right)(\mu) = \left(\mathrm{id}_\Omega\right)(\mu) = \mu. \qquad \square$$

Beispiel M.16.7. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ regulär und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ sowie auch $T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}$ jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar und es gelten

$$T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)\right] = \mu$$

sowie

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left[T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}(\mu)\right] = \mu.$$

Beweis. Wegen Satz M.16.9 sind $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ und $T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}$ jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Weiterhin ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}^m$ mit Umkehrabbildung $T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}$. Somit liefert Folgerung M.16.3 alle Behauptungen. $\square$

M.17. Produkte von σ-Algebren

Wir betrachten in diesem Abschnitt eine endliche Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von nichttrivialen messbaren Räumen. Unser Ziel besteht darin, in $\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j$ eine solche σ-Algebra zu konstruieren, welche in natürlicher Weise mit der Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ harmoniert.

Definition M.17.1. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne

$$p_k\colon \bigtimes_{j=1}^n \Omega_j \longrightarrow \Omega_k$$

die gemäß

$$(\omega_1 \ldots, \omega_n) \longmapsto \omega_k$$

definierte Abbildung die *k-te Projektionsabbildung.*

Definition M.17.2. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Sei

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j := \sigma_{\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j}\left(\bigcup_{j=1}^n p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)\right)$$

die von der Folge $(p_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und der Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ nichttrivialer messbarer Räume erzeugte σ-Algebra in $\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j$. Dann heißt $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ das *Produkt* oder die *Produkt-σ-Algebra der Folge* $(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Statt $\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j$ schreibt man auch $\mathfrak{A}_1 \otimes \cdots \otimes \mathfrak{A}_n$.

Satz M.17.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ und weiter sei p_j die j-te Projektionsabbildung. Dann gilt*

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j = \sigma_{\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j}\left(\bigcup_{j=1}^n p_j^{-1}(\mathcal{E}_j)\right).$$

Beweis. Dies folgt sogleich aus Definition M.17.2. □

Wir wollen nun geeignete Erzeuger der Produkt-σ-Algebra bestimmen. Hierbei verwenden wir die in Definition M.1.6 eingeführte Konstruktion von Rechteckmengen.

Lemma M.17.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathfrak{C}_j$ eine nichtleere Teilmenge von $\mathfrak{A}_j$. Es bezeichne $\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{C}_j$ das zu $(\mathfrak{C}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zugehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt*

$$\sigma_{\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{C}_j\right) \subseteq \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei p_j die j-te Projektionsabbildung. Wegen Definition M.17.2 gilt dann

$$\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k = \sigma_{\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j}\left(\bigcup_{j=1}^n p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j)\right). \tag{1}$$

Sei

$$\bigtimes_{j=1}^{n} C_j \in \bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j. \tag{2}$$

Unter Beachtung der für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gültigen Identität

$$p_j^{-1}(C_j) = \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots\ldots \times C_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n,$$

folgt dann

$$\bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(C_j) = \bigcap_{j=1}^{n} \Omega_1 \times \Omega_2 \times \ldots\ldots \times C_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n = \bigtimes_{j=1}^{n} C_j. \tag{3}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{4}$$

Wegen $\mathfrak{C}_j \subseteq \mathfrak{A}_j$ sowie (1) gilt dann

$$p_j^{-1}(\mathfrak{C}_j) \subseteq p_j^{-1}(\mathfrak{A}_j) \subseteq \bigcup_{k=1}^{n} p_k^{-1}(\mathfrak{A}_k) \subseteq \sigma_{\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k}\left(\bigcup_{k=1}^{n} p_k^{-1}(\mathfrak{A}_k)\right) = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{5}$$

Wegen (2), (4) und (5) gilt dann

$$p_j^{-1}(C_j) \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{6}$$

Aus (4), (6) und der Durchschnittsstabilität der σ-Algebra $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ folgt dann

$$\bigcap_{j=1}^{n} p_j^{-1}(C_j) \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k.$$

Hieraus folgt wegen (3) dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n} C_j \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{7}$$

Aus (2) und (7) folgt dann

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{8}$$

Da $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ eine σ-Algebra in $\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k$ ist, folgt wegen (8) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.6 nun

$$\sigma_{\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j}\left(\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{C}_j\right) \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j.$$

□

Lemma M.17.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(\Omega_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien $(E_{j,s})_{s \in \mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_j)$ mit $\bigcup_{s=1}^{\infty} E_{j,s} = \Omega_k$ sowie $E_j \in \mathfrak{P}(\Omega_j)$. Für $s \in \mathbb{N}$ sei ferner*

$$F_{j,s} \coloneqq E_{1,s} \times \ldots \times E_{j-1,s} \times E_j \times E_{j+1,s} \times \ldots \times E_{n,s}.$$

Dann gilt

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} F_{j,s} = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n.$$

Das nachfolgende Resultat beschreibt nun eine für unsere weiteren Ziele wichtige Klasse von Erzeugern eine Produkt-σ-Algebra.

Satz M.17.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$, in welchem eine isotone Folge $(E_{j,s})_{s\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{s=1}^{\infty} E_{j,s} = \Omega_j$ existiert. Es bezeichne $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ das zu $(\mathcal{E}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zugehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt*

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Aus Lemma M.17.1 folgt sogleich

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j\right) \subseteq \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die umgekehrte Inklusion. Sei hierzu $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ und p_j die j-te Projektionsabbildung. Wir zeigen nun die $\left[\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j\right)\right]$-$\mathfrak{A}_j$-Messbarkeit von p_j. Es sei $E_j \in \mathcal{E}_j$. Weiter seien $s \in \mathbb{N}$ sowie

$$F_{j,s} \coloneqq E_{1,s} \times \ldots \times E_{j-1,s} \times E_j \times E_{j+1,s} \times \ldots \times E_{n,s}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$F_{j,s} \in \boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right).$$

Hieraus folgt, da $\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right)$ eine σ-Algebra in $\times_{k=1}^{n}\Omega_k$ ist, dann

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} F_{j,s} \in \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right). \tag{3}$$

Nach Voraussetzung gilt für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ nun $\bigcup_{s=1}^{\infty} E_{j,s} = \Omega_j$. Kombiniert man dies mit (2) und der Isotonievoraussetzung, so ergibt sich mittels Lemma M.17.2 dann

$$\bigcup_{s=1}^{\infty} F_{j,s} = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n. \tag{4}$$

Aus der Definition von p_j folgt sogleich, dass

$$p_j^{-1}(E_j) = \Omega_1 \times \ldots \times \Omega_{j-1} \times E_j \times \Omega_{j+1} \times \ldots \times \Omega_n. \tag{5}$$

Aus (3), (4) und (5) folgt dann

$$p_j^{-1}(E_j) \in \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right).$$

Hieraus folgt wegen $E_j \in \mathcal{E}_j$ dann

$$p_j^{-1}(\mathcal{E}_j) \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right). \tag{6}$$

Da $\mathcal{E}_j$ ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$ ist, folgt wegen (6) mittels Satz M.16.2 die $\left[\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j\right)\right]$-$\mathfrak{A}_j$-Messbarkeit von p_j. Hieraus folgt bei Beachtung von Definition M.17.2 mittels Teil *(b)* von Satz M.16.4 dann

$$\bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k = \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\bigcup_{k=1}^{n}p_k^{-1}\left(\mathfrak{A}_k\right)\right) \subseteq \sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathcal{E}_k\right). \tag{7}$$

Aus (1) und (7) folgt dann die Behauptung. □

Folgerung M.17.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Es bezeichne $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ das zu $\left(\mathfrak{A}_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zugehörige System von Rechteckmengen. Dann gilt*

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$. Weiter sei $\mathcal{E}_j := \mathfrak{A}_j$. Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, ist $\mathcal{E}_j$ dann ein Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$. Sei $s \in \mathbb{N}$. Wir setzen dann $E_{j,s} := \Omega_j$. Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, gilt dann $\Omega_j \in \mathfrak{A}_j$. Insbesondere ist also $E_{j,s} \in \mathcal{E}_j$. Als konstante Folge ist $\left(E_{j,s}\right)_{s\in\mathbb{N}}$ dann isoton und zudem gilt

$$\bigcup_{s=1}^{\infty}E_{j,s} = \bigcup_{s=1}^{\infty}\Omega_j = \Omega_j.$$

Somit liefert Satz M.17.2 dann

$$\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k.$$

□

Folgerung M.17.2. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und $\left((\Omega'_j,\mathfrak{A}'_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $T_j \in \mathrm{Abb}(\Omega_j,\Omega'_j)$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung. Außerdem sei*

$$T\colon \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j \longrightarrow \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega'_j$$

definiert gemäß

$$(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto \left(T_1\left(\omega_1\right),\ldots,T_n\left(\omega_n\right)\right).$$

Dann ist T eine $\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$-$\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung.

Beweis. Es bezeichne $\boxtimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k$ bzw. $\boxtimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}'_k$ das zu $\left(\mathfrak{A}_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $\left(\mathfrak{A}'_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ zugehörige System von Rechteckmengen. Wegen Folgerung M.17.1 gilt dann

$$\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k \tag{1}$$

bzw.

$$\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}'_k\right) = \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}'_k. \tag{2}$$

Sei also

$$\bigtimes_{k=1}^{n}A'_k \in \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}'_k. \tag{3}$$

Aus der Definition von T folgt dann

$$T^{-1}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} A'_k\right) = \bigtimes_{k=1}^{n} T_k^{-1}\left(A'_k\right). \tag{4}$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ folgt aus $A'_j \in \mathfrak{A}'_j$ und der Wahl von T_j dann $T_j^{-1}\left(A'_j\right) \in \mathfrak{A}'_j$. Hieraus folgt in Verbindung mit (4) dann

$$T^{-1}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} A'_k\right) \in \bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt dann

$$T^{-1}\left(\bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k\right) \subseteq \bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{6}$$

Wegen (1) und (6) folgt nun

$$T^{-1}\left(\bigboxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}'_k\right) \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{7}$$

Wegen (2) und (7) liefert Satz M.16.2 dann die $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$-$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}'_j$-Messbarkeit. □

Beispiel M.17.1. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen, von denen mindestens eine höchstens abzählbar ist. Dann gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{2} \mathfrak{P}\left(\Omega_j\right) = \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{2} \Omega_j\right).$$

Satz M.17.3. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\left((\Omega_j, \mathfrak{A}_j)\right)_{j\in\mathbb{Z}_{0,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei p_j die j-te Projektionsabbildung. Weiter sei $f \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_0, \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist $\mathfrak{A}_0$-$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$-messbar.*

(ii) *Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ liegt $\mathfrak{A}_0$-$\mathfrak{A}_j$-Messbarkeit von $p_j \circ f$ vor.*

Beweis. Wegen Definition M.17.2 gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j = \sigma_{\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j}\left(\bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right).$$

Hieraus folgt mittels Satz M.16.5 die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Definition M.17.3. Seien Ω eine nichtleere Menge, $n \in \mathbb{N}$ und $\left(\Omega_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge nichtleerer Mengen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $X_k \in \operatorname{Abb}\left(\Omega, \Omega_k\right)$. Dann heißt die Abbildung

$$Y\colon \Omega \longrightarrow \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j,$$

welche gemäß

$$\omega \longmapsto \left(X_1\left(\omega\right), \ldots, X_n\left(\omega\right)\right)$$

definiert ist, die *Produktabbildung der Folge* $\left(X_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Diese wird symbolisiert durch $\bigotimes_{j=1}^{n} X_j$ oder auch $X_1 \otimes \cdots \otimes X_n$.

Bemerkung M.17.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $X_k \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega_k)$ sowie $A_k \in \mathfrak{P}(\Omega_k)$. Dann gilt

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} X_j\right)^{-1} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right) = \bigcap_{j=1}^{n} X_j^{-1}(A_j).$$

♣

Satz M.17.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $X_k \in \operatorname{Abb}(\Omega, \Omega_k)$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_k$-messbare Abbildung. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^{n} X_j$ eine $\mathfrak{A}$-$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$-messbare Abbildung.*

Beweis. Es bezeichne $\boxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ das System der zu $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörigen Rechteckmengen. Wegen Folgerung M.17.1 gilt dann

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Sei

$$\bigtimes_{k=1}^{n} A_k \in \boxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{2}$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt wegen (2) dann $A_j \in \mathfrak{A}_j$ und die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}_j$-Messbarkeit von X_j liefert dann $X_j^{-1}(A_j) \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt aufgrund der Durchschnittsstabilität der σ-Algebra dann

$$\bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k) \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Wegen Bemerkung M.17.1 gilt

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1} \left(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k\right) = \bigcap_{k=1}^{n} X_k^{-1}(A_k). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt nun

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1} \left(\bigtimes_{k=1}^{n} A_k\right) \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) gilt dann also

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n} X_k\right)^{-1} \left(\boxtimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right) \subseteq \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Wegen (1) und (6) liefert dann Satz M.16.2 die $\mathfrak{A}$-$\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$-Messbarkeit. □

Wir wollen unter Heranziehung von Satz M.17.2 wesentliche Aspekte der Struktur der Borelschen σ-Algebra $\mathfrak{B}_m$ des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ herausarbeiten.

Bemerkung M.17.2. Sei $s \in \mathbb{N}$ und $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Weiter sei $m := \sum_{j=1}^{s} m_j$. Die Abbildung

$$T_{m_1,\ldots,m_s}\colon \bigtimes_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j} \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

sei gemäß

$$(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_s) \longmapsto \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_s \end{pmatrix}$$

definiert. Dann ist $T_{m_1,\ldots,m_s}$ eine Bijektion zwischen $\times_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j}$ und $\mathbb{R}^m$. ♣

Vereinbarung. Sei $s \in \mathbb{N}$ sowie $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Ferner sei $m \coloneqq \sum_{j=1}^{s} m_j$ und es sei $T_{m_1,\ldots,m_s}$ definiert wie in Bemerkung M.17.2. Dann vereinbaren wir, künftig via $T_{m_1,\ldots,m_s}$ eine Identifikation von $\times_{j=1}^{s} \mathbb{R}^{m_j}$ und $\mathbb{R}^m$ vorzunehmen.

Satz M.17.5. *Seien $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Weiter sei $m \coloneqq \sum_{j=1}^{s} m_j$. Dann gilt*

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathfrak{B}_{m_j}.$$

Beweis. Im Sinne der obigen Betrachtung gilt mit den Bezeichnungen von Definition M.1.7 dann

$$I_{m,r} = \bigboxtimes_{j=1}^{s} I_{m_j,r}. \tag{1}$$

Wegen Satz M.14.1 gilt

$$\sigma_{\mathbb{R}^m}(I_{m,r}) = \mathfrak{B}_m \tag{2}$$

sowie für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ weiterhin

$$\sigma_{\mathbb{R}^{m_j}}\left(I_{m_j,r}\right) = \mathfrak{B}_{m_j}, \tag{3}$$

wobei $I_{m_j,r}$ nach Bemerkung M.14.1 weiterhin eine isotone Folge $(A_{n,j})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{n,j} = \mathbb{R}^{m_j}$ enthält. Beachtet man dies, so ergibt sich unter Verwendung von (2), (1), Satz M.17.2, der obigen Vereinbarung und (3) dann

$$\mathfrak{B}_m = \sigma_{\mathbb{R}^m}(I_{m,r}) = \sigma_{\times_{j=1}^{s}\mathbb{R}^{m_j}}\left(\bigboxtimes_{j=1}^{s} I_{m_j,r}\right) = \bigotimes_{j=1}^{s} \sigma_{\mathbb{R}^{m_j}}\left(I_{m_j,r}\right) = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathfrak{B}_{m_j}.$$ □

Satz M.17.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $s \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m \coloneqq \sum_{j=1}^{s} m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $X_j \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}^{m_j})$. Weiter sei*

$$X \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$$

definiert gemäß

$$\omega \longmapsto \begin{pmatrix} X_1(\omega) \\ \vdots \\ X_s(\omega) \end{pmatrix}.$$

Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) *X ist $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-messbar.*

(ii) *Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ ist X_j eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_{m_j}$-messbare Abbildung.*

Beweis. Da nach Satz M.17.5 die Beziehung $\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{s} \mathfrak{B}_{m_j}$ besteht, liefert Satz M.17.3 sogleich die Behauptung. □

Lebesguesche Integrationstheorie

M.18. Borel-Messbarkeit numerischer Funktionen

Im vorliegenden Abschnitt nehmen wir eine Vertiefung der Resultate von Abschnitt M.16 für den Fall einer speziellen σ-Algebra $\mathfrak{A}'$ vor. Hierzu kompaktifizieren wir zunächst $\mathbb{R}$ durch Hinzunahme der „idealen Elemente" $-\infty$ und $+\infty$.

Satz M.18.1. *Sei* $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$. *Weiterhin sei* $\overline{\mathfrak{B}}_1 = \{A \in \mathfrak{P}\left(\overline{\mathbb{R}}\right) \mid A \cap \mathbb{R} \in \mathfrak{B}_1\}$. *Dann ist* $\overline{\mathfrak{B}}_1$ *eine* σ*-Algebra in* $\overline{\mathbb{R}}$, *für welche* $\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap \mathbb{R} = \mathfrak{B}_1$ *und* $\mathfrak{B}_1 \subseteq \overline{\mathfrak{B}}_1$ *erfüllt ist.*

Bemerkung M.18.1. Es ist $\overline{\mathfrak{B}}_1$ das System aller derjenigen Teilmengen A von $\overline{\mathbb{R}}$, welche mit einem gewissen $B \in \mathfrak{B}_1$ eine Darstellung $A = B$, $A = B \cup \{-\infty\}$, $A = B \cup \{+\infty\}$ oder $A = B \cup \{-\infty, +\infty\}$ besitzen. ♣

Bemerkung M.18.2. Der messbare Raum $\left(\overline{\mathbb{R}}, \overline{\mathfrak{B}}_1\right)$ ist total atomar. ♣

Bemerkung M.18.3. Seien $\overline{I}_{1,a} := \{[-\infty, a] \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\overline{I}_{1,o} := \{[-\infty, a) \mid a \in \mathbb{R}\}$, $\overline{H}_{1,a} := \{[a, +\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$ und $\overline{H}_{1,o} := \{(a, +\infty] \mid a \in \mathbb{R}\}$. Dann gelten $\overline{H}_{1,o} = \{\overline{\mathbb{R}} \backslash A \mid A \in \overline{I}_{1,a}\}$ und $\overline{H}_{1,a} = \{\overline{\mathbb{R}} \backslash A \mid A \in \overline{I}_{1,o}\}$. ♣

Satz M.18.2. *Die in Bemerkung M.18.3 eingeführten Mengensysteme sind allesamt Erzeuger von* $\overline{\mathfrak{B}}_1$.

Nachfolgend betrachten wir einen nichttrivialen messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ und studieren die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$- bzw. $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbaren Abbildungen aus $\mathrm{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$ bzw. $\mathrm{Abb}\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$.

Definition M.18.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann bezeichne $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ bzw. $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$ die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbaren *numerischen Funktionen* auf Ω bzw. die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbaren *reellen Funktion* auf Ω.

Bemerkung M.18.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(a) Es ist $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$.

(b) Es ist $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. ♣

Bezeichnung. Seien Ω eine nichtleere Menge und $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann wird definiert:

(a) $\{f \geq a\} := f^{-1}\left([a, +\infty]\right)$,

(b) $\{f > a\} := f^{-1}\left((a, +\infty]\right)$,

(c) $\{f \leq a\} := f^{-1}\left([-\infty, a]\right)$,

(d) $\{f < a\} := f^{-1}\left([-\infty, a)\right)$.

Satz M.18.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$*, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iii) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iv) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(v) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Es seien $\overline{I}_{1,a}, \overline{I}_{1,o}, \overline{H}_{1,a}$ und $\overline{H}_{1,o}$ wie in Bemerkung M.18.3 eingeführt. Dann ist *(ii)* bzw. *(iii)* bzw. *(iv)* bzw. *(v)* äquivalent zu:

(ii') $f^{-1}\left(\overline{I}_{1,a}\right) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(iii') $f^{-1}\left(\overline{I}_{1,o}\right) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(iv') $f^{-1}\left(\overline{H}_{1,a}\right) \subseteq \mathfrak{A}$ bzw.

(v') $f^{-1}\left(\overline{H}_{1,o}\right) \subseteq \mathfrak{A}$.

Wegen der nach Satz M.18.2 Beziehung $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}\left(\overline{I}_{1,a}\right) = \overline{\mathfrak{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}\left(\overline{I}_{1,o}\right) = \overline{\mathfrak{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}\left(\overline{H}_{1,a}\right) = \overline{\mathfrak{B}}_1$ bzw. $\sigma_{\overline{\mathbb{R}}}\left(\overline{H}_{1,o}\right) = \overline{\mathfrak{B}}_1$ liefert Satz M.16.2 die Äquivalenz von *(i)* mit *(ii')* bzw. *(iii')* bzw. *(iv')* bzw. *(v')*. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Behauptung. □

Satz M.18.4. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \mathbb{R}\right)$*. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$.

(ii) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iii) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f > \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(iv) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f \leq \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

(v) *Für alle* $\alpha \in \mathbb{R}$ *gilt* $\{f < \alpha\} \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.18.4 und Satz M.18.3. □

Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen. Dann sei für $f, g \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \Omega'\right)$ definiert

$$\{f = g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\}$$

sowie

$$\{f \neq g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}.$$

Sei nun ferner speziell $\Omega' = \overline{\mathbb{R}}$. Dann wird definiert

$$\{f < g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < g(\omega)\}$$

und

$$\{f \leq g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\}.$$

Lemma M.18.1. *Seien Ω eine nichtleere Menge sowie $f, g \in \mathrm{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$. Es bezeichne $\mathbb{Q}$ die Menge der rationalen Zahlen, dann gilt*

$$\{f < g\} = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \left[\{f < y\} \cap \{y < g\}\right].$$

Satz M.18.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gehören die Mengen $\{f < g\}$, $\{f \leq g\}$, $\{f = g\}$ und $\{f \neq g\}$ allesamt zu $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Wir betrachten zunächst die Menge $\{f < g\}$. Nach Lemma M.18.1 gilt

$$\{f < g\} = \bigcup_{y \in \mathbb{Q}} \left[\{f < y\} \cap \{y < g\}\right]. \tag{1}$$

Sei nun

$$y \in \mathbb{Q}. \tag{2}$$

Wegen $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ liefert dann Satz M.18.3 $\{f < y\} \in \mathfrak{A}$ und $\{y < g\} \in \mathfrak{A}$. Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra folgt sofort

$$\{f < y\} \cap \{y < g\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Da $\mathbb{Q}$ abzählbar unendlich und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra ist, folgt dann wegen (1) bis (3)

$$\{f < g\} \in \mathfrak{A} \tag{4}$$

und ebenso durch Vertauschung von f und g

$$\{g < f\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Es ist ferner

$$\{f \leq g\} = \Omega \backslash \{g < f\}. \tag{6}$$

Damit folgt aus (5) und (6) sofort auch

$$\{f \leq g\} \in \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Durch Vertauschung der Rollen von f und g folgt aus (7) zugleich

$$\{g \leq f\} \in \mathfrak{A}. \tag{8}$$

Es ist

$$\{f = g\} = \{f \leq g\} \cap \{g \leq f\}. \tag{9}$$

Wegen (7) bis (9) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$\{f = g\} \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Wegen $\{f \neq g\} = \Omega \backslash \{f = g\}$ und der Wahl von $\mathfrak{A}$ als σ-Algebra in Ω folgt aus (10) somit $\{f \neq g\} \in \mathfrak{A}$. □

Folgerung M.18.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$. Dann gehören die Mengen $\{f < g\}, \{f \leq g\}, \{f = g\}$ sowie $\{f \neq g\}$ allesamt zu $\mathfrak{A}$.*

Folgerung M.18.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Weiter sei $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gehören die Mengen $\{f = \alpha\}$ und $\{f \neq \alpha\}$ jeweils zu $\mathfrak{A}$.*

BEWEIS. Sei $g: \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert gemäß $g(\omega) = \alpha$ für alle $\omega \in \Omega$. Wegen Beispiel M.16.1 ist dann $g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus und aus der Wahl von f ergeben sich mittels Satz M.18.5 alle Behauptungen. □

Folgerung M.18.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gehören die Mengen $\{f = \alpha\}$ und $\{f \neq \alpha\}$ allesamt zu $\mathfrak{A}$.*

Lemma M.18.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $h \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Weiter seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ sowie*

$$h_{\alpha,\beta} \coloneqq \alpha + \beta \cdot h.$$

Dann gilt $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

BEWEIS. Nach Definition ist $h_{\alpha,0}$ die auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert α. Hieraus folgt dann mittels Beispiel M.16.1 dann $h_{\alpha,0} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Sei nun $\beta \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$. Weiter sei

$$a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \{h_{\alpha,\beta} \geq a\} &= \{\alpha + \beta h \geq a\} \\ &= \{\beta h \geq a - \alpha\} \\ &= \begin{cases} \left\{h \geq \frac{1}{\beta}(a-\alpha)\right\}, & \text{falls } \beta \in (0, +\infty), \\ \left\{h \leq \frac{1}{\beta}(a-\alpha)\right\}, & \text{falls } \beta \in (-\infty, 0). \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen $h \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ liefert mit Satz M.18.3 dann

$$\left\{h \geq \frac{1}{\beta}(a-\alpha)\right\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

und ferner

$$\left\{h \leq \frac{1}{\beta}(a-\alpha)\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (2) bis (4) gilt also

$$\{h_{\alpha,\beta} \geq a\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) zusammen mit Satz M.18.3 erhält man $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. □

Satz M.18.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $f + g$ wohldefiniert. Dann gilt $f + g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

(b) *Sei $f - g$ wohldefiniert. Dann gilt $f - g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Sei

$$a \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\{f + g \geq a\} = \{f \geq a - g\}. \tag{2}$$

Mit den Bezeichnungen von Lemma M.18.2 gilt dann $a - g = g_{a,1}$. Hieraus folgt mittels Lemma M.18.2 dann

$$\alpha - g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{3}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und (3) liefert Satz M.18.5 dann $\{f \geq \alpha - g\} \in \mathfrak{A}$. Aufgrund von (2) ist dann

$$\{f + g \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}.$$

Wegen (1) und (3) liefert Satz M.18.3 dann $f + g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Zu *(b)*: Mit den Bezeichnungen von Lemma M.18.2 gilt $-g = g_{0,-1}$. Hieraus folgt mittels Lemma M.18.2 dann $-g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt schließlich bei Beachtung von $f - g = f + (-g)$ mittels *(a)* dann $f - g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. □

Satz M.18.7. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Beweis. Aus der Wahl von f und g folgt mit Bemerkung M.18.4 dann $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus ergibt sich mittels Lemma M.18.2 dann $\alpha f, \beta g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Da $\alpha f + \beta g$ wohldefiniert ist, folgt hieraus mittels Teil *(a)* von Satz M.18.6, dann $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt wegen $\alpha f + \beta g \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ mittels Bemerkung M.18.4 dann $\alpha f + \beta g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. □

Satz M.18.8. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Beweis. Wir zeigen zunächst die $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von f^2. Sei hierzu

$$\alpha \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\left\{f^2 \geq \alpha\right\} = \begin{cases} \Omega, & \text{falls } \alpha \in (-\infty, 0], \\ \{f \leq -\sqrt{\alpha}\} \cup \{f \geq \sqrt{\alpha}\}, & \text{falls } \alpha \in (0, +\infty). \end{cases} \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, gilt nach Definition M.4.1 dann

$$\Omega \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gilt nach Satz M.18.4 dann

$$\left\{f \leq -\sqrt{\alpha}\right\}, \left\{f \geq \sqrt{\alpha}\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (4) ist dann

$$\left\{f \leq -\sqrt{\alpha}\right\} \cup \left\{f \geq \sqrt{\alpha}\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Aus (2), (3) und (5) folgt dann

$$\left\{f^2 \geq \alpha\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Wegen (1) und (6) liefert Satz M.18.4 somit

$$f^2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{7}$$

Wegen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liefert Satz M.18.7 nun

$$\{f + g, f - g\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{8}$$

Aus (7) und dem schon Gezeigten folgt dann

$$\left\{(f-g)^2, (f+g)^2\right\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt mittels Satz M.18.7 dann

$$-\frac{1}{4}(f-g)^2 + \frac{1}{4}(f+g)^2 \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Es ist aber

$$-\frac{1}{4}(f-g)^2 + \frac{1}{4}(f+g)^2 = -\frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}fg - \frac{1}{4}g^2 + \frac{1}{4}f^2 + \frac{1}{2}fg + \frac{1}{4}g^2 = f \cdot g. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt die Behauptung. □

Folgerung M.18.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Für $\omega \in \Omega$ gelte ferner $g(\omega) \neq 0$. Dann gehören $1/g$ und f/g wieder zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Satz M.18.9. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt $f \cdot g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.*

Folgerung M.18.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann ist $\alpha \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.*

Beweis. Es bezeichne g_α, die auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert α. Wegen Beispiel M.16.1 ist $g_\alpha \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Hieraus folgt wegen $\alpha f = g_\alpha \cdot f$ mittels Satz M.18.9 dann $\alpha f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. □

Bemerkung M.18.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\mathbb{K} \in \{\overline{\mathbb{R}}, \mathbb{R}\}$, $A \in \mathfrak{A}$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Dann gilt $1_A \cdot f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. ♣

Beweis. Wegen $A \in \mathfrak{A}$ gilt nach Teil *(b)* von Beispiel M.16.3 dann

$$1_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.18.4 gilt

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}). \tag{2}$$

Hieraus folgt wegen (1), (2) sowie den Sätzen M.18.8 und M.18.9 dann

$$1_A f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}).$$ □

Bemerkung M.18.6. Sei Ω eine nichtleere Menge sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus Abb $(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\left\{\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \alpha\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \leq \alpha\}$$

sowie

$$\left\{\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n \geq \alpha\right\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{f_n \geq \alpha\}.$$ ♣

Satz M.18.10. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gehören auch $\sup\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\inf\limits_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup\limits_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} f_n$ zu $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Folgerung M.18.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Weiter sei $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gehören die Mengen $\left\{\liminf\limits_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}, \left\{\limsup\limits_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}$ und $\left\{\lim\limits_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}$ sämtlich zu $\mathfrak{A}$.*

Beweis. Wegen Satz M.18.10 und Folgerung M.18.2 gilt

$$\left\{\left\{\liminf_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}, \left\{\limsup_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}\right\} \subseteq \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Weiterhin ist

$$\left\{\lim_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\} = \left\{\liminf_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\} \cap \left\{\limsup_{n\to\infty} f_n = \alpha\right\}. \tag{2}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra folgt mit (1) und (2) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 die Behauptung. □

Folgerung M.18.7. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gehören auch $\sup_{k\in\mathbb{N}_{1,n}} f_n$ und $\inf_{k\in\mathbb{N}} f_n$ wieder zu $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Beweis. Setze für $k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n}$ jeweils $f_k \coloneqq f_n$ und wende Satz M.18.10 an. □

Folgerung M.18.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gehören auch $\sup\limits_{k\in\mathbb{N}_{1,n}} f_n$ und $\inf\limits_{k\in\mathbb{N}_{1,n}} f_n$ wieder zu $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Folgerung M.18.9. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$, welche punktweise im eigentlichen- oder uneigentlichen Sinne gegen eine numerische Funktion f auf Ω konvergiert. Dann gilt $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Beweis. Wegen $f = \liminf_{n\to\infty} f_n$ liefert Satz M.18.10 die Behauptung. □

Folgerung M.18.10. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, welche punktweise im eigentlichen- oder uneigentlichen Sinne gegen eine reelle Funktion f auf Ω konvergiert. Dann gilt $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.18.4 und Folgerung M.18.9. □

Satz M.18.11. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im eigentlichen- oder uneigentlichen Sinne konvergiert. Dann gilt $A \in \mathfrak{A}$.*

(b) *Es bezeichne B die Menge aller $\omega \in \Omega$, für welche die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im eigentlichen Sinne konvergiert. Dann gilt $B \in \mathfrak{A}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Aus der Definition von A folgt

$$A = \left\{ \liminf_{n\to\infty} f_n = \limsup_{n\to\infty} f_n \right\}. \tag{1}$$

Wegen Satz M.18.10 gilt

$$\left\{ \liminf_{n\to\infty} f_n, \limsup_{n\to\infty} f_n \right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) und Satz M.18.5 folgt dann $A \in \mathfrak{A}$.

Zu *(b)*: Aus der Definition von A und B folgt

$$B = A \cap \left\{ \limsup_{n\to\infty} f_n \neq +\infty \right\} \cap \left\{ \limsup_{n\to\infty} f_n \neq -\infty \right\}. \tag{3}$$

Wegen (2) liefert Folgerung M.18.2 weiterhin

$$\left\{ \left\{ \limsup_{n\to\infty} f_n \neq +\infty \right\}, \left\{ \limsup_{n\to\infty} f_n \neq -\infty \right\} \right\} \subseteq \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt unter Beachtung von (3), (4) und *(a)* mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann $B \in \mathfrak{A}$. □

Wir wenden uns nun einer speziellen Charakterisierung der $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit von numerischen Funktionen zu. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Definition M.18.2. Sei $\alpha \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann heißt $\alpha^+ \coloneqq \sup\{\alpha, 0\}$ bzw. $\alpha^- \coloneqq \inf\{\alpha, 0\}$ der *Positiv-* bzw. *Negativteil* von α.

Wir erweitern die Definition des Absolutbetrags auf $\overline{\mathbb{R}}$ durch die natürlichen Setzungen $|+\infty| \coloneqq |-\infty| \coloneqq +\infty$.

Bemerkung M.18.7. Sei $a \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $|a| = \sup\{a, -a\}$.

(b) Es ist $a^- = (-a)^+$.

(c) Es ist $a^+ = \begin{cases} a, & \text{falls } a \in [0, +\infty], \\ 0, & \text{falls } a \in [-\infty, 0). \end{cases}$

(d) Es ist $a^- = \begin{cases} 0, & \text{falls } a \in [0, +\infty], \\ -a, & \text{falls } a \in [-\infty, 0). \end{cases}$

(e) Es ist $a = a^+ - a^-$.

(f) Es ist $|a| = a^+ + a^-$.

(g) Sei $a \in \mathbb{R}$, dann gelten $a^+ = \frac{1}{2}(a + |a|)$ und $a^- = \frac{1}{2}(|a| - a)$. ♣

Satz M.18.12. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $f \in \operatorname{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$. *Dann gilt:*

(a) *Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) *Es ist* $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. *Dann gilt* $|f| \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Beweis.

Zu *(a)*:

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Nach Beispiel M.16.1 ist die Nullfunktion auf Ω dann $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbar. Hieraus und aus *(i)* ergibt sich mittels Folgerung M.18.7 die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit für $f^+ = \sup\{f, 0\}$ und $-f^- = \inf\{f, 0\}$, also wegen Lemma M.18.2 dann auch die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit von f^- und damit *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.18.7 gilt

$$f = f^+ - f^-. \tag{1}$$

Wegen (1) und *(ii)* liefert Teil *(b)* von Satz M.18.6 dann $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$, also *(i)*.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(f)* von Bemerkung M.18.7 gilt

$$|f| = f^+ + f^-. \tag{2}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ gilt nach *(i)* dann

$$\left\{f^+, f^-\right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) liefert Teil *(a)* von Satz M.18.6 dann $|f| \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. □

Satz M.18.13. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $f \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. *Dann gilt:*

(a) *Es sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

(ii) $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

(b) *Sei* $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. *Dann gilt* $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

Beweis. Kombiniere Bemerkung M.18.4 und Satz M.18.12. □

Für $p \in (0, +\infty)$ setzen wir $(+\infty)^p := +\infty$.

Bemerkung M.18.8. Sei $p \in (0, +\infty)$ und sei $h\colon [0, +\infty] \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $x \longmapsto x^p$. Dann ist h streng monoton wachsend und $h \restriction [0, +\infty)$ ist stetig. ♣

Satz M.18.14. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und sei* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. *Weiter sei* $p \in (0, +\infty)$, *dann gilt* $|f|^p \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

Folgerung M.18.11. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und sei* $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. *Weiter sei* $p \in (0, +\infty)$, *dann gilt* $|f|^p \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

BEWEIS. Kombiniere Bemerkung M.18.4 und Satz M.18.14. □

Bemerkung M.18.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gehören die Mengen $\{|f|^p \geq \alpha\}$, $\{|f|^p > \alpha\}$, $\{|f|^p \leq \alpha\}$ und $\{|f|^p < \alpha\}$ allesamt zu $\mathfrak{A}$. ♣

BEWEIS. Im Fall $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$ bzw. $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ folgt die Behauptung durch Kombination von Satz M.18.14 und Satz M.18.3 bzw. Folgerung M.18.11 und Satz M.18.4. □

Satz M.18.15. *Sei I ein Intervall von $\overline{\mathbb{R}}$ und $f \in \operatorname{Abb}(I, \overline{\mathbb{R}})$, welche monoton wachsend oder monoton fallend in I ist. Dann ist f eine $(\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap I)$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbare Abbildung.*

Bemerkung M.18.10. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A} \backslash \{\varnothing\}$, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ und $g \in \operatorname{Abb}(\widetilde{\Omega}, \mathbb{K})$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Im Fall $\Omega = \widetilde{\Omega}$ sei $G := g$ und im Fall $\widetilde{\Omega} \subseteq \Omega$ sei $G \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert gemäß

$$G(\omega) := \begin{cases} g(\omega), & \text{falls } \omega \in \widetilde{\Omega}, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega \backslash \widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es ist $G \restriction \widetilde{\Omega} = g$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $g \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}; \mathbb{K}\right)$.

(ii) Es ist $G \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. ♣

Definition M.18.3. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Weiter sei $M \subseteq V$. Dann heißt M *konvex*, falls für alle $x, y \in M$ und alle $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$\alpha x + (1 - \alpha) y \in M.$$

Definition M.18.4. Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein linearer Raum über $\mathbb{K}$. Weiter sei M eine nichtleere konvexe Teilmenge von V. Sei $f \in \operatorname{Abb}(M, \mathbb{R})$. Dann heißt f *konvex* bzw. *konkav*, falls für alle $x, y \in M$ und alle $\alpha \in (0, 1)$ gilt

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \leq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y)$$

bzw.

$$f(\alpha x + (1 - \alpha) y) \geq \alpha f(x) + (1 - \alpha) f(y).$$

Satz M.18.16. *Sei I ein endliches oder unendliches Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $f \in \operatorname{Abb}(I, \mathbb{R})$ eine konvexe- oder konkave Funktion. Dann gilt $f \in \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_1 \cap I; \mathbb{R})$.*

M.19. Borel-Messbarkeit von nichtnegativen numerischen Funktionen

Der vorliegende Abschnitt stellt wichtige Vorbereitungen für das später entwickelte Integrationskonzept bereit. Wir führen Untersuchungen der in diesem Abschnitt betrachteten Funktionen in zwei Teilschritten durch. Im ersten Schritt beschäftigen wir uns mit BOREL-messbaren nichtnegativen *reellen* Funktionen, welche nur *endlich viele* Werte annehmen. Im zweiten Schritt approximieren wir eine BOREL-messbare nichtnegative numerische Funktion in einer gewissen Weise durch Folgen von Funktionen des erstbetrachteten Typs.

Definition M.19.1. Seien Ω eine nichtleere Menge und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann heißt die Funktion $1_A \colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$, welche gemäß

$$1_A := \begin{cases} 1, & \text{falls } \omega \in A, \\ 0, & \text{falls } \omega \notin A, \end{cases}$$

definiert ist, die *Indikatorfunktion* der Menge A.

Bemerkung M.19.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann ist 1_Ω bzw. $1_\varnothing$ die auf Ω definierte konstante Funktion mit Wert 1 bzw. 0. ♣

Bemerkung M.19.2. Sei Ω eine nichtleere Teilmenge. Dann gilt:

(a) Seien $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $A \subseteq B$.

(ii) Es ist $1_A \leq 1_B$.

(b) Sei $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt $1_{\Omega \setminus A} = 1_\Omega - 1_A$.

(c) Seien $A, B \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt $1_{A \cap B} = 1_A \cdot 1_B$.

(d) Sei I eine nichtleere Indexmenge und $(A_k)_{k \in I}$ eine Familie aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten

$$1_{\bigcup_{k \in I} A_k} = \sup_{k \in I} 1_{A_k}$$

sowie

$$1_{\bigcap_{k \in I} A_k} = \inf_{k \in I} 1_{A_k}.$$

(e) Sei J ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter sei $(A_j)_{j \in J}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt

$$1_{\bigcup_{j \in J} A_j} = \sum_{j \in J} 1_{A_j}.$$

(f) Sei $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gelten

$$1_{\limsup_{n \to \infty} A_n} = \limsup_{n \to \infty} 1_{A_n}$$

sowie

$$1_{\liminf_{n \to \infty} A_n} = \liminf_{n \to \infty} 1_{A_n}.$$ ♣

Definition M.19.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty))$. Dann heißt f eine $(\Omega, \mathfrak{A})$-*Elementarfunktion*, falls f nur endlich viele Werte annimmt und zudem $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbar ist. Es bezeichne $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen.

Beispiel M.19.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und f eine konstante Funktion auf Ω und Wert in $[0, +\infty)$. Dann gilt $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Kombiniere Definition M.19.2 und Beispiel M.16.1. □

Bemerkung M.19.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

(ii) Es ist $A \in \mathfrak{A}$. ♣

Beweis. Da 1_A höchstens die Werte 0 und 1 annimmt, folgt die Behauptung aus Teil *(b)* von Beispiel M.16.3. □

Bemerkung M.19.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Es sei $n := \mathrm{card}\, f(\Omega)$ und es seien $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ die n Elemente von $f(\Omega)$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $A_j := f^{-1}(\{\alpha_j\})$. Dann gilt:

(a) Für alle $j, k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $j \neq k$ gilt $A_j \cap A_k = \varnothing$.

(b) Es ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$.

(c) Es ist $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{A_j}$.

(d) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $\alpha_j \in [0, +\infty)$.

(e) Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$, dann gilt $A_j = \{f = \alpha_j\}$ und $A_j \in \mathfrak{A} \backslash \{\varnothing\}$. ♣

Bemerkung M.19.4 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.19.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter seien die Zahl n sowie die Folgen $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ wie in Bemerkung M.19.4 definiert. Dann heißt das Tripel

$$\left(n, (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}\right)$$

eine *kanonische Darstellung* von f.

Definition M.19.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$, $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $j, k \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt $A_j \cap A_k = \varnothing$.

(II) Es ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j = \Omega$.

(III) Es ist $f = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{A_j}$.

Dann heißt das Tripel $\left(n, (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine *Normaldarstellung* von f.

Bemerkung M.19.5. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:

(a) Sei $\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine kanonische Darstellung von f. Dann ist

$$\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$$

eine Normaldarstellung von f.

(b) Es gibt stets eine Normaldarstellung von f. ♣

Bemerkung M.19.6. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und

$$\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$$

eine Normaldarstellung von f. Es sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ so gewählt, dass $A_k \neq \varnothing$ erfüllt ist. Dann ist $f \restriction A_k$, die auf A_k konstante Funktion mit Wert α_k. ♣

Bemerkung M.19.7. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und $(A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$. Es sei $f \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j 1_{A_j}$. Dann ist $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Lemma M.19.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gibt es ein $n \in \mathbb{N}$, eine Folge $(C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ sowie Folgen $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $[0, +\infty)$ derart, dass $\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ bzw. $\left(n, (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von u bzw. v ist.*

Lemma M.19.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiterhin seien (unter Beachtung von Lemma M.19.1) die Zahl $n \in \mathbb{N}$, die Folge $(C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathfrak{A}$ sowie die Folgen $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und $(\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $[0, +\infty)$ derart gewählt, dass $\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ bzw. $\left(n, (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von u bzw. v ist. Dann gilt:*

(a) *Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann ist $\alpha u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es ist $\left(n, (\alpha \cdot \alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von αu.*

(b) *Es ist $u + v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\left(n, (\alpha_j + \beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von $u + v$.*

(c) *Es ist $u \cdot v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\left(n, (\alpha_j \cdot \beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von $u \cdot v$.*

(d) *Es ist $\sup\{u, v\} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\left(n, (\sup\{\alpha_j, \beta_j\})_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ ist eine Normaldarstellung von $\sup\{u, v\}$.*

(e) *Es ist $\inf\{u, v\} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\left(n, (\inf\{\alpha_j, \beta_j\})_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ ist eine Normaldarstellung von $\inf\{u, v\}$.*

(f) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist $v - u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$*

  (ii) *Es ist $u \leq v$*

  (iii) *Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $C_j \neq \varnothing$ gilt $\alpha_j \leq \beta_j$*

(g) *Sei* (a) *erfüllt und sei* $I := \{j \in \mathbb{N}_{1,n} \mid C_j \neq \varnothing\}$. *Dann gilt* $I \neq \varnothing$ *und*

$$\left(\operatorname{card} I, (\beta_j - \alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}, (C_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}\right)$$

ist eine Normaldarstellung von $v - u$.

Wir kommen nun zum zweiten Teil der Untersuchungen in diesem Abschnitt.

Bezeichnung. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann bezeichnet $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbaren Funktionen auf Ω mit Werten in $[0, +\infty]$, d.h. es sei

$$\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) := \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty]).$$

Beispiel M.19.2. Sei Ω eine nichtleere Menge. Dann gilt

$$\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{P}(\Omega)) = \operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty]).$$

Bemerkung M.19.8. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann ist

$$\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Kombiniere Definition M.19.2 mit Bemerkung M.18.4. □

Bemerkung M.19.9. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gehören f^+, f^- und $|f|^p$ zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Bemerkung M.19.10. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist f auch eine $\mathfrak{A}$-$\left(\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap [0, +\infty]\right)$-messbare Abbildung. ♣

Wir studieren nun die Arithmetik von $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Lemma M.19.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum sowie* $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $\alpha \in [0, +\infty]$. *Dann gilt* $\alpha f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) *Es ist* $f + g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(c) *Es ist* $f \cdot g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(d) *Es ist* $\sup\{f, g\} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(e) *Es ist* $\inf\{f, g\} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(f) *Sei* $g \in \operatorname{Abb}(\Omega, (0, +\infty))$. *Dann gehören* f/g *und* $1/g$ *zu* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beweis. Wegen $f, g \in \operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$ gehören auch die unter *(a)-(f)* betrachteten Abbildungen zu $\operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$. Es bleibt nur noch deren $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit zu zeigen. Diese ergibt sich im Fall von αf bzw. $f + g$ bzw. $\sup\{f, g\}$ und $\inf\{f, g\}$ bzw. f/g und $1/g$ sogleich aus Folgerung M.18.5 bzw. Teil *(a)* von Satz M.18.6 bzw. Satz M.18.9 bzw. Folgerung M.18.7 bzw. Folgerung M.18.4. □

Bemerkung M.19.11. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, dann gilt $1_A \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt $1_A \cdot |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $A \in \mathfrak{A}$ und den Bemerkungen M.19.3 und M.19.8 gilt $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt mittels Teil *(c)* von Lemma M.19.3 dann $1_A \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung M.19.9 gilt zudem $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt mit Teil *(a)* dann $1_A \cdot |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Bemerkung M.19.12. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A}\backslash\{\varnothing\}$ und $g \in \mathrm{Abb}\left(\widetilde{\Omega}, [0, +\infty]\right)$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Sei $G := g$ und im Fall $\widetilde{\Omega} \subsetneq \Omega$ sei $G\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$G(\omega) = \begin{cases} g(\omega), & \text{falls } \omega \in \widetilde{\Omega}, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es ist $g = G \restriction \widetilde{\Omega}$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $g \in \mathcal{E}^*\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}\right)$.

(ii) Es ist $G \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.18.10. □

Lemma M.19.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gehören $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$,$\inf_{n\in\mathbb{N}} f_n$, $\limsup_{n\to\infty} f_n$ und $\liminf_{n\to\infty} f_n$ jeweils auch zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.*

Beweis. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$ ist, gilt dies auch für alle der betrachteten Funktionen. Folglich gehören diese wegen Satz M.18.10 sämtlich zu $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Lemma M.19.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter seien $(\alpha_k)_{k\in I}$ bzw. $(f_k)_{k\in I}$ Folgen aus $[0, +\infty]$ bzw. $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt*

$$\sum_{k\in I} \alpha_k f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Beweis. Im Fall eines endlichen I folgt die Behauptung wegen den Teilen *(a)* und *(b)* des Lemmas M.19.3. Im Fall $I = \mathbb{N}$ folgt die Behauptung wegen

$$\sum_{k\in I} \alpha_k f_k = \sup_{s\in\mathbb{N}} \sum_{k=1}^{s} \alpha_k f_k$$

aus Lemma M.19.4 und dem schon Gezeigten. □

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnittes. Es besitzt fundamentale Bedeutung für den von uns gewählten Aufbau der Integrationstheorie.

Satz M.19.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a1) *Für $k \in \mathbb{N}_{1,n\cdot 2^n}$ wird definiert*

$$A_{k,n} \coloneqq \begin{cases} \left\{\frac{k}{2^n} \leq f \leq \frac{k+1}{2^n}\right\}, & \text{falls } k \in \mathbb{N}_{1,n\cdot 2^n-1}, \\ \{f \geq n\}, & \text{falls } k = n \cdot 2^n. \end{cases}$$

Dann ist $(A_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}_{0,n\cdot 2^n}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}$ und es gilt

$$\bigcup_{k=0}^{n\cdot 2^n} A_{k,n} = \Omega.$$

(a2) *Sei ferner $u_n \coloneqq \sum_{k=0}^{n\cdot 2^n} \frac{k}{2^n} \cdot 1_{A_{k,n}}$. Dann ist $u_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\left[n \cdot 2^n + 1, \left(\frac{k}{2^n}\right)_{k\in\mathbb{Z}_{0,n\cdot 2^n}}, (A_{k,n})_{k\in\mathbb{Z}_{0,n\cdot 2^n}}\right]$$

eine Normaldarstellung von u_n und es gilt

$$u_n \leq u_{n+1} \leq u_{n+2} \leq \dots$$

(b) *Es gilt*

$$f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n.$$

(c) *Sei f zudem beschränkt. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \left(\sup_{\omega\in\Omega} |u_n(\omega) - f(\omega)|\right) = 0.$$

Beweis. In den Übungsaufgaben. □

Satz M.19.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und bezeichne $\widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$ die Menge aller $f \in \operatorname{Abb}(\Omega, \overline{\mathbb{R}})$, für die es eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ gilt. Dann gilt*

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) = \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Beweis. Aufgrund der Teile *(a2)* und *(b)* von Satz M.19.1 gilt

$$\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Sei nun $f \in \widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gibt es eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f. \tag{2}$$

Wegen Bemerkung M.19.8 ist $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt wegen (2) mittels Lemma M.19.4 dann $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Es ist also

$$\widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) folgt $\widetilde{\mathcal{E}}(\Omega, \mathfrak{A}) = \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Bemerkung M.19.13. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$eine Folge aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ sowie $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$. Für $\omega \in \Omega$ sei

$$J_{A'}(\omega) \coloneqq \{m \in \mathbb{N} \mid y_m(\omega) \in A'\}.$$

Die Abbildung $T_{A'}\colon \Omega' \longrightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sei definiert gemäß

$$T_{A'}(\omega) \coloneqq \begin{cases} \min J_{A'}(\omega), & \text{falls } J_{A'}(\omega) \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{falls } J_{A'}(\omega) = \varnothing. \end{cases}$$

Weiter sei $n \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$. Dann gilt

$$(T_{A'})^{-1}(\{n\}) = \begin{cases} y_1^{-1}(A'), & \text{falls } n = 1 \\ y_n^{-1}(A') \cap \left[\bigcap_{j=1}^{n-1} y_j^{-1}(\Omega' \backslash A')\right], & \text{falls } n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}. \\ \bigcap_{j=1}^{\infty} y_j^{-1}(\Omega' \backslash A'), & \text{falls } n = +\infty \end{cases}$$ ♣

Interpretieren wir den Parameterbereich $\mathbb{N}$ der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ als Zeitbereich, so beschreibt die in Bemerkung M.19.13 für $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$ eingeführte Abbildung $T_{A'}$, dann also gerade den Zeitpunkt des ersten Besuchs der Folge $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in A'.

Satz M.19.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbaren Abbildungen aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ sowie $A' \in \mathfrak{A}'$. Es sei $T_{A'}$ wie in Bemerkung M.19.13 definiert. Dann gilt $T_{A'} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.*

M.20. Klassen von Borel-messbaren Funktionen, welche mit einem Maßraum assoziiert sind

Wir legen in diesen Abschnitt einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zugrunde und assoziieren mit diesem spezielle Teilklassen von $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ bzw. $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, welche später eine wesentliche Rolle in der Integrationstheorie spielen werden.

Bemerkung M.20.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Es bezeichne $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ die Menge aller $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ mit $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann gilt

$$\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.18.4. □

Beispiel M.20.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $A \in \mathfrak{P}(\Omega)$. Dann gilt:

(a) Es ist $\{1_A \neq 0\} = A$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $1_A \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(ii) Es ist $A \in \mathcal{N}_\mu$.

Lemma M.20.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $f, g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$, wobei $f+g$ wohldefiniert sei. Dann ist $f+g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(b) *Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $\alpha \in \mathbb{K}$. Dann gilt $\alpha f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(c) *Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt $|f|^p \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(d) *Seien $f, g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. Dann gehören $\sup\{f, g\}$ sowie $\inf\{f, g\}$ zu $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(e) *Seien $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. Dann gehören f^+ und f^- wieder zu $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

Satz M.20.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann ist $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein zweiseitiges Ideal und somit also insbesondere eine Unteralgebra der $\mathbb{R}$-Funktionenalgebra $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

In unseren späteren Betrachtungen wenden wir uns im Falle eines vorgegebenen nichttrivialen Maßraums $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ häufig auf Situationen geführt, in den zwei Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, deren Differenz in $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ liegt, den „gleichen Effekt" erzeugen. Dieses Phänomen wird durch den Übergang zur Faktoralgebra

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = {}^{\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}, \mathbb{R})}\!/_{\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})}$$

Rechnung getragen. Wir studieren nun speziell Maße auf der Borelschen σ-Algebra eines metrischen Raumes.

Definition M.20.1. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$.

(a) Unter dem *Spektrum* $\mathrm{Spec}(\mu)$ *von* μ verstehen wir die Menge aller $x \in \Omega$, welche für jedes $r \in (0, +\infty)$ der Beziehung

$$K_\rho(x, r) \notin \mathcal{N}_\mu$$

genügen.

(b) Die Menge $\operatorname{Res}(\mu) \coloneqq \Omega \setminus \operatorname{Spec}(\mu)$ heißt *Resolventenmenge von* μ.

Bemerkung M.20.2. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit BORELscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$. Sei $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{B})$. Dann gelten $\operatorname{Spec}(\mathfrak{o}) = \varnothing$ und $\operatorname{Res}(\mathfrak{o}) = \Omega$. ♣

Beispiel M.20.2. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\lambda^{(m)}$ das LEBESGUE-BOREL-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten $\operatorname{Spec}\left(\lambda^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$ und $\operatorname{Res}\left(\lambda^{(m)}\right) = \varnothing$.

Satz M.20.2. *Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit* BORELscher *σ-Algebra und ferner $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$. Dann ist die Menge* $\operatorname{Spec}(\mu)$ *abgeschlossen in Ω und* $\operatorname{Res}(\mu)$ *offen in Ω.*

Satz M.20.3. *Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit* BORELscher *σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und ferner $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$. Weiter sei A eine offene Menge in Ω mit $A \cap \operatorname{Spec}(\mu) \neq \varnothing$. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_\mu$.*

BEWEIS. Sei x ein nach Voraussetzung existierender Punkt aus $A \cap \operatorname{Spec}(\mu)$. Da A offen und $x \in A$ gibt es dann ein $r > 0$ mit

$$K_\rho(x, r) \subseteq A. \tag{1}$$

Wegen $x \in \operatorname{Spec}(\mu)$ gilt

$$K_\rho(x, r) \notin \mathcal{N}_\mu. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus der Isotonie von μ dann $A \notin \mathcal{N}_\mu$. □

Folgerung M.20.1. *Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit* BORELscher *σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$ so gewählt, dass* $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ *erfüllt ist. Weiter sei A eine nichtleere offene Teilmenge von Ω. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_\mu$.*

BEWEIS. Nach Voraussetzung ist $A \neq \varnothing$ und $A \cap \operatorname{Spec}(\mu) = A \cap \Omega \neq \varnothing$. Hieraus folgt wegen Satz M.20.3 also $A \notin \mathcal{N}_\mu$. □

Beispiel M.20.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und A eine nichtleere offene Teilmenge des $\mathbb{R}^m$ versehen mit euklidischer Metrik. Dann gilt $A \notin \mathcal{N}_\mu$.

BEWEIS. Wegen Beispiel M.20.2 gilt $\operatorname{Spec}\left(\lambda^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$, damit folgt aus Folgerung M.20.1, dann $A \notin \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$. □

Satz M.20.4. *Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit* BORELscher *σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \rho)$ so gewählt, dass* $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ *erfüllt ist. Dann gilt:*

(a) *Sei $f \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |\cdot|)) \cap \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$. Dann ist f die Nullfunktion auf Ω.*

(b) *Seien $f, g \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |\cdot|))$ so beschaffen, dass $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ erfüllt ist. Dann gilt $f \equiv g$.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen $f \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |\cdot|))$, $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ offen und da $\{f \neq 0\} = f^{-1}(\mathbb{R}\setminus\{0\})$ folgt mittels Satz M.16.7 dann $\{f \neq 0\}$ offen. Wegen $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ gilt $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Wegen $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ und dem Gezeigten liefert Folgerung M.20.1, dann $\{f \neq 0\} = \varnothing$. Somit ist f die Nullfunktion auf Ω.

Zu *(b)*: Da $\mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |\cdot|))$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, gilt $f - g \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |\cdot|))$. Hieraus folgt mittels *(a)* dann, dass $f - g$ die Nullfunktion auf Ω ist. □

Beispiel M.20.4. Sei $m \in \mathbb{N}$.

(a) Sei $f \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)\right) \cap \mathcal{M}_0\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \lambda^{(m)}; \mathbb{R}\right)$. Dann ist f die Nullfunktion auf $\mathbb{R}^m$.

(b) Seien $f, g \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)\right)$ so gewählt, dass $f - g \in \mathcal{M}_0\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \lambda^{(m)}, \mathbb{R}\right)$ erfüllt ist. Dann gilt $f = g$.

Satz M.20.5. *Sei (Ω, ρ) ein nichttrivialer messbarer Raum. Es bezeichne $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ die Menge aller beschränkten Abbildungen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann ist $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ eine Unteralgebra der $\mathbb{R}$-Funktionenalgebra $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.*

M.21. μ-wesentlich beschränkte Funktionen

Wir legen in diesen Abschnitt einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zu Grunde und nehmen unter Heranziehung des System $\mathcal{N}_\mu$ der μ-Nullmengen eine Abschwächung des Beschränktheitkonzepts für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ vor.

Lemma M.21.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Die Abbildung*

$$\mathcal{N}_{\infty,\mu} \colon \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right) \longrightarrow [0, +\infty]$$

sei definiert gemäß

$$g \longmapsto \inf_{B \in \mathcal{N}_\mu} \left(\sup_{\omega \in \Omega} \left[1_{\Omega \setminus B}(\omega) \right] \cdot |g(\omega)| \right).$$

Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}, \overline{\mathbb{R}}\right)$ und sei $K_{f,\mu} := \{\alpha \in [0, +\infty) \mid \{|f| > \alpha\} \in \mathcal{N}_\mu\}$. Dann gilt

$$\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) = \begin{cases} \inf K_{f,\mu}, & \text{falls } K_{f,\mu} \neq \varnothing, \\ +\infty, & \text{falls } K_{f,\mu} = \varnothing. \end{cases}$$

Lemma M.21.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.21.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann heißt f eine *μ-wesentlich beschränkte Funktion*, falls $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Für $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ bezeichne $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ die Menge aller μ-wesentlich beschränkter Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Die Menge $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ heißt auch LEBESGUE-*Raum über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zum Exponenten $+\infty$.*

Bemerkung M.21.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt

$$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu, \mathbb{R}) = \mathscr{L}^\infty\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \qquad \clubsuit$$

Bemerkung M.21.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gelten $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) \leq \sup_{\omega \in \Omega} |f(\omega)|$. $\clubsuit$

Bemerkung M.21.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$ und ferner $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.

(ii) Es gibt ein $B_0 \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega \setminus B_0}(f) \in \mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. $\clubsuit$

Lemma M.21.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

  (i) *Es ist $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) = 0$.*

  (ii) *Es ist $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(b) *Es ist $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

Lemma M.21.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Dann gilt:*

(a) *Seien $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$, wobei $f+g$ wohldefiniert sei. Dann ist $f+g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ sowie $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f+g) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) + \mathcal{N}_{\infty,\mu}(g)$.*

(b) *Seien* $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. *Dann gelten* $f \cdot g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *sowie* $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f \cdot g) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) \cdot \mathcal{N}_{\infty,\mu}(g)$.

(c) *Seien* $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *und* $\alpha \in \mathbb{R}$. *Dann gelten* $\alpha \cdot f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *sowie* $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(\alpha \cdot f) \leq |\alpha| \cdot \mathcal{N}_{\infty,\mu}(f)$.

(d) *Seien* $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *und* $p \in (0, +\infty)$. *Dann gelten* $|f|^p \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *sowie* $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(|f|^p) \leq [\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f)]^p$.

(e) *Seien* $f, g \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. *Dann gilt* $\inf\{f, g\} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ *sowie* $\sup\{f, g\} \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. *Es gelten* $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(\inf\{f, g\}) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(|f| + |g|)$ *und* $\mathcal{N}_{\infty,\mu}(\sup\{f, g\}) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(|f| + |g|)$.

(f) *Sei* $f \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. *Dann ist auch* $f^+, f^- \in \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.

Satz M.21.1. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ *eine Unteralgebra von* $\mathcal{M}^b(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

(b) *Sei* $\mathcal{N}_{\infty,\mu;\mathbb{R}} \coloneqq \mathcal{N}_{\infty,\mu} \restriction \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. *So ist* $\mathcal{N}_{\infty,\mu;\mathbb{R}}$ *eine Seminorm auf* $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

M.22. Integrationstheorie

Gegeben seien ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und ein $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Wir fassen f als Wichtungsfunktion auf und stellen uns das Problem Ω bezüglich dieser Wichtung zu messen. Wir werden dieses Problem durch den Aufbau der Integrationstheorie lösen.

Bei der Einführung der Integrationstheorie folgen wir einem Weg, der von W.H. YOUNG[1)] vorgeschlagen wurde und der sich auf die Verwendung monotonen Folgen stützt. Dieser Zugang zeichnet sich dadurch aus, dass von vornherein auch unbeschränkte Funktionen und Maßräume unendlichen Maßes einbezogen werden. Die konstruktive Integraldefinition liefert automatisch für viele Aussagen und einen effizienten Beweissatz.

Wir betrachten einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Im vorliegenden Abschnitt werden wir das μ-Integral für Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ einführen und erste Eigenschaften dieser Konstruktion diskutieren. Unsere Integraldefinition basiert auf dem Begriff der Normaldarstellung einer Funktion aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

M.22.1. Das Integral von $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen

Unser Aufbau des Integralbegriffs wird in mehreren Schritten vollzogen. Wir betrachten einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$. Im vorliegenden Abschnitt werden wir das μ-Integral für Funktionen aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ einführen und erste Eigenschaften dieser Konstruktion diskutieren. Unsere Integraldefinition basiert auf dem Begriff der Normaldarstellung einer Funktion aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

Lemma M.22.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es seien $\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ sowie $\left(m, (\beta_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}, (B_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}\right)$ jeweils Normaldarstellungen von u. Dann gilt*

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j) = \sum_{j=1}^{m} \beta_j \mu(B_j).$$

Lemma M.22.1.1 rechtfertigt folgende Begriffsbildung.

Definition M.22.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es sei $\left(n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, (A_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ eine Normaldarstellung von u. Dann heißt die in $[0, +\infty]$ gelegene Zahl

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\mu := \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j)$$

das *μ-Integral von u*.

Beispiel M.22.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und bezeichne f die Nullfunktion auf Ω. Dann ist $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int_\Omega u \,\mathrm{d}\,\mu = 0$.

Bemerkung M.22.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt

$$\int_\Omega 1_A \mathrm{d}\mu = \mu(A). \qquad \clubsuit$$

[1)] WILLIAM HENRY YOUNG (*20.10.1863, †07.07.1942) war englischer Mathematiker. Er befasste sich mit der Theorie reeller Funktionen und Fourierreihen und fand unabhängig, allerdings zwei Jahre später als Henri Lebesgue eine Variante des Lebesgue-Integrals. Nach ihm ist unter anderem die Youngsche Ungleichung benannt.

BEWEIS. Wegen Bemerkung M.19.3 gilt $1_A \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Setzen wir nun $\alpha_1 := 1$ bzw. $\alpha_2 := 0$ und $A_1 := A$ bzw. $A_2 := \Omega \backslash A$, so ist $\left(2, (\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,2}}, (A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,2}}\right)$ ein Normaldarstellung von 1_A. Somit ist nach Definition M.22.1.1 dann

$$\int_\Omega 1_A \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{2} \alpha_j \mu(A_j) = \mu(A) + 0\mu(\Omega \backslash A) = \mu(A).$$

□

Beispiel M.22.1.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und sei $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, dann ist

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\mathfrak{o} = 0.$$

Beispiel M.22.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und sei $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das DIRACmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = u(\omega).$$

Satz M.22.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann gelten $\alpha \cdot u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\int_\Omega \alpha u \,\mathrm{d}\,\mu = \alpha \int_\Omega u \,\mathrm{d}\,\mu$*

(b) *Es ist $u + v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt $\int_\Omega (u + v) \,\mathrm{d}\,\mu = \int_\Omega u \,\mathrm{d}\,\mu + \int_\Omega v \,\mathrm{d}\,\mu$*

(c) *Sei $u \leq v$. Dann gilt $\int_\Omega u \,\mathrm{d}\,\mu \leq \int_\Omega v \,\mathrm{d}\,\mu$*

Folgerung M.22.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(\alpha_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathfrak{A}$. Dann gilt $\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{A_j} \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot 1_{A_j} \right) \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu(A_j).$$

Folgerung M.22.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $u, v \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gehören $\inf\{u, v\}$ und $\sup\{u, v\}$ zu $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt*

$$\int_\Omega \inf\{u, v\} \,\mathrm{d}\mu \leq \inf\left\{ \int_\Omega u \mathrm{d}\mu, \int_\Omega v \mathrm{d}\mu \right\} \leq \sup\left\{ \int_\Omega u \mathrm{d}\mu, \int_\Omega v \mathrm{d}\mu \right\} \leq \int_\Omega \sup\{u, v\} \,\mathrm{d}\mu.$$

Lemma M.22.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie μ, ν Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu \leq \nu$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt*

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega v \mathrm{d}\nu.$$

Lemma M.22.1.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\mu_n)_{n \in I}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(\alpha_n)_{n \in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$. Weiter sei $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten $\sum_{n \in I} \alpha_n \mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\left(\sum_{n \in I} \alpha_n \mu_n \right) = \sum_{n \in I} \alpha_n \cdot \int_\Omega u \mathrm{d}\mu_n.$$

Satz M.22.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A} \backslash \{\varnothing\}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\widetilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$ und setzt man $\mu_{\tilde{\Omega}} \coloneqq \mu \restriction \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$, so ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$ ein Maß auf $\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$.*

(b) *Sei $f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und sei $f_{\tilde{\Omega}} \coloneqq f \restriction \widetilde{\Omega}$. Dann gelten $1_{\tilde{\Omega}} f \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$, $f_{\tilde{\Omega}} \mathcal{E}\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$ sowie*

$$\int\limits_{\Omega} 1_{\tilde{\Omega}} f \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}} \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}.$$

M.22.2. Das Integral nichtnegativer messbarer Funktionen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann besteht das Ziel dieses Abschnittes darin, den Integralbegriff auf Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ auszudehnen. Hierbei werden wir wesentlich auf Satz M.19.1 zurückgreifen, welcher besagt, dass wir eine Funktion $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ als Supremum einer monoton wachsenden Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ darstellen können. Unser Vorgehen wird maßgeblich durch folgendes Resultat bestimmt:

Lemma M.22.2.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien eine monoton wachsende Folge $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ derart gewählt, dass $u \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\int_{\Omega} u \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ gibt es nach Bemerkung M.19.4 dann ein $k \in \mathbb{N}$ sowie Zahlen

$$\alpha_1, \ldots, \alpha_k \in [0, +\infty) \tag{1}$$

und Mengen

$$A_1, \ldots, A_k \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

mit

$$u = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j}. \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) liefert Folgerung M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j). \tag{4}$$

Sei

$$\alpha \in (0, 1). \tag{5}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Dann wird definiert

$$B_n \coloneqq \{u_n \geq \alpha u\}. \tag{7}$$

Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und (5) liefert Teil *(a)* von Lemma M.19.2 dann

$$\alpha u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{8}$$

Wegen $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$, $u_n \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ und (8) gehören u_n und die B_n zu $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (7) mittels Folgerung M.18.1 dann

$$B_n \in \mathfrak{A}. \tag{9}$$

Wegen (9) liefert Bemerkung M.19.3 dann

$$1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{10}$$

Wegen $u \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ und (10) liefert Teil *(c)* von Lemma M.19.2 dann

$$u \cdot 1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{11}$$

Wegen (11) und (5) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.1.1 nun

$$\alpha u \cdot 1_{B_n} \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A}) \tag{12}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} \alpha u \cdot 1_{B_n} \mathrm{d}\mu = \alpha \int\limits_{\Omega} u \cdot 1_{B_n} \mathrm{d}\mu. \tag{13}$$

Aus (7) und der Nichtnegativität von u_n folgt die Ungleichung

$$u_n \geq \alpha u \cdot 1_{B_n}. \tag{14}$$

Wegen $u_n \in \mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$, (12) und (14) liefert Teil *(c)* von Satz M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu \geq \int\limits_{\Omega} \alpha u_n 1_{B_n} \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt wegen (13) dann

$$\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu \geq \alpha \int\limits_{\Omega} u_n 1_{B_n} \mathrm{d}\mu. \tag{15}$$

Unter Verwendung von (3) sowie Teil *(c)* von Bemerkung M.19.2 ergibt sich

$$u 1_{B_n} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j} 1_{B_n} = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n}. \tag{16}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt bei Beachtung von (17), (2) und (9) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$A_j \cap B_n \in \mathfrak{A}. \tag{18}$$

Wegen $u_n \leq u_{n+1}$ folgt aus (7) dann $B_n \subseteq B_{n+1}$. Hieraus folgt

$$A_j \cap B_n \subseteq A_j \cap B_{n+1}. \tag{19}$$

Unter Beachtung von (16), (1), (17) und (18) ergibt sich mittels Folgerung M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\Omega} u 1_{B_n} \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} \left[\sum_{j=1}^{k} \alpha_j 1_{A_j \cap B_n} \right] \mathrm{d}\mu = \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n). \tag{20}$$

Wir zeigen nun, dass $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega$ erfüllt ist. Es gilt

$$\Omega \backslash \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right] = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\Omega \backslash B_n \right]. \tag{21}$$

Sei

$$\omega \in \bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\Omega \backslash B_n \right]. \tag{22}$$

Aus (6), (7) und (22) folgt für alle $n \in \mathbb{N}$ dann

$$0 \leq u_n(\omega) \leq \alpha u(\omega). \tag{23}$$

Aus (23) und (5) ergibt sich

$$u(\omega) > 0. \tag{24}$$

Unter Beachtung von (23), (5) und (24) folgt dann

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} u_n(\omega) \leq \alpha u(\omega) < u(\omega)$$

was im Widerspruch zur Voraussetzung $u \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} u_n$ stünde. Somit ist $\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[\Omega \backslash B_n \right] = \varnothing$, also wegen (21) dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega. \tag{25}$$

Wegen (25) folgt dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} (A_j \cap B_n) = A_j \cap \left[\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right] = A_j \cap \Omega = A_j. \tag{26}$$

Wegen (6), (18), (19) und (26) folgt aus der Unterhalbstetigkeit von μ

$$\mu(A_j) = \mu\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \left[A_j \cap B_n \right] \right) = \lim_{n \to \infty} \mu(A_j \cap B_n). \tag{27}$$

Unter Verwendung von (4), (17), (27) und (20) folgt nun

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} u \mathrm{d}\mu &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j) \\ &= \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \lim_{n \to \infty} \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \sum_{j=1}^{k} \alpha_j \mu(A_j \cap B_n) \\ &= \lim_{n \to \infty} \int_{\Omega} u 1_{B_n} \mathrm{d}\mu. \end{aligned} \tag{28}$$

Da $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ ist, liefert Teil *(c)* von Satz M.22.1.1 dann, dass $\left(\int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathbb{R}$ ist. Somit gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu. \tag{29}$$

Unter Beachtung von (29), (26), (15) und (28) folgt dann

$$\begin{aligned}
\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu &= \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu \\
&\geq \lim_{n\to\infty} \left[\alpha \int_\Omega u 1_{B_n} \mathrm{d}\mu\right] \\
&= \alpha \left[\lim_{n\to\infty} \int_\Omega u 1_{B_n} \mathrm{d}\mu\right] \\
&= \alpha \int_\Omega u \mathrm{d}\mu.
\end{aligned}$$

Unter Beachtung von (4) folgt schließlich

$$\int_\Omega u \mathrm{d}\mu = \lim_{\alpha\to 1-0} \left[\alpha \int_\Omega u \mathrm{d}\mu\right] \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Satz M.22.2.1. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsende Folgen aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$. Dann gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $k\in\mathbb{N}$. Dann gilt

$$u_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n \tag{1}$$

und

$$v_k \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl der Folgen $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich bei Beachtung von (1) bzw. (2) mittels Lemma M.22.2.1 dann

$$\int_\Omega u_k \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu$$

bzw.

$$\int_\Omega v_k \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu$$

bzw.

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} v_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu.$$

Es ist also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} v_n \mathrm{d}\mu.$$

□

Folgerung M.22.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $u \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = u$. Dann gilt*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} u \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $v_n \coloneqq u$. Dann ist $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = u$. Hieraus folgt dann $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} v_n$, also mittels M.22.2.1 dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} v_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} u \mathrm{d}\mu.$$

□

Satz M.22.2.1 und Folgerung M.22.2.1 führen uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.22.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine nach Satz M.19.1 existierende monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Dann heißt, die in $[0, +\infty]$ gelegene Zahl

$$\int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu$$

das *μ-Integral von f*.

Bemerkung M.22.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n = f$. Dann ist die Folge

$$\left(\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

im eigentlichen- oder uneigentlichen Sinne konvergent und es gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega} u_n \mathrm{d}\mu.$$

♣

Beweis. Wegen Teil *(c)* von Satz M.22.1.1 ist die Folge $\left(\int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend. Hieraus folgen mit der Definition M.22.2.1 dann alle Behauptungen. □

Beispiel M.22.2.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und sei $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}\mathfrak{o} = 0.$$

Beispiel M.22.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Es bezeichne $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das DIRAC-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in $\omega \in \Omega$. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = f(\omega).$$

Satz M.22.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\alpha \in [0, +\infty]$. Dann gelten $\alpha \cdot f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega \alpha f \mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Es gelten $f + g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega (f+g) \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu + \int_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

(c) *Sei $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

(d) *Seien $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty]$ sowie $A_1, A_2 \in \mathfrak{A}$ derart beschaffen, dass die Ungleichung $\alpha_1 1_{A_1} \leq f \leq \alpha_2 1_{A_2}$ besteht. Dann gilt*

$$\alpha_1 \mu(A_1) \leq \int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \alpha_2 \mu(A_2).$$

Folgerung M.22.2.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und es bezeichne f, die auf Ω konstante Funktion mit Wert $+\infty$. Dann gelten $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \mu(\Omega) \in (0, +\infty], \\ 0, & \text{falls } \mu(\Omega) = 0. \end{cases}$$

Folgerung M.22.2.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gelten $\{|f|, f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega |f| \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu + \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu.$$

Das nachfolgende Resultat, welches auf BEPPO LEVI[1)] zurückgeht, ist von *fundamentaler* Bedeutung für die Integrationstheorie:

[1)] BEPPO LEVI (∗14.05.1875; †28.08.1961) war ein italienischer Mathematiker. Er lieferte wichtige Beiträge zur Analysis, zum Beispiel zur Lebesgueschen Integrationstheorie.

Satz M.22.2.3 (Satz der monotonen Konvergenz)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int\limits_{\Omega} \left(\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n\right) \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wir zeigen zunächst die Existenz einer Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist monoton wachsend.

(II) Es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} v_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n$.

(III) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $v_n \leq f_n$.

Sei dazu

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen $f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ gibt es nach Satz M.19.1 dann eine monoton wachsende Folge $(u_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} u_{k,n} = f_n. \tag{2}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dann definieren wir

$$v_k \coloneqq \sup_{n\in\mathbb{N}_{1,k}} u_{k,n}. \tag{4}$$

Da $(u_{k,n})_{n\in\mathbb{N}_{1,k}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt wegen (4) mittels Teil *(a)* von Lemma M.19.2 dann

$$v_k \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Da für $n \in \mathbb{N}$ nach Konstruktion $u_{k,n} \leq u_{k+1,n}$ erfüllt ist, folgt aus (4) dann

$$v_k = \sup_{n\in\mathbb{N}_{1,k}} u_{k,n} \leq \sup_{n\in\mathbb{N}_{1,k+1}} u_{k+1,n} = v_{k+1}. \tag{6}$$

Sei

$$\omega \in \Omega. \tag{7}$$

Wegen (4) gibt es dann ein $n_\omega \in \mathbb{N}_{1,k}$ mit

$$v_k(\omega) = u_{k,n_\omega}(\omega). \tag{8}$$

Wegen (2) gilt

$$u_{k,n_\omega}(\omega) \leq f_{n_\Omega}(\omega). \tag{9}$$

Da die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton wachsend ist und da $n_\omega \in \mathbb{N}_{1,k}$ erfüllt ist, gilt dann

$$f_{n_\omega}(\omega) \leq f_k(\omega). \tag{10}$$

Aus (8) bis (10) folgt nun

$$v_k(\omega) \leq f_k(\omega). \tag{11}$$

Wegen (7) bis (11) gilt dann

$$\sup_{k\in\mathbb{N}} v_k \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k. \tag{12}$$

Aus (4) folgt für

$$n \in \mathbb{N}_{1,k} \tag{13}$$

dann

$$u_{k,n} \leq v_k. \tag{14}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{15}$$

Aus (13) bis (15) folgt dann

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} u_{k,n} \leq \sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} v_k. \tag{16}$$

Da die Folge $(u_{k,n})_{k\in\mathbb{N}}$ nach Konstruktion monoton wachsend ist, gilt unter Beachtung von (2) dann

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} u_{k,n} = \sup_{k\in\mathbb{N}} u_{k,n} = f_n. \tag{17}$$

Wegen (6) gilt

$$\sup_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} v_k = \sup_{k\in\mathbb{N}} v_k. \tag{18}$$

Aus (16) bis (18) folgt nun

$$f_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} v_k. \tag{19}$$

Wegen (15) und (19) gilt dann also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} v_k. \tag{20}$$

Aus (12) und (20) folgt daher

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = \sup_{k\in\mathbb{N}} v_k. \tag{21}$$

Wegen(3), (5), (6), (11), (21) wird dann via (4) eine Folge $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ definiert, welche die Eigenschaften *(I)-(III)* besitzt. Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ ist, liefert Lemma M.19.4 dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{22}$$

Wegen (22), *(I)* und *(II)* ergibt sich mittels Definition M.22.2.1 dann

$$\int_\Omega \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu. \tag{23}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen *(III)* mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 nun

$$\int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus ergibt sich mittels Supremabildung

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega v_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu. \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt nun

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} f_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu. \tag{25}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ gilt andererseits $f_n \leq \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k$. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$ bei Beachtung von $f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und (22) mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \mathrm{d}\mu.$$

Wieder mittels Supremabildung also

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \mathrm{d}\mu. \tag{26}$$

Aus (25) und (26) folgt schließlich

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} \sup_{k\in\mathbb{N}} f_k \mathrm{d}\mu.$$

□

Folgerung M.22.2.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt*

$$\int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Dann wird definiert

$$s_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{2}$$

Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt aus (2) mittels Teil *(b)* von Satz M.22.2.2 dann zum einen

$$s_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{3}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Da $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$ ist, folgt aus (1) und (2) dann

$$s_n \leq s_{n+1}. \tag{5}$$

Wegen (1), (3)und (5) liefert der Satz über die monotone Konvergenz (Satz M.22.2.3) dann zum einen

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{6}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Wegen (1), (5) und (2) gilt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n = \lim_{n\to\infty} s_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{8}$$

Wegen (1) und (5) ergibt sich mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2, dass $\left(\int_\Omega s_n \mathrm{d}\mu\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $[0,+\infty]$ ist. Hieraus folgt

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Wegen (6) und (8) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{10}$$

Die Kombination von(8), (7), (9), (1) und (4) erbringt schließlich

$$\int\limits_{\Omega} \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} s_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} s_n \mathrm{d}\mu = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu. \qquad \square$$

Unser nächstes Ziel besteht darin, ausgehend von einem nichttrivialen messbaren Raum $(\Omega,\mathfrak{A})$ und einem Maß μ auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ via Integration von Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ eine Familie neuer Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ zu erzeugen.

Satz M.22.2.4. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $f\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Sei $\mu_f\colon \mathfrak{A}\longrightarrow[0,+\infty]$ und für $A\in\mathfrak{A}$ sei, unter Beachtung der nach von Teil* (a) *von Bemerkung M.19.11 gültigen Beziehung $1_A f\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$, dann $\mu_f(A) := \int_\Omega 1_A f\mathrm{d}\mu$. Dann gelten:*

(a) *Es ist $\mu_f\in\mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$.*

(b) *Es ist $\mu_f(\Omega)=\int_\Omega f\mathrm{d}\mu$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist $\mu_f\in\mathcal{M}_+^b(\Omega,\mathfrak{A})$.*

  (ii) *Es ist $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\in[0,+\infty)$.*

(d) *Sei $g\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$. Dann gilt:*

  (d1) *Es ist $g\cdot f\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie*

$$(\mu_f)_g = \int\limits_{\Omega} g\mathrm{d}\mu_f.$$

  (d2) *Es gilt $(\mu_f)_g=\mu_{f\cdot g}$.*

(e) *Sei $B\in\mathfrak{A}$. Dann ist $1_B\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ und für $A\in\mathfrak{A}$ gilt*

$$\mu_{1_B}(A) = \mu(A\cap B).$$

(f) *Es gelten* $\Omega \in \mathfrak{A}$ *sowie* $\mu_{1_\Omega} = \mu$.

(g) *Sei sogar* $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, (0, +\infty))$. *Dann gelten* $1/f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *sowie*

$$(\mu_f)_{\frac{1}{f}} = \mu.$$

Folgerung M.22.2.5. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. *Weiter seien* I *ein Abschnitt von* $\mathbb{N}$ *sowie* $(A_k)_{k\in I}$ *eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus* $\mathfrak{A}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $(1_{A_k} \cdot f)_{k\in I}$ *eine Folge aus* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, $\sum_{k\in I} 1_{A_k} f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *und*

$$\int_\Omega \left[\sum_{k\in I} 1_{A_k} f\right] \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in I} \int_\Omega 1_{A_k} f \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Sei* $\bigcup_{k\in I} A_k = \Omega$ *dann ist*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \sum_{k\in I} \int_\Omega 1_{A_k} f \mathrm{d}\mu.$$

Folgerung M.22.2.6. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie*

$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty)), \qquad \text{mit } \int_\Omega f \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge aus* $[0, +\infty)$ *mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}} \alpha_n = +\infty$. *Dann ist* $\left(1_{\{f\geq a_n\}} f\right)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_{\{f\geq\alpha_n\}} f \mathrm{d}\mu = 0.$$

Folgerung M.22.2.7. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *mit*

$$0 < \int_\Omega f \mathrm{d}\mu < +\infty.$$

Sei nun

$$g := \frac{1}{\int_\Omega f \mathrm{d}\mu} f.$$

Dann ist $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt* $\mu_g \in \mathcal{M}^1_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

Satz M.22.2.4 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.22.2.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt ν ein *μ-stetiges Maß*, falls es ein $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit

$$\nu = \mu_f$$

gibt. Jedes solches f heißt dann eine *Dichteversion von ν bezüglich μ*.

Satz M.22.2.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(f_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty]$. Dann ist $\sum_{k\in I} \alpha_k f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt*

$$\mu_{\sum_{k\in I} \alpha_k f_k} = \sum_{k\in I} \alpha_k \mu_{f_k}.$$

Beispiel M.22.2.3. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in (0, +\infty)$. Es bezeichne ν_A die in Definition M.6.1 eingeführte μ-Gleichverteilung auf A. Schließlich sei

$$f := \frac{1}{\mu(A)} 1_A.$$

Dann ist $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und

$$\nu_A = \mu_f.$$

Satz M.22.2.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\mu \leq \nu$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega f \mathrm{d}\nu.$$

Satz M.22.2.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\mu_k)_{k\in I}$ bzw. $(\alpha_k)_{k\in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $[0, +\infty)$. Dann gelten $\sum_{k\in I} \alpha_k \mu_k \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\left[\sum_{k\in I} \alpha_k \mu_k\right] = \sum_{k\in I} \alpha_k \int_\Omega f \mathrm{d}\mu_k.$$

Beispiel M.22.2.4. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$ sowie $(\mu_k)_{k\in I}$ bzw. $(\omega_k)_{k\in I}$ Folgen aus Ω bzw. $[0, +\infty)$. Dann gelten

$$\sum_{k\in I} \alpha_k \varepsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}} \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$$

sowie

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\left[\sum_{k\in I} \alpha_k \varepsilon_{\omega_k, \mathfrak{A}}\right] = \sum_{k\in I} \alpha_k f(\omega_k).$$

Beweis. Kombiniere Satz M.22.2.7 und Beispiel M.22.2.2. □

Lemma M.22.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A}\backslash\{\varnothing\}$. Sei $f_{\tilde{\Omega}} := f \restriction \widetilde{\Omega}$ und es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Dann gelten:*

(a) *Es ist $1_{\tilde{\Omega}} f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie $f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{E}^*\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$.*

(b) *Sei $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n = f$. Dann gelten:*

(b1) *Es ist $(1_{\tilde{\Omega}} \cdot g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} 1_{\tilde{\Omega}} g_n = 1_{\tilde{\Omega}} f.$$

(b2) *Für $n \in \mathbb{N}$ sei $g_{n,\tilde{\Omega}} \coloneqq g_n \restriction \widetilde{\Omega}$. Dann ist $\left(g_{n,\tilde{\Omega}}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega,\mathfrak{A})$ mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} g_{n,\tilde{\Omega}} = f_{\tilde{\Omega}}.$$

Satz M.22.2.8. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A}\setminus\{\varnothing\}$ und bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ eine σ-Algebra in $\widetilde{\Omega}$ mit $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}} \subseteq \mathfrak{A}$ und setzt man $\mu_{\tilde{\Omega}} \coloneqq \mu \restriction \mathfrak{A}_{\widetilde{\Omega}}$, so ist $\mu_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{M}_+\left(\widetilde{\Omega},\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$.*

(b) *Seien $f \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie $f_{\widetilde{\Omega}} \coloneqq f \restriction \widetilde{\Omega}$. Dann gelten $1_\Omega f \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$, $f_{\tilde{\Omega}} \in \mathcal{E}^*\left(\widetilde{\Omega},\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$ sowie*

$$\int_\Omega 1_{\tilde{\Omega}} f \mathrm{d}\mu = \int_{\widetilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}} \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}.$$

M.22.3. Ungleichungen von Tschebyschov und Markov

Wir betrachten in diesem Abschnitt folgende Situation: Gegeben seien ein nichttrivialer Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{K})$. Dann sind wir daran interessiert, für $\alpha \in (0,+\infty)$ die Größe $\mu(\{|f| \geq \alpha\})$ geeignet abzuschätzen.

Wir studieren diese Aufgabenstellung unter Zugrundelegung geeigneter Integrierbarkeitsvoraussetzungen an die Funktion f. Diese Problemstellung wurde vor dem Hintergrund der Anwendung der Wahrscheinlichkeitstheorie bereits im 19. Jahrhundert intensiv in der in St. Petersburg wirkenden Schule von Pafnuti Lwowitsch Tschebyschov[1)] untersucht. Neben Tschebyschov selbst erzielte insbesondere dessen Schüler Andrei Andrejewitsch Markov[2)] bedeutende Resultate zur genannten Problematik.

Wir studieren in diesem Abschnitt den Ideenkreis der Ungleichungen vom Tschebyschov-Markov-Typ und geben erste Anwendungen dieser Ungleichungen. Vorausschauend sei erwähnt, dass insbesondere in der Wahrscheinlichkeitstheorie die außergewöhnliche Wirksamkeit dieser Ungleichungen zum Tragen kommen wird.

Satz M.22.3.1. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}\right\}$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{K})$. Sei $\varphi\colon [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$ eine monoton wachsende Funktion mit $\varphi^{-1}[(0,+\infty)] \neq \varnothing$. Schließlich sei $\alpha \in \varphi^{-1}[(0,+\infty)]$. Dann gelten $\{|f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}, \varphi \circ |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})$ sowie*

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\varphi(a)} \int_\Omega (\varphi \circ |f|)\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{K})$ gilt nach Bemerkung M.18.9 dann

$$\{|f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

[1)] Pafnuti Lwowitsch Tschebyschov (oder auch Pafnuti L′vovič Čebyšëv) (*16.05.1821, †08.12.1894) war einer der bedeutendsten russischen Mathematiker. Er arbeitete auf den Gebieten Interpolation, Approximation, Funktionentheorie, Wahrscheinlichkeitstheorie und Zahlentheorie.

[2)] Andrei Andrejewitsch Markov (oder auch Andrej Andreevič Markov) (*14.06.1856; †20.07.1922) war russischer Mathematiker, der wesentliche Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis beisteuerte. Er ist vor allem für die Theorie der stochastischen Prozesse bekannt.

Da φ monoton wachsend ist liefert Satz M.18.15 dann

$$\varphi \in \mathcal{M}\left([0,+\infty], \overline{\mathfrak{B}}_1 \cap [0,+\infty], \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Hieraus folgt wegen $\varphi \in \mathrm{Abb}\left([0,+\infty],[0,+\infty]\right)$ dann

$$\varphi \in \mathcal{E}^*\left([0,+\infty], \overline{\mathfrak{B}}_1 \cap [0,+\infty]\right). \tag{2}$$

Wegen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ und der nach Bemerkung M.18.4 gültigen Inklusion

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$$

liefert Bemerkung M.19.10 dann die $\mathfrak{A}$-$\left(\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap [0,+\infty]\right)$-Messbarkeit von $|f|$. Hieraus sowie aus der wegen (2) vorliegenden $\left(\overline{\mathfrak{B}}_1 \cap [0,+\infty]\right)$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit von φ folgt mittels Satz M.16.3 die $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-Messbarkeit von $\varphi \circ |f|$. Hieraus folgt wegen $\varphi \circ |f| \in \mathrm{Abb}(\Omega, [0,+\infty])$ dann

$$\varphi \circ |f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Weil φ Werte in $[0,+\infty]$ annimmt, gilt dies auch für $\varphi \circ |f|$. Somit ist

$$\varphi \circ |f| \geq 1_{\{|f| \geq \alpha\}} \cdot (\varphi \circ |f|). \tag{4}$$

Da φ monoton wachsend ist, gilt

$$1_{\{|f| \geq \alpha\}} \cdot (\varphi \circ |f|) \geq 1_{\{|f| \geq \alpha\}} \cdot \varphi(\alpha). \tag{5}$$

Aus (4) und (5) schlussfolgert man

$$\varphi \circ |f| \geq 1_{\{|f| \geq \alpha\}} \cdot \varphi(\alpha). \tag{6}$$

Wegen(3), (1), (6) und $\varphi(\alpha) \in (0,+\infty)$ folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\int_\Omega (\varphi \circ |f|)\, \mathrm{d}\mu \geq \varphi(\alpha)\, \mu(\{|f| \geq \alpha\}).$$

Hieraus folgt wegen $\varphi(\alpha) \in (0,+\infty)$ dann

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} \int_\Omega (\varphi \circ |f|)\, \mathrm{d}\mu.$$

□

Es folgt nun die Ungleichung von Tschebyschov:

Satz M.22.3.2 (Ungleichung von Tschebyschov)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$. Seien α und p aus $(0,+\infty)$. Dann gilt*

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_\Omega |f|^p\, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $\varphi_p\colon [0,+\infty] \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß $x \longmapsto x^p$. Wegen der Bemerkung M.18.8 ist φ_p monoton wachsend und $\varphi^{-1}[(0,+\infty)] = (0,+\infty)$. Mittels $|f|^p = \varphi_p \circ |f|$ folgt die Behauptung mittels Satz M.22.3.1. □

Folgerung M.22.3.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ und $p \in (0, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ so gewählt, dass $\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \mu(\{|f| \geq \alpha\}) = 0.$$

Satz M.22.3.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gelten:*

(a) *Für $k \in \mathbb{N}$ sei $A_k := |f|^{-1}([k, k+1))$. Dann ist $(A_k)_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k) \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k).$$

(b) *Sei μ endlich. Dann gelten zusätzlich:*

(b1) *Es ist $(\{|f| \leq k\})_{k \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}$ und es gilt*

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \leq k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k\mu(A_k)$$

sowie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \leq k\}) \leq \int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \leq k\}).$$

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$.

(ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \leq k\}) \in [0, +\infty)$.

(b3) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\lim_{n \to \infty} n\mu(\{|f| \geq n\}) = 0.$$

(b4) *Sei $f^{-1}(\mathbb{R} \backslash \mathbb{N}) = \varnothing$, dann gilt*

$$\int_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(\{|f| \leq k\}).$$

M.22.4. Integration numerischer Funktionen

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann besteht das Hauptziel dieses Abschnitts darin, den bisher für Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ erklärten Integralbegriff auf eine geeignete Teilklasse von $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ auszudehnen.

Wegen Bemerkung M.19.9 gilt für $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ dann $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hierdurch werden wir auf folgende Begriffsbildung geführt:

Definition M.22.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann heißt f *quasi-μ-integrierbar* bzw. *μ-integrierbar*, falls

$$\inf\left\{\int_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu, \int_\Omega f^- \mathrm{d}\mu\right\} \in [0, +\infty)$$

bzw.

$$\sup\left\{\int\limits_{\Omega} f^+\mathrm{d}\mu, \int\limits_{\Omega} f^-\mathrm{d}\mu\right\} \in [0,+\infty)$$

gilt. In beiden Fällen heißt dann die Zahl

$$\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\mu \coloneqq \int\limits_{\Omega} f^+\mathrm{d}\mu - \int\limits_{\Omega} f^-\mathrm{d}\mu$$

das μ-*Integral von* f. Für $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ bezeichnen wir die Menge aller μ-integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ mit

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K}).$$

Bemerkung M.22.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Dies folgt aus Definition M.22.4.1 und der nach Bemerkung M.18.4 gültigen Beziehung

$$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}) = \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}). \qquad \square$$

Bemerkung M.22.4.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann ist f auch quasi-μ-integrierbar. $\clubsuit$

Beispiel M.22.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Weiter sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mathfrak{o}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und

$$\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\mathfrak{o} = 0.$$

Beispiel M.22.4.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $\omega \in \Omega$. Es bezeichne $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$ das Dirac-Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω. Ferner sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:

(a) Es ist f quasi-$\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$-integrierbar und es gilt

$$\int\limits_{\Omega} f\mathrm{d}\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}} = f(\omega).$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) f ist $\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$-integrierbar.

(ii) $f(\omega) \in \mathbb{R}$.

Bemerkung M.22.4.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:

(a) Sei $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, [0,+\infty])$ bzw. $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, [-\infty, 0])$. Dann ist f quasi-μ-integrierbar und es gilt $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \in [0,+\infty]$bzw. $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \in [-\infty, 0]$. Hierbei ist f genau dann μ-integrierbar, wenn $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \in [0,+\infty)$ bzw. $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \in (-\infty, 0]$.

(b) Die Funktion $|f|$ ist quasi-μ-integrierbar.

(c) Sei f quasi-μ-integrierbar. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist μ-integrierbar.

(ii) $\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \in \mathbb{R}$. ♣

Bemerkung M.22.4.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $u, v \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt $u + v \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. ♣

Beweis. Kombiniere Teil *(b)* von Satz M.22.2.2 mit Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3. □

Satz M.22.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist μ-integrierbar.*

(ii) *f^+ und f^- sind μ-integrierbar.*

(iii) *Es existieren nichtnegative μ-integrierbare Funktionen u und v auf Ω, so dass*

$$f = u - v.$$

(iv) *Es existiert eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion g auf Ω mit*

$$|f| \leq g.$$

(v) *$|f|$ ist μ-integrierbar.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Weiter seien u und v nichtnegative μ-integrierbare Funktionen auf Ω mit $f = u - v$. Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega f\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega u\mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega v\mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Zu *(a)*:

***(i)*⇒*(ii)*:** Aus *(i)* folgt

$$\sup\left\{\int\limits_\Omega f^+\mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega f^-\mathrm{d}\mu\right\} \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Wegen *(i)* und Bemerkung M.22.4.2 ist f quasi-μ-integrierbar. Es gilt also

$$\inf\left\{\int\limits_\Omega f^+\mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega f^-\mathrm{d}\mu\right\} \in [0, +\infty). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\int\limits_\Omega f^+\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty) \tag{3}$$

und

$$\int\limits_{\Omega} f^- \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)\,. \tag{4}$$

Wegen $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathrm{Abb}\left(\Omega, [0, +\infty]\right)$ sowie (3) bzw. (4) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 dann die μ-Integrierbarkeit von f^+ und f^-. Es gilt demnach *(ii)*.

***(ii)*⇒*(iii)*:** Wählt man $u \coloneqq f^+$ und $v \coloneqq f^-$, so sind u und v nichtnegative Funktionen auf Ω, die wegen *(ii)* μ-integrierbar sind, und gilt offenbar $f = u - v$. Also gilt *(iii)*.

***(iii)*⇒*(iv)*:** Da nach *(iii)* nun $f = u - v$ erfüllt ist und u bzw. v nichtnegativ sind, gelten

$$f = u - v \leq u \leq u + v$$

sowie

$$-f = -(u - v) \leq v \leq u + v.$$

Hieraus folgt nun

$$|f| = \sup\{f, -f\} \leq u + v. \tag{5}$$

Da nun u und v nach *(iii)* nichtnegativ und μ-integrierbar sind, ist $u + v$ nach Bemerkung M.22.4.4 dann eine nichtnegative μ-integrierbare Funktion. Hieraus und aus (5) folgt dann *(iv)*.

***(iv)*⇒*(v)*:** Wegen $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ gilt nach Bemerkung M.19.9 dann

$$|f| \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{6}$$

Nach Wahl von g gilt zudem

$$g \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{7}$$

Wegen *(iv)* gilt außerdem

$$|f| \leq g. \tag{8}$$

Wegen (6) bis (8) liefert Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$0 \leq \int\limits_{\Omega} |f| \,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} g \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Da g nach *(iv)* nichtnegativ und μ-integrierbar ist, liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 dann

$$\int\limits_{\Omega} g \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)\,. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann $\int_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt bei Beachtung der Nichtnegativität von $|f|$ mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 die μ-Integrierbarkeit von $|f|$. Es gilt also *(v)*.

***(v)*⇒*(i)*:** Da $|f|$ nichtnegativ ist, folgt wegen *(v)* mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 dann

$$\int\limits_{\Omega} |f| \,\mathrm{d}\mu \in [0, +\infty)\,. \tag{11}$$

Nach Bemerkung M.19.9 gelten

$$\left\{f^+, f^-, |f|\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{12}$$

Weiterhin gelten

$$f^+ \leq f^+ + f^- = |f| \tag{13}$$

und

$$f^- \leq f^+ + f^- = |f| \,. \tag{14}$$

Wegen (12) sowie (13) bzw. (14) liefert Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$0 \leq \int\limits_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu \tag{15}$$

bzw.

$$0 \leq \int\limits_\Omega f^- \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega |f| \,\mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

Wegen(11), (15) und (16) gilt dann

$$\sup \left\{ \int\limits_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega f^- \mathrm{d}\mu \right\} \in [0, +\infty) \,.$$

Somit ist f also μ-integrierbar. Es gilt also *(i)*.

Zu *(b)*: Nach Voraussetzung gilt $u - v = f = f^+ - f^-$. Hieraus folgt sofort

$$u + f^- = v + f^+. \tag{17}$$

Da die Funktionen u, v, f^- und f^+ nach Voraussetzung sowie wegen *(i)* sämtlich nichtnegativ und μ-integrierbar sind, folgt wegen (17) mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega u \mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega f^- \mathrm{d}\mu &= \int\limits_\Omega \left(u + f^-\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_\Omega \left(v + f^+\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_\Omega v \mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu \end{aligned} \tag{18}$$

sowie wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 weiterhin

$$\left\{ \int\limits_\Omega u \mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega v \mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu, \int\limits_\Omega f^- \mathrm{d}\mu \right\} \in [0, +\infty) \,. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt dann schließlich

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega f^+ \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega f^- \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega u \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega v \mathrm{d}\mu.$$

□

Folgerung M.22.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(a) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(b) $|f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Beweis. Kombiniere Satz M.22.4.1 und Bemerkung M.22.4.1. □

Satz M.22.4.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $f, g \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ so gewählt, dass $f + g$ definiert ist. Dann gilt $f + g \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie*

$$\int_\Omega (f+g)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega f\mathrm{d}\mu + \int_\Omega g\mathrm{d}\mu.$$

Bemerkung M.22.4.5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in \overline{\mathbb{R}}$. Dann gelten

$$(a \cdot b)^+ = \begin{cases} ab^+, & \text{falls } a \in [0, +\infty) \\ |a|\, b^+, & \text{falls } a \in (-\infty, 0) \end{cases}$$

sowie

$$(a \cdot b)^- = \begin{cases} ab^-, & \text{falls } a \in [0, +\infty) \\ |a|\, b^-, & \text{falls } a \in (-\infty, 0) \end{cases}.$$

♣

Satz M.22.4.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, f eine quasi-μ-integrierbare numerische Funktion auf Ω sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\alpha \cdot f$ quasi-μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_\Omega \alpha \cdot f\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_\Omega f\mathrm{d}\mu.$$

(b) *Sei f μ-integrierbar. Dann ist $\alpha \cdot f$ auch μ-integrierbar und es gilt*

$$\int_\Omega \alpha \cdot f\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_\Omega f\mathrm{d}\mu.$$

(c) *Sei $\alpha \neq 0$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *f ist μ-integrierbar.*

(ii) *$\alpha \cdot f$ ist μ-integrierbar.*

Bemerkung M.22.4.6. Seien $a, b \in \overline{\mathbb{R}}$ so gewählt, dass $a \leq b$ erfüllt ist. Dann gelten $a^+ \leq b^+$ und $a^- \geq b^-$. ♣

Satz M.22.4.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Seien f und g quasi-μ-integrierbare Funktionen auf Ω mit $f \leq g$. Dann gilt*

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega g\mathrm{d}\mu.$$

(b) *Sei f eine quasi-μ-integrierbare numerische Funktion. Dann gilt*

$$\left|\int_\Omega f\mathrm{d}\mu\right| \leq \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu.$$

BEWEISIDEE. Beachte Bemerkung M.22.4.6 und verwende Teil *(c)* von Satz M.22.2.2. ◊

Satz M.22.4.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Sei $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(ii) $\{f^+, f^-\} \subseteq \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

(iii) *Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es gibt eine nichtnegative μ-integrierbare numerische Funktion g auf Ω mit $|f| \leq g$.*

(iv) *Es ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $|f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.*

(b) *Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(v) $1_A \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(vi) $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

(c) *Seien $f, g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Dann gehören $\inf\{f, g\}$ und $\sup\{f, g\}$ zu $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.*

(d) *Seien $f, g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\alpha \cdot f + \beta \cdot g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ sowie*

$$\int_\Omega (\alpha \cdot f + \beta \cdot g)\,\mathrm{d}\mu = \alpha \cdot \int_\Omega f\mathrm{d}\mu + \beta \cdot \int_\Omega g\mathrm{d}\mu.$$

(e) *$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ist ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.*

Das nachfolgende Resultat knüpft an Satz M.22.2.3 an. Dort hatten wir im Fall eines nichttrivialen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ein Maß $\mu_f \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ konstruiert. Wir studieren nun die μ_f-Integrierbarkeit von Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

Satz M.22.4.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *g ist quasi-μ_f-integrierbar.*

(ii) *$g \cdot f$ ist quasi-μ-integrierbar.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *g ist μ_f-integrierbar.*

(iv) *$g \cdot f$ ist μ-integrierbar.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\int_\Omega g\mathrm{d}\mu_f = \int_\Omega g \cdot f\mathrm{d}\mu.$$

Satz M.22.4.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$. Weiter seien $(\mu_\iota)_{\iota\in I}$ bzw. $(\alpha_\iota)_{\iota\in I}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$ bzw. $[0,+\infty)$. Es sei $\mu := \sum_{\iota\in I}\alpha_\iota\mu_\iota$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$.*

(b) *Sei $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right) \cap \left[\bigcap_{\iota\in I}\mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu_\iota;\overline{\mathbb{R}}\right)\right]$. Dann gilt*

$$\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{\iota\in I}\left(\alpha_\iota \cdot \int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_\iota\right).$$

Satz M.22.4.8. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$ bzw. $[0,+\infty)$. Weiter sei $\mu := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n\mu_n$. Dann gilt:*

(a) $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$.

(b) *Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(b1) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n \int_\Omega |f|\,\mathrm{d}\mu_n < +\infty$.

(b2) *Sei* (i) *erfüllt und sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $(0,+\infty)$. Dann ist*

$$f \in \bigcap_{n=1}^\infty \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu_n;\overline{\mathbb{R}}\right)$$

und es gilt

$$\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty\left[\alpha_n \cdot \int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu_n\right].$$

Beispiel M.22.4.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus Ω bzw. $[0,+\infty)$. Es sei $\mu := \sum_{n=1}^\infty \alpha_n \cdot \varepsilon_{\omega_n,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:

(a) $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega,\mathfrak{A})$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:

(b1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) $\sum_{n=1}^\infty \alpha_n |f(\omega_n)| < +\infty$.

(b2) Sei *(i)* erfüllt und sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $(0,+\infty)$. Dann ist $(f(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\int\limits_\Omega f\,\mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^\infty [\alpha_n \cdot f(\omega_n)].$$

Beweis. Kombiniere die Sätze M.22.4.7 und M.22.4.8 mit Beispiel M.22.4.2. □

Bemerkung M.22.4.7. Sei ν das Zählmaß auf $(\mathbb{N},\mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. Weiter sei $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Sei $f\colon \mathbb{N} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $n \longmapsto a_n$. Dann gilt:

(a) $f \in \mathcal{M}(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}); \mathbb{R})$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $f \in \mathscr{L}^1(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}), \nu; \mathbb{R})$.

(ii) $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n| < +\infty$.

(c) Sei *(i)* erfüllt. Dann gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\nu = \sum_{n=1}^{\infty} a_n.$$

♣

BEWEIS. Wegen $\nu = \sum_{n=1}^{\infty} \varepsilon_{n,\mathfrak{P}(\mathbb{N})}$ folgt alles aus Beispiel M.22.4.3. □

Satz M.22.4.9. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $m \in \mathbb{N}$ sowie $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. $(0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) $\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mu_n \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist*

$$\mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mu_n; \mathbb{K}\right) = \bigcap_{n=1}^{m} \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; \mathbb{K}).$$

(b2) *Sei $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mu_n; \mathbb{K})$. Dann ist $f \in \bigcap_{n=1}^{m} \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu_n; \mathbb{K})$ sowie*

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\left[\sum_{n=1}^{m} \alpha_n \mu_n\right] = \sum_{n=1}^{m} \left[\alpha_n \int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu_n\right].$$

Beispiel M.22.4.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $m \in \mathbb{N}$, $(\omega_n)_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ bzw. $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ Folgen aus Ω bzw. aus $(0, +\infty)$. Sei $\mu := \sum_{n=1}^{m} \alpha_n \varepsilon_{\omega_n,\mathfrak{A}}$. Dann gilt:

(a) $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b) Sei $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

(b1) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

(ii) $(f(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ ist eine Folge aus $\mathbb{R}$.

(b2) Sei *(i)* erfüllt. Dann ist $(f(\omega_n))_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und es gilt

$$\int_{\Omega} f \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{m} \alpha_n.$$

(c) Es ist

$$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}).$$

Bemerkung M.22.4.8. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne ν das Zählmaß auf $(\mathbb{N}_{1,m}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}_{1,m}))$. Dann gilt:

(a) $\mathscr{L}^1\left(\mathbb{N}_{1,m}, \mathfrak{P}\left(\mathbb{N}_{1,m}\right), \nu; \mathbb{R}\right) = \operatorname{Abb}\left(\mathbb{N}_{1,m}, \mathbb{R}\right)$.

(b) Sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und sei $f\colon \mathbb{N}_{1,m} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $n \longmapsto a_n$. Dann ist $f \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{N}_{1,m}, \mathfrak{P}\left(\mathbb{N}_{1,m}\right), \nu; \mathbb{R}\right)$ und es gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}\nu = \sum_{n=1}^{m} a_n.$$

♣

Satz M.22.4.10. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $\widetilde{\Omega} \in \mathfrak{A}\backslash\{\varnothing\}$. Es bezeichne $\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ die Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in $\widetilde{\Omega}$. Dann gilt:*

(a) *$\mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ ist eine σ-Algebra in $\widetilde{\Omega}$ und $\mu_{\tilde{\Omega}} \coloneqq \mu \restriction \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}$ ist ein Maß auf $\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}\right)$.*

(b) *Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und sei $f_{\tilde{\Omega}} \coloneqq f \restriction \widetilde{\Omega}$. Dann gilt:*

(b1) *$1_{\tilde{\Omega}} \cdot f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie $f \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *$1_{\tilde{\Omega}} \cdot f$ ist quasi-μ-integrierbar.*

(ii) *$f_{\tilde{\Omega}}$ ist quasi-$\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.*

(b3) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *$1_{\tilde{\Omega}} \cdot f$ ist μ-integrierbar.*

(iv) *$f_{\tilde{\Omega}}$ ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.*

(b4) *Sei* (i) *erfüllt, dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} 1_{\tilde{\Omega}} f \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} f_{\tilde{\Omega}} \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}.$$

(c) *Sei $g \in \mathcal{M}\left(\widetilde{\Omega}, \mathfrak{A}_{\tilde{\Omega}}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Im Falle $\widetilde{\Omega} = \Omega$ sei $G \coloneqq g$ und im Fall $\widetilde{\Omega} \subsetneq \Omega$ sei $G\colon \Omega \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert gemäß*

$$G(\omega) \coloneqq \begin{cases} g(\omega), & \text{falls } \omega \in \widetilde{\Omega}, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash\widetilde{\Omega}. \end{cases}$$

Dann gilt:

(c1) *$G \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

(c2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *G ist quasi-μ-integrierbar.*

(ii) *g ist quasi-$\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.*

(c3) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *G ist μ-integrierbar.*

(iv) *g ist $\mu_{\tilde{\Omega}}$-integrierbar.*

(c4) *Sei* (i) *erfüllt, dann gilt*

$$\int\limits_{\Omega} G \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\widetilde{\Omega}} g \mathrm{d}\mu_{\tilde{\Omega}}.$$

M.22.5. Die Rolle der μ-Nullmengen in der Integrationstheorie

Beim weiteren Aufbau der Integrationstheorie wird das System $\mathcal{N}_\mu$ der μ-Nullmengen eine wesentliche Rolle spielen. Die folgenden Resultate geben bereits ersten Aufschlüsse darüber.

Satz M.22.5.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) $\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0$.

(ii) $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$, *das heißt* $\mu(\{f \neq 0\}) = 0$.

Beweis.

Zu *(a)*: Nach der Wahl von f gilt insbesondere

$$f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Folgerung M.18.2 dann

$$\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{2}$$

Zu *(b)*: Da f nichtnegativ ist, gilt $\{f \neq 0\} = \{f > 0\}$. Hieraus folgt wegen

$$\{f > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}. \tag{3}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) liefert Satz M.18.3 dann

$$\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Da f nichtnegativ ist, gilt

$$\frac{1}{n} \cdot 1_{\{f \geq 1/n\}} \leq f. \tag{6}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie (5) und (6) liefert Teil *(d)* von Satz M.22.2.2 dann

$$0 \leq \frac{1}{n} \cdot \mu\left(\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq \int_\Omega f \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

***(i)*⇒*(ii)*:** Wegen *(i)* folgt aus (4) und (7) für $n \in \mathbb{N}$ dann $\left\{f \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgt bei Beachtung von (3) mittels Teil *(d)* von Satz M.5.1 dann $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$ - es gilt also *(ii)*.

***(ii)*⇒*(i)*:** Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Weiter sei

$$u_n \coloneqq n \cdot 1_{\{f \neq 0\}}. \tag{9}$$

Wegen (8), (9) und (2) liefert Folgerung M.22.2.2 dann

$$u_n \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{10}$$

sowie

$$\int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu = n \cdot \mu(\{f \neq 0\}),$$

also wegen *(ii)* dann

$$\int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu = 0. \tag{11}$$

Aus (8) und (9) folgt weiterhin

$$u_n \leq u_{n+1}. \tag{12}$$

Wegen Bemerkung M.19.8 gilt zudem $\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A}) \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Hieraus folgt bei Beachtung von(8), (9) und (12) dass $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Somit erbringt die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz M.22.2.3) dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{13}$$

und bei zusätzlicher Beachtung von (8) und (11) weiterhin

$$\int_\Omega \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n\right] \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega u_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} 0 = 0. \tag{14}$$

Für $\omega \in \Omega$ gilt wegen (8) und (9) nun

$$\begin{aligned}\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n(\omega) &= \begin{cases} \sup_{n\in\mathbb{N}} n, & \text{falls } \omega \in \{f \neq 0\}, \\ \sup_{n\in\mathbb{N}} 0, & \text{falls } \omega \in \{f = 0\}, \end{cases} \\ &= \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \omega \in \{f \neq 0\}, \\ 0, & \text{falls } \omega \in \{f = 0\}. \end{cases}\end{aligned}$$

Hieraus folgt dann

$$f \leq \sup_{n\in\mathbb{N}} u_n. \tag{15}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, (13) und (15) ergibt sich mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (14) dann

$$0 \leq \int_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int_\Omega \left[\sup_{n\in\mathbb{N}} u_n\right] \mathrm{d}\mu = 0. \tag{16}$$

Somit ist $\int_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0$. Es gilt demnach *(ii)*. □

Folgerung M.22.5.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien f und g Funktionen aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, für welche $f \leq g$ und $\{f < g\} \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\int_\Omega f \mathrm{d}\mu < \int_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 gelten

$$g - f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}; \mu; \mathbb{R}) \tag{1}$$

und

$$\int_\Omega (g - f)\,\mathrm{d}\mu = \int_\Omega g\mathrm{d}\mu - \int_\Omega f\mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Wegen (1) ist $g - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.4 dann $g - f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt wegen $f \leq g$ dann

$$g - f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen $f \leq g$ gilt $\{g - f \neq 0\} = \{f < g\}$. Hieraus folgt wegen $\{f < g\} \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_\mu$ dann

$$\{g - f \neq 0\} \in \mathfrak{A}\backslash\mathcal{N}_\mu. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) liefert Satz M.22.5.1 dann

$$\int_\Omega [g - f]\,\mathrm{d}\mu \in (0, +\infty]. \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) gilt dann

$$\int_\Omega (g - f)\,\mathrm{d}\mu \in (0, +\infty). \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu < \int_\Omega g\mathrm{d}\mu.$$

□

Folgerung M.22.5.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Seien $A \in \mathcal{N}_\mu$ und $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gelten $1_A f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und*

$$\int_\Omega 1_A f\mathrm{d}\mu = 0.$$

(b) *Sei $f \in \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$, dann gelten $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und*

$$\int_\Omega f\mathrm{d}\mu = 0.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei zunächst

$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Wegen $A \in \mathcal{N}_\mu$ ist $A \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt wegen (1) mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$1_A f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.5.1 dann

$$\{1_A f \neq 0\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

und

$$\{1_A f \neq 0\} \subseteq A. \tag{4}$$

Wegen $A \in \mathcal{N}_\mu$ sowie (3) bzw. (4) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\{1_A f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 dann

$$\int\limits_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu = 0. \tag{6}$$

Sei nun

$$f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{7}$$

Wegen Teil *(c)* von Bemerkung M.18.7 gilt

$$f = f^+ - f^-. \tag{8}$$

Wegen (7) liefert Bemerkung M.19.9 nun

$$\left\{f^+, f^-\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{9}$$

Wegen (9) und dem schon Gezeigten, vergleiche etwa (1) bis (6), gelten dann

$$\int\limits_\Omega 1_A f^+ \mathrm{d}\mu = 0 \tag{10}$$

und

$$\int\limits_\Omega 1_A f^- \mathrm{d}\mu = 0. \tag{11}$$

Wegen Bemerkung M.22.4.5 gelten weiterhin

$$\left(1_A f^+\right) = 1_A f^+ \tag{12}$$

und

$$\left(1_A f^-\right) = 1_A f^-. \tag{13}$$

Aus (10) und (12) bzw. (11) und (13) folgt dann

$$\int\limits_\Omega 1_A f^+ \mathrm{d}\mu = 0$$

bzw.

$$\int\limits_\Omega 1_A f^- \mathrm{d}\mu = 0.$$

Hieraus folgt wegen Definition M.22.4.1 dann

$$1_A f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$$

sowie

$$\int\limits_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega 1_A f^+ \mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega 1_A f^- \mathrm{d}\mu = 0 - 0 = 0. \tag{14}$$

Zu *(b)*: Wegen $f \in \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ gilt $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus folgen bei Beachtung von $f = 1_{\{f\neq 0\}} f$ mittels Teil *(a)* dann

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$$

und

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu = 0.$$

□

Folgerung M.22.5.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und ν ein μ-stetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann ist ν absolutstetig bezüglich μ.*

Beweis. Nach Wahl von ν gibt es ein $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$. Hieraus folgt für $A \in \mathcal{N}_\mu$ mittels Teil *(a)* von Folgerung M.22.5.2 dann

$$\nu(A) = \mu_f(A) = \int\limits_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu = 0.$$

Es ist also $A \in \mathcal{N}_\nu$. Somit ist $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$, also ist ν absolutstetig bezüglich μ. □

Folgerung M.22.5.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein total atomar messbarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie ν ein μ-stetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt*

$$\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A}).$$

Beweis. Sei $\omega \in \Omega$. Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$ ist dann $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\mu$. Hieraus ergibt sich bei Beachtung der nach Folgerung M.22.5.3 gültigen Inklusion $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathcal{N}_\nu$ dann $\{\omega\} \in \mathcal{N}_\nu$. Somit ist $\nu \in \mathcal{M}_+^c(\Omega, \mathfrak{A})$. □

Beispiel M.22.5.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei ν ein $\lambda^{(m)}$-stetiges Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt

$$\nu \in \mathcal{M}_+^c(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Satz M.22.5.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ und $h \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{K})$. Dann gilt:*

(a) *Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:*

(a1) *Sei h quasi-μ-integrierbar. Dann ist $1_A h$ quasi-μ-integrierbar.*

(a2) *Sei $h \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$. Dann gilt $1_A h \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\{h \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$.

(ii) *Für alle $A \in \mathfrak{A}$ gelten $1_A h \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ und*

$$\int\limits_\Omega 1_A h \mathrm{d}\mu = 0.$$

Satz M.22.5.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Seien* $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *so gewählt, dass* $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ *erfüllt ist. Dann gilt:*

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Seien* $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *mit* $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. *Weiter sei* f *quasi-*μ*-integrierbar bzw.* μ*-integrierbar. Dann ist* g *quasi-*μ*-integrierbar bzw.* μ*-integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

Folgerung M.22.5.5. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien* $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *so gewählt, dass* $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ *erfüllt ist. Dann ist*

$$\mu_f = \mu_g.$$

Beweis. Sei

$$A \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$\{1_A f, 1_A g\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Wegen $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und (2) liefert Satz M.18.5 dann

$$\{1_A f \neq 1_A g\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Weiterhin ist

$$\{1_A f \neq 1_A g\} = \{f \neq g\} \cap A \subseteq \{f \neq g\}. \tag{4}$$

Wegen $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$ sowie (3) und (4) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\{1_A f \neq 1_A g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.5.3 nun

$$\mu_f(A) = \int\limits_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega 1_A g \mathrm{d}\mu = \mu_g(A). \tag{6}$$

Da $A \in \mathfrak{A}$ beliebig gewählt war, folgt die Behauptung aus (6). □

Satz M.22.5.4. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum,* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ *und* $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. *Weiterhin möge ein* $B \in \mathcal{N}_\mu$ *existieren, so dass* $1_{\Omega \setminus B} |f| \leq g$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *und es gilt*

$$\int\limits_\Omega |f| \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega g \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Ist* g *sogar* μ*-integrierbar, so ist es auch* f.

Von besonderer Wichtigkeit ist die Tatsache, dass einer jeden μ-integrierbaren Funktion Grenzen hinsichtlich des Auftretens der Werte $+\infty$ und $-\infty$ und generell hinsichtlich des Auftretens von, von Null verschiedenen Werten gesetzt sind. Dies wird im nachfolgenden Resultat präzisiert.

Satz M.22.5.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\{|f| = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

(b) *Es ist $\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}$, $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\} \subseteq \mathfrak{A}$ und es ist $\mu \restriction \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$ ein σ-endliches Maß auf $(\{f \neq 0\}, \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\})$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ gilt

$$f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Bemerkung M.19.9 dann

$$|f| \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right) \tag{2}$$

sowie Folgerung M.18.2 weiterhin

$$\{|f| = +\infty\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

bzw.

$$\{f \neq 0\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ gilt nach Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 dann

$$\int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu \in [0, +\infty). \tag{5}$$

Sei

$$\alpha \in (0, +\infty). \tag{6}$$

Aufgrund der Nichtnegativität von $|f|$ folgt dann

$$\alpha \cdot 1_{\{|f|=+\infty\}} \leq |f|. \tag{7}$$

Wegen(2), (3), (6) und (7) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$0 \leq \alpha \cdot \mu\left(\{|f| = +\infty\}\right) \leq \int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt wegen (6) nun

$$0 \leq \mu\left(\{|f| = +\infty\}\right) \leq \frac{1}{\alpha} \int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu. \tag{8}$$

Wegen (5) gilt

$$\lim_{\alpha \to \infty} \left[\frac{1}{\alpha} \int\limits_\Omega |f| \, \mathrm{d}\mu\right] = 0. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt nun

$$\{|f| = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

Zu *(b)*: Wegen (4) ist aufgrund von Teil *(a)* von Satz M.6.3 dann $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$ eine σ-Algebra in $\{f \neq 0\}$ mit $\mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\} \subseteq \mathfrak{A}$. Ferner ist wegen *(c)* von Satz M.6.3 dann $\mu \restriction \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$ ein Maß auf $(\{f \neq 0\}, \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\})$. Bleibt also noch die σ-Endlichkeit von $\mu \restriction \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$ zu zeigen. Nun ist

$$\{f \neq 0\} = \{|f| > 0\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}. \tag{10}$$

Wegen Satz M.22.3.2 gelten für $n \in \mathbb{N}$ dann $\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\} \in \mathfrak{A}$ und

$$\mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \leq n \cdot \int_{\Omega} |f| \, \mathrm{d}\mu.$$

Damit also wegen (5)

$$\mu\left(\left\{|f| \geq \frac{1}{n}\right\}\right) \in [0, +\infty). \tag{11}$$

Dies bedeutet aber in Verbindung mit (10) die σ-Endlichkeit von $\mu \restriction \mathfrak{A} \cap \{f \neq 0\}$. □

Folgerung M.22.5.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ und ν ein μ-stetiges Maß aus $\mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gibt es ein $f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$.*

Beweis. Aufgrund der μ-Stetigkeit von ν gibt es ein

$$g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{1}$$

mit

$$\nu = \mu_g. \tag{2}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_+^b(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie (1) und (2) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.4 dann

$$g \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{3}$$

Wegen (3) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.5.5 nun

$$\{|g| = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

Hieraus folgt wegen $g \in \mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$ dann $\{|g| = +\infty\} = \{g = +\infty\}$ und damit

$$\{g = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{4}$$

Da $\mathfrak{A}$ ein σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (4) dann

$$\Omega \setminus \{g = +\infty\} \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Sei nun

$$f \coloneqq 1_{\Omega \setminus \{g = +\infty\}} g. \tag{6}$$

Wegen (1), (5) und (6) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Aus (6) folgt weiterhin

$$f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R}) \tag{8}$$

sowie

$$\{f \neq g\} = \{g = +\infty\}. \tag{9}$$

Aus (4) und (9) folgt nun

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{10}$$

Wegen (1), (7) und (10) liefert Folgerung M.22.5.5 dann

$$\mu_f = \mu_g.$$

Hieraus folgt wegen (2) dann

$$\nu = \mu_f. \tag{11}$$

Wegen (3), (7) und (10) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.5.3 dann $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt wegen (8) dann

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{R}\right). \tag{12}$$

Wegen (11) und (12) ist dann alles gezeigt. □

Unsere nächsten Betrachtungen sind nun darauf gerichtet, im Fall eines nichttrivialen Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ und eines $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ verschiedene Phänomene zu studieren, welche sich um die σ-Endlichkeit des Maßes μ_f ranken.

Satz M.22.5.6. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\{f = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann ist auch μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.*

Folgerung M.22.5.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum sowie ferner $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann ist μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.*

Satz M.22.5.7. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Dann gilt $\{f = +\infty\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

Satz M.22.5.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass μ_f ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist. Weiter sei $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ so gewählt, dass $\mu_f = \mu_g$ erfüllt ist. Dann ist $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

Folgerung M.22.5.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer σ-endlicher Maßraum. Weiter seien $f, g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ derart gewählt, dass $\mu_f = \mu_g$ erfüllt ist. Dann gilt $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

Folgerung M.22.5.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$ sowie $f, g \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$.

(ii) $\lambda_f^{(m)} = \lambda_g^{(m)}$.

Beweis. Wegen der σ-Endlichkeit von $\lambda^{(m)}$ folgt die Behauptung aus den Folgerungen M.22.5.5 und M.22.5.8. □

Unsere nachfolgenden Überlegungen sind nun darauf gerichtet, im Falle eines messbaren Raumes $(\Omega, \mathfrak{B})$, dessen σ-Algebra $\mathfrak{B}$ die Borelsche σ-Algebra eines metrischen Raumes (Ω, ρ) ist, und eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$, eine nähere Analyse der Maßes μ_f mit einem $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{B})$ durchzuführen.

Satz M.22.5.9. *Sei (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$. Außerdem seien $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$ und $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gilt:*

(a) *Es gelten* $\mathrm{Res}(\mu) \subseteq \mathrm{Res}(\mu_f)$ *sowie* $\mathrm{Spec}(\mu_f) \subseteq \mathrm{Spec}(\mu)$.

(b) *Sei* $x \in \Omega$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $x \in \mathrm{Spec}(\mu_f)$.

(ii) *Für alle* $r > 0$ *gilt* $K_\rho(x;r) \cap \{f \neq 0\} \notin \mathcal{N}_\mu$.

(iii) *Es existiert ein* $r_0 > 0$ *derart, dass für alle* $0 < r \leq r_0$ *gilt*

$$K_\rho(x;r) \cap \{f \neq 0\} \notin \mathcal{N}_\mu.$$

(c) *Es gelte* $\mathrm{Spec}(\mu) = \Omega$ *sowie* $\{f = 0\} \in \mathcal{N}_\mu$. *Dann ist* $\mathrm{Spec}(\mu_f) = \Omega$.

Folgerung M.22.5.10. *Sei* $m \in \mathbb{N}$. *Weiterhin sei* $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ *so gewählt, dass* $\{f = 0\} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$ *erfüllt ist. Dann gilt* $\mathrm{Spec}\left(\lambda_f^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$.

Beweis. Wegen Beispiel M.20.2 gilt $\mathrm{Spec}\left(\lambda^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$. Die Aussage folgt daraus in Kombination mit Teil *(c)* von Satz M.22.5.9. □

Satz M.22.5.10. *Seien* (Ω, ρ) *ein metrischer Raum mit* Borelscher σ*-Algebra* $\mathfrak{B}$. *Weiter sei* $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$ *und* $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{B})$. *Sei* $\overline{\{f \neq 0\}}$ *der Abschluss bezüglich* ρ *von* $\{f \neq 0\}$. *Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Spec}(\mu_f) \subseteq \overline{\{f \neq 0\}} \cap \mathrm{Spec}(\mu)$.

(b) *Sei zusätzlich* $f \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |.|))$. *Dann gilt:*

(b1) $[\{f \neq 0\} \cap \mathrm{Spec}(\mu)] \subseteq \mathrm{Spec}(\mu_f)$.

(b2) *Sei* $\{f \neq 0\} \subseteq \mathrm{Spec}(\mu)$. *Dann gilt* $\mathrm{Spec}(\mu_f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

(b3) *Sei* $\mathrm{Spec}(\mu) = \Omega$. *Dann gilt* $\mathrm{Spec}(\mu_f) = \overline{\{f \neq 0\}}$.

Folgerung M.22.5.11. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Sei* $\overline{\{f \neq 0\}}$ *den Abschluss bezüglich* $|.|$ *von* $\{f \neq 0\}$ *in* $\mathbb{R}^m$. *Dann gilt:*

(a) $\mathrm{Spec}\left(\lambda_f^{(m)}\right) \subseteq \overline{\{f \neq 0\}}$.

(b) *Sei zusätzlich* $f \in \mathscr{C}((\mathbb{R}^m, |.|), (\mathbb{R}, |.|))$, *dann gilt*

$$\mathrm{Spec}\left(\lambda_f^{(m)}\right) = \overline{\{f \neq 0\}}.$$

Beweis. Wegen Beispiel M.20.2 gilt $\mathrm{Spec}\left(\lambda^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$. Somit liefert Teil *(a)* bzw. Teil *(b3)* von Satz M.22.5.10 dann *(a)* bzw. *(b)*. □

Satz M.22.5.11. *Seien* (Ω, ρ) *ein metrischer Raum mit* Borelscher σ*-Algebra* $\mathfrak{B}$ *sowie* μ *ein* σ*-endliches Maß auf* $(\Omega, \mathfrak{B})$ *mit* $\mathrm{Spec}(\mu) = \Omega$. *Ferner seien* $f, g \in \mathscr{C}((\Omega, \rho), (\mathbb{R}, |.|)) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{B})$ *mit* $\mu_f = \mu_g$. *Dann gilt*

$$f = g.$$

Beweis. Aus der Wahl von f und g folgt sogleich $\{f, g\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{B}) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Hieraus folgt bei Beachtung der σ-Endlichkeit von μ mittels Folgerung M.22.5.8 dann

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu,$$

also wegen $\{f \neq g\} = \{f - g \neq 0\}$ dann

$$f - g \in \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R}\right).$$

Hieraus folgt bei Beachtung von $\operatorname{Spec}(\mu) = \Omega$ sowie $f, g \in \mathscr{C}\left(\left(\Omega, \rho\right), \left(\mathbb{R}, |.|\right)\right)$ mittels Teil *(b)* von Satz M.20.4 dann

$$f = g. \qquad \square$$

Folgerung M.22.5.12. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $f, g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \cap \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m, |.|_{\mathbb{R}^m}\right), \left(\mathbb{R}, |.|\right)\right)$ mit $\lambda_f^{(m)} = \lambda_g^{(m)}$. Dann gilt*

$$f = g.$$

Beweis. Wegen Beispiel M.20.2 ist $\lambda^{(m)}$ ein σ-endliches Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ mit $\operatorname{Spec}\left(\lambda^{(m)}\right) = \mathbb{R}^m$. Hieraus folgt mittels Satz M.22.5.11 dann $f = g$. $\square$

Beispiel M.22.5.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^c\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiter seien $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ und $g \coloneqq 1_{\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m} f$. Dann gelten $g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ und

$$\mu_f = \mu_g.$$

Beweis. Da die Menge $\mathbb{Q}^m$ abzählbar ist, folgt wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^c\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ mittels Bemerkung M.7.5 dann

$$\mathbb{Q}^m \subseteq \mathcal{N}_\mu. \tag{1}$$

Weiterhin ist

$$\{f \neq g\} \subseteq \mathbb{Q}^m. \tag{2}$$

Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, folgt nun aus (1)

$$\mathbb{R}^m \setminus \mathbb{Q}^m \in \mathfrak{B}_m.$$

Hieraus folgt nun wegen $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{3}$$

Wegen $\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \subseteq \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \overline{\mathbb{R}}\right)$, $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ und (3) liefert Satz M.18.5 dann

$$\{f \neq g\} \subseteq \mathfrak{B}_m. \tag{4}$$

Wegen (1), (2) und (4) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.4.1 dann

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{5}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, (3) und (5) liefert Folgerung M.22.5.5 dann

$$\mu_f = \mu_g. \qquad \square$$

Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein stetiges Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, beispielsweise $\mu = \lambda^{(m)}$. Weiterhin sei ν ein μ-stetiges Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann zeigt Beispiel M.22.5.2 welch große Variationsbreite in der Wahl einer Dichteversion von ν bezüglich μ liegt. Ist hingegen μ *zusätzlich* σ-endlich und $\operatorname{Spec}(\mu) = \mathbb{R}^m$, so zeigt Satz M.22.5.11, dass es aber *höchstens* eine Dichteversion $f \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m, |.|\right), \left(\mathbb{R}, |.|\right)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ von ν bezüglich μ geben kann. In diesem Fall wird man dann f als „natürliche Dichteversion" von ν bezüglich μ wählen.

Die vorangehenden Betrachtungen suggerieren die Behandlung folgender Ausgabenstellung:

Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann sind „gut handhabbare" Bedingungen für die μ-Stetigkeit von ν anzugeben - das heißt für die Bedingungen für die Existenz eines $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\nu = \mu_f$.

Dieses Problem beinhaltet eine zentrale Aufgabenstellung der Maß- und Integrationstheorie. Der nachfolgende Satz, welcher auf J. RADON[1)] und O.M. NIKODYM[2)] zurückgeht, gibt eine Antwort auf die obige Frage.

Satz M.22.5.12 (Satz von RADON-NIKODYM)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien μ ein σ-endliches Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie ν ein bezüglich μ absolutstetiges Maß auf $(\Omega, \mathfrak{A})$, das heißt für alle $N \in \mathcal{N}_\mu$ gilt $N \in \mathcal{N}_\nu$. Dann besitzt ν eine Dichteversion bezüglich μ, das heißt es existiert eine messbare Funktion $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, so dass für alle $A \in \mathfrak{A}$*

$$\nu(A) = \int_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu.$$

Der Satz von RADON-NIKODYM stellt also – unter gewissen Zusatzvoraussetzungen – eine Umkehrung von Folgerung M.22.5.3 dar.

M.22.6. p-fach μ-integrierbare Funktionen

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. In den vorangegangenen Abschnitten haben wir bereits eine ganze Reihe von Untersuchungen zur Struktur der Räume $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ geführt. Insbesondere gelangten wir zu der Erkenntnis, dass eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ genau dann zu $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ gehört, wenn $|f| \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ erfüllt ist.

Hierzu anknüpfend wird bei vorgegebenem $p \in (0, +\infty)$ eine detaillierte Untersuchung jener Funktionen $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ suggeriert, für welche die μ-Integrierbarkeit von $|f|^p$ vorliegt. Der vorliegende Abschnitt ist der Diskussion der Arithmetik p-fach μ-integrierbarer Funktionen gewidmet.

Beispiel M.22.6.1. Sei $p \in (1, +\infty)$. Weiter sei $f \coloneqq \mathrm{id}_{\mathbb{N}}$. Dann gehören f und f^p jeweils zu $\mathcal{E}^*(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$. Weiter sei

$$\mu_p \coloneqq \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} \varepsilon_{n, \mathfrak{P}(\mathbb{N})}.$$

Wegen Beispiel M.22.2.4 ist dann $\mu_p \in \mathcal{M}_+(\mathbb{N}, \mathfrak{P}(\mathbb{N}))$ und es gilt

$$\int_{\mathbb{N}} f \mathrm{d}\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} f(n) = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} \in (0, +\infty)$$

sowie

$$\int_{\mathbb{N}} f^p \mathrm{d}\mu_p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} [f(n)]^p = \sum_{n=1}^{\infty} n^{-(p+1)} n^p = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = +\infty.$$

Das bedeutet, dass f zwar μ_p-integrierbar ist, aber f^p für *kein* $p \in (1, +\infty)$ μ_p-integrierbar ist.

[1)] JOHANN RADON (∗16.12.1887; †25.05.1956) war ein österreichischer Mathematiker. Mit seinem Namen sind vor allem die Radon-Transformation, welche in der Computertomographie verwendet wird, sowie der Satz von RADON-NIKODYM verbunden.

[2)] OTTON MARCIN NIKODÝM (∗13.08.1887; †04.05.1974) war ein polnischer Mathematiker. Sein Name ist vor allem mit dem Satz von RADON-NIKODYM verbunden. Darüber hinaus bewies er einige Resultate im Bereich der Funktionalanalysis.

Bemerkung M.22.6.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Wegen Bemerkung M.19.9 ist dann $|f|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Somit ist die Größe

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) \coloneqq \left(\int_\Omega |f|^p \, \mathrm{d}\mu \right)^{\frac{1}{p}}$$

wohldefiniert und es gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) \in [0, +\infty]. \qquad \clubsuit$$

Bemerkung M.22.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:

(a) $|f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(|f|) = \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $\mathcal{N}_{p,\mu}(f) = 0$.

(ii) $f \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$.

(c) Sei $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gelten $\alpha f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ sowie

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(\alpha f) = |\alpha| \cdot \mathcal{N}_{p,\mu}(f). \qquad \clubsuit$$

Wir kommen nun zur zentralen Begriffsbildung dieses Abschnitts.

Definition M.22.6.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann heißt f eine *p-fach μ-integrierbare Funktion*, falls $|f|^p \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}})$.

Bemerkung M.22.6.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist p-fach μ-integrierbar.

(ii) $|f|$ ist p-fach μ-integrierbar.

(iii) $\mathcal{N}_{p,\mu}(f) \in [0, +\infty)$. $\clubsuit$

Bemerkung M.22.6.4. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) f ist 1-fach μ-integrierbar.

(ii) f ist μ-integrierbar. $\clubsuit$

Beweis. Wegen Definition M.22.6.1 ist *(i)* äquivalent zu:

(i') $|f|^1$ ist μ-integrierbar.

Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 sind *(ii)* und *(i')* äquivalent. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Bemerkung M.22.6.4 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.22.6.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien, $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$ sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann bezeichnet $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$ die Menge aller p-fach μ-integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ den $\mathbb{K}$-*Lebesgue-Raum* über $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zum Exponenten p.

Beispiel M.22.6.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum, $\omega \in \Omega$ und $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt

$$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}; \mathbb{R}) = \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}).$$

Bemerkung M.22.6.5. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ sowie $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt:

(a) Es ist $1_A \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(1_A) = \sqrt[p]{\mu(A)}.$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) $1_A \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(ii) $\mu(A) \in [0, +\infty)$.

(c) Es ist $1_\varnothing \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und $\mathcal{N}_{p,\mu}(1_\varnothing) = 0$.

(d) Sei $B \in \mathfrak{A}$ derart gewählt, dass $A \subseteq B$. Dann gilt $1_B - 1_A = 1_{B\setminus A} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(1_B - 1_A) = \sqrt[p]{\mu(B\setminus A)}.$$ ♣

Bemerkung M.22.6.6. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $p \in (0, +\infty)$ sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:

(a) Sei $B \in \mathcal{N}_\mu$ derart, dass $1_{\Omega\setminus B}|f| \leq g$. Dann gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(g).$$

(b) Sei $\{|f| \neq |g|\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) = \mathcal{N}_{p,\mu}(g).$$

(c) Sei $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. Dann gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) = \mathcal{N}_{p,\mu}(g).$$ ♣

Satz M.22.6.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (0, +\infty)$ sowie $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) *Es existiert $g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathrm{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$ und ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ mit*

$$1_{\Omega\setminus B}|f| \leq g.$$

Folgerung M.22.6.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$, $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt*

$$1_A f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Satz M.22.6.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Seien $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und $\alpha \in \mathbb{R}$. Dann gilt*

$$\alpha f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

(b) *Seien $f, g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}\right)$ so gewählt, dass $f + g$ wohldefiniert ist. Dann ist*

$$f + g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Folgerung M.22.6.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann ist $\mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$.*

Satz M.22.6.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $p \in (0, +\infty)$ sowie $f, g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt $\inf\{f, g\} \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie $\sup\{f, g\} \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Satz M.22.6.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (0, +\infty)$ sowie $f \in \operatorname{Abb}\left(\Omega, \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) *Es gehören f^+ und f^- jeweils zu $\mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$.*

Satz M.22.6.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Seien $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gelten $f \cdot g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f \cdot g) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(g) \cdot \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

(b) *Seien $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und $g \in \mathscr{L}^\infty\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt*

$$f \cdot g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

(c) *Seien $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$, $g \in \mathcal{M}^b\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$ sowie $\|g\|_\infty := \sup_{\omega \in \Omega} |g(\omega)|$. Dann gelten $f \cdot g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f \cdot g) \leq \|g\|_\infty \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

Folgerung M.22.6.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer* endlicher *Maßraum sowie $p \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}\right)$. Dann gilt*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(g) \leq \mathcal{N}_{\infty,\mu}(g) \cdot \sqrt[p]{\mu(\Omega)}.$$

(b) *Sei μ zusätzlich endlich. Dann gilt:*

(b2) $\mathscr{L}^\infty\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \subseteq \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$.

(b2) *Es ist* $\mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R}) \subseteq \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$ *und für* $g \in \mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ *gilt mit der Setzung* $\|g\|_\infty := \sup_{\omega\in\Omega}|g(\omega)|$ *dann*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(g) \leq \|g\|_\infty \sqrt[p]{\mu(\Omega)}$$

sowie

$$\int_\Omega |g|\,\mathrm{d}\mu \leq \|g\|_\infty \mu(\Omega).$$

Folgerung M.22.6.4. *Seien* (Ω,ρ) *ein metrischer Raum mit zugehöriger* Borel*scher* σ*-Algebra* $\mathfrak{B}$*,* $\mu \in \mathcal{M}^b_+(\Omega,\mathfrak{B})$ *sowie* $p \in (0,+\infty)$*. Dann gilt*

$$\mathscr{C}((\Omega,\rho),(\mathbb{R},|\cdot|)) \subseteq \mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}).$$

Beweis. Wegen Satz M.16.8 gilt $\mathscr{C}((\Omega,\rho),(\mathbb{R},|.|)) \subseteq \mathcal{M}^b(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Teil *(b2)* von Folgerung M.22.6.3 die Behauptung. □

Satz M.22.6.6. *Seien* $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ *ein nichttrivialer* endlicher *Maßraum sowie* $f \in \mathrm{Abb}(\Omega,\mathbb{R})$*. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $f \in \mathscr{L}^\infty\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$.

(ii) $f \in \bigcap_{p\in[1,+\infty)} \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$.

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) = \lim_{p\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

Satz M.22.6.6 lässt deutlich werden, warum das Symbol „∞" für die Bezeichnung des Raumes $\mathscr{L}^\infty\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$ gewählt wurde.

M.22.7. Die Ungleichungen von Hölder und Minkowski sowie Anwendungen

Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in (0,+\infty)$. Die Abbildung

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\colon \mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right) \longrightarrow [0,+\infty]$$

sei definiert gemäß

$$f \longmapsto \left[\int_\Omega |f|^p\,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}.$$

Der vorliegende Abschnitt ist der Diskussion von wichtigen Ungleichungen für $\mathcal{N}_{p,\mu}$ und deren Konsequenzen gewidmet. Unsere nachfolgende Überlegung ist auf dem Beweis einer auf Otto Hölder[1)] zurückgehenden fundamentalen Ungleichungen ausgerichtet. Hierzu benötigen wir noch einige Vorbereitungen.

Bemerkung M.22.7.1. Seien die Zahlen $p,q \in (1,+\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

[1)] Otto Ludwig Hölder (∗22.12.1859; †29.08.1937) war ein deutscher Mathematiker, der von 1899 bis 1927 an der Universität Leipzig unterrichtete und im Jahre 1918 den Rektorposten innehatte. Er ist Entdecker und Namensgeber der Hölder-Ungleichung, der Hölder-Stetigkeit und des Hölder-Raumes.

(i) $q = \frac{p}{p-1}$.

(ii) $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. ♣

Lemma M.22.7.1. *Seien $p \in (1, +\infty)$ sowie $q = \frac{p}{p-1}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $t \in (0, +\infty)$. Dann gilt*

$$\frac{t^p}{p} + \frac{t^{-q}}{q} \geq 1,$$

wobei die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $t = 1$.

(b) *Seien $a, b \in [0, +\infty]$. Dann gilt*

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}.$$

(c) *Seien $a, b \in [0, +\infty)$. Dann gilt die Gleichheit in der Ungleichung von* (b) *genau dann, wenn $a^p = b^q$ erfüllt ist.*

Es folgt nun eines der zentralen Resultate in der Integrationstheorie.

Satz M.22.7.1 (HÖLDERsche Ungleichung)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in (1, +\infty)$, $q = \frac{p}{p-1}$ sowie $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $f \cdot g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und*

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f \cdot g) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f) \cdot \mathcal{N}_{q,\mu}(g).$$

(b) *Seien $f \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und $g \in \mathscr{L}^q\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$, dann gilt*

$$f \cdot g \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen Satz M.18.9 gilt

$$f \cdot g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{1}$$

Wir betrachten zuerst den Fall

$$\inf\left\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f), \mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right\} = 0. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 dann

$$\{f, g\} \cap \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \neq \varnothing.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Lemma M.20.1 nun

$$f \cdot g \in \mathcal{M}_0\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right),$$

also wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f \cdot g) = 0. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f\cdot g)=0=\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\,. \tag{4}$$

Sei nun

$$\inf\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f),\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\}\in(0,+\infty]\,. \tag{5}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$\sup\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f),\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\}=+\infty. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f\cdot g)\leq+\infty=\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\,. \tag{7}$$

Sei nun schließlich

$$\sup\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f),\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\}<+\infty. \tag{8}$$

Aus (5) und (8) folgt dann

$$\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f),\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\}\subseteq(0,+\infty)\,. \tag{9}$$

Wegen (9) gilt dann

$$\left\{\frac{|f|}{\mathcal{N}_{p,\mu}(f)},\frac{|g|}{\mathcal{N}_{q,\mu}(g)}\right\}\subseteq\mathrm{Abb}(\Omega,[0,+\infty])\,. \tag{10}$$

Aus (10) folgt mittels Teil *(b)* von Lemma M.22.7.1 dann

$$\frac{|f|}{\mathcal{N}_{p,\mu}(f)}\cdot\frac{|g|}{\mathcal{N}_{q,\mu}(g)}\leq\frac{1}{p}\left[\frac{|f|}{\mathcal{N}_{p,\mu}(f)}\right]^p+\frac{1}{q}\left[\frac{|g|}{\mathcal{N}_{q,\mu}(g)}\right]^q. \tag{11}$$

Aus (9) und (11) folgt nun

$$\begin{aligned}|f\cdot g|\leq|f|\cdot|g|&\leq\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot\left(\frac{1}{p}\left[\frac{|f|}{\mathcal{N}_{p,\mu}(f)}\right]^p+\frac{1}{q}\left[\frac{|g|}{\mathcal{N}_{q,\mu}(g)}\right]^q\right)\\&=\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot|f|^p+\frac{1}{q}\cdot\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}|g|^q\,.\end{aligned} \tag{12}$$

Wegen (1) liefert Bemerkung M.19.9 dann

$$|f\cdot g|\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})\,. \tag{13}$$

Wegen $\{f,g\}\subseteq\mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right)$ liefert Bemerkung M.19.9 weiterhin

$$\{|f|^p,|g|^q\}\subseteq\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A})\,. \tag{14}$$

Wegen (9) und (14) folgt aus den Teilen *(a)* und *(b)* von Lemma M.19.3 nun

$$\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot|f|^p+\frac{1}{q}\cdot\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}|g|^q\,. \tag{15}$$

Wegen (13), (15) und (12) liefert Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\int\limits_\Omega|f\cdot g|\,\mathrm{d}\mu\leq\int\limits_\Omega\left\{\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot|f|^p+\frac{1}{q}\cdot\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}|g|^q\right\}\mathrm{d}\mu. \tag{16}$$

Wegen der Wahl von p und q gilt nach Bemerkung M.22.7.1 dann

$$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1. \tag{17}$$

Wegen (15), (14) und (9) folgt aus den Teilen *(a)* und *(b)* von Satz M.22.2.2 bei Beachtung von (17) dann

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot|f|^{p}+\frac{1}{q}\cdot\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}|g|^{q}\right\}\mathrm{d}\mu\\
=&\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot\int\limits_{\Omega}|f|^{p}\,\mathrm{d}\mu+\frac{1}{q}\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}\int\limits_{\Omega}|g|^{q}\,\mathrm{d}\mu\\
=&\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{p}+\frac{1}{q}\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{q}\\
=&\frac{1}{p}\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)+\frac{1}{q}\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\\
=&\left[\frac{1}{p}+\frac{1}{q}\right]\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\\
=&\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g).
\end{aligned} \tag{18}$$

Unter Verwendung von (16) und (18) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{N}_{1,\mu}(f\cdot g)&=\int\limits_{\Omega}|f\cdot g|\,\mathrm{d}\mu\\
&\leq\int\limits_{\Omega}\left\{\frac{1}{p}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\right]^{1-p}\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\cdot|f|^{p}+\frac{1}{q}\cdot\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\left[\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right]^{1-q}|g|^{q}\right\}\mathrm{d}\mu\\
&\leq\mathcal{N}_{p,\mu}(f)\cdot\mathcal{N}_{q,\mu}(g).
\end{aligned} \tag{19}$$

Wegen (1), (2), (4) bis (8) und (19) ist dann *(a)* gezeigt.

Zu *(b)*: Nach Wahl von f und g gilt wegen Bemerkung M.22.6.3 dann

$$\left\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f),\mathcal{N}_{q,\mu}(g)\right\}\subseteq[0,+\infty).$$

Hieraus folgt wegen *(a)* dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f\cdot g)\in[0,+\infty).$$

Daraus folgt mittels Bemerkung M.22.6.3 dann

$$f\cdot g\in\mathscr{L}^{1}\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right). \qquad \square$$

Die HÖLDERsche Ungleichung ermöglicht für $\mathbb{K}\in\left\{\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}\right\}$ die Herleitung interessanter Zusammenhänge zwischen den Elementen der Familie $\left(\mathscr{L}^{p}(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{K})\right)_{p\in(0,+\infty)}$.

Satz M.22.7.2. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $\mathbb{K}\in\left\{\mathbb{R},\overline{\mathbb{R}}\right\}$ und $0<r<t<s\leq+\infty$. Dann gilt*

$$\mathscr{L}^{r}(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{K})\cap\mathscr{L}^{s}(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{K})\subseteq\mathscr{L}^{t}(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{K}).$$

Satz M.22.7.3. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $0 < r < s < +\infty$. Dann gilt:*

(a) *Sei $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann ist*

$$\mathcal{N}_{r,\mu}(f) \leq [\mu(\Omega)]^{\frac{1}{r}-\frac{1}{s}} \cdot \mathcal{N}_{s,\mu}(f).$$

(b) *Sei $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Dann ist*

$$\mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K}) \subseteq \mathscr{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K}).$$

(c) *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und f eine Funktion aus $\mathscr{L}^s(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ mit $\lim_{n\to\infty}(f_n - f) = 0$. Dann ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, $f \in \mathscr{L}^r(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{r,\mu}(f_n - f) = 0.$$

Folgerung M.22.7.1. *Seien $\wr$ ein Wahrscheinlichkeitsraum und $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Seien $r \in (0, +\infty)$ sowie $s \in (r, +\infty]$. Dann gilt*

$$\mathcal{N}_{r,\mu}(f) \leq \mathcal{N}_{s,\mu}(f).$$

(b) *Es ist*

$$\mathcal{N}_{\infty,\mu}(f) = \sup_{p\in(0,+\infty)} \mathcal{N}_{p,\mu}(f) = \lim_{p\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

Das nachfolgende Resultat ermöglicht einen alternativen Beweis von Teil *(b)* von Satz M.22.7.3.

Lemma M.22.7.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $f \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie $0 < r < s < +\infty$. Dann ist $\{|f|^r, |f|^s\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ und es gilt*

$$\int_\Omega |f|^r \, \mathrm{d}\mu \leq \mu(\Omega) + \int_\Omega |f|^s \, \mathrm{d}\mu.$$

Das nachfolgende Resultat geht auf Hermann Minkowski[2)] zurück. Es stellt eine Verallgemeinerung der aus der Analysis bekannten Dreiecksungleichung auf die Räume $\mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ dar.

Satz M.22.7.4 (Minkowski-Ungleichung)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p \in [1, +\infty)$ und $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ derart gewählt, dass $f+g$ wohldefiniert ist. Dann ist $f+g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und es gilt*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g).$$

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz M.18.6 gilt

$$f + g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{1}$$

[2)] Hermann Minkowski (∗22.06.1864; †12.01.1909) war ein deutscher Mathematiker und Physiker. Er leistete bedeutende Beiträge zur allgemeinen Relativitätstheorie, beispielsweise durch den nach ihm benannten Minkowski-Raum. Andererseits ist er durch die nach ihm benannte Minkowski-Ungleichung bekannt.

Wegen (1) folgt mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$|f+g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Da $\{f,g\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ liefert Bemerkung M.19.9 zusätzlich

$$\{|f|, |g|\} \subseteq \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{3}$$

Wegen (3) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.2.2 dann

$$|f| + |g| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{4}$$

und

$$\int_\Omega (|f| + |g|)\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|\, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\, \mathrm{d}\mu. \tag{5}$$

Aufgrund der Dreiecksungleichung gilt stets

$$|f+g| \leq |f| + |g|. \tag{6}$$

Wegen (2), (4) und (6) liefert Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 nun

$$\int_\Omega |f+g|\, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega (|f| + |g|)\, \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Aus (7) und (5) folgt daher

$$\mathcal{N}_{1,\mu}(f+g) = \int_\Omega |f+g|\, \mathrm{d}\mu \leq \int_\Omega (|f| + |g|)\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f|\, \mathrm{d}\mu + \int_\Omega |g|\, \mathrm{d}\mu = \mathcal{N}_{1,\mu}(f) + \mathcal{N}_{1,\mu}(g). \tag{8}$$

Im Fall $p = 1$ ist daher wegen (8) alles gezeigt. Sei nun

$$p \in (1, +\infty). \tag{9}$$

Unter Beachtung von (6), (1) sowie der aus (4) folgenden Beziehung $|f| + |g| \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.22.6.6 dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(|f| + |g|). \tag{10}$$

Sei zunächst

$$\sup\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f), \mathcal{N}_{p,\mu}(g)\} = +\infty. \tag{11}$$

Aus (11) folgt dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \leq +\infty = \mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g). \tag{12}$$

Sei nun

$$\sup\{\mathcal{N}_{p,\mu}(f), \mathcal{N}_{p,\mu}(g)\} \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Wegen (13) liefert Bemerkung M.22.6.3 dann

$$\{f,g\} \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.22.6.2 nun $f+g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Damit folgt wegen Bemerkung M.22.6.3

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \in [0, +\infty). \tag{14}$$

Unter Beachtung von (6) ergibt sich

$$|f+g|^p = |f+g|^{p-1}\,|f+g| \leq |f+g|^{p-1}\,(|f|+|g|) = |f+g|^{p-1}\,|f| + |f+g|^{p-1}\,|g|\,. \tag{15}$$

Wegen $f, g \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie (1) folgt mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$\left\{|f|\,, |g|\,, |f+g|^{p-1}\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{16}$$

Wegen (16) liefert Teil *(c)* von Lemma M.19.3 dann

$$\left\{|f+g|^{p-1}\cdot|f|\,, |f+g|^{p-1}\cdot|g|\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{17}$$

Wegen (17) erbringt Teil *(b)* von Satz M.22.2.2 nun

$$|f+g|^{p-1}\cdot|f| + |f+g|^{p-1}\cdot|g| \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right) \tag{18}$$

sowie

$$\int\limits_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\,|f| + |f+g|^{p-1}\,|g|\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1}\,|f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1}\,|g|\,\mathrm{d}\mu. \tag{19}$$

Wegen (1) folgt mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$|f+g|^p \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{20}$$

Wegen (20), (18) und (15) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\int\limits_\Omega |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\,|f| + |f+g|^{p-1}\,|g|\right) \mathrm{d}\mu. \tag{21}$$

Unter Verwendung von (21) und (19) folgt nun

$$\begin{aligned}
\left(\mathcal{N}_{p,\mu}\left(f+g\right)\right)^p &= \int\limits_\Omega |f+g|^p\,\mathrm{d}\mu \\
&\leq \int\limits_\Omega \left(|f+g|^{p-1}\,|f| + |f+g|^{p-1}\,|g|\right) \mathrm{d}\mu \\
&= \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1}\,|f|\,\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega |f+g|^{p-1}\,|g|\,\mathrm{d}\mu.
\end{aligned} \tag{22}$$

Unter Beachtung von (9) sei

$$q \coloneqq \frac{p}{p-1}. \tag{23}$$

Aus (23) folgen

$$(p-1)\,q = p \tag{24}$$

sowie

$$\frac{p}{q} = p-1. \tag{25}$$

Sei $h \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Die Anwendung der HÖLDERschen Ungleichung (vgl. Satz M.22.7.1) liefert bei Beachtung von (9) und (23) dann

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega} |f+g|^{p-1} |h| \, \mathrm{d}\mu &= \int\limits_{\Omega} \left||f+g|^{p-1} |h|\right| \mathrm{d}\mu = \mathcal{N}_{1,\mu}\left(|f+g|^{p-1} |h|\right) \\ &\leq \mathcal{N}_{p,\mu}(h) \, \mathcal{N}_{q,\mu}\left(|f+g|^{p-1}\right).\end{aligned} \tag{26}$$

Unter Beachtung von (24) und (25) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{q,\mu}\left(|f+g|^{p-1}\right) &= \left[\int\limits_{\Omega} \left||f+g|^{p-1}\right|^q \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int\limits_{\Omega} \left[|f+g|^{p-1}\right]^q \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}} \\ &= \left[\int\limits_{\Omega} |f+g|^{(p-1)q} \, \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\int\limits_{\Omega} |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{q}} = \left[\left\{\int\limits_{\Omega} |f+g|^p \, \mathrm{d}\mu\right\}^{\frac{1}{p}}\right]^{\frac{p}{q}} \\ &= \left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g)\right]^{\frac{p}{q}} = \left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g)\right]^{p-1}.\end{aligned} \tag{27}$$

Unter Verwendung von (22),(26) und (27) folgt nun

$$\begin{aligned}\left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g)\right]^p &\leq \int\limits_{\Omega} |f+g|^{p-1} |f| \, \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\Omega} |f+g|^{p-1} |g| \, \mathrm{d}\mu \\ &\leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f) \cdot \mathcal{N}_{q,\mu}\left(|f+g|^{p-1}\right) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g) \cdot \mathcal{N}_{q,\mu}\left(|f+g|^{p-1}\right) \\ &= \left(\mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g)\right) \mathcal{N}_{q,\mu}\left(|f+g|^{p-1}\right) \\ &= \left(\mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g)\right) \left[\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g)\right]^{p-1}.\end{aligned} \tag{28}$$

Falls $\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) = 0$ ist, gilt somit insbesondere $\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g)$. Ist andererseits $\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \neq 0$, so folgt aus (14) dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \in (0, +\infty). \tag{29}$$

Aus (28) und (29) folgt dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f+g) \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f) + \mathcal{N}_{p,\mu}(g). \qquad \square$$

Es folgen nun erste Anwendungen der Minkowski-Ungleichung:

Satz M.22.7.5. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1, +\infty)$. Es sei*

$$\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}} \coloneqq \mathcal{N}_{p,\mu} \restriction \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}).$$

Dann ist $\left(\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), \mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}\right)$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{R}$.

BEWEIS. Wegen Folgerung M.22.6.2 ist $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein linearer Raum über $\mathbb{R}$. Wegen Teil *(c)* von Bemerkung M.22.6.2 und der Minkowski-Ungleichung ist $\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}$ eine Seminorm auf $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. $\square$

Folgerung M.22.7.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p \in [1, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Seien* $f, g \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. *Dann gilt*

$$|\mathcal{N}_{p,\mu}(f) - \mathcal{N}_{p,\mu}(g)| \leq \mathcal{N}_{p,\mu}(f-g).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) $\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}$ *ist eine Norm auf* $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(ii) $\mathcal{N}_\mu = \{\varnothing\}$.

Satz M.22.7.6. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum. Dann gilt:*

(a) *Seien* $f, g \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. *Dann gilt*

$$f \cdot g \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}).$$

(b) *Die Abbildung* $[.,.]_{\mu,\mathbb{R}} : \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$ *sei definiert gemäß*

$$[.,.]_{\mu,\mathbb{R}} \longmapsto \int_\Omega f \cdot g \mathrm{d}\mu.$$

Dann ist $\left(\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), [.,.]_{\mu,\mathbb{R}}\right)$ *ein Semiprähilbertraum über* $\mathbb{R}$ *mit zugehöriger Seminorm* $\mathcal{N}_{2,\mu;\mathbb{R}}$.

Folgerung M.22.7.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien*

$$\mathfrak{A}_{\mu,e} \coloneqq \{C \in \mathfrak{A} \mid \mu(C) \in [0, +\infty)\}$$

sowie $A, B \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$. *Dann gehören* 1_A *und* 1_B *jeweils zu* $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ *und es gilt*

$$[1_A, 1_B]_{\mu,\mathbb{R}} = \mu(A \cap B).$$

Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in (0, +\infty)$. Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 gilt dann

$$\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) = \{f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \mid \mathcal{N}_{p,\mu}(f) = 0\}.$$

Hierbei folgt bei Beachtung von Satz M.20.1, dass $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ein linearer Teilraum von $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ist.

Bezeichnung. Es sei

$$\mathrm{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \coloneqq {}^{\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})}\!/_{\mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})}$$

der Faktorraum von $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ nach $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Für $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ bezeichne $[f]$, dass durch f erzeugte Element von $\mathrm{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Satz M.22.7.7. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $p \in [1, +\infty)$. *Die Abbildung*

$$\|.\|_{p,\mu,\mathbb{R}} : \mathrm{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \longrightarrow [0, +\infty)$$

sei definiert gemäß

$$\langle f \rangle \longmapsto \mathcal{N}_{p,\mu}(f).$$

Dann ist die Abbildung $\|.\|_{p,\mu,\mathbb{R}}$ *wohldefiniert und* $\left(\mathrm{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), \|.\|_{p,\mu,\mathbb{R}}\right)$ *ist ein normierter Raum über* $\mathbb{R}$.

Satz M.22.7.8. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Die Abbildung*

$$\langle .,. \rangle_{\mu,\mathbb{R}} : \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R}$$

sei definiert gemäß

$$\langle [f], [g] \rangle_{\mu,\mathbb{R}} \longmapsto [f, g]_{\mu,\mathbb{R}}.$$

Dann ist $\langle .,. \rangle_{\mu,\mathbb{R}}$ wohldefiniert und $\left(\mathrm{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), \langle .,. \rangle_{\mu,\mathbb{R}}\right)$ ist ein Prähilbertraum über $\mathbb{R}$ mit zugehöriger Norm $\|.\|_{2,\mu,\mathbb{R}}$.

Satz M.22.7.9. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $A \in \mathfrak{A}$ und $p \in [1, +\infty)$. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, f eine Funktion aus $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f_n - f) = 0.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $1_A f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$, $(1_A f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(1_A f_n - 1_A f) = 0.$$

(b) *Es gelten*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(1_A f_n) = \mathcal{N}_{p,\mu}(1_A f)$$

sowie

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_A |f_n|^p \, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_A |f|^p \, \mathrm{d}\mu.$$

(c) *Sei $p = 1$. Dann gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega 1_A f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu,$$

also insbesondere

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

M.22.8. Grundlegende Konvergenzsätze der Integrationstheorie

Konvergenzeigenschaften von Integralen und Funktionen spielen eine zentrale Rolle in der Integrationstheorie. Insbesondere behandeln wir in diesem Abschnitt die Vertauschbarkeit von Integral- und Limesbildung.

Hinsichtlich der Riemann-Integrierbarkeit ist bekannt, dass diese Vertauschbarkeit im Fall von gleichmäßiger Konvergenz möglich ist. Wir werden in diesem Abschnitt erkennen, dass im Rahmen unseres Integrationskonzepts die gewünschte Vertauschbarkeit unter weitaus schwächeren Voraussetzungen vorliegt.

Das nachfolgende Resultat von P. L. Fatou[1)] ist von fundamentaler Bedeutung für die gesamte Integrationstheorie und ihre Anwendungen in der Wahrscheinlichkeitstheorie.

[1)] Pierre Joseph Louis Fatou (∗28.02.1878; †10.08.1929) war ein französischer Mathematiker. Er leistete vor allem wichtige Beiträge im Gebiet der komplexen Dynamik, in der es die nach ihm benannten Fatou-Mengen gibt.

Satz M.22.8.1 (Das Lemma von Fatou)**.** *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$*. Dann ist* $\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *sowie*

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Wegen Lemma M.19.4 gilt

$$\liminf_{n\to\infty} f_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Weiter sei

$$g_n \coloneqq \inf_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} f_k. \tag{3}$$

Wegen $\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n} \subseteq \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}$ gilt

$$\inf_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} f_k \leq \inf_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n}} f_k.$$

Hieraus folgt wegen (2) und (3) nun

$$g_n \leq g_{n+1}. \tag{4}$$

Wegen (2) und (3) liefert Lemma M.19.4 weiterhin

$$g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{5}$$

Wegen (2), (4) und (5) erbringt die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (vgl. Satz M.22.2.2) dann, dass $\sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_{\Omega} \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} g_n \mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

Aufgrund der Eigenschaft des unteren Limes folgt bei Beachtung von (2) und (3) dann

$$\liminf_{n\to\infty} f_n = \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(\inf_{k\in\mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}} f_k \right) = \sup_{n\in\mathbb{N}} g_n. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} g_n \mathrm{d}\mu. \tag{8}$$

Seien

$$n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

und

$$k \in \mathbb{N}\setminus\mathbb{N}_{1,n-1}. \tag{10}$$

Wegen (9), (10), (2) und (3) gilt dann, dass

$$g_n \leq f_k. \tag{11}$$

Wegen (2), (5), (9) bis (11) und $f_k \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$ liefert Teil *(c)* von Satz M.22.2.2 nun

$$\int\limits_{\Omega} g_n \mathrm{d}\mu \leq \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega} g_n \mathrm{d}\mu \leq \inf_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n-1}} \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu. \tag{13}$$

Unter Verwendung von (9), (13) und den Eigenschaften des unteren Limes folgt nun

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} g_n \mathrm{d}\mu \leq \sup_{n \in \mathbb{N}} \left[\inf_{k \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,n-1}} \int\limits_{\Omega} f_k \mathrm{d}\mu \right] = \liminf_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu. \tag{14}$$

Aus (8) und (14) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n \to \infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu. \tag{15}$$

Wegen (1) und (15) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung M.22.8.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Außerdem seien $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es existiert ein $L \in (0, +\infty)$ derart, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt*

$$\int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu \leq L.$$

(II) *Es existiert eine Menge $N \in \mathcal{N}_\mu$ derart, dass für alle $\omega \in \Omega \setminus N$ gilt*

$$\lim_{n \to \infty} f_n (\omega) = f (\omega).$$

Dann gilt

$$\int\limits_{\Omega} f \mathrm{d}\mu \leq L.$$

Beweis. Wegen dem Lemma von Fatou (vgl. Satz M.22.8.1) gelten

$$\liminf_{n \to \infty} f_n \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) \tag{1}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n \to \infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq \liminf_{n \to \infty} \int\limits_{\Omega} f_n \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Aus (2) und der Voraussetzung *(I)* folgt

$$\int\limits_{\Omega} \liminf_{n \to \infty} f_n \mathrm{d}\mu \leq L. \tag{3}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ bzw. (1) gehört f bzw. $\liminf_{n\to\infty} f_n$ zu $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.5 dann

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} f_n \neq f\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen Voraussetzung *(II)* gilt

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} f_n \neq f\right\} \subseteq N. \tag{5}$$

Wegen $N \in \mathcal{N}_\mu$, (4) und (5) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 nun

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} f_n \neq f\right\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{6}$$

Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$, (1) und (6) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.5.3

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} f_n \mathrm{d}\mu. \tag{7}$$

Aus (3) und (7) folgt zusammenfassend

$$\int\limits_\Omega f \mathrm{d}\mu \leq L.$$

□

Wir wenden uns nun einem Konvergenzkonzept zu, welches in Maßtheorie und Stochastik gleichermaßen von Bedeutung ist. Ein Maß μ auf einem nichttrivialen messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ realisiert eine Bewertung der Mengen aus $\mathfrak{A}$. In diesem Sinn repräsentiert $\mathcal{N}_\mu$ das System der aus Sicht, der durch μ gegebenen Bewertung, vernachlässigbaren Mengen aus $\mathfrak{A}$. In diesem Zusammenhang erscheint es natürlich einen Konvergenzbegriff für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ einzuführen, der auf der Tatsache basiert, dass die Mengen aller Punkte, in denen keine Konvergenz stattfindet, μ-vernachlässigbar sind. Dies führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.22.8.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μ-fast-überall gegen f konvergent*, falls ein $N \in \mathcal{N}_\mu$ existiert, so dass die Folge $\left(1_{\Omega\setminus N} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen $1_{\Omega\setminus N} f$ konvergiert.

Bemerkung M.22.8.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie f eine Funktion aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen f konvergiert. Dann ist $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall gegen f. ♣

Wir kommen nun zu einem zentralen Resultat der Integrationstheorie, welches auf Henri Lebesgue[2)] zurückgeht. Im zu Ehren wird dieses Resultat auch Satz von Lebesgue genannt. Unser Beweis wird sich maßgeblich auf das Lemma von Fatou stützen.

Satz M.22.8.2 (Satz von der majorisierten Konvergenz)**.** *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in (0, +\infty)$. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall gegen f konvergiert. Weiter möge ein $g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ existieren, so dass zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein $B_n \in \mathcal{N}_\mu$ mit $1_{\Omega\setminus B_n} |f_n| \leq$*

[2)] Henri Léon Lebesgue (∗28.06.1875; †26.07.1941) war ein französischer Mathematiker. Er erweiterte den Integralbegriff und begründete damit die moderne Maßtheorie. Nach ihm benannt sind das Lebesgue-Maß und das Lebesgue-Integral.

g existiert. Dann ist auch $f \in \mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |f_n - f|^p \, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Im Fall $p = 1$ gilt zudem

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega f_n \mathrm{d}\mu = \int_\Omega f \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei

$$B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n. \tag{1}$$

Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{N}_\mu$ ist, folgt wegen (1) mittels Teil *(d)* von Satz M.5.1 dann

$$B \in \mathcal{N}_\mu. \tag{2}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Aus (1) folgt dann $B_n \subseteq B$. Hieraus folgt $\Omega\backslash B \subseteq \Omega\backslash B_n$ und somit nach Teil *(a)* von Bemerkung M.19.2 dann

$$1_{\Omega\backslash B} \leq 1_{\Omega\backslash B_n}.$$

Hieraus folgt bei Beachtung der Wahl von f_n, B_n und g dann

$$1_{\Omega\backslash B} \, |f_n| \leq g. \tag{4}$$

Sei $\widetilde{g}\colon \Omega \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$\widetilde{g}(\omega) = \begin{cases} g(\omega), & \text{falls } \omega \in \Omega\backslash B \\ +\infty, & \text{falls } \omega \in B \end{cases}. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt dann

$$|f_n| \leq \widetilde{g}. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (2) dann $\Omega\backslash B \in \mathfrak{A}$. Hieraus und aus $g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ ergibt sich mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$1_{\Omega\backslash B} \cdot g \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Sei jetzt

$$h \coloneqq (+\infty) \cdot 1_B. \tag{8}$$

Wegen (2) ist $B \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt mit den Bemerkungen M.19.3 und M.19.8 dann

$$1_B \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) liefert Teil *(a)* von Lemma M.19.3 nun

$$h \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{10}$$

Aus (5) und (8) folgt dann

$$\widetilde{g} = 1_{\Omega\backslash B} \cdot g + h. \tag{11}$$

Wegen (7), (10) und (11) liefert Teil *(b)* von Lemma M.19.3 nun

$$\widetilde{g} \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{12}$$

Aus (5) folgt

$$\{g \neq \widetilde{g}\} \subseteq B. \tag{13}$$

Wegen $g \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$, (12) und der Inklusion $\mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) \mathcal{M} \left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ folgt mittels Satz M.18.5 dann, dass

$$\{g \neq \widetilde{g}\} \in \mathfrak{A}. \tag{14}$$

Wegen (2), (13) und (14) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\{g \neq \widetilde{g}\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{15}$$

Wegen $\{g, \widetilde{g}\} \subseteq \mathcal{M} \left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$ und (15) liefert die Bemerkung M.22.6.6 dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu} (g) = \mathcal{N}_{p,\mu} (\widetilde{g}) .$$

Also wegen $g \in \mathscr{L}^p \left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ dann auch $\mathcal{N}_{p,\mu} (\widetilde{g}) \in [0, +\infty)$ und somit auch

$$\widetilde{g} \in \mathscr{L}^p \left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) . \tag{16}$$

Nach Voraussetzung gibt es ein

$$C \in \mathcal{N}_\mu \tag{17}$$

mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$\lim_{n\to\infty} 1_{\Omega\setminus C} (\omega) f_n (\omega) = 1_{\Omega\setminus C} (\omega) f (\omega) .$$

Wegen $\widetilde{g} \in \mathrm{Abb} (\Omega, [0, +\infty])$ folgt aus (3), (6) und *(I)* dann

$$1_{\Omega\setminus C} f \leq \widetilde{g}. \tag{18}$$

Wegen $f \in \mathcal{M} (\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie (16) bis (18) liefert Satz M.22.6.1 dann

$$f \in \mathscr{L}^p (\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) . \tag{19}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Wegen $\{f_n, f\} \subseteq \mathcal{M} (\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liefert Satz M.18.7 dann $f_n - f \in \mathcal{M} (\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mit Bemerkung M.18.4 nun

$$f_n - f \in \mathcal{M} \left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right) . \tag{21}$$

Sei

$$g_n \coloneqq |f_n - f|^p . \tag{22}$$

Wegen (21) und (22) liefert Bemerkung M.19.9 nun

$$g_n \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{23}$$

Unter Verwendung von (22), der Dreiecksungleichung, $p \in (0, +\infty)$ und (6) folgt dann

$$0 \leq g_n = |f_n - f|^p \leq (|f_n| + |f|)^p \leq (\widetilde{g} + |f|)^p . \tag{24}$$

Wegen (19) ist nach Bemerkung M.22.6.3 dann

$$f \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}). \tag{25}$$

Wegen (16) und (25) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.6.2 dann

$$\widetilde{g} + |f| \in \mathscr{L}^p\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{26}$$

Sei

$$h := (\widetilde{g} + |f|)^p. \tag{27}$$

Unter Beachtung von $\widetilde{g} + |f| = |\widetilde{g} + |f||$ folgt aus (26) und (27) dann

$$h \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{28}$$

Wegen (23) ist

$$g_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{29}$$

Wegen (24) sowie (21) bis (29) liefert Satz M.22.4.1 nun

$$g_n \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{30}$$

Aus (21) und (22) erkennt man sogleich, dass $g_n \in \operatorname{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Somit ist $h - g_n$ wohldefiniert. Wegen (28) und (30) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.4.1 dann

$$h - g_n \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{31}$$

sowie

$$\int\limits_\Omega (h - g_n)\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu. \tag{32}$$

Wegen (31) gilt $h - g_n \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$, während sich mit (24) und (27) weiterhin

$$h - g_n \in \operatorname{Abb}(\Omega, [0, +\infty])$$

ergibt. Somit ist

$$h - g_n \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{33}$$

Wegen (26) und (33) erbringt die Anwendung des Lemmas von Fatou (vgl. Satz M.22.8.1) dann

$$\liminf_{n\to\infty} (h - g_n) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{34}$$

sowie

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} (h - g_n)\,\mathrm{d}\mu \le \liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (h - g_n)\,\mathrm{d}\mu. \tag{35}$$

Unter Beachtung von (20), (31) und (32) folgt

$$\liminf_{n\to\infty} \int\limits_\Omega (h - g_n)\,\mathrm{d}\mu = \liminf_{n\to\infty} \left[\int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu - \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu\right] = \int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu. \tag{36}$$

Aus (35) und (36) folgt nun

$$\int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty} (h - g_n)\,\mathrm{d}\mu \le \int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty} \int\limits_\Omega g_n \mathrm{d}\mu. \tag{37}$$

Sei

$$\omega \in \Omega \backslash C. \tag{38}$$

Wegen (38), (20) und (22) und *(I)* gilt dann

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left(h\left(\omega\right)-g_n\left(\omega\right)\right) &= \lim_{n\to\infty}\left(h\left(\omega\right)-\left|f_n\left(\omega\right)-f\left(\omega\right)\right|^p\right)\\ &= h\left(\omega\right)-\lim_{n\to\infty}\left|f_n-f\right|^p = h\left(\omega\right)-0^p = h\left(\omega\right)\end{aligned}$$

und folglich also

$$\liminf_{n\to\infty}\left[h\left(\omega\right)-g_n\left(\omega\right)\right] = h\left(\omega\right). \tag{39}$$

Wegen (28) und (34) gehören h und $\liminf_{n\to\infty}\left(h-g_n\right)$ zu $\mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.5 dann

$$\left\{h \neq \liminf_{n\to\infty}\left(h-g_n\right)\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{40}$$

Wegen (38) und (39) gilt

$$\left\{h \neq \liminf_{n\to\infty}\left(h-g_n\right)\right\} \subseteq C. \tag{41}$$

Wegen (17), (40) und (41) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 nun

$$\left\{h \neq \liminf_{n\to\infty}\left(h-g_n\right)\right\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{42}$$

Wegen (20), (23) und (33) liefert Teil *(b)* von Lemma M.19.3 dann

$$h \in \mathcal{E}^*\left(\Omega,\mathfrak{A}\right). \tag{43}$$

Mittels (34), (43) und (42) folgt aus Teil *(a)* von Satz M.22.5.3 dann

$$\int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \liminf_{n\to\infty}\left(h-g_n\right)\mathrm{d}\mu. \tag{44}$$

Aus (37) und (44) folgt daher

$$\int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu \leq \int\limits_\Omega h\mathrm{d}\mu - \limsup_{n\to\infty}\int\limits_\Omega g_n\mathrm{d}\mu. \tag{45}$$

Aus (28) und (45) ergibt sich

$$0 \leq -\limsup_{n\to\infty}\int\limits_\Omega g_n\mathrm{d}\mu. \tag{46}$$

Unter Verwendung von (20), (24) und (46) folgt daher

$$0 \leq \liminf_{n\to\infty}\int\limits_\Omega g_n\mathrm{d}\mu \leq \limsup_{n\to\infty}\int\limits_\Omega g_n\mathrm{d}\mu \leq 0. \tag{47}$$

Also

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_\Omega g_n\mathrm{d}\mu = 0.$$

Daraus folgt wegen (20) und (22) nun

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}|f_n-f|^p\,\mathrm{d}\mu=0. \tag{48}$$

Ist speziell $p=1$, so folgt wegen (48) mittels Teil *(c)* von Satz M.22.7.9 dann

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}f_n\mathrm{d}\mu=\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\Omega}f\mathrm{d}\mu. \tag{49}$$

Wegen (19), (47) und (49) ist dann alles gezeigt. □

Es ist wichtig, die Rolle der Majorante im Satz von der monotonen Konvergenz zu verstehen: Diese besitzt nämlich die Funktion eines Schirms, unter dem sich alles kontrollieren lässt. Um die Bedeutung einer solchen Kontrolle zu erkennen, betrachten wir folgendes Beispiel.

Beispiel M.22.8.1. Es liege der Maßraum $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1,\lambda^{(1)}\right)$ vor. Dann gilt:

(a) Sei $n\in\mathbb{N}$ sowie $f_n\coloneqq n\cdot 1_{\left(0,\frac{1}{n}\right)}$. Dann ist $f_n\in\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}}f_n\mathrm{d}\lambda^{(1)}=n\cdot\lambda^{(1)}\left(\left(0,\frac{1}{n}\right)\right)=n\cdot\frac{1}{n}=1.$$

(b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $\mathbb{R}$ gegen die Nullfunktion $1_{\varnothing}$ auf $\mathbb{R}$.

(c) Es ist

$$\lim_{n\to\infty}\int\limits_{\mathbb{R}}f_n\mathrm{d}\lambda^{(1)}=1\neq 0=\int\limits_{\mathbb{R}}1_{\varnothing}\mathrm{d}\lambda^{(1)}.$$

Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p\in[1,+\infty)$. Dann besteht das Ziel unserer nachfolgenden Betrachtungen darin, die Vollständigkeit des aus dem letzten Abschnitt bekannten, seminormierten Raumes $\left(\mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}\right)$ nachzuweisen. Dieses Resultat wurde nahezu gleichzeitig im Jahr 1907 von den Mathematikern Frigyes Riesz[3)] und Ernst Fischer[4)] publiziert.

Unser Beweis erfolgt in Anlehnung an Hermann Weyl[5)]. Hierbei wird wesentlich auf den Lebesgueschen Satz von der majorisierten Konvergenz zurückgegriffen. Wir stellen nun einige weitere Hilfsmittel für den angestrebten Beweis bereit. Wir dehnen nun die Minkowskische Ungleichung auf Reihen und Funktionen aus $\mathcal{E}^*\left(\Omega,\mathfrak{A}\right)$ aus.

Lemma M.22.8.1. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $p\in[1,+\infty)$ sowie $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*\left(\Omega,\mathfrak{A}\right)$. Dann gelten $\sum_{n=1}^{\infty}f_n\in\mathcal{E}^*\left(\Omega,\mathfrak{A}\right)$ sowie*

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty}f_n\right)\leq\sum_{n=1}^{\infty}\mathcal{N}_{p,\mu}\left(f_n\right).$$

[3)] Frigyes Riesz (∗22.01.1880; †28.02.1956) war ein ungarischer Mathematiker, welcher wesentliche Beiträge zur Funktionalanalysis lieferte.

[4)] Ernst Sigismund Fischer (∗12.07.1875; †14.11.1954) war ein österreichischer Mathematiker, der sich mit Analysis und Algebra beschäftigte.

[5)] Hermann Klaus Hugo Weyl (∗09.11.1885; †08.12.1955) war ein deutscher Mathematiker, Physiker und Philosoph. Wegen seines breiten Interessengebiets gilt er als einer der letzten mathematischen Universalisten.

Beweis. Wegen Lemma M.19.5 gilt

$$\sum_{n=1}^{\infty} f_n \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Weiter sei

$$s_n \coloneqq \sum_{k=1}^{n} f_k. \tag{3}$$

Da $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$ ist, folgt wegen (3) mittels Teil *(b)* von Lemma M.19.3 dann

$$s_n \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{4}$$

Wegen (4) liefert Bemerkung M.19.9 dann

$$s_n^p \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{5}$$

Aus (2) und (3) folgt sogleich, $s_n \leq s_{n+1}$. Damit folgt mittels Bemerkung M.18.8 nun

$$s_n^p \leq s_{n+1}^p. \tag{6}$$

Unter Verwendung von (3) und Satz M.22.7.4 ergibt sich

$$\mathcal{N}_{p,\mu} (s_n) = \mathcal{N}_{p,\mu} \left(\sum_{k=1}^{n} f_k \right) \leq \sum_{k=1}^{n} \mathcal{N}_{p,\mu} (f_k) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{N}_{p,\mu} (f_k) . \tag{7}$$

Aus (2) und (7) folgt dann

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} \mathcal{N}_{p,\mu} (s_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{p,\mu} (f_n) . \tag{8}$$

Unter Beachtung von (2), (5) und (6) liefert die Anwendung des Satzes von der monotonen Konvergenz (Satz M.22.2.3) dann $\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^p \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int_{\Omega} \sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^p \mathrm{d}\mu = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int_{\Omega} s_n^p \mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) folgt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n = \lim_{n \to \infty} s_n = \sum_{n=1}^{\infty} f_n. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (2), (6) und (10) folgt dann

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n^p = \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} s_n \right]^p = \left[\sum_{n=1}^{\infty} f_n \right]^p . \tag{11}$$

Wegen (1) gilt insbesondere

$$\left| \sum_{n=1}^{\infty} f_n \right| = \sum_{n=1}^{\infty} f_n. \tag{12}$$

Unter Verwendung von (12), (11), (9) und der aus (4) folgenden Nichtnegativität der Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{p,\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) &= \left[\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right|^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right)^p\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\int\limits_{\Omega}\sup_{n\in\mathbb{N}} s_n^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} s_n^p \mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \left[\sup_{n\in\mathbb{N}}\int\limits_{\Omega} |s_n|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} = \sup_{n\in\mathbb{N}}\left[\int\limits_{\Omega} |s_n|^p \,\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}} \\ &= \sup_{n\in\mathbb{N}} \mathcal{N}_{p,\mu}(s_n)\,.\end{aligned} \tag{13}$$

Aus (8) folgt nun

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\left(\sum_{n=1}^{\infty} f_n\right) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f_n)\,. \tag{14}$$

Wegen (1) und (14) ist dann alles gezeigt. □

Lemma M.22.8.2. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ und sei $(X,\|.\|)$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{K}$. Weiterhin sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(X,\|.\|)$, für welche eine Teilfolge $(x_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $x \in X$ mit $\lim_{k\to\infty}\|x_{n_k}-x\| = 0$ existiert. Dann gilt bereits $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$.*

Lemma M.22.8.3. *Sei $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R},\mathbb{C}\}$ und sei $(X,\|.\|)$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{K}$. Weiterhin seien die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus X sowie $x \in X$ so gewählt, dass $\lim_{n\to\infty}\|x_n - x\| = 0$. Sei $\widetilde{x} \in X$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) $\lim_{n\to\infty}\|x_n - \widetilde{x}\| = 0$.

(ii) $\|\widetilde{x} - x\| = 0$.

Lemma M.22.8.4. *Sei. $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall auf Ω gegen f konvergiert. Sei nun $\widetilde{f} \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-fast-überall auf Ω gegen $\widetilde{f}$.*

(ii) *Es ist $f - \widetilde{f} \in \mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.*

Satz M.22.8.3 (Riesz & Fischer)**.** *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1,+\infty]$. Dann gilt:*

(a) *Der seminormierte Raum $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}})$ ist vollständig.*

(b) *Seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ und $f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ so gewählt, dass $\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |f_n - f|^p \,\mathrm{d}\mu = 0$ erfüllt ist. Dann gibt es eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, welche μ-fast-überall auf Ω gegen f konvergiert.*

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}})$. Dann gibt es eine streng monoton wachsende Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ aus $\mathbb{N}$ derart, dass für alle $r,s\in\mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{k-1}$ gilt

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(f_r-f_s)<\frac{1}{2^k}. \tag{1}$$

Wir betrachten nun eine solche Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Da die Folge $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ streng monoton wachsend ist, folgt aus (11) für $k\in\mathbb{N}$ dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\left(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right)<\frac{1}{2^k}. \tag{2}$$

Sei

$$k\in\mathbb{N}. \tag{3}$$

Weiter sei

$$g_k=f_{n_{k+1}}-f_{n_k}. \tag{4}$$

Wegen $\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})\subseteq\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ gilt:

(I) $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.

Wegen (3), (4) und *(I)* folgt mittels Satz M.18.7 nun

$$g_k\in\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (5) liefert Bemerkung M.19.9 nun

$$|g_k|\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{6}$$

Wegen (3) und (6) liefert Lemma M.22.8.1 dann

$$\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\in\mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}) \tag{7}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)\leq\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_{p,\mu}(|g_k|). \tag{8}$$

Unter Beachtung von Teil *(a)* von Bemerkung M.22.6.2, (3), (4) und (2) ergibt sich

$$\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_{p,\mu}(|g_k|)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_{p,\mu}(g_k)=\sum_{k=1}^{\infty}\mathcal{N}_{p,\mu}\left(f_{n_{k+1}}-f_{n_k}\right)<\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{2^k}=1. \tag{9}$$

Es ist

$$\mathcal{N}_{p,\mu}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)=\left[\int\limits_{\Omega}\left|\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right|^p\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}=\left[\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)^p\mathrm{d}\mu\right]^{\frac{1}{p}}. \tag{10}$$

Aus (8) bis (10) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega}\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|^p\right)\mathrm{d}\mu\in[0,1]. \tag{11}$$

Wegen (7) liefert Bemerkung M.19.9 dann

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)^p \in \mathcal{E}^*(\Omega,\mathfrak{A}). \tag{12}$$

Wegen (11) und (12) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 nun

$$\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)^p \in \mathscr{L}^1\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right). \tag{13}$$

Wegen (3) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.22.5.5 dann

$$\left\{\left|\left(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|\right)^p\right| = +\infty\right\} \in \mathcal{N}_\mu.$$

Hieraus folgt wegen $\left\{\left|(\sum_{k=1}^{\infty}|g_k|)^p\right| = +\infty\right\} = \{\sum_{k=1}^{\infty}|g_k| = +\infty\}$ dann

$$\left\{\sum_{k=1}^{\infty}|g_k| = +\infty\right\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{14}$$

Sei

$$B \coloneqq \left\{\sum_{k=1}^{\infty}|g_k| = +\infty\right\}. \tag{15}$$

Wegen (15) konvergiert die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}|g_k(\omega)|$ für $\omega \in \Omega\backslash B$ und somit also auch die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} g_k(\omega)$. Beachtet man dies sowie die wegen (4) für $k \in \mathbb{N}$ gültige Identität

$$\sum_{s=1}^{k} g_s = \sum_{s=1}^{k}\left(f_{n_{s+1}} - f_{n_s}\right) = f_{n_{k+1}} - f_{n_1},$$

so ergibt sich für $\omega \in \Omega\backslash B$ die Konvergenz der Folge $(f_{n_k}(\omega))_{k\in\mathbb{N}}$. Somit konvergiert die Folge $\left(1_{\Omega\backslash B} f_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω. Sei weiter

$$F \coloneqq \lim_{k\to\infty} 1_{\Omega\backslash B} f_{n_k}. \tag{16}$$

Wegen (14) und (15) gilt

$$B \in \mathcal{N}_\mu. \tag{17}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (17) weiterhin

$$\Omega\backslash B \in \mathfrak{A}. \tag{18}$$

Wegen (18) und *(I)* ergibt sich mittels Bemerkung M.18.5 dann:

(II) Es ist $\left(1_{\Omega\backslash B} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$.

Wegen (16) und *(II)* liefert Folgerung M.18.10 dann

$$F \in \mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R}). \tag{19}$$

Wegen (16), (17) und (19) gilt nun

(III) Die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-fast-überall auf Ω gegen F.

Wir wollen nun den LEBESGUEschen Satz von der majorisierten Konvergenz auf die Folge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und die Funktion F anwenden. Hierzu gilt es eine geeignete Majorante $g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\Omega,\mathfrak{A}\right)$ der Folge $(|f_{n_k}|)_{k\in\mathbb{N}}$ zu finden. Sei dazu

$$g \coloneqq \sum_{k=1}^{\infty} |g_k| \,. \tag{20}$$

Aus (13) und (20) folgt dann

$$g \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right). \tag{21}$$

Wegen $f_{n_1} \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right)$ liefert Bemerkung M.22.6.3 dann

$$|f_{n_1}| \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right). \tag{22}$$

Wegen (21) und (22) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.6.2 dann

$$g + |f_{n_1}| \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right). \tag{23}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Wegen (24), (3) und (4) gilt dann

$$f_{n_{k+1}} = \left(f_{n_{k+1}} - f_{n_1}\right) + f_{n_1} = \sum_{s=1}^{k} \left(f_{n_{s+1}} - f_{n_s}\right) + f_{n_1} = \sum_{s=1}^{k} g_s + f_{n_1}. \tag{25}$$

Unter Beachtung von (25), der Dreiecksungleichung und (20) folgt nun

$$\left|f_{n_{k+1}}\right| \leq \left|\sum_{s=1}^{k} g_s + f_{n_1}\right| \leq \sum_{s=1}^{k} |g_s| + |f_{n_1}| \leq \sum_{s=1}^{\infty} |g_s| + |f_{n_1}| = g + |f_{n_1}| \,. \tag{26}$$

Wegen (19), *(III)*, (23), (24) und (26) liefert der LEBESGUEsche Satz von der majorisierten Konvergenz (Satz M.22.8.2) dann

$$F \in \mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right) \tag{27}$$

sowie

$$\lim_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f_{n_k} - F|^p \,\mathrm{d}\mu = 0. \tag{28}$$

Aus (28) folgt nun

$$\lim_{k\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}\left(f_{n_k} - F\right) = 0^{\frac{1}{p}} = 0. \tag{29}$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge im seminormierten Raum $\left(\mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}\right)$ ist, folgt wegen (27) und (29) mittels Lemma M.22.8.2 dann

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}\left(f_n - F\right) = 0. \tag{30}$$

Wegen (27) und (30) ist der seminormierte Raum $\left(\mathscr{L}^p\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}\right),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}}\right)$ dann also vollständig.

Zu *(b)*: Nach Voraussetzung gilt

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f_n - f) = 0. \tag{31}$$

Wegen (31) ist $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann insbesondere eine Cauchyfolge in $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}})$. Wie im Beweis von *(a)* gezeigt wurde, gibt es dann eine Teilfolge $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und ein $F \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ derart, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall auf Ω gegen F konvergiert und zudem

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f_n - F) = 0 \tag{32}$$

erfüllt ist. Da $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}})$ ein seminormierter Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (31) und (32) mittels Lemma M.22.8.3 dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu}(F - f) = 0.$$

Hieraus folgt wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 dann $F - f \in \mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}})$, also wegen $F - f \in \mathrm{Abb}(\Omega,\mathbb{R})$ dann $F - f \in \mathcal{M}_0(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$. Hieraus sowie aus der Wahl von $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ und F folgt mittels Lemma M.22.8.4 dann, dass $(f_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall auf Ω gegen f konvergiert. Damit ist alles gezeigt. □

Satz M.22.8.4. *Sei $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann ist der Raum*

$$\left(\mathscr{L}^2(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),[.,.]_{\mu;\mathbb{R}}\right)$$

ein Semihilbertraum über $\mathbb{R}$ mit zugehöriger Norm $\mathcal{N}_{2,\mu;\mathbb{R}}$.

Satz M.22.8.5. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $p \in [1,+\infty)$. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchyfolge in $(\mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R}),\mathcal{N}_{p,\mu;\mathbb{R}})$ und f eine Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega,\mathfrak{A};\mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast-überall auf Ω gegen f konvergiert. Dann gelten $f \in \mathscr{L}^p(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\mathbb{R})$ sowie*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{p,\mu}(f_n - f) = 0.$$

M.22.9. Integration bezüglich eines Bildmaßes

In diesem Abschnitt betrachten wir einen nichttrivialen Maßraum $(\Omega,\mathfrak{A},\mu)$, einen nichttrivialen messbaren Raum $(\Omega',\mathfrak{A}')$ und eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung $T \in \mathrm{Abb}(\Omega,\Omega')$. Nach Satz M.16.10 induzieren T und μ dann ein Bildmaß $T(\mu)$ auf $(\Omega',\mathfrak{A}')$.

Unsere nachfolgenden Betrachtungen sind dann auf die Untersuchung des zwischen $T(\mu)$-Integrierbarkeit einer Funktion $f' \in \mathcal{M}(\Omega',\mathfrak{A}';\overline{\mathbb{R}})$ und der μ-Integrierbarkeit der Funktion $f' \circ T$ gerichtet.

Bemerkung M.22.9.1. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $T \in \mathrm{Abb}(\Omega,\Omega')$ sowie $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$. Dann gilt:

(a) Es ist $1_{A'} \circ T = 1_{T^{-1}(A')}$.

(b) Sei $f' \in \mathrm{Abb}(\Omega',\overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt

$$(1_{A'} f') \circ T = 1_{T^{-1}(A')}(f \circ T).$$ ♣

Lemma M.22.9.1. *Seien $(\Omega,\mathfrak{A})$ und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ nichttriviale messbare Räume und $T \in \mathrm{Abb}(\Omega,\Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Sei* $u' \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$. *Dann gilt:*

(a1) *Es ist* $u' \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$.

(a2) *Sei* $\left[n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, \left(A'_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right]$ *eine Normaldarstellung von* u'. *Dann ist aber nun* $\left[n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, \left(T^{-1}\left(A'_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right]$ *eine Normaldarstellung von* $u' \circ T$.

(b) *Sei* $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. *Dann gilt:*

(b1) *Es ist* $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(b2) *Sei* $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine monoton wachsende Folge aus* $\mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ *mit* $\sup_{n\in\mathbb{N}} u'_n = f'$. *Dann ist* $(u'_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$*eine monoton wachsende Folge aus* $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *mit*

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} (u'_n \circ T) = f' \circ T.$$

Es folgt nun das zentrale Resultat dieses Abschnitts.

Satz M.22.9.1. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum,* $(\Omega', \mathfrak{A}')$ *ein nichttrivialer messbarer Raum und* $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ *eine* $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$*-messbare Abbildung sowie* $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. *Dann gelten* $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ *sowie*

$$\int_{\Omega'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \int_{\Omega} (f' \circ T)\, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis. Sei $u' \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ und sei $\left[n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, \left(A'_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right]$ eine Normaldarstellung von u'. Wegen Teil *(a)* von Lemma M.22.9.1 ist dann $u' \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ und

$$\left[n, (\alpha_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}, \left(T^{-1}\left(A'_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right]$$

eine Normaldarstellung von $u' \circ T$. Unter Verwendung von Definition M.22.1.1 folgt nun

$$\int_{\Omega'} u' \mathrm{d}T(\mu) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j T(\mu)\left(A'_j\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu\left(T^{-1}\left(A'_j\right)\right) = \int_{\Omega} u' \circ T \mathrm{d}\mu. \tag{1}$$

Sei nun $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Wegen Teil *(b1)* von Lemma M.22.9.1 ist dann

$$f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Sei $(u'_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine aufgrund der Teile *(a2)* und *(b)* von Satz M.19.1 existierende monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} u'_n = f'$. Wegen Definition M.22.2.1 gilt dann

$$\int_{\Omega'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega'} u'_n \mathrm{d}T(\mu), \tag{3}$$

während sich aus Teil *(b2)* von Lemma M.22.9.1 weiterhin ergibt, dass $(u'_n \circ T)_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ mit $\sup_{n\in\mathbb{N}} (u'_n \circ T) = f' \circ T$ ist. Hieraus ergibt sich mittels Definition M.22.2.1 dann

$$\int_{\Omega} (f' \circ T)\, \mathrm{d}\mu = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int_{\Omega} (u'_n \circ T)\, \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Für $n \in \mathbb{N}$ folgt wegen $u_{n'} \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$ aus dem schon Gezeigten, vergleiche etwa (1), dann $u'_n \circ T \in \mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$\int\limits_{\Omega'} u'_n \mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (u'_n \circ T)\, \mathrm{d}\mu.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (3) und (4) dann

$$\int\limits_{\Omega'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega'} u'_n \mathrm{d}T(\mu) = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega} (u'_n \circ T)\, \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)\, \mathrm{d}\mu. \tag{5}$$

Wegen (2) und (5) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung M.22.9.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung.. Weiter sei $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann gilt:*

(a) *Sei $A' \in \mathfrak{A}'$. Dann gelten $1_{A'} f' \in \mathcal{E}(\Omega', \mathfrak{A}')$, $1_{T^{-1}(A')}(f' \circ T) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} 1_{T^{-1}(A)}(f' \circ T)\, \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Es gelten $f' \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie*

$$T\left(\mu_{(f'\circ T)}\right) = [T(\mu)]_{f'}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $A' \in \mathfrak{A}'$ und $f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$ folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$1_{A'} f' \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}'). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Satz M.22.9.1 nun

$$(1_{A'} f') \circ T \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{2}$$

und

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (1_{A'} f') \circ T \mathrm{d}\mu. \tag{3}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.9.1 gilt

$$(1_{A'} f') \circ T = 1_{T^{-1}(A')}(f' \circ T). \tag{4}$$

Wegen (4) folgt aus (2) bzw. (3) dann

$$1_{T^{-1}(A')}(f' \circ T) \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}) \tag{5}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega'} 1_{A'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} 1_{T^{-1}(A')}(f' \circ T)\, \mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

Wegen (1), (5) und (6) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen Satz M.22.9.1 gilt

$$f' \circ T \in \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) . \tag{7}$$

Sei weiter

$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (8) folgt mittels *(a)* dann

$$\begin{aligned} \left[T\left(\mu_{(f' \circ T)}\right)\right](A') = \mu_{(f' \circ T)}\left(T^{-1}(A')\right) &= \int\limits_{\Omega} 1_{T^{-1}(A')} (f' \circ T) \, \mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_{\Omega'} 1_{A'} f' \mathrm{d}T(\mu) = [T(\mu)]_{f'}(A') . \end{aligned} \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$T\left(\mu_{(f' \circ T)}\right) = [T(\mu)]_{f'} . \tag{10}$$

Wegen (7) und (10) ist dann *(b)* bewiesen. □

Bemerkung M.22.9.2. Seien Ω und Ω' nichtleere Mengen, $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ und $f' \in \mathrm{Abb}\left(\Omega', \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gelten $(f' \circ T)^+ = (f')^+ \circ T$ und $(f' \circ T)^- = (f')^- \circ T$. ♣

Satz M.22.9.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum und $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Weiter sei $f' \in \mathcal{M}\left(\Omega', \mathfrak{A}'; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *f' ist quasi-$T(\mu)$-integrierbar.*

  (ii) *$f' \circ T$ ist quasi-μ-integrierbar.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (iii) *f' ist $T(\mu)$-integrierbar.*

  (iii) *$f' \circ T$ ist μ-integrierbar.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann ist $f' \circ T$ quasi-μ-integrierbar und es gilt*

$$\int\limits_{\Omega'} f' \mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T) \, \mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Zu *(a)* und *(b)*: Wegen Bemerkung M.19.9 gilt

$$\left\{(f')^+, (f')^-\right\} \subseteq \mathcal{E}^* (\Omega', \mathfrak{A}') . \tag{1}$$

Wegen (1) folgen mittels Satz M.22.9.1 dann

$$\left\{(f')^+ \circ T, (f')^- \circ T\right\} \subseteq \mathcal{E}^* (\Omega, \mathfrak{A}) \tag{2}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^+ \,\mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} \left[(f')^+ \circ T\right] \mathrm{d}\mu \tag{3}$$

und

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^- \,\mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} \left[(f')^- \circ T\right] \mathrm{d}\mu. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.22.9.2 gelten zudem

$$(f' \circ T)^+ = (f')^+ \circ T \tag{5}$$

und

$$(f' \circ T)^- = (f')^- \circ T. \tag{6}$$

Aus (2), (5) und (6) folgt nun

$$\left\{(f' \circ T)^+, (f' \circ T)^-\right\} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{7}$$

Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) folgt zudem

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^+ \,\mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^+ \,\mathrm{d}\mu \tag{8}$$

bzw.

$$\int\limits_{\Omega'} (f')^- \,\mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^- \,\mathrm{d}\mu. \tag{9}$$

Unter Beachtung von Definition M.22.4.1 ergibt sich wegen (8) und (9) sogleich die Behauptung von *(a)* und *(b)*.

Zu *(c)*: Sei nun *(i)* erfüllt. Aufgrund des schon Gezeigten ist $f' \circ T$ dann quasi-μ-integrierbar. Somit ist $f' \circ T \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$ und unter Beachtung von Definition M.22.4.1 sowie (8) und (9) ergibt sich

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega'} f' \mathrm{d}T(\mu) &= \int\limits_{\Omega'} (f')^+ \,\mathrm{d}T(\mu) - \int\limits_{\Omega'} (f')^- \,\mathrm{d}T(\mu) = \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^+ \,\mathrm{d}\mu - \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)^- \,\mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_{\Omega} (f' \circ T)\,\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

□

M.22.10. Zusammenhänge zwischen den Integrationstheorien von Riemann und Lebesgue

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Untersuchung von Zusammenhängen zwischen dem hier entwickelten Konzept der Integration bezüglich eines Maßes und der klassischen Riemann-schen Integrationstheorie. Der Hauptunterschied zwischen den beiden Vorgehensweisen lässt sich wie folgt beschreiben:

Seien $a \in \mathbb{R}$, $b \in (a, +\infty)$ und $f \in \mathrm{Abb}([a,b], [0,+\infty))$ sei stetig. Beim Riemann-Integral unterteilt man den Urbildbereich $[a,b]$ in Teilintervalle und versucht, das Integral mit Hilfe von zu

solchen Zerlegungen gehörigen Treppenfunktionen zu beschreiben. Beim Maßintegral hingegen wird, wie eine nähere Analyse der für die Entwicklung dieses Konzepts zentralen Sätze M.22.2.1 und M.19.1 zeigt, eine Zerlegung des Bildbereichs in Teilintervalle vorgenommen und auf deren Grundlage werden die zur Berechnung des Integrals nötigen Elementarfunktionen erzeugt. Entscheidend für unser Vorgehen war, dass sich unsere Funktion f als Supremum einer monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen darstellen lässt. Analysieren wir nun den hierzu nötigen Satz M.19.1, so erkennen wir, dass die Konstruktion einer solchen monoton wachsenden Folge von Elementarfunktionen auf der Grundlage der Zerlegung des Bildbereichs der Funktion f vorgenommen wurde. Wir werden in diesem Abschnitt nachweisen, dass eine auf einem *abgeschlossenen endlichen Intervall* Riemann-integrierbare reelle Funktion, welche zudem *Borel-messbar* ist, auch bezüglich des eingeschränkten Lebesgue-Borel-Maßes integrierbar ist und dass die entsprechenden Integrale übereinstimmen. (Dies trifft also insbesondere auf stetige Funktionen zu.) Diese Tatsache versetzt uns in die Lage, ganze Klassen von Lebesgue-Integralen durch Zurückführung auf Riemann-Integrale explizit berechnen zu können.

Wir wollen den soeben angekündigten Zusammenhang nun herleiten. Hierzu stellen wir zunächst die hierfür benötigten Begriffe und Resultate aus der Theorie des Riemann-Integrals bereit. Dies betrifft insbesondere den DARBOUX[1)]schen Zugang zum Riemann-Integral.

Definition M.22.10.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Unter einer *Zerlegung* Z von $[a, b]$ verstehen wir dann eine nichtleere Menge von abgeschlossenen Teilintervallen von $[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Es ist $\bigcup_{I \in Z} I = [a, b]$.

(II) Für alle $I, J \in Z$ mit $I \neq J$ ist $I \cap J$ entweder leer oder einelementig. Die Endpunkte der durch Z bestimmten abgeschlossenen Teilintervalle von $[a, b]$ (zu denen stets a und b gehören) heißen die *Teilpunkte der Zerlegung* Z von $[a, b]$.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{Z}[a, b]$ die Menge aller Zerlegungen von $[a, b]$.

Definition M.22.10.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiterhin seien $Z, Z' \in \mathcal{Z}[a, b]$. Dann heißt Z' eine *Verfeinerung* von Z, wenn in jedem $I' \in Z'$ ein $I \in Z$ mit $I' \subseteq I$ existiert. In diesem Falle schreiben wir $Z \preceq Z'$.

Bemerkung M.22.10.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiterhin seien Z und Z' Zerlegungen von $[a, b]$ mit $Z \preceq Z'$. Es sei x ein Teilpunkt von Z. Dann ist x auch ein Teilpunkt von Z'. ♣

Satz M.22.10.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a, b]$ so gewählt, dass sowohl $Z_1 \preceq Z_2$ als auch $Z_2 \preceq Z_1$ erfüllt ist. Dann gilt $Z_1 = Z_2$.*

(b) *Seien $Z_1, Z_2, Z_3 \in \mathcal{Z}[a, b]$ so gewählt, dass sowohl $Z_1 \preceq Z_2$ und $Z_2 \preceq Z_3$ erfüllt ist. Dann gilt $Z_1 \preceq Z_3$.*

(c) *Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a, b]$.*

(c1) *Es gibt* genau *ein $Z' \in \mathcal{Z}[a, b]$ mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $Z_1 \preceq Z'$ und $Z_2 \preceq Z'$.*

[1)] JEAN GASTON DARBOUX (*14.08.1842; †23.02.1917) war französischer Mathematiker. Darboux trug wesentlich zur Entwicklung der Differentialgeometrie seiner Zeit bei. Er wandte die Methoden der Analysis auf Kurven und Oberflächen an (Darboux-Summen).

(II) *Falls* $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$ *so beschaffen ist, dass* $Z_1 \preceq Z$ *und* $Z_2 \preceq Z$ *erfüllt ist, so ist* $Z' \preceq Z$.

(c2) *Es gibt* genau *ein* $Z'' \in \mathcal{Z}[a,b]$ *mit folgenden Eigenschaften:*

(III) *Es ist* $Z'' \preceq Z_1$ *und* $Z'' \preceq Z_2$.

(IV) *Falls* $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$ *so beschaffen ist, dass* $Z \preceq Z_1$ *und* $Z \preceq Z_2$ *erfüllt ist, so ist* $Z \preceq Z''$.

Satz M.22.10.1 führt uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.22.10.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a,+\infty)$. Weiter seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a,b]$. Dann heißt das durch die Eigenschaften *(I)* und *(II)* aus Teil *(c1)* von Satz M.22.10.1 bzw. die Eigenschaften *(III)* und *(IV)* aus Teil *(c2)* von Satz M.22.10.1 eindeutig festgelegte Element Z' bzw. Z'' aus $\mathcal{Z}[a,b]$ das *Supremum* bzw. *Infimum* von Z_1 und Z_2. Wir schreiben für Z' bzw. Z'' dann auch $\sup\{Z_1, Z_2\}$ bzw. $\inf\{Z_1, Z_2\}$.

Definition M.22.10.4. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a,+\infty)$. Weiterhin sei $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{Z}[a,b]$. Dann heißt $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *monoton wachsend* bzw. *monoton fallend,* falls für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Z_n \preceq Z_{n+1}$ bzw. $Z_{n+1} \preceq Z_n$.

Wir wenden uns nun dem DARBOUXschen Zugang zum Riemann-Integral zu.

Definition M.22.10.5. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a,+\infty)$. Weiter sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ beschränkt. Sei $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$. Dann heißen die Zahlen

$$s_f(Z) := \sum_{I\in Z} \left(\inf_{x\in I} f(x)\right) \cdot \lambda^{(1)}(I) \qquad \text{bzw.} \qquad S_f(Z) := \sum_{I\in Z} \left(\sup_{x\in I} f(x)\right) \cdot \lambda^{(1)}(I)$$

die zu Z gehörige DARBOUX*sche Untersumme* bzw. DARBOUX*sche Obersumme* von f.

Lemma M.22.10.1. *Seien* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in (a,+\infty)$. *Weiter sei* $f \in \mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ *beschränkt. Seien* Z *und* Z' *Zerlegungen von* $[a,b]$ *mit* $Z \preceq Z'$. *Dann gilt*

$$s_f(Z) \le s_f(Z') \le S_f(Z') \le S_f(Z).$$

Lemma M.22.10.2. *Seien* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in (a,+\infty)$. *Weiter sei* $f \in \mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ *beschränkt. Seien* $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a,b]$. *Dann gilt*

$$s_f(Z_1) \le S_f(Z_2).$$

BEWEIS. Sei $Z := \sup\{Z_1, Z_2\}$. Wegen Teil *(c1)* von Satz M.22.10.1 gelten $Z_1 \preceq Z$ und $Z_2 \preceq Z$. Hieraus folgt in Verbindung mit Lemma M.22.10.1 nun

$$s_f(Z_1) \le s_f(Z) \le S_f(Z) \le S_f(Z_2),$$

also

$$s_f(Z_1) \le S_f(Z_2). \qquad \square$$

Lemma M.22.10.3. *Seien* $a \in \mathbb{R}$ *und* $b \in (a,+\infty)$. *Weiter sei* $f \in \mathrm{Abb}([a,b],\mathbb{R})$ *beschränkt. Weiter seien*

$$\underline{I}_f := \sup_{Z\in\mathcal{Z}[a,b]} s_f(Z) \qquad \textit{sowie} \qquad \overline{I}_f := \inf_{Z\in\mathcal{Z}[a,b]} S_f(Z).$$

Dann gilt

$$\underline{I}_f \le \overline{I}_f.$$

Definition M.22.10.6. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \operatorname{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Dann heißen die in Lemma M.22.10.3 eingeführten Zahlen $\underline{I}_f$ bzw. $\overline{I}_f$ das *untere* bzw. *obere* DARBOU*xsche Integral* von f.

Satz M.22.10.2. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \operatorname{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *f ist Riemann-integrierbar.*

(ii) *f ist beschränkt und es gilt $\underline{I}_f = \overline{I}_f$.*

(iii) *f ist beschränkt und zu jedem $\varepsilon > 0$ gibt es eine Zerlegung $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$ mit $S_f(Z) - s_f(Z) < \varepsilon$.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$\underline{I}_f = \overline{I}_f = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Folgerung M.22.10.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \operatorname{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ eine Riemann-integrierbare Funktion. Dann ist f beschränkt und es gibt eine monoton wachsende Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Z}[a,b]$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \qquad \text{und} \qquad \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beispiel M.22.10.1 (DIRICHLETsche[2] Sprungfunktion)**.** Sei $f\colon [0,1] \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$f(x) := \begin{cases} 1, & \text{falls } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) Es ist f beschränkt und für jedes $Z \in \mathcal{Z}[0,1]$ gelten $s_f(Z) = 0$ und $S_f(Z) = 1$.

(b) f ist nicht Riemann-integrierbar.

(c) Seien $A := [0,1]$, $\mathfrak{B}_{1,A} := \mathfrak{B}_1 \cap A$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,A}$. Dann gelten $f \in \mathcal{E}(A, \mathfrak{B}_{1,A})$ sowie

$$\begin{aligned} \int_A f \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \int_A 1_{[0,1]\setminus\mathbb{Q}} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} &= \lambda_A^{(1)}([0,1] \setminus \mathbb{Q}) = \lambda^{(1)}([0,1] \setminus \mathbb{Q}) \\ &= \lambda^{(1)}([0,1]) - \lambda^{(1)}([0,1] \cap \mathbb{Q}) = 1 - 0 = 1. \end{aligned}$$

Bezeichnung. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \operatorname{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Für $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$ sei

$$t_{f,Z} := \sum_{I\in Z} \left(\inf_{x\in I} f(x) \right) \cdot 1_f \qquad \text{sowie} \qquad T_{f,Z} := \sum_{I\in Z} \left(\sup_{x\in I} f(x) \right) \cdot 1_f.$$

[2] PETER GUSTAV LEJEUNE DIRICHLET (*13.02.1815, †05.05.1859) war ein deutscher Mathematiker. Er arbeitete hauptsächlich auf den Gebieten der Analysis und der Zahlentheorie. Nach ihm benannt ist u.a. die Dirichletsche Sprungfunktion.

Bemerkung M.22.10.2. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seien $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$ und $y \in [a,b]$. Dann gilt:

(a) Sei y *kein* in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gibt es *genau* ein $I \in Z$ mit $y \in I$ und es gilt dann, dass

$$t_{f,Z}(y) = \inf_{x \in I} f(x) \qquad \text{sowie} \qquad T_{f,Z}(y) = \sup_{x \in I} f(x).$$

(b) Sei y ein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gibt es *genau* 2 voneinander verschiedene Intervalle I und I' von Z zu denen y gehört und es gelten dann

$$t_{f,Z}(y) = \inf_{x \in I} f(x) + \inf_{x \in I'} f(x) \qquad \text{sowie} \qquad T_{f,Z}(y) = \sup_{x \in I} f(x) + \sup_{x \in I'} f(x). \qquad \clubsuit$$

Lemma M.22.10.4. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Sei $Z \in \mathcal{Z}[a,b]$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\|f\|_\infty := \sup_{x \in [a,b]} |f(x)|$. Weiter sei $y \in [a,b]$. Dann gilt:*

(a1) *Sei y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gilt:*

$$-\|f\|_\infty \leq t_{f,Z}(y) \leq f(y) \leq T_{f,Z}(y) \leq \|f\|_\infty.$$

(a2) *Sei y ein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z. Dann gilt:*

$$-2\|f\|_\infty \leq t_{f,Z}(y) \leq f(y) \leq T_{f,Z}(y) \leq \|f\|_\infty.$$

(b) *Seien $A := [a,b]$, $\mathfrak{B}_{1,A} := \mathfrak{B}_1 \cap A$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,A}$. Dann gelten $\{t_{f,Z}, T_{f,Z}\} \subseteq \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right)$ sowie*

$$\int_A t_{f,Z} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = s_f(Z) \qquad \text{und} \qquad \int_A T_{f,Z} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = S_f(Z).$$

Lemma M.22.10.5. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Seien $Z_1, Z_2 \in \mathcal{Z}[a,b]$ so gewählt, dass $Z_1 \preceq Z_2$ erfüllt ist. Weiter seien $y \in [a,b]$ so gewählt, dass y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_2 ist. Dann gilt:*

$$t_{f,Z_1}(y) \leq t_{f,Z_2}(y) \leq T_{f,Z_2}(y) \leq T_{f,Z_1}(y).$$

Es folgt nun das Hauptresultat dieses Abschnitts. Bei dessen Beweis werden wir sowohl das Lemma von Fatou als auch den Lebesgueschen Satz der majorisierten Konvergenz benötigen.

Satz M.22.10.3. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Weiter sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ beschränkt. Es seien $A := [a,b]$, $\mathfrak{B}_{1,A} := \mathfrak{B}_1 \cap A$ sowie $\lambda_A^{(1)} := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,A}$. Weiterhin sei $f \in \mathrm{Abb}([a,b], \mathbb{R})$ eine Riemann-integrierbare Funktion aus $\mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_{1,A}; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $f \in \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right)$ und es gilt*

$$\int_A f \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

(b) *Sei* $F\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$F(x) := \begin{cases} f(x), & \text{falls } x \in A, \\ 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus A. \end{cases}$$

Dann gelten $F \in \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right)$

$$\int\limits_{\mathbb{R}} F \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Riemann-Integrierbarkeit von f erbringt Folgerung M.22.10.1 die Beschränktheit von f sowie die Existenz einer monoton wachsenden Folge $(Z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{Z}[a,b]$ mit

$$\lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x \tag{1}$$

und

$$\lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{2}$$

Sei

$$\|f\|_\infty := \sup_{x\in A} |f(x)|. \tag{3}$$

Da f beschränkt ist, folgt aus (3) dann

$$\|f\|_\infty \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3) und (4) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Lemma M.22.10.4 dann

$$-\infty < -2\|f\|_\infty \leq t_{f,Z_n} \leq T_{f,Z_n} \leq 2\|f\|_\infty < +\infty. \tag{6}$$

Aus Teil *(b)* von Lemma M.22.10.4 ergeben sich weiterhin

$$\{t_{f,Z_n}, T_{f,Z_n}\} \subseteq \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right) \tag{7}$$

sowie

$$\int\limits_A t_{f,z_n} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = s_f(Z_n) \tag{8}$$

und

$$\int\limits_A T_{f,Z_n} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = S_f(Z_n). \tag{9}$$

Wegen (7) folgen mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 dann

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right) \tag{10}$$

und

$$\int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \int\limits_A T_{f,Z_n}\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} - \int\limits_A t_{f,Z_n}\mathrm{d}\lambda_A^{(1)}. \tag{11}$$

Aus (11), (9) und (8) folgt nun

$$\int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = S_f(Z_n) - s_f(Z_n). \tag{12}$$

Wegen (6) gilt

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathrm{Abb}(A, [0, +\infty]). \tag{13}$$

Wegen (10) gilt

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_{1,A}; \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.4 dann

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{M}\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt nun

$$T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n} \in \mathcal{E}^*(A, \mathfrak{B}_{1,A}). \tag{15}$$

Unter Beachtung von (5) und (15) erbringt die Anwendung des Lemmas von Fatou (vergleiche Satz M.22.8.1) dann

$$\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}) \in \mathcal{E}^*(A, \mathfrak{B}_{1,A}) \tag{16}$$

sowie

$$0 \leq \int\limits_A \left[\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\right] \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} \leq \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)}. \tag{17}$$

Unter Verwendung von (1), (2) und (12) ergibt sich

$$\begin{aligned} 0 &= \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x - \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} S_f(Z_n) - \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} [S_f(Z_n) - s_f(Z_n)] \\ &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \liminf_{n\to\infty} \int\limits_A (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Aus (17) und (18) folgt nun

$$\int\limits_A \liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = 0. \tag{19}$$

Wegen (16) und (19) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 dann, dass

$$\left\{\liminf_{n\to\infty} (T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n})\,\mathrm{d}\lambda_A^{(1)} \neq 0\right\} \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{20}$$

Bezeichnet für $n \in \mathbb{N}$ nun B_n die Menge der in (a,b) gelegenen Teilpunkte von Z_n, so ist B_n nach Konstruktion von Z_n dann endlich. Setzen wir nun $B \coloneqq \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n$, so ist B dann eine höchstens abzählbare Teilmenge von A. Hieraus folgt nun aufgrund der Stetigkeit des Maßes $\lambda_A^{(1)}$ mittels Bemerkung M.7.5 dann

$$B \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{21}$$

Aus der Definition von B ergibt sich

$$[a,b] \setminus B = [a,b] \setminus \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \left([a,b] \setminus B_n \right). \tag{22}$$

Sei

$$y \in [a,b] \setminus B. \tag{23}$$

Weiter sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{24}$$

Wegen (22) bis (24) ist dann

$$y \in [a,b] \setminus B_n.$$

Somit ist y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_n. Hieraus ergibt sich mittels Teil *(a1)* von Lemma M.22.10.4 dann

$$-\|f\|_\infty \leq t_{f,Z_n}(y) \leq f(y) \leq T_{f,Z_n}(y) \leq \|f\|_\infty. \tag{25}$$

Aus (25) und (4) folgt

$$0 \leq f(y) - t_{f,Z_n}(y) \leq T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y). \tag{26}$$

Nach Konstruktion gilt

$$Z_n \preceq Z_{n+1}. \tag{27}$$

Wegen (23) und (22) gilt

$$y \in [a,b] \setminus B_{n+1}.$$

Somit ist y kein in (a,b) gelegener Teilpunkt von Z_{n+1}. Beachtet man dies sowie (27), so ergibt sich mittels Lemma M.22.10.5 dann

$$t_{f,Z_n}(y) \leq t_{f,Z_{n+1}}(y) \leq T_{f,Z_{n+1}}(y) \leq T_{f,Z_n}(y). \tag{28}$$

Wegen (24) und (28) ist dann $(t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton wachsende, beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$ und $(T_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende, beschränkte Folge aus $\mathbb{R}$. Somit sind die Folgen $(t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ und $(T_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ nach dem Monotonieprinzip jeweils konvergent. Sei

$$t_f(y) \coloneqq \lim_{n\to\infty} t_{f,Z_n}(y) \tag{29}$$

und

$$T_f(y) \coloneqq \lim_{n\to\infty} T_{f,Z_n}(y). \tag{30}$$

Wegen (29) und (30) ist dann die Folge $(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und es gilt

$$T_f(y) - t_f(y) = \lim_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y) \right). \tag{31}$$

Aus (31) folgt insbesondere

$$T_f(y) - t_f(y) = \liminf_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)\right). \tag{32}$$

Sei

$$N := \left\{\liminf_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}\right) \neq 0\right\}. \tag{33}$$

Aus (20) und (33) folgt dann

$$N \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{34}$$

Wegen (21) und (34) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.5.1 dann

$$B \cup N \in \mathcal{N}_{\lambda_A^{(1)}}. \tag{35}$$

Es ist

$$[a,b] \setminus (B \cup N) = ([a,b] \setminus B) \cap ([a,b] \setminus N). \tag{36}$$

Sei

$$y \in [a,b] \setminus (B \cup N). \tag{37}$$

Wegen (36) und (37) gilt dann

$$y \in [a,b] \setminus B. \tag{38}$$

Wegen (38), (23) und (32) gilt dann

$$T_f(y) - t_f(y) = \liminf_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)\right). \tag{39}$$

Wegen (36) und (37) gilt weiterhin

$$y \in [a,b] \setminus N. \tag{40}$$

Aus (33) und (40) folgt nun

$$\liminf_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n}(y) - t_{f,Z_n}(y)\right) = 0. \tag{41}$$

Aus (39) und (41) folgt dann

$$T_f(y) - t_f(y) = 0. \tag{42}$$

Wegen (38), (42), (23) und (31) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \left(T_{f,Z_n} - t_{f,Z_n}\right) = 0. \tag{43}$$

Aus (23), (24), (26), (38) und (43) folgt nun

$$\lim_{n\to\infty} \left(f(y) - t_{f,Z_n}(y)\right) = 0$$

und somit also auch

$$\lim_{n\to\infty} t_{f,Z_n}(y) = f(y). \tag{44}$$

Wegen (37) und (44) gilt dann:

(I) Die Folge $\left(1_{[a,b]\setminus(B\cup N)} t_{f,Z_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert punktweise auf $[a,b]$ gegen $1_{[a,b]\setminus(B\cup N)} f$.

Nach Voraussetzung gilt $f \in \mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_{1,A}; \mathbb{R})$. Wegen (7) ist $(t_{f,Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(A, \mathfrak{B}_{1,A}; \mathbb{R})$. Kombiniert man dies mit (35), so folgt aus *(I)* dann:

(II) Die Folge $(t_{f,Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert $\lambda_A^{(1)}$-fast-überall auf $[a,b]$ gegen f.

Wir wollen nun den LEBESGUEschen Satz von der majorisierten Konvergenz heranziehen. Hierzu müssen wir noch eine $\lambda_A^{(1)}$-integrierbare Majorante der Folge $(t_{f,Z_n})_{n\in\mathbb{N}}$ bereitstellen. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{45}$$

Wegen Teil *(a)* von Lemma M.22.10.4 gilt

$$t_{f,Z_n} \leq 2\|f\|_\infty \cdot 1_A. \tag{46}$$

Wegen $A \in \mathfrak{B}_{1,A}$ und (4) ergibt sich mittels Folgerung M.22.1.1 dann

$$2\|f\|_\infty \cdot 1_A \in \mathcal{E}(A, \mathfrak{B}_1) \tag{47}$$

und

$$\begin{aligned}\int\limits_A 2\|f\|_\infty \cdot 1_A \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} &= 2\|f\|_\infty \int\limits_A 1_A \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = 2\|f\|_\infty \lambda_A^{(1)}(A) = 2\|f\|_\infty \lambda^{(1)}(A) \\ &= 2\|f\|_\infty \lambda^{(1)}([a,b]) = 2\|f\|_\infty (b-a) \in [0,+\infty).\end{aligned} \tag{48}$$

Wegen (47) und (48) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.22.4.3 dann

$$2\|f\|_\infty \cdot 1_A \in \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right). \tag{49}$$

Wegen (5), (7), (45), (49) und *(II)* liefert der Lebesguesche Satz von der majorisierten Konvergenz (vergleiche Satz M.22.8.2) nun

$$f \in \mathscr{L}^1\left(A, \mathfrak{B}_{1,A}, \lambda_A^{(1)}; \mathbb{R}\right) \tag{50}$$

sowie

$$\int\limits_A f \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A t_{f,Z_n} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)}. \tag{51}$$

Wegen (1), (3) und (8) gilt

$$\int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} s_f(Z_n) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_A t_{f,Z_n} \mathrm{d}\lambda_A^{(1)}. \tag{52}$$

Aus (51) und (52) folgt dann

$$\int\limits_A f \mathrm{d}\lambda_A^{(1)} = \int\limits_a^b f(x)\,\mathrm{d}x. \tag{53}$$

Wegen (50) und (53) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen (1) sogleich aus den Teilen *(c3)* und *(c4)* von Satz M.22.4.10. □

Folgerung M.22.10.2. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a,+\infty)$ sowie $f \in \mathscr{C}(([a,b], |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$. Dann ist $f \in \mathcal{M}([a,b], \mathfrak{B}_1 \cap [a,b]; \mathbb{R})$ sowie Riemann-integrierbar und es gelten die Aussagen* (a) *und* (b) *von Satz M.22.10.3.*

BEWEIS. Aus der Wahl von f folgt sogleich die Riemann-Integrierbarkeit von f. Da $\mathfrak{B}_1 \cap [a,b]$ die BORELsche σ-Algebra des metrischen Raumes $([a,b], |\cdot|)$ ist, folgt aus der Wahl von f mittels Satz M.16.8 dann $f \in \mathcal{M}([a,b], \mathfrak{B}_1 \cap [a,b]; \mathbb{R})$. Damit folgt die restlichen Behauptungen aus Satz M.22.10.3. □

Unser nächstes Ziel besteht nun darin, auch Lebesgue-Integrale von Funktionen, welche nicht notwendig beschränkt oder aber mit einem unbeschränkten Intervall definiert sind, durch Zurückführung auf die entsprechenden uneigentlichen Riemann-Integrale zu bestimmen. Dies wird nur *bedingt* gelingen. Im Falle nichtnegativer Funktionen werden wir unser Ziel vollständig realisieren. Andererseits werden wir jedoch auf Beispiele von Funktionen stoßen, welche uneigentlich Riemann-integrierbar, jedoch *nicht* Lebesgue-integrierbar sind. Wir stellen nun eine für unser weiteres Vorgehen wichtige Begriffsbildung bereit.

Definition M.22.10.7. Sei I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und sei $f \in \mathrm{Abb}(I, \mathbb{R})$. Dann heißt f *lokal Riemann-integrierbar* auf I, falls für jedes abgeschlossene endliche Teilintervall J von I Riemann-Integrierbarkeit von $f \restriction J$ vorliegt.

Bemerkung M.22.10.3. Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und $f \in \mathscr{C}((I, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$. Dann ist f lokal Riemann-integrierbar auf I. ♣

Satz M.22.10.4. *Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$, $\mathfrak{B}_{1,I} := \mathfrak{B}_1 \cap I$ und $\lambda_I^{(1)} := \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiterhin sei f eine auf I lokal Riemann-integierbare Funktion mit Werten in $[0, +\infty)$, welche zu $\mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_{1,I})$ gehört. Dann gilt:*

(a) *Sei $I = \mathbb{R}$, dann gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} f(x) \restriction [-n,n] \,\mathrm{d}x.$$

(b) *Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $I = [a, +\infty)$. Dann gilt*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{n} f(x) \restriction [a,n] \,\mathrm{d}x.$$

(c) *Mit einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ sei $I = (-\infty, b]$. Dann gilt*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{b} f(x) \restriction [-n,b] \,\mathrm{d}x.$$

(d) *Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $I = (a, +\infty)$. Dann gilt*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{n} f(x) \restriction \left[a + \frac{1}{n}, n\right] \mathrm{d}x.$$

(e) *Mit einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ sei $I = (-\infty, b)$. Dann gilt*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{b-\frac{1}{n}} f(x) \restriction \left[-n, b - \frac{1}{n}\right] \mathrm{d}x.$$

(f)

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{b} f(x) \upharpoonright [-n,b] \,\mathrm{d}x.$$

(g) *Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b \in (a,+\infty)$. Es gelte $I = (a,b]$. Dann ist*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b} f(x) \upharpoonright \left[a+\frac{1}{n}, b\right] \mathrm{d}x.$$

(h) *Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b \in (a,+\infty)$. Es gelte $I = [a,b)$. Dann ist*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a}^{b-\frac{1}{n}} f(x) \upharpoonright \left[a, b-\frac{1}{n}\right] \mathrm{d}x.$$

(i) *Mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ sei $b \in (a,+\infty)$. Es gelte $I = (a,b)$. Dann ist*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{a+\frac{1}{n}}^{b-\frac{1}{n}} f(x) \upharpoonright \left[a+\frac{1}{n}, b-\frac{1}{n}\right] \mathrm{d}x.$$

Bemerkung M.22.10.4. Seien I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$ und $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$. Weiterhin sei $f \in \mathscr{C}((I,|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)) \cap \mathrm{Abb}(I,[0,+\infty))$. Dann ist f lokal Riemann-integrierbar auf I und es gilt $f \in \mathcal{E}^*(I,\mathfrak{B}_{1,I})$. ♣

Beispiel M.22.10.2. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \frac{1}{1+x^2}.$$

Dann gilt $f \in \mathscr{C}((\mathbb{R},|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \pi.$$

Beweis. Aus der Definition von f erkennt man sogleich, dass

$$f \in \mathscr{C}((\mathbb{R},|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)) \cap \mathrm{Abb}(\mathbb{R},[0,+\infty)).$$

Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.4, dass f lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist und zu $\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ gehört. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda^{(1)} &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} (f \upharpoonright [-n,n])(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \frac{1}{1+x^2} = \lim_{n\to\infty} [\arctan x]_{-n}^{n} \\ &= \lim_{n\to\infty} [\arctan(n) - \arctan(-n)] = \lim_{n\to\infty} 2\arctan(n) = 2 \lim_{n\to\infty} \arctan(n) \\ &= 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \pi.\end{aligned}$$

□

Beispiel M.22.10.3. Sei $a \in (0, +\infty)$. Dann gilt:

(a) Sei $f_a \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto 1_{[0,+\infty)}(x) \cdot \mathrm{e}^{-ax}.$$

Dann gelten $f_a \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_a \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \frac{1}{a},$$

also

$$\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[0,+\infty)}(x) \cdot \mathrm{e}^{-ax} \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x) = \frac{1}{a}.$$

(b) Sei $g_a \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-a|x|}.$$

Dann gelten $g_a \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}} g_a \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \frac{2}{a},$$

also

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-a|x|} \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x) = \frac{2}{a}.$$

Wir untersuchen nun den Fall reeller Funktionen beliebigen Vorzeichens. Wir geben zunächst ein Beispiel einer uneigentlich Riemann-integrierbaren Funktion, welche nicht Lebesgue-integierbar ist. Hierzu ziehen wir die sinc-Funktion heran und stellen zunächst einige Eigenschaften dieser Funktion bereit.

Bemerkung M.22.10.5. Sei $\mathrm{sinc} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$\mathrm{sinc}(x) \coloneqq \begin{cases} \frac{\sin x}{x}, & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}, \\ 1, & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Weiter sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gilt:

(a) Es ist

$$\mathrm{sinc}(x) = \mathrm{sinc}(-x).$$

(b) Es ist

$$|\mathrm{sinc}(x)| \leq 1.$$

(c) Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\sin x = 2^n \sin \frac{x}{2^n} \left(\prod_{k=1}^{n} \cos \frac{x}{2^k} \right).$$

(d) Es ist

$$\operatorname{sinc}(x) = \lim_{n\to\infty} \prod_{k=1}^{n} \cos\frac{x}{2^k}.$$

(e) Es gilt

$$\frac{2}{\pi} = \sqrt{\frac{1}{2}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}+\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}}}}\cdots. \qquad \clubsuit$$

Beispiel M.22.10.4. Sei die sinc-Funktion wie in Bemerkung M.22.10.5 definiert. Dann gilt:

(a) Es ist $\operatorname{sinc} \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$.

(b) Es ist $\operatorname{sinc} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R}\right) \setminus \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right)$.

(c) Das uneigentliche Riemann-Integral $\int_0^\infty \operatorname{sinc}(x)\,\mathrm{d}x$ konvergiert.

(d) Sei $p \in (1, +\infty)$. Dann gilt $\operatorname{sinc} \in \mathscr{L}^p\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right)$.

Satz M.22.10.5. *Sei I ein nichtleeres Intervall von $\mathbb{R}$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiterhin sei f eine quasi-$\lambda^{(1)}$-integierbare und auf I lokal Riemann-integrierbare Funktion. Dann gelten die Aussagen* (a) *bis* (i) *aus Satz M.22.10.4.*

Beweis. Sämtliche Behauptungen sind eine unmittelbare Konsequenz aus Definition M.22.4.1, der Zerlegung $f = f^+ - f^-$, der Tatsache, dass f^+ und f^- lokal Riemann-integrierbare Funktionen aus $\mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_{1,I})$ sind und der nach Satz M.22.10.4 bestehenden Gültigkeit der Aussagen *(a)* bis *(i)* für lokal Riemann-integrierbare Funktionen aus $\mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_{1,I})$. □

M.22.11. $\lambda^{(1)}$-stetige Maße aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$

Bei einer ganzen Reihe von stochastischen Anwendungen spielen verschiedene Klassen von $\lambda^{(1)}$-stetigen Maßen eine entscheidende Rolle. Aus diesem Grund erscheint es lohnenswert, die Klasse der $\lambda^{(1)}$-stetigen Maße aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ näher zu betrachten.

Zunächst studieren wir einige Wechselbeziehungen zwischen Differenzierbarkeitseigenschaften der Verteilungsfunktion eines solchen Maßes und verschiedenen anderen Größen.

Satz M.22.11.1. *Sei $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right) \cap \operatorname{Abb}(\mathbb{R}, [0, +\infty))$. Weiter sei $\nu \coloneqq \left(\lambda^{(1)}\right)_f$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\nu \in \mathcal{M}_+^{b,c}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Es bezeichne $F_{\nu,l}$ bzw. $F_{\nu,r}$ die linke- bzw. die rechte Verteilungsfunktion von ν. Dann gilt*

$$F_{\nu,l} = F_{\nu,r}.$$

(c) *Sei x_0 ein Stetigkeitspunkt von f. Dann ist $F_{\nu,l}$ in x_0 differenzierbar und es gilt*

$$F'_{\nu,l}(x_0) = f(x_0).$$

(d) *Sei $f \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right)$. Dann ist $F_{\nu,l}$ auf $\mathbb{R}$ differenzierbar und es gilt*

$$F'_{\nu,l} = f.$$

Satz M.22.11.2. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ derart beschaffen, dass $F_{\mu,l}$ auf $\mathbb{R}$ stetig differenzierbar ist. Dann gelten $F_{\mu,l} = F_{\mu,r}$, $F'_{\mu,l} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie $\mu = \lambda^{(1)}_{\left(F'_{\mu,l}\right)}$.*

Satz M.22.11.3. *Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine bijektive-, stetige- und differenzierbare Funktion derart, dass für $x \in \mathbb{R}$ gilt $g'(x) \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne g^{-1} die Umkehrabbildung von g. Dann ist g^{-1} stetig differenzierbar auf $\mathbb{R}$ und für alle $x \in \mathbb{R}$ gilt $\left(g^{-1}\right)'(x) \in (0, +\infty)$.*

(b) *g ist $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar.*

(c) *Sei $f \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right) \cap \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gelten $\left(f \circ g^{-1}\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie*

$$g\left(\lambda_f^{(1)}\right) = \lambda^{(1)}_{(f \circ g^{-1}) \cdot (g^{-1})'},$$

das heißt also für alle $A \in \mathfrak{B}_1$ gilt

$$g\left(\int\limits_A f \mathrm{d}\lambda^{(1)}\right) = \int\limits_A \left(f \circ g^{-1}\right) \cdot \left(g^{-1}\right)' \mathrm{d}\lambda^{(1)}.$$

M.22.12. Die Eulersche Gammafunktion

Wir behandeln in diesem Abschnitt eine der wichtigsten Funktionen der Analysis, die sogenannte EULERsche Gammafunktion, benannt nach dem bekannten Mathematiker LEONHARD EULER[1)]. Wir wählen hier einen Zugang zur Gammafunktion, der an die Techniken dieses Kapitels angepasst ist. Wie zahlreiche wichtige konkrete Funktionen lässt sich die Gammafunktion für wesentliche Teile ihres Definitionsbereiches durch Integration gewinnen.

Lemma M.22.12.1. *Seien $I \coloneqq (0, 1]$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiter seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon (0, 1] \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß*

$$x \longmapsto x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Dann gelten $f \in \mathscr{C}\left((I, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(I, \mathfrak{B}_{1,I}\right)$ sowie

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \in \begin{cases} \{+\infty\}, & \text{falls } \alpha \in (-\infty, 0), \\ (0, +\infty), & \text{falls } \alpha \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Lemma M.22.12.2. *Seien $I \coloneqq [1, +\infty)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiter sei $\alpha \in \mathbb{R}$ und die Funktion $f\colon [1, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ sei definiert gemäß*

$$x \longmapsto x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Dann gelten $f \in \mathscr{C}\left((I, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(I, \mathfrak{B}_{1,I}\right)$ sowie

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \in (0, +\infty).$$

[1)] LEONHARD EULER (∗15.04.1707; †18.09.1783) war ein Schweizer Mathematiker, der wegen seiner Beiträge zu verschiedensten Gebieten der Mathematik als einer der bedeutensten Mathematiker gilt. Auf ihn geht ein Großteil der heutigen mathematischen Symbolik zurück (z.B. e, π, i, $\sum$ und $f(x)$ als Bezeichnung einer Funktion). Er beschäftige sich unter anderem mit Differenzial- und Integralrechnung, Differenzengleichungen, elliptischen Integralen, der Theorie der Gamma- und Betafunktion, Zahlentheorie, Algebra, Graphentheorie und der Mechanik.

Lemma M.22.12.3. *Seien* $I \coloneqq (0,+\infty)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ *sowie* $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. *Weiter sei* $\alpha \in \mathbb{R}$ *und die Funktion* $f\colon (0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ *sei definiert gemäß*

$$x \longmapsto x^{\alpha-1}\mathrm{e}^{-x}.$$

Dann gilt:

(a) *Es gelten* $f \in \mathscr{C}\left((I,|.|),(\mathbb{R},|.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(I,\mathfrak{B}_{1,I}\right)$ *sowie*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \in \begin{cases} \{+\infty\}, & \text{falls } \alpha \in (-\infty,0], \\ (0,+\infty), & \text{falls } \alpha \in (0,+\infty). \end{cases}$$

(b) *Die Funktion* f *ist lokal Riemann-integrierbar auf* I *und es gilt*

$$\int\limits_I f \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \left(f(x) \restriction \left[\frac{1}{n},n\right]\right) \mathrm{d}x.$$

Das Lemma M.22.12.3 berechtigt uns nun zu folgender Begriffsbildung:

Definition M.22.12.1. Seien $I \coloneqq (0,+\infty)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Dann heißt die Funktion $\widetilde{\Gamma}\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ definiert gemäß

$$\widetilde{\Gamma}(u) \coloneqq \int\limits_I x^{u-1} \cdot \mathrm{e}^{-x} \lambda_I^{(1)}(\mathrm{d}x),$$

das Euler*sche Gammaintegral*.

Satz M.22.12.1. *Sei* $u \in (0,+\infty)$ *und es bezeichne* $\widetilde{\Gamma}$ *das* Euler*sche Gammaintegral. Dann gilt* $u+1 \in (0,+\infty)$ *sowie*

$$\widetilde{\Gamma}(u+1) = u \cdot \widetilde{\Gamma}(u).$$

Folgerung M.22.12.1. *Sei* $n \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\widetilde{\Gamma}(n) = (n-1)!$$

(b) *Sei* $k \in \mathbb{N}$. *Dann gilt*

$$\widetilde{\Gamma}\left(\frac{n}{2}+k\right) = \frac{1}{2^k} \cdot \widetilde{\Gamma}\left(\frac{n}{2}\right) \cdot \prod_{j=1}^{k} \left[n+2(j-1)\right].$$

Unser Ziel besteht darin, das Eulersche Gammaintegral adäquat auf eine „möglichst große" Teilmenge von $\mathbb{R}$ fortzusetzen. Sei dazu $s \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}$. Unter Beachtung von Teil *(a)* von Folgerung M.22.12.1 ergibt sich dann

$$\begin{aligned} \widetilde{\Gamma}(s) = (s-1)! &= \frac{(s-1)! \cdot \prod_{j=s}^{s+n} j}{\prod_{j=s}^{s+n} j} = \frac{(s+n)!}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} = \frac{n! \cdot \prod_{k=1}^{s}(n+k)}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \\ &= \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \frac{\prod_{k=1}^{s}(n+k)}{n^s} = \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \prod_{k=1}^{s} \frac{n+k}{n} \\ &= \frac{n! \cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)} \cdot \prod_{k=1}^{s} \left(1+\frac{k}{n}\right). \end{aligned}$$

Hieraus folgt wegen

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{s}\left(1+\frac{k}{n}\right)=\prod_{k=1}^{s}1=1^s=1,$$

dann

$$\widetilde{\Gamma}(s)=\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n!\cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)}\cdot\prod_{k=1}^{s}\left(1+\frac{k}{n}\right)\right]=\lim_{n\to\infty}\frac{n!\cdot n^s}{\prod_{k=0}^{n}(s+k)}.$$

Die soeben erhaltene Produktdarstellung des EULERschen Gammaintegrals für $s\in\mathbb{N}$, lässt sich tatsächlich auf $(0,+\infty)$ ausdehnen. Die Konvergenz des uneigentlichen Produkts liegt sogar auf

$$\mathbb{R}\setminus(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})=\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$$

vor. Dies ist der GAUSSsche Zugang zur Gammafunktion.

Satz M.22.12.2.

(a) *Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Für $n\in\mathbb{N}$ wird definiert*

$$\Gamma_n(x):=\frac{n!\cdot n^x}{\prod_{k=0}^{n}(x+k)}.$$

Dann ist die Folge $(\Gamma_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent und sogar gleichmäßig konvergent in jedem Intervall $(a,b]\subseteq\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$.

(b) *Es bezeichne Γ die Grenzfunktion der in* (a) *eingeführten Funktionenfolge $(\Gamma_n)_{n\in\mathbb{N}}$. Dann gilt:*

(b1) *Γ ist stetig auf $\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ und hat zudem* keine *Nullstelle.*

(b2) *Es bezeichne $\widetilde{\Gamma}$ das* EULER*sche Gammaintegral. Dann gilt*

$$\widetilde{\Gamma}=\Gamma\restriction(0,+\infty).$$

Definition M.22.12.2. Die in Satz M.22.12.2 eingeführte Funktion

$$\Gamma\colon\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\longrightarrow\mathbb{R}$$

heißt die reelle EULER*sche Gammafunktion.*

Satz M.22.12.3. *Sei $x\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$. Dann gelten $x+1\in\mathbb{R}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}$ sowie*

$$\Gamma(x+1)=x\cdot\Gamma(x).$$

Für unseren weiteren Zwecke wird sich die Kenntnis des Funktionswerts $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)$ als besonders wichtig erweisen. Aus diesem Grund werden wir uns nun mit der Berechnung dieses Wertes befassen.

Unsere Strategie basiert auf der Heranziehung der WALLISschen Produktdarstellung[2)] der Zahl $\frac{\pi}{2}$. Diese Herleitung bestimmt den Inhalt unserer nächsten Überlegungen.

Bemerkung M.22.12.1. Sei $n\in\mathbb{N}$. Dann sind die Funktionen $x\mapsto\sin^n(x)$ und $x\mapsto\cos^n(x)$ jeweils lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$. ♣

[2)] benannt nach dem englischen Mathematiker JOHN WALLIS (∗03.12.1616; †08.11.1703).

Lemma M.22.12.4. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ seien die Funktionen $\mathtt{I}_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\mathtt{J}_n \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$x \longmapsto \int_0^x \cos^n(t)\,\mathrm{d}t$$

bzw.

$$x \longmapsto \int_0^x \sin^n(t)\,\mathrm{d}t.$$

Dann gilt:

(a) *Sei $n \geq 2$ und $x \in \mathbb{R}$. Dann gelten*

$$\mathtt{I}_n(x) = \frac{1}{n}\cos^{n-1}(x) \cdot \sin(x) + \frac{n-1}{n} \cdot \mathtt{I}_{n-2}(x)$$

sowie

$$\mathtt{J}_n(x) = \frac{1}{n}\sin^{n-1}(x) \cdot \cos(x) + \frac{n-1}{n} \cdot \mathtt{J}_{n-2}(x).$$

(b) *Die Folgen $\left(\mathtt{I}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ sind monoton fallend.*

(c) *Sei $n \geq 2$. Dann gelten*

$$\mathtt{I}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \mathtt{I}_{n-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)$$

sowie

$$\mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{n-1}{n} \cdot \mathtt{J}_{n-2}\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(d) *Es ist $\mathtt{I}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathtt{J}_0\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}$ sowie $\mathtt{I}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathtt{J}_1\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$.*

(e) *Sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathtt{I}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right).$$

(f) *Sei $s \in \mathbb{N}$. Dann gelten*

$$\mathtt{J}_{2s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2} \cdot \prod_{j=1}^{s} \frac{2j-1}{2j}$$

sowie

$$\mathtt{J}_{2s+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \prod_{j=1}^{s} \frac{2j}{2j+1}.$$

(g) *Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathtt{J}_{2s}\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{1}{4^s} \cdot \binom{2s}{s} \cdot \frac{\pi}{2}.$$

(h) *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$n \cdot \mathtt{J}_{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \cdot \mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

Lemma M.22.12.5. *Für $n \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathtt{J}_n$ die Lemma M.22.12.4 eingeführte Funktion auf $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mathtt{J}_{n-2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$.

(b) *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \frac{\mathtt{J}_n\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\mathtt{J}_{n-1}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = 1$.

(c) *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \left[n \cdot \mathtt{J}_n^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}$.

(d) *Es ist* $\lim_{n\to\infty} \left[\sqrt{n} \cdot \mathtt{J}_{2n}\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

Satz M.22.12.4 (Wallis*sches Produkt*)**.** *Es gilt*

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left[\frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1}\right] = \frac{\pi}{2}.$$

Beweis. Wegen Teil *(c)* von Lemma M.22.12.5 gilt

$$\lim_{n\to\infty} \left[(2n+1) \cdot \mathtt{J}_{2n+1}^2\left(\frac{\pi}{2}\right)\right] = \frac{\pi}{2}. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil *(f)* von Lemma M.22.12.4 dann

$$\begin{aligned}
(2n+1) \cdot \mathtt{J}_{2n+1}^2\left(\frac{\pi}{2}\right) &= (2n+1) \cdot \left[\prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1}\right]^2 = (2n+1) \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} \\
&= (2n+1) \cdot \frac{2n}{2n+1} \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} \\
&= 2n \cdot \prod_{j=1}^{n-1} \frac{2j}{2j+1} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} = \frac{\prod_{j=1}^{n} 2j}{\prod_{j=1}^{n-1} (2k+1)} \cdot \prod_{j=1}^{n} \frac{2j}{2j+1} \\
&= \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1}\right).
\end{aligned} \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \prod_{j=1}^{n} \left(\frac{2j}{2j-1} \cdot \frac{2j}{2j+1}\right) = \frac{\pi}{2}.$$

□

Satz M.22.12.5. *Es gilt*

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Wegen Definition M.22.12.2 gilt

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n} \left(\frac{1}{2}+k\right)}. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil *(f)* von Lemma M.22.12.4 dann

$$\begin{aligned}\frac{n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)} &= \frac{n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{2k+1}{2}\right)} = \frac{2^{n+1} \cdot n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n}(2k+1)} = \frac{2\sqrt{n} \cdot \prod_{k=1}^{n} 2k}{\prod_{k=1}^{n}(2k+1)} = 2\sqrt{n} \cdot \prod_{k=1}^{n} \frac{2k}{2k+1} \\ &= 2\sqrt{n} \cdot \mathrm{J}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 2\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{2n+1}} \cdot \sqrt{2n+1} \cdot \mathrm{J}_{2n+1}\left(\frac{\pi}{2}\right) \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{(2n+1) \cdot \mathrm{J}_{2n+1}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)}.\end{aligned} \tag{3}$$

Wegen Teil *(c)* von Lemma M.22.12.5 ist

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt{(2n+1) \cdot \mathrm{J}_{2n+1}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\lim_{n\to\infty} (2n+1) \cdot \mathrm{J}_{2n+1}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}. \tag{4}$$

Schließlich ergibt sich dann aus (1) bis (4)

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{n! \cdot \sqrt{n}}{\prod_{k=0}^{n}\left(\frac{1}{2}+k\right)} = \lim_{n\to\infty} 2\sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \sqrt{(2n+1) \cdot \mathrm{J}_{2n+1}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{\frac{n}{2n+1}} \cdot \lim_{n\to\infty} \sqrt{(2n+1) \cdot \mathrm{J}_{2n+1}^{2}\left(\frac{\pi}{2}\right)} \\ &= 2 \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \cdot \sqrt{\frac{\pi}{2}} \\ &= \sqrt{\pi}.\end{aligned}$$

□

Folgerung M.22.12.2. *Sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\Gamma\left(\frac{2n+1}{2}\right) = \frac{\sqrt{\pi}}{2^n} \cdot \prod_{k=1}^{n} (2k-1).$$

Beweisidee. Man verwende vollständige Induktion über n mithilfe der Sätze M.22.12.3 sowie M.22.12.5. ◊

Satz M.22.12.6. *Seien $I \coloneqq (0,+\infty)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiterhin seien $s \in [0,+\infty)$ und die Funktion $f_s\colon (0,+\infty) \longrightarrow (0,+\infty)$ definiert gemäß*

$$x \longmapsto x^s \cdot \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $f_s \in \mathscr{C}\left((I,|.|),(\mathbb{R},|.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(I,\mathfrak{B}_{1,I}\right)$ und es gilt*

$$\int_I f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten*

$$\int\limits_I f_{2k} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \cdot \prod_{j=1}^{k} (2j-1), & \text{falls } k \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

sowie

$$\int\limits_I f_{2k+1} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{k!}{2}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aus der Definition von f_s folgt sogleich $f_s \in \mathscr{C}((I, |.|), (\mathbb{R}, |.|)) \cap \mathrm{Abb}(I, [0, +\infty))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.4, dass $f_s \in \mathcal{E}^*(I, \mathfrak{B}_{1,I})$ und außerdem auch lokal Riemann-integrierbar auf I ist. Hieraus folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\int\limits_I f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \left(f_s(x) \restriction \left[\frac{1}{n}, n\right] \right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Unter Verwendung der Substitutionsregel für Riemann-Integrale mit $x \coloneqq \sqrt{t}$ folgt nun

$$\int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \int\limits_{\frac{1}{n^2}}^{n^2} t^{\frac{s}{2}} \cdot \mathrm{e}^{-t} \cdot \frac{1}{2\sqrt{t}} \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int\limits_{\frac{1}{n^2}}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t. \tag{3}$$

Unter Beachtung von Teil *(b)* von Lemma M.22.12.3 angewandt auf die Teilfolge $\left(n^2\right)_{n\in\mathbb{N}}$ von $(n)_{n\in\mathbb{N}}$, Definition M.22.12.1 sowie Teil *(b2)* von Satz M.22.12.2 folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n^2}}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \int\limits_I t^{\frac{s+1}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \lambda_I^{(1)}(\mathrm{d}t) = \widetilde{\Gamma}\left(\frac{s+1}{2}\right) = \Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right). \tag{4}$$

Unter Verwendung von (1) bis (4) folgt dann schließlich

$$\int\limits_I f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} x^s \cdot \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n^2}}^{n^2} t^{\frac{s+1}{2}-1} \cdot \mathrm{e}^{-t} \mathrm{d}t = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right).$$

Zu *(b)*: Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Unter Beachtung von *(a)*, Satz M.22.12.5 und Folgerung M.22.12.2 ergibt sich

$$\int\limits_I f_{2k} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{2k+1}{2}\right) = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \prod_{j=1}^{k} (2j-1), & \text{falls } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Unter Beachtung von *(a)*, Teil *(b2)* von Satz M.22.12.2 und Teil *(a)* von Folgerung M.22.12.1 ergibt sich schließlich

$$\int\limits_I f_{2k+1} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{1}{2}\Gamma\left(\frac{(2k+1)+1}{2}\right) = \frac{1}{2}\Gamma(k+1) = \frac{1}{2}\widetilde{\Gamma}(k+1) = \frac{1}{2}k!.$$

□

M.22.13. Die Familie der Normalverteilungen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht eine parametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, welche eine zentrale Rolle in der Wahrscheinlichkeitstheorie einnimmt.

Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ sei definiert gemäß

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Dann ist g offensichtlich stetig, besitzt aber – wie aus der Analysis bekannt – keine elementare Stammfunktion. Hierdurch wird die Berechnung des Integrals $\int_{\mathbb{R}} g \mathrm{d}\lambda^{(1)}$ erschwert.

Satz M.22.13.1. *Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß*

$$x \longmapsto \mathrm{e}^{-x^2}.$$

Dann gelten $g \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x) = \sqrt{\pi}.$$

Beweis. Aus der Definition von g folgt sogleich $g \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)\right) \cap \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, [0, +\infty)\right)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.4, dass $g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und zudem lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt mittels Satz M.22.10.4

$$\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x) = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [-n, n]\right) \mathrm{d}x. \tag{1}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Da g eine achsensymmetrische Funktion ist, gilt

$$\int\limits_{-n}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [-n, n]\right) \mathrm{d}x = 2 \int\limits_{0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [-n, n]\right) \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Seien $I \coloneqq (0, +\infty)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ sowie $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Unter Beachtung von Teil *(d)* von Satz M.22.10.4 sowie Teil *(b)* von Satz M.22.12.6 folgt dann

$$\int\limits_{0}^{+\infty} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [0, +\infty]\right) \mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction \left[\frac{1}{n}, n\right]\right) \mathrm{d}x = \int\limits_{I} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction I\right) \mathrm{d}x = \frac{\sqrt{\pi}}{2}. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (1) bis (4) folgt schließlich

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x^2} \mathrm{d}\lambda^{(1)} &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [-n, n]\right) \mathrm{d}x = 2 \lim_{n\to\infty} \int\limits_{0}^{n} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction [0, n]\right) \mathrm{d}x \\
&= \int\limits_{I} \left(\mathrm{e}^{-x^2} \restriction I\right) \mathrm{d}x = 2 \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2} \\
&= \sqrt{\pi}.
\end{aligned}$$

□

Satz M.22.13.2. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,+\infty)$. Nun sei $f_{a,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ definiert gemäß*

$$f_{a,\sigma^2}(x) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right).$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $f \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R},|.|),(\mathbb{R},|.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von* (a) *werde definiert*

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \coloneqq \lambda^{(1)}_{f_{a,\sigma^2}},$$

das heißt für alle $A \in \mathfrak{B}_1$ sei

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2}(A) \coloneqq \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \int\limits_A \exp\left(-\frac{(x-a)^2}{2\sigma^2}\right) \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x).$$

Dann gelten $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ sowie $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right)$, wobei $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ gemäß $x \longmapsto \sigma x + a$ definiert ist.

(c) *Es ist* $\mathrm{Spec}\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = \mathbb{R}$.

Es folgt nun die zentrale Begriffsbildung in diesem Abschnitt:

Definition M.22.13.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,+\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.13.2 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die *Normalverteilung* mit den Parametern a und σ^2 und die in Satz M.22.13.2 eingeführte Funktion f_{a,σ^2} die *kanonische $\lambda^{(1)}$-Dichte* von $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$. Insbesondere nennen wir $\mathcal{N}_{0,1}$ die *Standardnormalverteilung*.

Es sei hier erwähnt, dass die kanonischen $\lambda^{(1)}$-Dichten der Normalverteilungsfamilie auch als Gausssche Glockenkurven bezeichnet werden. Auf dem 10 DM Schein war neben einem Porträt von Carl Friedrich Gauss auch eine Gausssche Glockenkurve zu sehen, siehe etwa Beispiel M.14.6.

M.22.14. Einige Beispiele von $\lambda^{(1)}$-stetigen Maßen aus $\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$

Zahlreiche, der in der stochastischen Anwendungen, auftretenden Maße aus $\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ besitzen die Eigenschaft der $\lambda^{(1)}$-Stetigkeit. Das Anliegen dieses Abschnitts besteht darin, einige für unsere späteren Betrachtungen bedeutsame Maße der genannten Klasse vorzustellen.

Satz M.22.14.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a,+\infty)$. Es sei $\sigma_{a,b}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$\sigma_{a,b}(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \mathbb{R}\setminus[a,b], \\ \frac{4(x-a)}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in \left[a,\frac{a+b}{2}\right], \\ \frac{4(b-x)}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in \left(\frac{a+b}{2},b\right]. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $\sigma_{a,b} \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R},|.|),(\mathbb{R},|.|)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von* (a) *werde definiert* $\mathcal{S}_{a,b} \coloneqq \lambda^{(1)}_{\sigma_{a,b}}$. *Das heißt für jedes* $A \in \mathfrak{B}_1$ *sei* $\mathcal{S}_{a,b}(A) \coloneqq \int_A \sigma_{a,b} \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. *Dann gelten* $\mathcal{S}_{a,b} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie* $\mathbb{R} \backslash [a,b] \in \mathcal{N}_{\mathcal{S}_{a,b}}$.

(c) *Es ist* $\operatorname{Spec}(\mathcal{S}_{a,b}) = [a,b]$.

(d) *Es ist* $F_{\mathcal{S}_{a,b},l} = F_{\mathcal{S}_{a,b},r}$ *und für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$F_{\mathcal{S}_{a,b},l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, a), \\ \frac{2(x-a)^2}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in \left[a, \frac{a+b}{2}\right], \\ 1 - \frac{2(b-x)^2}{(b-a)^2}, & \text{falls } x \in \left(\frac{a+b}{2}, b\right], \\ 1, & \text{falls } x \in (b, +\infty). \end{cases}$$

Definition M.22.14.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$. Dann heißt, dass in Satz M.22.14.1 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{S}_{a,b} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die *Simpson-Verteilung* oder auch *Dreiecksverteilung* mit den Parametern a und b. Im Fall $b \in (0, +\infty)$ sprechen wir bei $\mathcal{S}_{-b,b}$ auch von der *symmetrischen Simpson-Verteilung* oder *symmetrischen Dreiecksverteilung* zum Parameter b.

Für eine Abbildung der Dichte $\sigma_{a,b}$ der Simpson-Verteilung siehe etwa Beispiel M.14.11.

Bemerkung M.22.14.1. Seien die Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $b_1 \in (a_1, +\infty)$ sowie $b_2 \in (a_2, +\infty)$ so gewählt, dass $\mathcal{S}_{a_1,b_1} = \mathcal{S}_{a_2,b_2}$ erfüllt ist. Dann gilt $a_1 = a_2$ und $b_1 = b_2$. ♣

Beweis. Unter Beachtung von Teil *(c)* von Satz M.22.14.1 ergibt sich

$$[a_1, b_1] = \operatorname{Spec}(\mathcal{S}_{a_1,b_1}) = \operatorname{Spec}(\mathcal{S}_{a_2,b_2}) = [a_2, b_2].$$

Hieraus folgt sofort die Behauptung. □

Satz M.22.14.2. *Seien* $\alpha \in \mathbb{R}$ *und* $\beta \in (0, +\infty)$. *Es sei* $F_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ *definiert gemäß*

$$F_{\alpha,\beta}(x) \coloneqq \frac{\beta}{\pi} \cdot \frac{1}{\beta^2 + (x-\alpha)^2}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist* $F_{\alpha,\beta} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Unter Beachtung von* (a) *werde definiert* $\gamma_{\alpha,\beta} \coloneqq \lambda^{(1)}_{F_{\alpha,\beta}}$, *das heißt für jedes* $A \in \mathfrak{B}_1$ *sei* $\gamma_{\alpha,\beta}(A) \coloneqq \int_A F_{\alpha,\beta} \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. *Dann gelten* $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie* $\gamma_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1})$.

(c) *Es ist* $\operatorname{Spec}(\gamma_{\alpha,\beta}) = \mathbb{R}$.

(d) *Es ist* $F_{\gamma_{\alpha,\beta},l} = F_{\gamma_{\alpha,\beta},r}$ *und für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$F_{\gamma_{\alpha,\beta},l}(x) = \frac{1}{\pi} \arctan\left(\frac{x-\alpha}{\beta}\right) + \frac{1}{2}.$$

Definition M.22.14.2. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.14.2 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die *Cauchy-Verteilung* mit den Parametern α und β. Insbesondere wird $\gamma_{0,1}$ auch als *Standard-Cauchy-Verteilung* bezeichnet.

Für eine Abbildung der Dichte $F_{\alpha,\beta}$ der Cauchy-Verteilung siehe etwa Beispiel M.14.7.

Wir wenden uns nun einer Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen zu, welche insbesondere zur Modellierung der Lebensdauer von Objekten verwendet wird, welche einem Alterungsprozess unterliegen. Dies trifft zum Beispiel auf radioaktive Atome, Glühbirnen oder Transistoren zu.

Satz M.22.14.3. *Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und sei $e_\eta \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß*

$$e_\eta(x) \coloneqq 1_{[0,+\infty)}(x) \cdot \eta \cdot \mathrm{e}^{-\eta x}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $e_\eta \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von* (a) *werde definiert $E_\eta \coloneqq \lambda^{(1)}_{e_\eta}$, das heißt für jedes $A \in \mathfrak{B}_1$ sei $E_\eta(A) \coloneqq \int_A e_\eta \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. Dann gelten $E_\eta \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_{E_\eta}$.*

(c) *Es ist* $\mathrm{Spec}(E_\eta) = [0,+\infty)$.

(d) *Es ist $F_{E_\eta,l} = F_{E_\eta,r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F_{E_\eta,l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0], \\ 1 - \mathrm{e}^{-\eta x}, & \text{falls } x \in (0,+\infty). \end{cases}$$

Definition M.22.14.3. Sei $\eta \in (0,+\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.14.3 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $E_\eta \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die *Exponentialverteilung* zum Parameter η.

Für eine Abbildung der Dichte e_η der Exponentialverteilung siehe etwa Beispiel M.14.8.

Satz M.22.14.4. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\eta \in (0,+\infty)$. Sei nun $l_{a,\eta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß*

$$l_{a,\eta}(x) \coloneqq \frac{\eta}{2} \cdot \mathrm{e}^{-\eta|x-a|}.$$

Dann gilt:

(a) *Es gilt $l_{a,\eta} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}, |.|), (\mathbb{R}, |.|)) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von* (a) *sei $L_{a,\eta} \coloneqq \lambda^{(1)}_{l_{a,\eta}}$, das heißt für jedes $A \in \mathfrak{B}_1$ sei $L_{a,\eta}(A) \coloneqq \int_A l_{a,\eta} \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. Dann ist $L_{a,\eta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $T_{\frac{\eta}{2},a}(L_{0,1}) = L_{a,\eta}$.*

(c) *Es ist* $\mathrm{Spec}(L_{a,\eta}) = \mathbb{R}$.

(d) *Es ist $F_{L_{a,\eta},l} = F_{L_{a,\eta},r}$ und für $x \in \mathbb{R}$ gilt*

$$F_{L_{a,\eta},l}(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}\mathrm{e}^{\eta(x-a)}, & \text{falls } x \in (-\infty, a), \\ 1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-\eta(x-a)}, & \text{falls } x \in [a,+\infty). \end{cases}$$

Definition M.22.14.4. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\eta \in (0,+\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.14.4 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $L_{a,\eta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die *Laplace-Verteilung* mit den Parametern a und η. Insbesondere nennen wir $L_{0,1}$ auch die *Standard-Laplace-Verteilung*.

Für eine Abbildung der Dichte $l_{a,\eta}$ der Laplace-Verteilung siehe etwa Beispiel M.14.9.

Satz M.22.14.5. *Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Sei $h_{\alpha,\beta} \colon \mathbb{R} \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß*

$$h_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0], \\ \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x}, & \text{falls } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

Dann gilt:

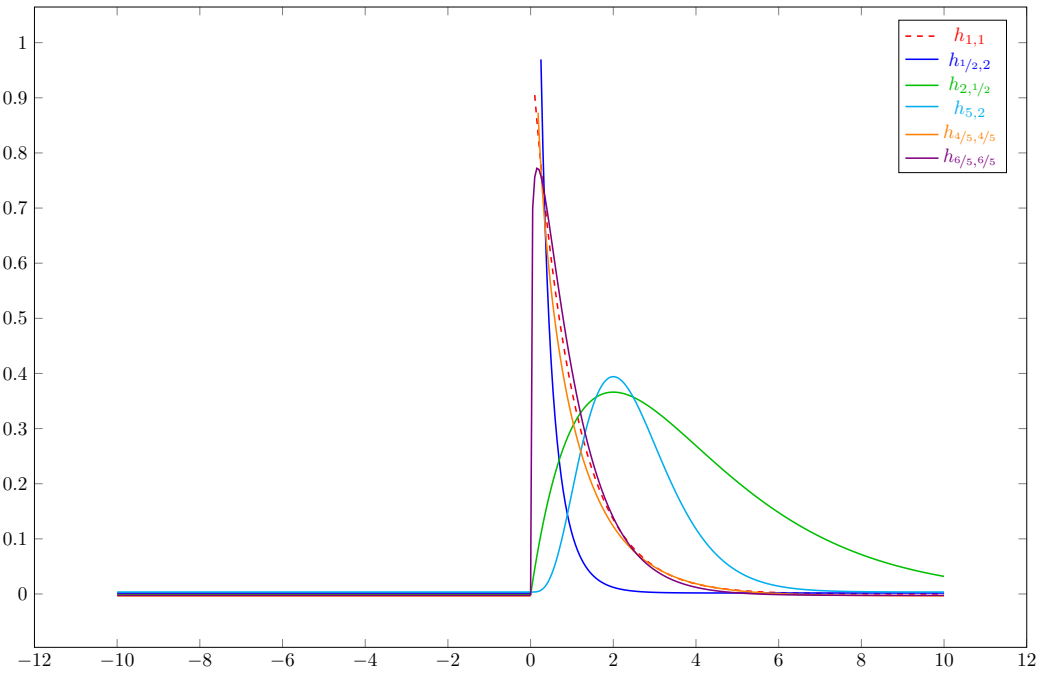
(a) *Es ist $h_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von (a) sei $\Gamma_{\alpha,\beta} := \lambda^{(1)}_{h_{\alpha,\beta}}$, das heißt für jedes $A \in \mathfrak{B}_1$ sei $\Gamma_{\alpha,\beta}(A) := \int_A h_{\alpha,\beta} \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. Dann gilt $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+ \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $(-\infty, 0] \in \mathcal{N}_{\Gamma_{\alpha,\beta}}$.*

(c) *Es ist $\Gamma_{\alpha,\beta} = T_{\frac{1}{\beta},0}(\Gamma_{\alpha,1})$.*

(d) *Es ist $\mathrm{Spec}(\Gamma_{\alpha,\beta}) = [0, +\infty)$.*

Definition M.22.14.5. Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.14.5 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+ \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die *Gammaverteilung* mit den Parametern α und β.



Wir erkennen nun, dass die in Definition M.22.14.3 eingeführte Exponentialverteilung spezielle Gammaverteilungen sind:

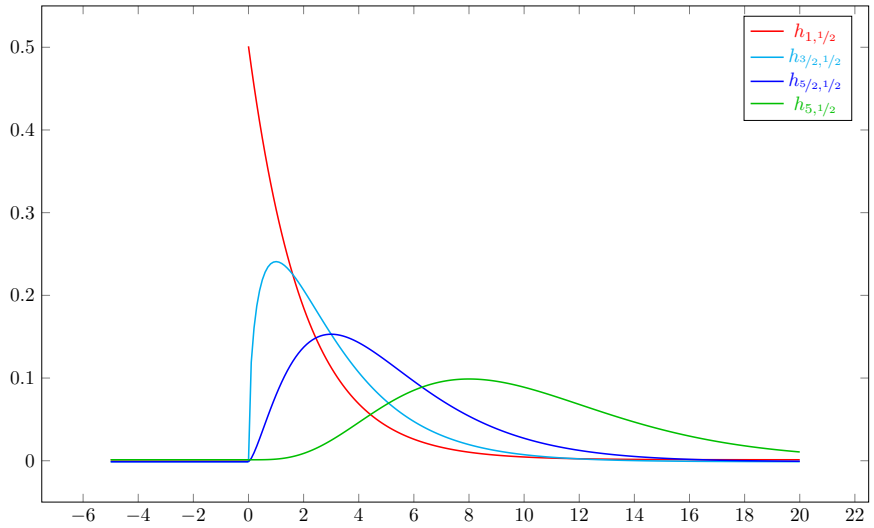
Satz M.22.14.6. *Sei $\eta \in (0, +\infty)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$.*

(b) *Es ist $E_\eta = T_{\frac{1}{\eta},0}(E_1)$.*

Wir heben nun eine spezielle Teilklasse von Gammaverteilungen, welche für die mathematische Statistik von besonderem Interesse ist, heraus.

Definition M.22.14.6. Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ die Gammaverteilung mit den Parametern $\frac{n}{2}$ und $\frac{1}{2}$. Dann wird $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ auch als *zentrale Chiquadrat-Verteilung* mit n Freiheitsgraden bezeichnet. Anstelle von $\Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ verwenden wir zudem die Symbolik χ^2_n.



Bemerkung M.22.14.2. Für $A \in \mathfrak{B}_1 \cap (0,+\infty)$ gilt

$$\chi^2_n(A) = \Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}(A) = \frac{1}{2^{\frac{n}{2}}\Gamma\left(\frac{n}{2}\right)} \int\limits_A x^{\frac{n}{2}-1} \mathrm{e}^{-\frac{x}{2}} \lambda^{(1)}(\mathrm{d}x).$$

♣

Satz M.22.14.7. *Sei $T\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto x^2$. Dann ist T eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt*

$$T(\mathcal{N}_{0,1}) = \chi^2_n.$$

Wir studieren nun eine 2-parametrische Familie von Wahrscheinlichkeitsmaßen, welche die Familie der Exponentialverteilung umfasst und ähnlich wie diese rege Anwendung bei der Modellierung der Lebensdauer von verschiedenen Phänomenen und Objekten in der Natur und Technik findet.

Satz M.22.14.8. *Seien $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$. Sei weiter $w_{\alpha,\beta}\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß*

$$w_{\alpha,\beta}(x) := \begin{cases} \alpha \cdot \beta \cdot x^{\alpha-1} \mathrm{e}^{-\beta x^\alpha}, & \text{falls } x \in (0,+\infty), \\ 0, & \text{falls } x \in (-\infty,0]. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $w_{\alpha,\beta} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Unter Beachtung von* (a) *sei $\mathcal{W}_{\alpha,\beta} := \lambda^{(1)}_{w_{\alpha,\beta}}$, das heißt für jedes $A \in \mathfrak{B}_1$ sei $\mathcal{W}_{\alpha,\beta}(A) := \int_A w_{\alpha,\beta} \mathrm{d}\lambda^{(1)}$. Dann gilt $\mathcal{W}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie $(-\infty,0] \in \mathcal{N}_{\mathcal{W}_{\alpha,\beta}}$.*

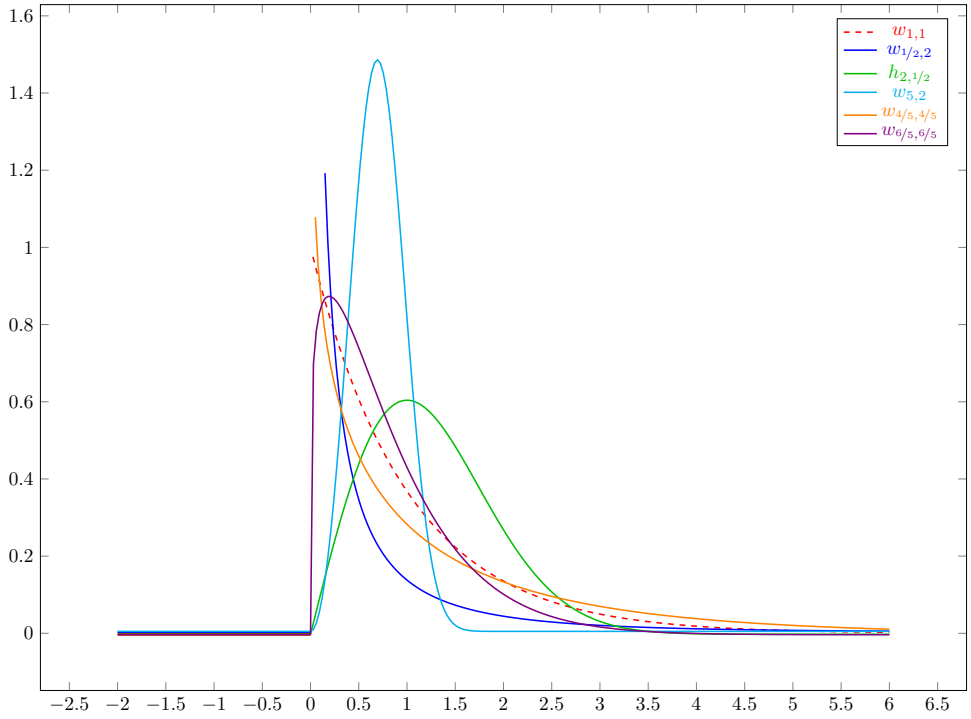
(c) *Es ist* $\mathrm{Spec}(\mathcal{W}_{\alpha,\beta}) = [0,+\infty)$.

(d) *Es ist* $F_{\mathcal{W}_{\alpha,\beta},l} = F_{\mathcal{W}_{\alpha,\beta},r}$ *und für* $x \in \mathbb{R}$ *gilt*

$$F_{\mathcal{W}_{\alpha,\beta},l}(x) = \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0], \\ 1 - \mathrm{e}^{-\beta x^{\alpha}}, & \text{falls } x \in (0, +\infty). \end{cases}$$

(e) *Es ist* $\mathcal{W}_{1,\beta} = \Gamma_{1,\beta} = E_{\beta}$.

Definition M.22.14.7. Seien $\alpha, \beta \in (0, +\infty)$. Dann heißt das in Satz M.22.14.8 eingeführte Wahrscheinlichkeitsmaß $\mathcal{W}_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die WEIBULL[1)]-*Verteilung* mit den Parametern α und β.



[1)] benannt nach dem schwedischen Mathematiker und Ingeniuer WALODDI WEIBULL (∗18.06.1887; †12.10.1979).

Weiterführende Maßtheorie

M.23. Momente und weitere numerische Charakteristika von Maßen

M.23.1. Allgemeine Momentenprobleme

In zahlreichen Anwendungen wird man auf Aufgaben folgenden Typs geführt: Gegeben seien ein nichttrivialer messbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Teilmenge $\mathcal{M}$ von $\mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Menge H, eine Abbildung $L\colon \mathcal{M} \longrightarrow H$ sowie eine nichtleere Teilmenge H_0 von H. Es ist dann die Menge aller derjenigen Maße $\mu \in \mathcal{M}$ zu bestimmen, welche der Bedingung $L(\mu) \in H_0$ genügen.

Dies geht in jener Vorstellung einher, dass man ein Phänomen vorliegen hat, über das man die Annahme postulierte dass dessen Beschreibung durch ein Maß $\widetilde{\mu} \in \mathcal{M}$ modelliert wird. Hierbei wird dann weiterhin angenommen, dass nicht a priori die vollständige Information über dieses Maß $\widetilde{\mu}$ vorhanden ist. Es möge also nicht die Kenntnis von $\widetilde{\mu}$ selbst, sondern nur die Kenntnis einer aus $\widetilde{\mu}$ abgeleiteten Größe $L(\widetilde{\mu})$ vorliegen. Aus der Kenntnis $L(\widetilde{\mu})$ ist dann durch entsprechende Analysen die konkrete Gestalt von $\widetilde{\mu}$ zu ermitteln. Das bedeutet, wir haben die Urbildmenge von $L(\widetilde{\mu})$ unter der Abbildung L zu bestimmen.

Erweist sich die Urbildmenge als einelementig, so besitzt unsere Aufgabe eine eindeutige Lösung. Andernfalls sind wir gezwungen, eine zusätzliche Analyse dieser Urbildmenge vorzunehmen. Praktisch bedeutet dies, dass man zumeist auf dieser Urbildmenge ein Extremalprinzip festgelegt wird und dass durch Behandlung der zugehörigen Extremalaufgabe ein entsprechendes Element in eindeutiger Weise ausgesondert werden kann.

Wir wenden uns nun der konkreten Aufgabe eines Prinzips zur Konstruktion von Abbildungen L zu, welche die oben geschilderte Funktion erfüllen können. Unser Prinzip wird hierbei darin bestehen, diese Abbildung L via Integration einer geeigneten Funktionenmenge festzulegen. Die konkrete Wahl dieser Funktionenmenge sollte hierbei so erfolgen, dass diese einerseits möglichst einfach handhabbar ist und darüber hinaus aber andererseits möglichst in irgendeiner Weise repräsentativ für den zugrundeliegenden messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$ ist, also viel Information über diesen vermittelt. Wir werden somit auf die folgende abstrakte Aufgabenstellung geführt:

Allgemeines Momentenproblem. Gegeben seien ein nichttrivialer messbarer Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$, eine nichtleere Indexmenge I sowie Familien $(f_\iota)_{\iota\in I}$ bzw. $(c_\iota)_{\iota\in I}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ bzw. $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+\left((\Omega, \mathfrak{A}), (f_\iota)_{\iota\in I}, (c_\iota)_{\iota\in I}\right)$ all jener Maße $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{A})$ zu bestimmen, welche den folgenden Eigenschaften genügen:

(I) Für alle $\iota \in I$ gilt $f_\iota \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(II) Für alle $\iota \in I$ gilt

$$\int\limits_\Omega f_\iota \mathrm{d}\mu = c_\iota.$$

Wir stellen nun den Zusammenhang zu unseren obigen allgemeinen Überlegungen her. Es ist hier $\mathcal{M}$ die Menge aller jener Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\Omega, \mathfrak{A})$, welche für alle $\iota \in I$ der Bedingung $f_\iota \in$

$\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ genügen. Weiterhin ist H die Menge $\operatorname{Abb}(I, \mathbb{R})$ aller Abbildungen von I nach $\mathbb{R}$ sowie H_0 die Einermenge, welche die Abbildung $h \in \operatorname{Abb}(I, \mathbb{R})$ enthält, die für $\iota \in I$ durch $h(\iota) = c_\iota$ gegeben ist.

Wir heben nun den für unsere nachfolgenden Betrachtungen zentralen Spezialfall des obigen allgemeinen Momentenproblems besonders heraus.

Potenzmomentenproblem. Es seien $A \in \mathfrak{B}_1 \setminus \{\varnothing\}$, $(\Omega, \mathfrak{A}) := (A, \mathfrak{B}_1 \cap A)$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}_0$ und für $k \in I$ sei $f_k \colon A \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto x^k$.

Ist speziell $I = \mathbb{N}_0$ sowie $A = \mathbb{R}$ bzw. $A = [0, +\infty)$ bzw. A ein kompaktes Intervall von $\mathbb{R}$, so spricht man von einem HAMBURGERschen bzw. STIELTJESschen bzw. HAUSDORFFschen Momentenproblem.

Aus der Sicht der Wahrscheinlichkeitstheorie ist insbesondere das HAMBURGERsche Momentenproblem von Interesse.

M.23.2. Potenzmomente von Maßen auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Sei $m \in \mathbb{N}$. Im $\mathbb{R}^m$ erscheint die Menge der dort definierten reellen Polynomfunktionen in m Veränderlichen als eine repräsentative Funktionenmenge. Diese Menge ist ein Vektorraum in denen die Monome eine natürliche Basis bilden. Aus diesem Grunde erscheint es natürlich, die Integrale der Monome bezüglich eines Maßes $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ als Kenngröße zur Klassifikation von derartigen Maßen zu verwenden.

Bemerkung M.23.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Es sei

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}, \quad (x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto \prod_{j=1}^{m} x_j^{k_j}.$$

Dann gelten $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}^m, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$, $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$ sowie auch $\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Bemerkung M.23.2.1 führt auf folgende Begriffsbildung. Hierbei sei daran erinnert, dass wegen Satz M.22.4.1 eine Funktion $f \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$ genau dann μ-integrierbar ist, wenn dies für $|f|$ zutrifft.

Definition M.23.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann heißt

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \mathrm{d}\mu$$

das $(k_1, \ldots, k_m)$*-te absolute Moment von* μ. Falls $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$, so sagt man dass das $(k_1, \ldots, k_m)$-te Moment von μ existiert und nennt

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) := \int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu$$

das $(k_1, \ldots, k_m)$*-te Moment von* μ sowie $\sum_{j=1}^m k_j$ dessen *Ordnung.*

Bemerkung M.23.2.2. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(a) Es gilt $\mathcal{M}_{(0,0,\ldots,0)}(\mu) = \mu(\mathbb{R}^m)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Das $(0,0,\ldots,0)$-te Moment von μ existiert.

(c) Sei *(i)* erfüllt. Dann gilt

$$M_{(0,0,\ldots,0)}(\mu) = \mathcal{M}_{(0,0,\ldots,0)}(\mu).$$

(d) Sei $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty)$ erfüllt ist. Dann gilt

$$\left|M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu)\right| \leq \mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu). \qquad \clubsuit$$

Für $m \in \mathbb{N}$ und $R \in (0,+\infty)$ sei

$$K'_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1}; R) \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, |\mathbf{0}_{m\times 1} - \mathbf{x}| \leq R\}.$$

Satz M.23.2.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so beschaffen, dass ein $R \in (0,+\infty)$ mit $\mathbb{R}^m \setminus K'_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1}; R) \in \mathcal{N}_\mu$ existiert. Weiter seien $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ und $k \coloneqq \sum_{j=1}^m k_j$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in \left[0, R^k \mu(\mathbb{R}^m)\right]$$

sowie

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in \left[-R^k\mu(\mathbb{R}^m), R^k\mu(\mathbb{R}^m)\right].$$

In stochastischen Anwendungen werden oft $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen X auf einem Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ betrachtet. Diese werden am umfassendsten durch die Verteilung P_X beschrieben. Wir wollen die Momente von P_X in Termen von X ausdrücken. Diese Fragestellung wird im folgenden Satz behandelt, der eine noch allgemeinere Situation erfasst.

Satz M.23.2.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \nu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{X}\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}^m$ eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Weiter seien $\mathbf{X} \coloneqq (X_1,\ldots,X_m)^T$ und $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mathbf{X}(\nu)) = \int_\Omega \prod_{j=1}^m |X_j(\omega)|^{k_j} \, \nu(\mathrm{d}\omega).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Das $(k_1,\ldots,k_m)$-te Moment von $\mathbf{X}(\nu)$ existiert.*

(ii) *Es ist $\prod_{j=1}^m X_j^{k_j} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \nu; \mathbb{R})$.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mathbf{X}(\nu)) = \int_\Omega \prod_{j=1}^m [X_j(\omega)]^{k_j} \, \nu(\mathrm{d}\omega).$$

(d) *Sei* (i) *erfüllt und für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gelte $X_j(\Omega) \subseteq [0,+\infty)$. Dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mathbf{X}(\nu)) = \mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mathbf{X}(\nu)).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt

$$\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{1}$$

Unter Verwendung von Definition M.23.2.1, (1) und Satz M.22.9.1 folgt

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\mathbf{X}\left(\nu\right)\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \mathrm{d}\left[\mathbf{X}\left(\nu\right)\right] = \int\limits_{\Omega} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \circ \mathbf{X} \mathrm{d}\nu \\ &= \int\limits_{\Omega} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ \mathbf{X}\right| \mathrm{d}\nu = \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{m} \left|X_j\left(\omega\right)\right|^{k_j} \nu\left(\mathrm{d}\omega\right).\end{aligned} \tag{2}$$

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)*.

Zu *(c)*: Wegen *(i)* und Definition M.23.2.1 gilt nach Satz M.22.4.1

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mathbf{X}\left(\nu\right); \mathbb{R}\right). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (3) folgt mit den Teilen *(b)* und *(c)* von Satz M.22.9.2

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ \mathbf{X} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega, \mathfrak{A}, \nu; \mathbb{R}\right)$$

und

$$\begin{aligned}M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\mathbf{X}\left(\nu\right)\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \mathrm{d}\left[\mathbf{X}\left(\nu\right)\right] = \int\limits_{\Omega} P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ \mathbf{X} \mathrm{d}\nu \\ &= \int\limits_{\Omega} \prod_{j=1}^{m} \left[X_j\left(\omega\right)\right]^{k_j} \nu\left(\mathrm{d}\omega\right).\end{aligned} \tag{4}$$

Zu *(d)*: Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt nach Voraussetzung $|X_j| = X_j$. Aus (2) und (4)

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\mathbf{X}\left(\nu\right)\right) = \mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\mathbf{X}\left(\nu\right)\right). \qquad \square$$

Bemerkung M.23.2.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ so gewählt, dass $M_{(2k_1,\ldots,2k_m)} \in [0, +\infty)$. Dann ist $M_{(2k_1,\ldots,2k_m)}\left(\mu\right) = \mathcal{M}_{(2k_1,\ldots,2k_m)}\left(\mu\right)$ und somit insbesondere auch

$$\mathcal{M}_{(2k_1,\ldots,2k_m)}\left(\mu\right) \in [0, +\infty). \qquad \clubsuit$$

Satz M.23.2.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$, I ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(a_s)_{s\in I}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$, $(\mathbf{x}_s)_{s\in I}$ Folge aus $\mathbb{R}^m$. Für $s \in I$ sei*

$$\mathbf{x}_s = \begin{pmatrix} x_1^{(s)} \\ \vdots \\ x_m^{(s)} \end{pmatrix}.$$

Weiter seien μ das durch $\mu := \sum_{s\in I} a_s \varepsilon_{\mathbf{x}_s;\mathfrak{B}_m}$ definierte Element aus $\mathcal{M}_+^d\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:

(a) *Es ist*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \sum_{s\in I}\left(\prod_{j=1}^{m}\left|x_j^{(s)}\right|^{k_j}\right)\cdot a_s.$$

(b) *Sei* $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty)$. *Dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \sum_{s\in I}\left(\prod_{j=1}^{m}\left[x_j^{(s)}\right]^{k_j}\right)\cdot a_s.$$

(c) *Sei* I *endlich. Dann ist* $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Beispiel M.22.2.4.

Zu *(b)*: Dies folgt aus den Beispielen M.22.4.3 und M.22.4.4.

Zu *(c)*: Dies folgt aus *(a)*. □

Beispiel M.23.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{c} = (c_1,\ldots,c_m)^T \in \mathbb{R}^m$ sowie $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:

(a) Es ist

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \prod_{j=1}^{m}|c_j|^{k_j}.$$

(b) Es ist

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \prod_{j=1}^{m}c_j^{k_j}.$$

Satz M.23.2.4. *Seien* $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ *und* $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}$ *die in Bemerkung M.*23.2.1 *definierte Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Es sind* $\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \circ f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ *und*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu_f) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

(b) *Folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu_f) \in [0,+\infty)$.

(ii) *Es gilt* $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ f \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,\mu;\overline{\mathbb{R}}\right)$.

(c) *Sei* (i) *erfüllt, dann gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu_f) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \circ f\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(d1)* von Satz M.22.2.4.

Zu *(b)* bzw. *(c)*: Dies folgt aus Teil *(b)* bzw. *(c)* von Satz M.22.4.6. □

Satz M.23.2.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$, I Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(a_s)_{s\in I}$ bzw. $(\mu_s)_{s\in I}$ Folgen aus $[0,+\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\sum_{s\in I} a_s\mu_s \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

und es gilt

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\sum_{s\in I} a_s\mu_s\right) = \sum_{s\in I} a_s\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu_s).$$

(b) *Sei $(a_s)_{s\in I}$ Folgen aus $[0,+\infty)$ und sei $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\sum_{s\in I} a_s\mu_s\right) \in [0,+\infty)$. Dann gilt:*

(b1) *Sei $s \in I$. Dann gilt $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty)$.*

(b2) *Es gilt*

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\sum_{s\in I} a_s\mu_s\right) = \sum_{s\in I} a_s M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu).$$

M.23.3. Potenzmomente von Maßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Bemerkung M.23.3.1. Seien $k \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so beschaffen, so dass $(-\infty, 0) \in \mathcal{N}_\mu$ und $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0,+\infty)$. Dann gilt $M_k(\mu) = \mathcal{M}_k(\mu)$ und somit $M_k(\mu) \in [0,+\infty)$. ♣

Wir wenden uns nun einer speziellen Teilklasse von $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu. Hierzu führen wir zunächst eine etwas allgemeinere Begriffsbildung ein.

Definition M.23.3.1. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$ und es bezeichne $\mathcal{K}(\Omega, \rho)$ das System der kompakten Teilmengen von (Ω, ρ). Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega, \mathfrak{B})$. Dann heißt μ ein *Borel-Maß,* wenn für jedes kompakte $K \in \mathcal{K}(\Omega, \rho)$ dann $\mu(K) \in [0,+\infty)$ gilt.

Bezeichnung. Seien (Ω, ρ) ein metrischer Raum mit Borelscher σ-Algebra $\mathfrak{B}$. Es bezeichne $\widetilde{\mathcal{M}}_+(\Omega, \mathfrak{B})$ die Menge aller Borel-Maße auf $(\Omega, \mathfrak{B})$.

Bemerkung M.23.3.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ σ-endlich. ♣

Bemerkung M.23.3.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Für jedes beschränkte $B \in \mathfrak{B}_m$ gilt $\mu(B) \in [0,+\infty)$. ♣

Beweis. Man beachte, dass $\mathcal{K}(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ nach dem Satz von Bolzano-Weierstrass gerade aus denjenigen Mengen aus $\mathcal{A}(\mathbb{R}^m, |\cdot|)$ besteht, welche zudem beschränkt sind. □

Satz M.23.3.1. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und weiter sei $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0,+\infty)$. Sei $l \in \mathbb{Z}_{0,k}$. Dann gelten $\mathcal{M}_l(\mu) \in [0,+\infty)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

BEWEIS. Wegen $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ gilt

$$\mu\left([-1,1]\right) \in [0,+\infty)\,. \tag{1}$$

Wegen $[-1,1] \in \mathfrak{B}_1$ gilt nach Bemerkung M.22.1.1 und Bemerkung M.19.8

$$1_{[-1,1]} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{2}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]} \mathrm{d}\mu = \mu\left([-1,1]\right). \tag{3}$$

Wegen Bemerkung M.23.2.1 ist

$$\left\{\left|P_{k;\mathbb{R}}\right|, \left|P_{l;\mathbb{R}}\right|\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{4}$$

und somit gilt nach Teil *(b)* von Satz M.22.2.2

$$1_{[-1,1]} + \left|P_{k;\mathbb{R}}\right| \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{5}$$

Wegen $l \in \mathbb{Z}_{0,k}$ gilt $x \in [-1,1]$ bzw. $x \in \mathbb{R} \setminus [-1,1]$ dann

$$\left|P_{l;\mathbb{R}}\left(x\right)\right| = \left|x^l\right| \leq 1_{[-1,1]}\left(x\right)$$

bzw.

$$\left|P_{l;\mathbb{R}}\left(x\right)\right| = \left|x\right|^l \leq \left|x\right|^k = \left|P_{k;\mathbb{R}}\left(x\right)\right|$$

und somit gilt

$$\left|P_{l,\mathbb{R}}\left(x\right)\right| \leq 1_{[-1,1]}\left(x\right) + \left|P_{k;\mathbb{R}}\left(x\right)\right|. \tag{6}$$

Unter Verwendung von Definition M.23.2.1, (4) bis (6), den Teilen *(c)* und *(b)* von Satz M.22.2.2 und (3) folgt nun

$$\begin{aligned} M_l\left(\mu\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} \left|P_{l;\mathbb{R}}\right| \mathrm{d}\mu &\leq \int\limits_{\mathbb{R}} \left(1_{[-1,1]} + \left|P_{k;\mathbb{R}}\right|\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} 1_{[-1,1]} \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{R}} \left|P_{k;\mathbb{R}}\right| \mathrm{d}\mu \\ &= \mu\left([-1,1]\right) + \mathcal{M}_k\left(\mu\right), \end{aligned}$$

also wegen (1) und $\mathcal{M}_k\left(\mu\right) \in [0,+\infty)$ dann

$$\mathcal{M}_l\left(\mu\right) \in [0,+\infty)\,. \tag{7}$$

Wegen Bemerkung M.23.2.2 gilt $\mathcal{M}_0\left(\mu\right) = \mu\left(\mathbb{R}\right)$, also wegen (7) dann

$$\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \qquad \square$$

Bezeichnung. Für $k \in \mathbb{N}_0$ seien

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) &\coloneqq \left\{\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \,\middle|\, \mathcal{M}_k\left(\mu\right) \in [0,+\infty)\right\}, \\ \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) &\coloneqq \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \cap \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \end{aligned}$$

Weiter seien

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) &\coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right), \\ \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) &\coloneqq \bigcap_{n=1}^{\infty} \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \end{aligned}$$

Bemerkung M.23.3.4. Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$, so dass $l \leq k$ gilt. Dann ist

$$\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,l}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,0}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) = \mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Verwende Satz M.23.3.1 und Teil *(b)* von Bemerkung M.23.2.2. □

Bezeichnung. Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Es bezeichne $\mathscr{P}_{\mathbb{R},s}$ die Menge aller Polynomfunktionen $P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Grad s nicht übersteigt. Weiter sei

$$\mathscr{P}_{\mathbb{R}} \coloneqq \bigcup_{s=0}^{\infty} \mathscr{P}_{\mathbb{R},s}.$$

Bemerkung M.23.3.5. Sei $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(a) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,s}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(ii) Es gilt $\mathscr{P}_{\mathbb{R},s} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(iii) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(iv) Es gilt $\mathscr{P}_{\mathbb{R}} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right)$. $\clubsuit$

Satz M.23.3.2. *Seien $\mu \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, $k \in \mathbb{N}_0$, $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ und $a \in \mathbb{R}$. Weiterhin sei $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto \sigma x + a$. Dann ist $T_{\sigma,a}$ $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar und es gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{M}_k(\mu) \in [0, +\infty)$.*

(ii) *Es gilt $\mathcal{M}_k\left(T_{\sigma,a}(\mu)\right) \in [0, +\infty)$.*

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt*

$$M_k\left(T_{\sigma,a}(\mu)\right) = \sum_{l=0}^{k} \binom{k}{l} a^{k-l} \sigma^l M_l(\mu).$$

M.23.4. Erwartungswert und Varianz eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$

Im Mittelpunkt steht nun die für stochastische Anwendungen besonderes interessante Klasse $\mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Wir werden jedem Maß dieser Klasse vor dem Hintergrund dieses Abschnitts zwei wichtige Kenngrößen zuordnen. Die erste dieser Größen beschreibt das Gravitationszentrum von μ, die zweite das Schwanken von μ um dieses Gravitationszentrum.

Definition M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann wird die Zahl $M_1(\mu)$ der *Erwartungswert von μ* genannt.

Im Folgenden sei für $\sigma \in \mathbb{R}$ und $a \in \mathbb{R}$ dann $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto \sigma x + a$. Es sei daran erinnert, dass $T_{\sigma,a}$ auch $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar ist.

Satz M.23.4.1. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gilt:*

(a) *Es gilt* $T_{\sigma,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Es ist* $M_1\left(T_{\sigma,a}(\mu)\right) = \sigma M_1(\mu) + a$, *also*

$$M_1\left(T_{\sigma,a}(\mu)\right) = T_{\sigma,a}\left(M_1(\mu)\right).$$

BEWEIS. Die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* folgt aus Teil *(a)*bzw. *(b)* von Satz M.23.3.2. □

Definition M.23.4.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann heißt μ *zentriert,* falls $M_1(\mu) = 0$ ist.

Bemerkung M.23.4.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann ist $T_{1,-M_1(\mu)}(\mu)$ ein zentriertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. ♣

Definition M.23.4.3. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann heißt $T_{1,-M_1(\mu)}(\mu)$ die *Zentrierung von* μ.

Definition M.23.4.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann wird die Größe

$$\operatorname{var}(\mu) := M_2\left(T_{1,-M_1(\mu)}(\mu)\right)$$

die *Varianz von* μ genannt.

Satz M.23.4.2. *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\operatorname{var}(\mu) = \int_{\mathbb{R}} \left[x - M_1(\mu)\right]^2 \mu(\mathrm{d}x).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{var}(\mu) \in [0, +\infty)$.

(ii) *Es ist* $M_2(\mu) \in [0, +\infty)$.

(c) *Es gilt*

$$\operatorname{var}(\mu) = \mathcal{M}_2(\mu) - \left[M_1(\mu)\right]^2.$$

(d) *Sei* $\mathcal{M}_2(\mu) \in [0, +\infty)$. *Dann gilt*

$$\operatorname{var}(\mu) = M_2(\mu) - \left[M_1(\mu)\right]^2.$$

Lemma M.23.4.1. *Sei* $a \in (0, +\infty)$ *und sei* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *so gewählt, dass* $\mathbb{R} \setminus [-a, a] \in \mathcal{N}_\mu$. *Dann gelten* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie* $M_1(\mu) \in [-a, a]$ *und* $\operatorname{var}(\mu) \in \left[0, a^2\right]$.

Das nachfolgende Resultat ist eine unmittelbare Konsequenz aus Satz M.22.3.2 und Teil *(a)* von Satz M.23.4.1.

Satz M.23.4.3 (Ungleichung von TSCHEBYSCHOV)**.** *Seien* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *und* $\alpha \in (0, +\infty)$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $p \in (0, +\infty)$. *Dann ist* $\mathbb{R}^1 \setminus \left(M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha\right) \in \mathfrak{B}_1$, $\left|T_{1,-M_1(\mu)}\right|^p \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie*

$$\mu\left(\mathbb{R}^1 \setminus \left(M_1(\mu) - \alpha, M_1(\mu) + \alpha\right)\right) \leq \frac{1}{\alpha^p} \int_{\mathbb{R}} \left|T_{1,-M_1(\mu)}\right|^p \mathrm{d}\mu.$$

(b) *Es gilt*

$$\mu\left(\mathbb{R}^1 \setminus \left(M_1(\mu)-\alpha, M_1(\mu)+\alpha\right)\right) \leq \frac{\operatorname{var}(\mu)}{\alpha^2}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es ist

$$\mathbb{R}^1 \setminus \left(M_1(\mu)-\alpha, M_1(\mu)+\alpha\right) = \left(T_{1,-M_1(\mu)}\right)^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus (-\alpha,\alpha)\right) = \left\{\left|T_{1,-M_1(\mu)}\right| \geq \alpha\right\}. \quad (1)$$

Da $T_{1,-M_1(\mu)}$ wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar ist, folgt bei Beachtung von (1) mit Satz M.22.3.2 alle Behauptungen von *(a)*.

Zu *(b)*: Dies ergibt such durch die Wahl $p = 2$ in *(a)*. □

Beispiel M.23.4.1. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt:

(a) Es gilt $\mathcal{M}_k\left(\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}\right) = |a|^k$ und $M_k\left(\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}\right) = a^k$.

(b) Es gilt $\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $\operatorname{var}\left(\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}\right) = 0$.

Satz M.23.4.4. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\operatorname{var}(\mu) \in [0, +\infty]$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{var}(\mu) = 0$.

(ii) *Es ist* $\mu = \varepsilon_{M_1(\mu),\mathfrak{B}_1}$.

Folgerung M.23.4.1. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt*

$$\left[M_1(\mu)\right]^2 \leq \mathcal{M}_2(\mu),$$

wobei die Gleichheit genau dann vorliegt, wenn mit einem gewissen $a \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\mu = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}$ besteht.

Satz M.23.4.5. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Dann gelten $T_{\alpha,a}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und*

$$\operatorname{var}\left(T_{\sigma,a}(\mu)\right) = |\sigma|^2 \operatorname{var}(\mu).$$

Insbesondere ist also $\operatorname{var}\left(T_{1,a}(\mu)\right) = \operatorname{var}(\mu)$.

Wir wenden uns nun einer wichtigen Teilklasse von $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu.

Definition M.23.4.5. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann heißt μ *standardisiert,* falls $M_1(\mu) = 0$ und $\operatorname{var}(\mu) = 1$ gilt.

Bemerkung M.23.4.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so beschaffen, dass $\operatorname{var}(\mu) \in (0, +\infty)$ ist. Seien

$$\sigma := \frac{1}{\sqrt{\operatorname{var}(\mu)}} \qquad \text{und} \qquad a := \frac{-M_1(\mu)}{\sqrt{\operatorname{var}(\mu)}}.$$

Dann ist $T_{\sigma,a}(\mu)$ ein standardisiertes Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. ♣

Bemerkung M.23.4.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.23.4.6. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so gewählt, dass $\operatorname{var}(\mu) \in (0, +\infty)$. Weiter seien σ und a wie in Bemerkung M.23.4.2 erklärt. Dann heißt das Maß $T_{\sigma,a}(\mu)$ die *Standardisierung von μ.*

M.23.5. Maße von k-ter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht nun die Aufgabe eine geeignete Verallgemeinerung von Satz M.23.3.1 für den Fall $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ zu finden. Das nachfolgende Beispiel zeigt, dass sich die Aussage von Satz M.23.3.1 nicht unmittelbar auf den Fall $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ verallgemeinern lässt.

Beispiel M.23.5.1. Seien $I \coloneqq (0,1)$, $\mathfrak{B}_{1,I} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I$ und $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I}$. Weiter seien $\alpha \in (0,1)$ sowie $\beta \in (\alpha, 1)$. Außerdem seien $X_1 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $X_2 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto \frac{1}{u} \cdot \left[1_{(0,\beta)}(u)\right] \qquad \text{bzw.} \qquad \frac{1}{1-u} \cdot \left[1_{(\alpha,1)}(u)\right]$$

und sei $\mathbf{X} \coloneqq (X_1, X_2)^T$. Dann ist $\mathbf{X}$ eine $\mathfrak{B}_{1,I}$-$\mathfrak{B}_2$-messbare Abbildung und es gelten

$$\mathcal{M}_{(1,1)}\left(X\left(\lambda_1^{(1)}\right)\right) \in (0, +\infty),$$

aber

$$\mathcal{M}_{(1,0)}\left(X\left(\lambda_1^{(1)}\right)\right) = +\infty \qquad \text{und} \qquad \mathcal{M}_{(0,1)}\left(X\left(\lambda_1^{(1)}\right)\right) = +\infty.$$

Beweis. Sei $f_1 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $f_2 \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto \frac{1}{u} \qquad \text{bzw.} \qquad u \longmapsto \frac{1}{1-u}.$$

Dann gilt

$$\{f_1, f_2\} \subseteq \mathscr{C}\left((I, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right). \tag{1}$$

Da $\mathfrak{B}_{1,I}$ die Borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes $(I, |\cdot|)$ ist, folgt wegen (1) mittels Satz M.16.8 nun

$$\{f_1, f_2\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{1,I}; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen $\{(0,\beta), (\alpha,1)\} \subseteq \mathfrak{B}_{1,I}$ folgt aus Beispiel M.16.3 dann

$$\left\{1_{(0,\beta)}, 1_{(\alpha,1)}\right\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{1,I}; \mathbb{R}). \tag{3}$$

Aus den Definitionen von X_1 bzw. X_2 folgt

$$X_1 = 1_{(0,\beta)} \cdot f_1 \tag{4}$$

bzw.

$$X_2 = 1_{\alpha,1} \cdot f_2. \tag{5}$$

Wegen (2) bis (5) folgt mittels Satz M.18.8 dann

$$\{X_1, X_2\} \subseteq \mathcal{M}(I, \mathfrak{B}_{1,I}; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Wegen (6) liefert Satz M.17.6 dann:

(I) Es ist X eine $\mathfrak{B}_{1,I}$-$\mathfrak{B}_2$-messbare Abbildung.

Wegen *(I)* ergeben sich mittels Teil *(a)* von Satz M.23.2.2 dann

$$\mathcal{M}_{(1,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int_I |X_1|^1 \, |X_2|^1 \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int_I |X_1| \, |X_2| \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}, \tag{7}$$

$$\mathcal{M}_{(1,0)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int_I |X_1|^1 \, |X_2|^0 \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int_I |X_1| \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \tag{8}$$

und

$$\mathcal{M}_{(0,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I |X_1|^0 \, |X_2|^1 \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I |X_2| \, \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}. \tag{9}$$

Aus der Definition von X_1 und X_2 folgt sogleich

$$\{X_1, X_2\} \subseteq \mathrm{Abb}\left(I, [0, +\infty)\right). \tag{10}$$

Aus (10) folgen dann

$$|X_1| = X_1 \tag{11}$$

und

$$|X_2| = X_2. \tag{12}$$

Wegen (11) und (12) ergibt sich aus (7) bzw. (8) bzw. (9) dann

$$\mathcal{M}_{(1,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I X_1 X_2 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \tag{13}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{(1,0)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I X_1 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \tag{14}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{(0,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I X_2 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}. \tag{15}$$

Wegen (6) und (10) gilt

$$\{X_1, X_2\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(I, \mathfrak{B}_{1,I}\right). \tag{16}$$

Wegen (16) ergibt sich mittels Teil *(c)* von Lemma M.19.3 dann

$$X_1 \cdot X_2 \in \mathcal{E}^*\left(I, \mathfrak{B}_{1,I}\right). \tag{17}$$

Wir nehmen nun eine Abschätzung des Integrals auf der rechten Seiten von (13) vor. Für $u \in (\alpha, \beta)$ gilt

$$u\,(1-u) > \alpha\,(1-\beta) > 0.$$

Hieraus folgt für $u \in I$ dann

$$\frac{1}{u\,(1-u)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u) \leq \frac{1}{\alpha\,(1-\beta)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u)$$

und somit wegen

$$X_1(u) \cdot X_2(u) = \left[\frac{1}{u} \cdot 1_{(0,\beta)}(u)\right]\left[\frac{1}{1-u} \cdot 1_{(\alpha,1)}(u)\right] = \frac{u}{1-u} \cdot 1_{(0,\beta)\cap(\alpha,1)} = \frac{u}{1-u} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u)$$

dann

$$X_1(u) \cdot X_2(u) \leq \frac{1}{\alpha\,(1-\beta)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}(u).$$

Es ist also

$$X_1 \cdot X_2 \leq \frac{1}{\alpha\,(1-\beta)} \cdot 1_{(\alpha,\beta)}. \tag{18}$$

Wegen $\alpha \in (0,1)$ und $\beta \in (\alpha,1)$ gilt

$$\frac{1}{\alpha\,(1-\beta)} \in (0,+\infty)\,. \tag{19}$$

Weiterhin ist

$$(\alpha,\beta) \in \mathfrak{B}_{1,I}. \tag{20}$$

Unter Beachtung von (17) bis (20) ergibt sich mittels Teil *(d)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\int\limits_I X_1 X_2 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \leq \frac{1}{\alpha\,(1-\beta)} \left[\lambda_I^{(1)}\left((\alpha,\beta)\right)\right],$$

also wegen $\lambda_I^{(1)}\left((\alpha,\beta)\right) = \beta - \alpha$ dann

$$\int\limits_I X_1 X_2 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \leq \frac{\beta-\alpha}{\alpha\,(1-\beta)}. \tag{21}$$

Aus (13) und (21) folgt nun

$$\mathcal{M}_{(1,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) \in (0,+\infty)\,. \tag{22}$$

Wir wenden uns nun der Berechnung der Integrale auf den rechten Seiten von (14) und (15) zu. Hierzu werden wir Satz M.22.10.4 heranziehen. Wir treffen nun die entsprechenden Vorbereitungen. Seien

$$I_1 = (0,\beta) \tag{23}$$

und

$$I_2 = (\alpha,1)\,. \tag{24}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,2}. \tag{25}$$

Aus (23) bis (25) folgt dann

$$I_j \in \mathfrak{B}_{1,I}. \tag{26}$$

Seien

$$\mathfrak{B}_{1,I_j} \coloneqq \mathfrak{B}_1 \cap I_j \tag{27}$$

sowie

$$\lambda_{1,I_j} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction B_{1,I_j}. \tag{28}$$

Wegen (26) folgt aus (27) bzw. (28) dann

$$\mathfrak{B}_{1,I_j} = \mathfrak{B}_{1,I} \cap I_j \tag{29}$$

bzw.

$$\lambda_{1,I_j} = \lambda_I^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_{1,I_j}. \tag{30}$$

Wegen (17), (26), (29) und (30) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.22.2.8 dann

$$X_j \restriction I_j \in \mathcal{E}^*\left(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j}\right) \tag{31}$$

sowie

$$\int\limits_I 1_{I_j} X_j \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I \left(X_j \restriction I_j\right) \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}. \tag{32}$$

Aus der Definition der beteiligten Funktionen folgt sogleich

$$X_j \restriction I_j = f_j \restriction I_j \tag{33}$$

sowie

$$1_{I_j} X_j = X_j. \tag{34}$$

Wegen (33) folgt aus (31) bzw. (32) dann

$$f_j \restriction I_j \in \mathcal{E}^* \left(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j}\right) \tag{35}$$

bzw.

$$\int\limits_I 1_{I_j} X_j \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_{I_j} \left(f_j \restriction I_j\right) \mathrm{d}\lambda_{I_j}^{(1)}. \tag{36}$$

Aus (34) und (36) folgt nun

$$\int\limits_I X_j \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I \left(f_j \restriction I_j\right) \mathrm{d}\lambda_{I_j}^{(1)}. \tag{37}$$

Aus der Definition von f_j erkennt man sogleich, dass

$$f_j \restriction I_j \in \mathscr{C}\left(\left(I_j, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}, |\cdot|\right)\right) \cap \mathrm{Abb}\left(I_j, [0, +\infty)\right)$$

erfüllt ist. Hieraus erkennt man mittels Bemerkung M.22.10.4 dann die lokale R-Integrierbarkeit von $f_j \restriction I_j$ auf I_j sowie weiterhin $f_j \restriction I_j \in \mathcal{E}^* \left(I_j, \mathfrak{B}_{1,I_j}\right)$. Hieraus ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{I_1} \left(f_1 \restriction I_1\right) \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} \left(f_1 \restriction \left[\frac{1}{n}, \beta - \frac{1}{n}\right]\right)(u)\,\mathrm{d}u = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} \frac{1}{u}\mathrm{d}u \\
&= \lim_{n\to\infty} \left[\ln u\right]_{\frac{1}{n}}^{\beta-\frac{1}{n}} = \lim_{n\to\infty} \left[\ln\left(\beta - \frac{1}{n}\right) - \ln\left(\frac{1}{n}\right)\right] \\
&= \ln\beta + \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty
\end{aligned} \tag{38}$$

sowie

$$\begin{aligned}
\int\limits_{I_2} \left(f_2 \restriction I_2\right) \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} &= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \left(f_2 \restriction \left[\alpha + \frac{1}{n}, 1 - \frac{1}{n}\right]\right)(u)\,\mathrm{d}u \\
&= \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \frac{1}{1-u}\mathrm{d}u = \lim_{n\to\infty} \left[-\ln\left(1-u\right)\right]_{\alpha+\frac{1}{n}}^{1-\frac{1}{n}} \\
&= \ln\left(1-\alpha\right) + \lim_{n\to\infty} \ln n = +\infty.
\end{aligned} \tag{39}$$

Unter Verwendung von (14), (25), (37) und (38) bzw. (15), (25), (37) und (39) folgt dann

$$\mathcal{M}_{(1,0)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I X_1 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I \left(f_1 \restriction I_1\right) \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = +\infty \tag{40}$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{(0,1)}\left(X\left(\lambda_I^{(1)}\right)\right) = \int\limits_I X_2 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \int\limits_I (f_2 \restriction I_2)\,\mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = +\infty. \tag{41}$$

Wegen *(I)*, (22), (40) und (41) ist dann alles gezeigt. □

Beispiel M.23.5.1 belegt folgenden Sachverhalt.

Bemerkung M.23.5.1. Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$. Es sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so gewählt, dass $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$ erfüllt ist. Ist nun $(l_1, \ldots, l_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, dass $l_j \leq k_j$ für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt, so ist *nicht* notwendig $\mathcal{M}_{(l_1,\ldots,l_m)}(\mu) \in [0, +\infty)$. ♣

Unser Bestreben eine m-dimensionale Verallgemeinerung von Satz M.23.3.1 zu finden, führt uns auf die Betrachtung einer speziellen Klasse von Monomen in m Veränderlichen.

Bemerkung M.23.5.2. Seien $k, m \in \mathbb{N}$ sowie $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. Weiter sei $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_j)^k$. Dann gilt:

(a) Für $s \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei

$$k_s := \begin{cases} k, & \text{falls } s = j, \\ 0, & \text{falls } s \in \mathbb{N}_{1,m} \setminus \{j\}. \end{cases}$$

Dann gilt $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} = P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}$.

(b) Es ist

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}^m, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right) \subseteq \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}\right)$$

sowie

$$\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}\right| \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right).$$

(c) Sei $\pi_{m,j} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ gemäß $(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_j$. Dann ist $\pi_{m,j} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}\right)$ und es gilt $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} = P_{k;\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j}$.

(d) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gelten

$$\mathcal{M}_k\left(\pi_{m,j}(\mu)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}\right| \mathrm{d}\mu$$

sowie

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \mathcal{M}_k\left(\pi_{m,j}(\mu)\right). \qquad ♣$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* aus Bemerkung M.23.2.1.

Zu *(c)*: Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgen $\pi_{m,j} = \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}$ und $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} = P_{k;\mathbb{R}^m} \circ \pi_{m,j}$ und wegen *(a)* dann *(c)*.

Zu *(d)*: Dies sei eine Übung. □

Es sei daran erinnert, dass das Symbol $\widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ die Menge aller BORELschen Maße auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ steht. Sei $k\in\mathbb{N}$. In Abschnitt M.23.3 wurde die Menge

$$\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right):=\left\{\mu\in\widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)\,\middle|\,\mathcal{M}_k\left(\mu\right)\in[0,+\infty)\right\}$$

betrachtet. Unsere nächste Zielstellung besteht nun darin eine Verallgemeinerung dieser auf den Fall von Maßen auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ für $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ vorzunehmen.

Bemerkung M.23.5.3. Sei $k\in\mathbb{N}$ und sei $\widetilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}$ wie in Bemerkung M.23.5.2 erklärt. Dann gilt:

(a) Es ist $\tilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}=P_{k;\mathbb{R}}$.

(b) Sei $\mu\in\mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$. Dann gelten $\left|\widetilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}\right|\in\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ und $\mathcal{M}_k\left(\mu\right)=\int_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}\right|\mathrm{d}\mu$.

(c) Sei

$$\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right):=\left\{\mu\in\widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)\,\middle|\,\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}\right|\mathrm{d}\mu\in[0,+\infty)\right\}.$$

Dann gilt

$$\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)=\left\{\mu\in\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)\,\middle|\,\int\limits_{\mathbb{R}}\left|\widetilde{P}_{1,k;\mathbb{R}}\right|\mathrm{d}\mu\in[0,+\infty)\right\}.$$ ♣

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildung.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)* und Definition M.23.2.1.

Zu *(c)*: Wegen Bemerkung M.23.3.4 gilt $\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)\subseteq\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$. Hieraus und aus der Definition von $\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ folgt

$$\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)=\left\{\mu\in\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)\,\middle|\,\mathcal{M}_k\left(\mu\right)\in[0,+\infty)\right\}.$$

Hieraus folgt wegen *(b)* dann die Behauptung von *(c)*. □

Teil *(c)* von Bemerkung M.23.5.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung, welche das zentrale Objekt diese Abschnittes darstellt.

Definition M.23.5.1. Sei $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$. Weiter sei $k\in\mathbb{N}$. Dann heißt μ von *k-ter Ordnung*, falls für alle $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ mit den Bezeichnungen aus Bemerkung M.23.5.2 die Beziehung

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}\right|\mathrm{d}\mu\in[0,+\infty)$$

besteht.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$ die Menge aller Maße von k-ter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$. Weiter sei

$$\mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right):=\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)\cap\mathcal{M}_+^{1}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$$

Bemerkung M.23.5.4. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ besteht mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.23.5.2 die Beziehung

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}).$$

(iii) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ besteht mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.23.5.2 die Beziehung

$$\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \qquad \clubsuit$$

Beweis.

(i) $\Leftrightarrow$ ***(ii)*****:** Aufgrund von Teil *(b)* der Bemerkung M.23.5.2 gilt für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ dann $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 und Definition M.23.5.1 die Äquivalenz.

(ii) $\Leftrightarrow$ ***(iii)*****:** Dies folgt aus Teil *(c)* der Bemerkung M.23.5.2 und Definition M.23.5.1. □

Das Ziel unserer nachfolgenden Überlegung besteht nun darin, den Nachweis dafür zu erbringen, dass sich die Aussage von Satz M.23.3.1 im Fall $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $k \in \mathbb{N}$ auf die Klasse $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ übertragen lässt. Hierzu treffen wir zunächst die folgende Beobachtung.

Lemma M.23.5.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $k \in \mathbb{N}$ sowie $l \in \mathbb{N}_{1,k}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,l}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Beweis. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Wegen Bemerkung M.23.5.4 gilt für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ dann

$$\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Hieraus folgt für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ mittels Satz M.23.2.4 dann $\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,l}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Daraus folgt durch erneute Anwendung von Bemerkung M.23.5.4 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,l}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und damit die Behauptung. □

Wir streben nun eine weitreichende Verschärfung von Satz M.23.3.1 und Lemma M.23.5.1 an. Das nachfolgende Resultat spielt eine wesentliche Rolle beim Beweis des Hauptresultates dieses Abschnitts.

Satz M.23.5.1 (Verallgemeinerte Hölдersche Ungleichung)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right)$, $(p_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $(0, +\infty)$ und*

$$p_0 := \frac{1}{\sum_{j=1}^n \frac{1}{p_j}}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $\prod_{j=1}^n f_j \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}}\right), p_0 \in (0, +\infty)$ und es gilt*

$$\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(\prod_{j=1}^n f_j\right) \leq \prod_{j=1}^n \mathcal{N}_{p_j,\mu}(f_j).$$

(b) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei $f_j \in \mathscr{L}^{p_j}\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Dann gilt*

$$\prod_{j=1}^{n} f_j \in \mathscr{L}^{p_0}\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Satz M.18.9 gilt

$$\prod_{j=1}^{n} f_j \in \mathcal{M}\left(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{1}$$

Aus der Wahl der Folge $(p_j)_{j\in\mathbb{N}}$ und der Definition von p_0 folgt

$$p_0 \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Wir beweisen die dritte Behauptung per vollständiger Induktion über n.
Sei zunächst $n = 2$. Dann gilt

$$\frac{1}{\frac{p_1}{p_0}} + \frac{1}{\frac{p_2}{p_0}} = p_0\left(\frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2}\right) = p_0 \sum_{j=1}^{2} \frac{1}{p_j} = p_0 \frac{1}{p_0} = 1. \tag{3}$$

Aus (3) folgen insbesondere

$$\frac{p_1}{p_0} \in (1, +\infty) \tag{4}$$

und

$$\frac{1}{\frac{p_2}{p_0}} = 1 - \frac{1}{\frac{p_1}{p_0}} = \frac{\frac{p_1}{p_0} - 1}{\frac{p_1}{p_0}},$$

also

$$\frac{p_2}{p_0} = \frac{\frac{p_1}{p_0}}{\frac{p_1}{p_0} - 1}. \tag{5}$$

Aufgrund der Wahl von f_1 und f_2 folgt mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$\{|f_1|^{p_0}, |f_2|^{p_0}\} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega, \mathfrak{A}\right). \tag{6}$$

Wegen (3) bis (6) erbringt die Höldersche Ungleichung dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}\left(|f_1|^{p_0} \cdot |f_2|^{p_0}\right) \leq \mathcal{N}_{\frac{p_1}{p_0},\mu}\left(|f_1|^{p_0}\right) \cdot \mathcal{N}_{\frac{p_2}{p_0},\mu}\left(|f_2|^{p_0}\right). \tag{7}$$

Andererseits gelten

$$\mathcal{N}_{1,\mu}\left(|f_1|^{p_0} \cdot |f_2|^{p_0}\right) = \int_\Omega |f_1|^{p_0} \cdot |f_2|^{p_0}\, \mathrm{d}\mu = \int_\Omega |f_1 \cdot f_2|^{p_0}\, \mathrm{d}\mu. \tag{8}$$

sowie

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\frac{p_1}{p_0},\mu}\left(|f_1|^{p_0}\right) \cdot \mathcal{N}_{\frac{p_2}{p_0},\mu}\left(|f_2|^{p_0}\right) &= \left(\int_\Omega |f_1|^{p_0 \cdot \frac{p_1}{p_0}}\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p_0}{p_1}} \left(\int_\Omega |f_2|^{p_0 \cdot \frac{p_2}{p_0}}\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{p_0}{p_2}} \\ &= \left[\left(\int_\Omega |f_1|^{p_1}\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_1}} \cdot \left(\int_\Omega |f_2|^{p_2}\, \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p_2}}\right]^{p_0}.\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{N}_{\frac{p_1}{p_0},\mu}\left(|f_1|^{p_0}\right)\cdot\mathcal{N}_{\frac{p_2}{p_0},\mu}\left(|f_2|^{p_0}\right)=\left[\mathcal{N}_{p_1,\mu}\left(f_1\right)\cdot\mathcal{N}_{p_2,\mu}\left(f_2\right)\right]^{p_0}. \tag{9}$$

Aus (7) bis (9) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega}|f_1\cdot f_2|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu\leq\left[\mathcal{N}_{p_1,\mu}\left(f_1\right)\cdot\mathcal{N}_{p_2,\mu}\left(f_2\right)\right]^{p_0} \tag{10}$$

bzw.

$$\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(f_1\cdot f_2\right)=\left(\int\limits_{\Omega}|f_1\cdot f_2|^{p_0}\,\mathrm{d}\mu\right)\leq\mathcal{N}_{p_1,\mu}\left(f_1\right)\cdot\mathcal{N}_{p_2,\mu}\left(f_2\right).$$

Damit ist die Behauptung für den Fall $n=2$ nachgewiesen. Sei nun $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ und die Behauptung für und $k\in\mathbb{N}_{2,n}$ bereits nachgewiesen.
Es sei

$$p_0\coloneqq\frac{1}{\sum_{j=1}^{n+1}\frac{1}{p_j}}\quad\text{und}\quad q_0\coloneqq\frac{1}{\sum_{j=1}^{n}\frac{1}{p_j}}. \tag{11}$$

Aus (11) und der Induktionsvoraussetzung folgt dann

$$q_0\in(0,+\infty) \tag{12}$$

und

$$\prod_{j=1}^{n}f_j\in\mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A};\overline{\mathbb{R}}\right) \tag{13}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{q_0,\mu}\left(\prod_{j=1}^{n}f_j\right)\leq\prod_{j=1}^{n}\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(f_j\right). \tag{14}$$

Wegen (11) gilt

$$\frac{1}{\frac{1}{q_0}+\frac{1}{p_{n+1}}}=p_0. \tag{15}$$

Wegen (12), (15) und (14) sowie $f_{n+1}\in\mathcal{M}\left(\Omega,\mathfrak{A},\overline{\mathbb{R}}\right)$ und $p_{n+1}\in(0,+\infty)$ folgt aus dem bereits für $n=2$ Bewiesenen dann

$$\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(\prod_{j=1}^{n+1}f_j\right)=\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(\left[\prod_{j=1}^{n}f_j\right]\cdot f_{n+1}\right)\leq\mathcal{N}_{q_0,\mu}\left(\prod_{j=1}^{n}f_j\right)\cdot\mathcal{N}_{p_{n+1},\mu}\left(f_{n+1}\right). \tag{16}$$

Aus (14) und (16) folgt nun

$$\mathcal{N}_{p_0,\mu}\left(\prod_{j=1}^{n+1}f_j\right)\leq\prod_{j=1}^{n+1}\mathcal{N}_{p_j,\mu}\left(f_j\right).$$

Damit ist die dritte Behauptung von *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Aufgrund der Wahl von $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist $\left(\mathcal{N}_{p_j,\mu}\left(f_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ nach Bemerkung M.22.6.3 eine Folge aus $[0,+\infty)$. Hieraus folgt mittels *(a)* dann

$$\prod_{j=1}^{n}f_j\in\mathscr{L}^{p_0}\left(\Omega,\mathfrak{A},\mu;\overline{\mathbb{R}}\right).$$

□

Wir kommen nun zur angestrebten Verallgemeinerung von Satz M.23.3.1:

Satz M.23.5.2. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $(k_1, \ldots, k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ so gewählt, dass $\sum_{j=1}^m k_j \leq k$ erfüllt ist. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty).$$

Beweis. Sei

$$Q \coloneqq \{l \in \mathbb{N}_{1,m} \mid k_l \neq 0\}. \tag{1}$$

Sei zunächst

$$Q = \varnothing. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist dann

$$(k_1, \ldots, k_m) = (0, \ldots, 0). \tag{3}$$

Wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.23.2.2 gilt dann

$$\mathcal{M}_{(0,\ldots,0)}(\mu) = \mu(\mathbb{R}^m). \tag{4}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ folgt aus (3) und (4) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty). \tag{5}$$

Wir betrachten nun die folgenden Situationen:

(I) Es sei Q einelementig.

Wegen *(I)* und (1) gilt dann:

(II) Es gibt genau ein $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ mit $k_j \neq 0$.

Wegen *(II)* gilt dann

$$k_j = \sum_{l=1}^m k_l. \tag{6}$$

Wegen $\sum_{l=1}^m k_l \leq k$ folgt aus (6) und *(II)* dann

$$k_j \in \mathbb{N}_{1,k}. \tag{7}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und (7) folgt aus Lemma M.23.5.1 dann

$$\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k_j}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Sei $\pi_{m,j} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_j. \tag{8}$$

Wegen (8) gilt nach Bemerkung M.23.5.3 dann $\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k_j}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, also

$$\mathcal{M}_{k_j}(\pi_{m,j}(\mu)) \in [0, +\infty). \tag{9}$$

Da wegen *(II)* nach Teil *(d)* von Bemerkung M.23.5.2 nun $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) = \mathcal{M}_{k_j}(\pi_{m,j}(\mu))$ erfüllt ist, folgt aus (9) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0, +\infty). \tag{10}$$

Wir betrachten nun folgende Situation:

(III) Die Menge Q enthalte mindestens 2 Elemente.

Wegen (1) und *(III)* gilt dann

$$m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}\,. \tag{11}$$

Es sei

$$r \coloneqq \operatorname{card} Q. \tag{12}$$

Wegen (1), *(III)*, (11) und (12) gilt dann

$$r \in \mathbb{N}_{2,m}. \tag{13}$$

Unter Beachtung von (12) seien $j_1, \ldots, j_r$ die r paarweise verschiedenen Elemente von Q. Aus (1) folgt dann

$$\sum_{p=1}^{r} k_{j_p} = \sum_{l=1}^{m} k_l. \tag{14}$$

Aus (1) und der Definition der beteiligten Abbildungen folgt weiterhin das

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m} = \prod_{p=1}^{r} \widetilde{P}_{j_p,k_{j_p};\mathbb{R}^m}. \tag{15}$$

Aus Definition M.23.2.1 und (15) folgt dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\right| \mathrm{d}\mu = \mathcal{N}_{1,\mu}\left(P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\right) = \mathcal{N}_{1,\mu}\left(\prod_{p=1}^{r} \widetilde{P}_{j_p,k_{j_p};\mathbb{R}^m}\right). \tag{16}$$

Vor dem Hintergrund von (16) streben wir nun die Anwendung von Teil *(a)* von Satz M.23.5.1 an. Sei

$$s \in \mathbb{N}_{1,r}. \tag{17}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.23.5.2 ist dann $\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}\right)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.4 dann

$$\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{18}$$

Da $\left(k_{j_r}\right)_{r\in\mathbb{N}_{1,p}}$ nach Voraussetzung eine Folge aus $\mathbb{N}$ ist, folgt aus (13) dann

$$k_{j_s} < \sum_{p=1}^{r} k_{j_p}. \tag{19}$$

Da nach Voraussetzung $\sum_{l=1}^{m} \leq k$ erfüllt ist, folgt aus (14) und (19) nun

$$k_{j_s} < k. \tag{20}$$

Unter Beachtung von $k_{j_s} \neq 0$ sei

$$q_s \coloneqq \frac{k}{k_{j_s}}. \tag{21}$$

Wegen $\{k, k_{j_s}\} \subseteq \mathbb{N}$ und (20) folgt aus (21) dann

$$q_s \in (1, +\infty)\,. \tag{22}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ bei Beachtung von (21) weiterhin

$$\left|\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}(x)\right|^{q_s} = \left|(x_{j_s})^{k_{j_s}}\right|^{q_s} = \left(|x_{j_s}|^{k_{j_s}}\right)^{q_s} = |x_{j_s}|^{k_{j_s}q_s} = |x_{j_s}|^k = \left|(x_{j_s})^k\right| = \left|\widetilde{P}_{j_s,k;\mathbb{R}^m}(x)\right|.$$

Es ist also

$$\left|\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right|^{q_s} = \left|\widetilde{P}_{j_s,k;\mathbb{R}^m}\right|. \tag{23}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right| \mathrm{d}\mu \in [0,+\infty). \tag{24}$$

Aus (23) und (24) folgt dann

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left|\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right|^{q_s} \mathrm{d}\mu \in [0,+\infty).$$

Hieraus folgt wegen

$$\mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right) = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right|^{q_s} \mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{q_s}}$$

dann

$$\mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right) \in [0,+\infty). \tag{25}$$

Unter Beachtung von (17), (21) und (14) folgt

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s} = \sum_{s=1}^{r} \frac{k_{j_s}}{k} = \frac{1}{k}\sum_{s=1}^{r} k_{j_s} = \sum_{l=1}^{m} k_l. \tag{26}$$

Nach Voraussetzung gilt $\sum_{l=1}^{m} k_l \leq k$. Sei zunächst

$$\sum_{l=1}^{m} k_l = k. \tag{27}$$

Aus (26) und (27) folgt dann

$$\sum_{l=1}^{m} \frac{1}{q_s} = 1. \tag{28}$$

Unter Beachtung von (17), (18), (22) und (28) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.5.1 nun

$$\mathcal{N}_{1,\mu}\left(\prod_{s=1}^{r} \widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right) \leq \prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right). \tag{29}$$

Aus (29) und (16) folgt dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \leq \prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right).$$

Hieraus folgt wegen (17) und (25) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty). \tag{30}$$

Unter Beachtung von $\sum_{l=1}^{m} k_l \leq k$ und dem soeben behandelten Fall (27) sei nun

$$\sum_{l=1}^{m} k_l < k. \tag{31}$$

Aus (17), (22), (26) und (31) folgt dann

$$\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s} \in (0,1). \tag{32}$$

Unter Beachtung von (32) sei

$$q_0 \coloneqq \frac{1}{1-\sum_{s=1}^{r} \frac{1}{q_s}}. \tag{33}$$

Aus (32) und (33) folgt dann

$$q_0 \in (1,+\infty). \tag{34}$$

Wegen $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$ gelten nach Teil *(a)* von Bemerkung M.22.6.5 dann

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{35}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m}) = [\mu(\mathbb{R}^m)]^{\frac{1}{q_0}}. \tag{36}$$

Wegen (35) liefert Bemerkung M.18.4 dann

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \overline{\mathbb{R}}). \tag{37}$$

Aus (36) und der Wahl von μ folgt

$$\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m}) \in [0,+\infty). \tag{38}$$

Unter Verwendung von (34), (37), (17), (22) und (38) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.5.1 dann

$$\mathcal{N}_{1,\mu}\left(1_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{s=1}^{r} \widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right]\right) \leq [\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m})]\left[\prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right)\right]. \tag{39}$$

Unter Beachtung von $1_{\mathbb{R}^m}\left[\prod_{s=1}^{r} \widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right] = \prod_{s=1}^{r} \widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}$ folgt aus (16) und (39) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \leq [\mathcal{N}_{q_0,\mu}(1_{\mathbb{R}^m})]\left[\prod_{s=1}^{r} \mathcal{N}_{q_s,\mu}\left(\widetilde{P}_{j_s,k_{j_s};\mathbb{R}^m}\right)\right].$$

Hieraus folgt wegen (38), (17) und (25) dann

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu) \in [0,+\infty). \tag{40}$$

Wegen (1), (2), (5), *(I)*, (10), *(III)*, der Voraussetzung $\sum_{l=1}^{m} k_l = k$, (27), (30), (31) und (40) ist alles gezeigt. □

Vorausschauend sei erwähnt, dass wir später für $m \in \mathbb{N}$ die Klasse $\mathcal{M}_{+}^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ besondere Aufmerksamkeit schenken werden. Diese Klasse ist von besonderer Bedeutung in der mathematischen Statistik.

M.23.6. Potenzmomente von Maßen aus $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

In verschiedenen stochastischen Anwendungen spielen Maße aus $\mathcal{M}_+^{1,d}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$ eine prägnante Rolle. Wir haben in Abschnitt M.15 eine ganze Reihe von wichtigen Repräsentanten dieser Klasse angeführt. Im vorliegenden Abschnitt wenden wir uns der Berechnung der Momente dieser Maße zu.

Es sei bemerkt, dass die in der Überschrift formulierte Thematik in erster Instanz mittels Satz M.23.2.3 betrachtet werden kann.

Beispiel M.23.6.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_n := \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

(b) Es ist $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$

(c) Sei $r \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathcal{M}_r(\mu_n) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} k^r$

(d) Es gelten $\mathcal{M}_1(\mu_n) = \frac{n+1}{2}$, $\mathcal{M}_2(\mu_n) = \frac{(n+1)(2n+1)}{6}$ sowie $\mathrm{var}(\mu_n) = \frac{n^2+1}{12}$.

Wir wenden uns nun der Familie der Binomialverteilungen zu.

Bemerkung M.23.6.1. Seien $N \in \mathbb{N}$ sowie $n \in \mathbb{N}_{1,N}$. Dann gilt $n \cdot \binom{N}{n} = N \cdot \binom{N-1}{n-1}$. ♣

Satz M.23.6.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Es bezeichne $\beta_{n,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$*

(b) *Es ist $\mathcal{M}_1(\beta_{n,p}) = n \cdot p$*

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_2(\beta_{n,p}) = n \cdot p\,(n \cdot p + 1 - p)$ sowie $\mathrm{var}(\beta_{n,p}) = n \cdot p\,(1-p)$*

Beweis. Wegen Definition M.15.1 gilt

$$\beta_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k}\, \varepsilon_{k,\mathfrak{B}}. \tag{1}$$

Zu *(a)*: Dies folgt wegen (1) sogleich aus Teil *(c)* Satz M.23.2.3.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung M.23.6.1 gilt für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{2}$$

dann

$$k \cdot \binom{n}{k} = n \cdot \binom{n-1}{k-1}. \tag{3}$$

Wegen *(a)* und (1) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (3), (3) und dem Binomischen Satz dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_1(\beta_{n,p}) &= \mathcal{M}_1\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,\varepsilon_{k,\mathfrak{B}}\right) = \sum_{k=0}^{n} k\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k\cdot\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=0}^{n} n\cdot\binom{n-1}{k-1}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= n\cdot p\cdot\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k} = n\cdot p\cdot\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k}\\
&= n\cdot p\cdot[p+(1-p)]^{n-1}\\
&= n\cdot p.
\end{aligned}$$

Zu *(c)*: Für

$$n\in\mathbb{N}\setminus\{1\} \tag{4}$$

folgt aus *(b)* sogleich

$$\sum_{k=0}^{n-1} k\cdot\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k} = \mathcal{M}_1(\beta_{n-1,p}) = (n-1)\,p. \tag{5}$$

Weiterhin gilt

$$\sum_{k=0}^{1-1} k\cdot\binom{n-1}{k}p^k(1-p)^{(n-1)-k} = 0 = (1-1)\cdot p. \tag{6}$$

Für

$$k\in\mathbb{N}_{1,n} \tag{7}$$

folgt unter Beachtung von (2) und (3) weiterhin

$$\begin{aligned}
k^2\binom{n}{k} &= k\cdot k\cdot\binom{n}{k} = k\cdot n\cdot\binom{n-1}{k-1} = [k-1+1]\cdot n\binom{n-1}{k-1}\\
&= n\cdot\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\right].
\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen *(a)* und (1) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (7), (8), (4), (5), (6) und des Binomischen Satzes, dass

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\beta_{n,p}) &= \mathcal{M}_2\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\,\varepsilon_{k,\mathfrak{B}}\right) = \sum_{k=0}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} k^2\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k} = \sum_{k=1}^{n} n\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\right]p^k(1-p)^{n-k}\\
&= \sum_{k=1}^{n} n\left[(k-1)\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\right]p^k(1-p)^{n-k}\\
&= np\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}\left((k-1)\binom{n-1}{k-1}+\binom{n-1}{k-1}\right)p^{k-1}(1-p)^{n-k}\right]\\
&= np\cdot\left[\sum_{k=1}^{n}(k-1)\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}+\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}p^{k-1}(1-p)^{n-k}\right]
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&= np \cdot \left[\sum_{k=0}^{n-1} k \cdot \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{(n-1)-k} + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} p^k (1-p)^{n-k} \right] \\
&= np \cdot \left[(n-1) \cdot p + [p + (1-p)]^{n-1} \right] = np \cdot [(n-1) \cdot p + 1] \\
&= np \cdot [np - p + 1] ,
\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{M}_2 (\beta_{n,p}) = np \cdot [np - p + 1] . \tag{9}$$

Wegen *(a)* folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von (8) und (9) dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{var} (\beta_{n,p}) &= \mathcal{M}_2 (\beta_{n,p}) - [\mathcal{M}_1 (\beta_{n,p})]^2 = np (np + 1 - p) - (np)^2 \\
&= np (np + 1 - p - np) \\
&= np (1 - p) .
\end{aligned}$$

□

Wir wenden uns nun den Potenzmomenten der Familie der hypergeometrischen Verteilungen zu. Hierzu stellen wir zunächst zwei Hilfsresultate bereit.

Lemma M.23.6.1. *Seien $N \in \mathbb{N}$ sowie $M \in \mathbb{N}_{1,N}$. Weiter sei $l \in \mathbb{Z}_{0,N-1}$. Dann gilt*

$$\binom{N-1}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{M-1}{k} \binom{N-M}{l-k}.$$

Lemma M.23.6.2. *Seien $N \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $M \in \mathbb{N}_{2,N}$. Weiter sei $l \in \mathbb{Z}_{0,N-2}$. Dann gilt*

$$\binom{N-2}{l} = \sum_{k=0}^{l} \binom{M-2}{k} \binom{N-M}{l-k}$$

Satz M.23.6.2. *Seien $N \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}_{1,N}$ sowie $M \in \mathbb{N}_{1,N}$. Es bezeichne $H_{N,M,n}$ die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern N, M und n. Dann gilt:*

(a) *Es ist $H_{N,M,n} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty} \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Es ist $\mathcal{M}_1 (H_{N,M,n}) = n \cdot \frac{M}{N}$.*

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_2 (H_{N,M,1}) = \frac{M}{N}$ sowie $\operatorname{var} (H_{N,M,1}) = \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right)$.*

(d) *Seien zusätzlich $N, n \notin \mathbb{N} \setminus \{1\}$, dann gelten*

$$\mathcal{M}_2 (H_{N,M,n}) = \frac{M (M-1)}{\binom{N}{n}} \cdot \binom{N-2}{n-2} + n \cdot \frac{M}{N}$$

sowie

$$\operatorname{var} (H_{N,M,n}) = n \cdot \frac{M}{N} \left(1 - \frac{M}{N}\right) \cdot \frac{N-n}{N-1}.$$

(e) *Unter der Beachtung von* $\frac{M}{N} \in [0,1]$ *bezeichne* $\beta_{n,\frac{M}{N}}$ *die Binomialverteilung zu den Parametern* n *und* $\frac{M}{N}$*. Dann gilt*

$$\operatorname{var}(H_{N,M,n}) = \frac{N-n}{N-1} \cdot \operatorname{var}\left(\beta_{n,\frac{M}{N}}\right).$$

Wir wenden uns nun den Potenzmomenten der Poisson-Verteilung zu.

Satz M.23.6.3. *Sei* $\alpha \in [0,+\infty)$ *und bezeichne* π_α *die Poisson-Verteilung zum Parameter* α*. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$.

(b) *Es ist* $\mathcal{M}_1(\pi_\alpha) = \alpha$.

(c) *Es gelten* $\mathcal{M}_2(\pi_\alpha) = \alpha(\alpha+1)$ *und* $\operatorname{var}(\pi_\alpha) = \alpha$.

Beweis. Wegen Definition M.15.5 gilt

$$\pi_\alpha = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha) \frac{\alpha^k}{k!} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}}. \tag{1}$$

Zu *(a)*: Sei zunächst $\alpha = 0$. Wegen (1) ist dann $\pi_\alpha = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}}$. Hieraus folgt für $l \in \mathbb{N}_0$ wegen Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\mathcal{M}_l(\pi_\alpha) = \mathcal{M}_l(\varepsilon_{0,\mathfrak{B}}) = 0^l = 0 \in [0,+\infty). \tag{2}$$

Sei nun $\alpha \in (0,+\infty)$. Weiter sei $l \in \mathbb{N}_0$. Wegen (1) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_l(\pi_\alpha) &= \mathcal{M}_l\left(\sum_{k=0}^{\infty} \exp(-\alpha) \frac{\alpha}{k!} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k^l \cdot \exp(-\alpha) \frac{\alpha^k}{k!} \\ &= \exp(-\alpha) \sum_{k=0}^{\infty} k^l \frac{\alpha^k}{k!}. \end{aligned} \tag{3}$$

Wir weisen nun mittels Quotientenkriterium die Konvergenz der Reihe in (3) nach. Für $k \in \mathbb{N}$ gilt nämlich

$$0 \leq \frac{\frac{(k+1)^l \alpha^{k+1}}{(k+1)!}}{\frac{k^l \alpha^k}{k!}} = \left(\frac{k+1}{k}\right)^l \frac{\alpha}{k+1} = \alpha \left(1+\frac{1}{k}\right)^l \cdot \frac{1}{k+1}. \tag{4}$$

Es ist nun

$$\lim_{k\to\infty} \left[\alpha \left(1+\frac{1}{k}\right)^l \cdot \frac{1}{k+1}\right] = \alpha \left(1+\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k}\right)^l \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k+1} = \alpha \cdot 1^l \cdot 0 = 0. \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) folgt dann mittels Quotientenkriterium dann

$$\sum_{k=0}^{\infty} k^l \frac{\alpha^k}{k!} \in [0,+\infty). \tag{6}$$

Aus (3) und (6) folgt dann $\mathcal{M}_l(\pi_\alpha) \in [0,+\infty)$ und damit $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.

Zu *(b)*: Unter Beachtung von (1) und *(a)* folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(\pi_\alpha) &= \mathcal{M}_1\left(\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!}\varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!}\\ &= \exp(-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty} k\frac{\alpha^k}{k!} = \exp(-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^k}{(k-1)!} = \alpha\exp(-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \alpha\exp(-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!} = \alpha\exp(-\alpha)\exp(\alpha)\\ &= \alpha.\end{aligned}$$

Zu *(c)*: Aus *(b)* folgt

$$\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot \mathrm{e}^{-\alpha}\frac{\alpha^k}{k!} = \mathcal{M}_1(\pi_\alpha) = \alpha. \tag{7}$$

Wegen (1) und *(a)* folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 sowie zusätzlicher Beachtung von (7) dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_2(\pi_\alpha) &= \mathcal{M}_2\left(\sum_{k=0}^{\infty}\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!}\varepsilon_{k,\mathfrak{B}}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} k^2\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!}\\ &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!} = \alpha\sum_{k=1}^{\infty} k^2\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^{k-1}}{k!}\\ &= \alpha\sum_{k=1}^{\infty} k\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} = \alpha\sum_{k=1}^{\infty}[(k-1)+1]\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\\ &= \alpha\cdot\left[\sum_{k=1}^{\infty}(k-1)\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!} + \exp(-\alpha)\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\alpha^{k-1}}{(k-1)!}\right]\\ &= \alpha\cdot\left[\sum_{k=0}^{\infty} k\cdot\exp(-\alpha)\,\frac{\alpha^k}{k!} + \exp(-\alpha)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\alpha^k}{k!}\right]\\ &= \alpha\cdot[\alpha + \exp(-\alpha)\exp(\alpha)] = \alpha\cdot[\alpha+1],\end{aligned}$$

also

$$\mathcal{M}_2(\pi_\alpha) = \alpha(\alpha+1). \tag{8}$$

Wegen *(a)* folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.23.4.2 sowie zusätzlicher Beachtung von *(b)* und (8) dann

$$\operatorname{var}(\pi_\alpha) = \mathcal{M}_2(\pi_\alpha) - [\mathcal{M}_1(\pi_\alpha)]^2 = \alpha(\alpha+1) - \alpha^2 = \alpha.$$

Damit ist die Behauptung bewiesen. □

M.23.7. Potenzmomente markanter $\lambda^{(1)}$-stetiger Maße aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$

Wir haben in dem Abschnitt M.22.13 und Abschnitt M.22.14 eine Reihe von Beispielen $\lambda^{(1)}$-stetiger Maße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ vorgestellt, welche in stochastischen Anwendungen eine wesentliche Rolle spielen. Im vorliegenden Abschnitt vervollkommnen wir unsere Kenntnisse über Maße, indem wir ihre Potenzmomente berechnen. Hierzu werden wir Satz M.23.2.4 heranziehen. Wir wenden uns zunächst der kontinuierlichen Gleichverteilung auf einem endlichen Intervall zu.

Bemerkung M.23.7.1. Seien $a, b \in \mathbb{C}$ sowie $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$a^{k+1} - b^{k+1} = (a-b) \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j}.$$

♣

Satz M.23.7.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (a, +\infty)$ sowie $\Delta \coloneqq [a, b]$. Es Bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu_\Delta \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}(\mathbb{R}, \mathfrak{B})$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) = \frac{1}{k+1} \frac{b^{k+1} - a^{k+1}}{b-a} = \frac{1}{k+1} \sum_{j=0}^{k} a^j b^{k-j}.$$

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_1(\mu_\Delta) = \frac{a+b}{2}$ sowie $\operatorname{var}(\mu_\Delta) = \frac{(b-a)^2}{12}$.*

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist μ_Δ standardisiert.*

(ii) *Es ist $\Delta = \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$*

Wir wenden uns nun den Momenten der Normalverteilungsfunktion zu.

Lemma M.23.7.1. *Es bezeichne $\mathcal{N}_{0,1}$ die Standard-Normalverteilung. Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten*

$$\mathcal{M}_{2k}(\mathcal{N}_{0,1}) = \begin{cases} 1, & \text{falls } k = 0, \\ \prod_{j=1}^{k} (2j-1), & \text{falls } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

sowie

$$\mathcal{M}_{2k+1}(\mathcal{N}_{0,1}) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} 2^{k+1} \cdot k!.$$

Beweis. Sei $f_{0,1} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}}$. Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.13.2 ist dann

$$f_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Wegen Definition M.22.13.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,1}}. \tag{2}$$

Sei

$$s \in \mathbb{N}_0. \tag{3}$$

Weiter sei $P_{s;\mathbb{R}} \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto x^s$. Wegen (1) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.23.2.4 dann

$$|P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{4}$$

sowie

$$\mathcal{M}_s\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,1}}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{5}$$

Aus (1), (3) und (5) folgt dann

$$\mathcal{M}_s\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{6}$$

Aus der Definition von $P_{s;\mathbb{R}}$ und $f_{0,1}$ folgt sogleich $|P_{s;\mathbb{R}}| f_{0,1} \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)\right)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.4, dass $|P_{s,\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1}$ lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung von $|P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1} \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, [0, +\infty)\right)$ und (4) mittels Teil *(a)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} |P_{s;\mathbb{R}}(x)| \cdot f_{0,1}(x) \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Aus der Definition von $P_{s;\mathbb{R}}$und $f_{0,1}$ erkennt man sogleich, dass $|P_{s;\mathbb{R}}| \cdot f_{0,1}$ eine gerade Funktion ist. Hieraus folgt für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\int\limits_{-n}^{n} \left[|P_{s;\mathbb{R}}(x)| \cdot f_{0,1}(x)\right] \restriction [-n, n] \mathrm{d}x = 2 \cdot \int\limits_{0}^{n} |x|^s \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \frac{2^0}{\sqrt{2\pi}} \int\limits_{0}^{n} x^s \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x. \tag{8}$$

Nehmen wir nun die Substitution $u \coloneqq \frac{x}{\sqrt{2}}$ vor, so ergibt sich für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\int\limits_{0}^{n} x^s \mathrm{e}^{-\frac{x^2}{2}} \mathrm{d}x = \sqrt{2}^{s+1} \int\limits_{0}^{\frac{n}{\sqrt{2}}} u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\int\limits_{-n}^{n} \left[|P_{s;\mathbb{R}}(x)| \cdot f_{0,1}(x)\right] \restriction [-n, n] \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}^{s+1} \int\limits_{0}^{\frac{n}{\sqrt{2}}} u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u. \tag{10}$$

Aus (5), (7) und (10) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_s\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{s;\mathbb{R}}| f_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \left[|P_{s;\mathbb{R}}(x)| \cdot f_{0,1}(x)\right] \restriction [-n, n] \mathrm{d}x \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}^{s+1} \int\limits_{0}^{\frac{n}{\sqrt{2}}} u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}^{s+1} \cdot \int\limits_{0}^{\infty} u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u.
\end{aligned}$$

Also

$$\mathcal{M}_s\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2}^{s+1} \cdot \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u. \tag{11}$$

Seien $I \coloneqq (0, +\infty)$, $\mathfrak{B}_I \coloneqq \mathfrak{B} \cap I$ und $\lambda_I^{(1)} \coloneqq \lambda^{(1)} \restriction \mathfrak{B}_I$. Weiter sei $f_s \colon I \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $u \longmapsto u^s \cdot \mathrm{e}^{-u^2}$. Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.12.6 gilt dann $f_s \in \mathcal{E}^*\left(I, \mathfrak{B}_I\right)$ und im Beweis von Satz M.22.12.6 (vergleiche dort Formel (1)) wurde gezeigt, dass

$$\int\limits_{I} f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{\frac{1}{n}}^{n} u^s \mathrm{e}^{-u^2} \mathrm{d}u. \tag{12}$$

Aus (11) und (12) folgt dann

$$\mathcal{M}_s\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}^{s+1} \cdot \int\limits_I f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)}. \tag{13}$$

Seien nun

$$k \in \mathbb{N}_0. \tag{14}$$

Aus Teil *(b)* von Satz M.22.12.6 folgt dann

$$\int\limits_I f_s \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \begin{cases} \frac{1}{2}\sqrt{\pi}, & \text{falls } k = 0, \\ \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \prod_{j=1}^{k} (2j-1), & \text{falls } k \in \mathbb{N}. \end{cases} \tag{15}$$

und

$$\int\limits_I f_{2k+1} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{k!}{2}. \tag{16}$$

Unter Beachtung von (13) und (15) folgt dann

$$\mathcal{M}_0\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2} \cdot \int\limits_I f_0 \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2} \cdot \frac{1}{2}\sqrt{\pi} = 1 \tag{17}$$

sowie für $k \in \mathbb{N}$

$$\mathcal{M}_{2k}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}^{2k+1} \cdot \int\limits_I f_{2k} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}^{2k+1} \cdot \frac{\sqrt{\pi}}{2^{k+1}} \prod_{j=1}^{k} (2j-1) = \prod_{j=1}^{k} (2j-1). \tag{18}$$

Unter Verwendung von (13) und (16) folgt

$$\mathcal{M}_{2k+1}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}^{2k+2} \cdot \int\limits_I f_{2k+1} \mathrm{d}\lambda_I^{(1)} \overset{(16)}{=} \frac{2}{\sqrt{2\pi}}\sqrt{2}^{2(k+1)} \cdot \frac{k!}{2} = \frac{2^{k+1}}{\sqrt{2\pi}} \cdot k!. \tag{19}$$

Wegen (14) sowie (17) bis (19) ist dann alles gezeigt. □

Lemma M.23.7.2. *Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(a) *Es ist $f \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right)$.*

(b) *Es ist f lokal Riemann-integrierbar.*

(c) *Es ist f ungerade.*

Dann gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 0.$$

Beweis. Wegen *(a)* und *(b)* gilt nach Teil *(a)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} \restriction [-n,n]\, f \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{1}$$

Wegen *(c)* gilt für $n \in \mathbb{N}$ dann

$$\int_{-n}^{n} \restriction [-n,n]\, f \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 0. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann die Behauptung. □

Lemma M.23.7.3. *Sei $k \in \mathbb{N}$ und sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $g \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R},|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)\right)$.*

(II) *g ist eine gerade Funktion.*

(III) *Es ist $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R},\mathfrak{B},\lambda^{(1)};\mathbb{R}\right)$.*

Dann gilt:

(a) *Es ist $g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Es ist $\mathcal{M}_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_g\right) \in [0,+\infty)$.*

(c) *Sei k ungerade. Dann gilt $\mathcal{M}_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_g\right) = 0$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen *(I)* folgt mittels Satz M.16.10 dann $g \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\overline{\mathbb{R}}\right)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.4 dann $g \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{R}\right)$. Damit folgt wegen $g \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R},[0,+\infty)\right)$ dann $g \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.

Zu *(b)*: Wegen *(III)* ist insbesondere $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{R}\right)$. Hieraus ergibt sich mittels Folgerung M.22.4.1 dann $|P_{k;\mathbb{R}} \cdot g| = |P_{k;\mathbb{R}}| \cdot g \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1,\lambda^{(1)};\mathbb{R}\right)$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.23.2.4 dann

$$\mathcal{M}_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_g\right) \in [0,+\infty).$$

Zu *(c)*: Wegen *(b)* folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.23.2.4 dann

$$\mathcal{M}_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_g\right) = \int_{\mathbb{R}} P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{1}$$

Aus *(I)* und der Definition von $P_{k;\mathbb{R}}$ folgt $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \in \mathcal{C}(\mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.3 dann

4) Es ist $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g$ lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$.

Da k ungerade ist, folgt aus der Definition von $P_{k;\mathbb{R}}$, dass $P_{k;\mathbb{R}}$ ungerade ist. Hieraus und aus *(II)* folgt dann

5) Es ist $P_{k;\mathbb{R}} \cdot g$ ungerade.

Wegen *(III)*, *4)* und *5)* folgt aus Lemma M.23.7.2 dann $\int_{\mathbb{R}} P_{k;\mathbb{R}} \cdot g \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 0$. Wegen (1) also

$$\mathcal{M}_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_g\right) = 0.$$

□

Satz M.23.7.2. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung zu den Parametern a und σ^2. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$M_k\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right) = \begin{cases} \sigma^k \cdot \prod_{j=1}^{k/2} (2j-1), & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

(c) *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$M_k\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j} \sigma^j \cdot \mathcal{M}_j\left(\mathcal{N}_{0,1}\right).$$

(d) *Es gelten $\mathcal{M}_1\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = a$ und $\operatorname{var}\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = \sigma^2$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Aus Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 und Lemma M.23.7.1 folgt

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Sei $T_{\sigma,a}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto \sigma x + a$. Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\sigma,a}$ dann $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbar und wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gilt

$$\mathcal{N}_{a,b^2} = T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.3.2 dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Zu *(b)*: Wegen (2) gilt insbesondere

$$\mathcal{N}_{0,\sigma^2} = T_{\sigma,0}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{3}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.23.3.2 dann

$$\mathcal{M}_k\left(T_{\sigma,0}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right)\right) = \sigma^k \cdot \mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt dann

$$\mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right) = \sigma^k \mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{5}$$

Sei zunächst k gerade. Wegen (1) liefert Bemerkung M.23.2.3 dann $M_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right)$. Hieraus folgt mit der nach Lemma M.23.7.1 gültigen Beziehung $\mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \prod_{j=1}^{k}(2j-1)$ dann

$$M_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \prod_{j=1}^{k}(2j-1).$$

Hieraus folgt in Verbindung mit (5) dann

$$M_k\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \sigma^k \prod_{j=1}^{k} (2j-1)\,.$$

Sei nun k ungerade. Sei $f_{0,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß $x \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \cdot \exp\left(\frac{-x^2}{2\sigma^2}\right)$. Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.13.2 gelten dann

$$f_{0,\sigma^2} \in \mathscr{C}\left((\mathbb{R},|\cdot|),(\mathbb{R},|\cdot|)\right) \tag{6}$$

und

$$f_{0,\sigma^2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right). \tag{7}$$

Wegen Definition M.22.13.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,\sigma^2} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,\sigma^2}}. \tag{8}$$

Aus der Definition von f_{0,σ^2} folgt sogleich

(I) Es ist f_{0,σ^2} eine gerade Funktion.

Wegen *(a)* gilt

$$\mathcal{M}_k\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right) \in [0,+\infty)\,. \tag{9}$$

Sei $P_{k;\mathbb{R}}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $x \longmapsto x^k$. Wegen (7) bis (9) liefert Teil *(b)* von Satz M.23.2.2 nun

$$P_{k;\mathbb{R}} \cdot f_{0,\sigma^2} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R},\mathfrak{B},\lambda^{(1)};\mathbb{R}\right). \tag{10}$$

Wegen (6), *(I)*, (10) und der Wahl von k liefert Teil *(c)* von Lemma M.23.7.3 dann

$$M_k\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,\sigma^2}}\right) = 0.$$

Hieraus folgt wegen (8) dann $M_k\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right) = 0$. Damit ist *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Unter Beachtung von (2) und (1) ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.23.3.2 dann

$$M_k\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right) = M_k\left(T_{\sigma,a^2}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right)\right) = \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} a^{k-j}\sigma^j \mathcal{M}_j\left(\mathcal{N}_{0,1}\right).$$

Zu *(d)*: Übungsaufgabe □

Folgerung M.23.7.1. *Seien $(a_1,b_1),(a_2,b_2) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$, dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $(a_1,b_1) = (a_2,b_2)$.*

(ii) *Es ist $\mathcal{N}_{a_1,b_1} = \mathcal{N}_{a_2,b_2}$.*

Wir wenden uns nun den Potenzmomenten der Cauchy-Verteilungsfamilie zu.

Satz M.23.7.3. *Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0, +\infty)$. Es bezeichne $\gamma_{\alpha,\beta}$ die Cauchy-Verteilung zu den Parametern α und β. Weiter sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k(\gamma_{\alpha,\beta}) = +\infty.$$

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.14.2 gelten

$$\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{1}$$

sowie

$$T_{\beta,\alpha}(\gamma_{0,1}) = \gamma_{\alpha,\beta}. \tag{2}$$

Sei $F_{0,1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto \frac{1}{\pi}\frac{1}{1+x^2}. \tag{3}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.14.2 gelten dann

$$F_{0,1} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|)) \tag{4}$$

sowie

$$F_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{5}$$

Wegen (3) gilt nach Definition von $\gamma_{0,1}$ zudem

$$\gamma_{0,1} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{F_{0,1}}. \tag{6}$$

Wegen (5) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.23.2.4 dann

$$|P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{7}$$

sowie

$$\mathcal{M}_1\left(\left(\lambda^{(1)}\right)_{F_{0,1}}\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{8}$$

Aus (6)und (8) folgt dann

$$\mathcal{M}_1(\gamma_{0,1}) = \int\limits_{\mathbb{R}} |P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{9}$$

Wegen (4) sowie $P_{1;\mathbb{R}} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$ folgt sogleich $|P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in \mathscr{C}((\mathbb{R}, |\cdot|), (\mathbb{R}, |\cdot|))$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.22.10.4, dass $|P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1}$ lokal Riemann-integrierbar auf $\mathbb{R}$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung von $|P_{1;\mathbb{R}}| \cdot F_{0,1} \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ und (7) dann mittels Teil *(a)* von Satz M.22.10.4 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} |P_{1;\mathbb{R}}| F_{0,1} \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \lim_{n\to\infty} \int\limits_{-n}^{n} (|P_{1;\mathbb{R}}(x)| F_{0,1}(x)) \restriction [-n, n] \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Aus der Definitionen von $P_{1;\mathbb{R}}$ und $F_{0,1}$ erkennt man sogleich, dass $|P_{1;\mathbb{R}}|\cdot F_{0,1}$ eine gerade Funktion ist. Hieraus folgt dann

$$\begin{aligned}\int_{-n}^{n} \left(\left|P_{1;\mathbb{R}}\left(x\right)\right| F_{0,1}\left(x\right)\right) \restriction [-n,n]\,\mathrm{d}x &= 2\int_{0}^{n} \left(\left|P_{1;\mathbb{R}}\left(x\right)\right| F_{0,1}\left(x\right)\right) \restriction [-n,n]\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{n}\frac{|x|}{1+x^2}\mathrm{d}x = \frac{2}{\pi}\cdot\int_{0}^{n}\frac{x}{1+x^2}\mathrm{d}x \\ &= \frac{2}{\pi}\cdot\left[\frac{1}{2}\ln\left(1+x^2\right)\right]_0^n \\ &= \frac{1}{\pi}\ln\left(1+n^2\right).\end{aligned}$$

Kombiniert man dies mit (9) und (10) so ergibt sich

$$\mathcal{M}_1\left(\gamma_{0,1}\right) = 2\int_{0}^{n} \left(\left|P_{1;\mathbb{R}}\left(x\right)\right| F_{0,1}\left(x\right)\right) \restriction [-n,n]\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\pi}\lim_{n\to\infty}\ln\left(1+n^2\right) = +\infty. \tag{11}$$

Aus (11) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.3.2 dann

$$\mathcal{M}_1\left(T_{\beta,\alpha}\left(\gamma_{0,1}\right)\right) = +\infty. \tag{12}$$

Aus (2) und (12) folgt dann

$$\mathcal{M}_1\left(\gamma_{a,b}\right) = +\infty. \tag{13}$$

Da wegen (1) insbesondere $\gamma_{a,b} \in \widetilde{\mathcal{M}}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ erfüllt ist, folgt wegen (13) mittels Satz M.23.3.1 für $k \in \mathbb{N}$ dann

$$\mathcal{M}_k\left(\gamma_{a,b}\right) = +\infty.$$

□

Satz M.23.7.4. *Seien $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$ und bezeichne $\Gamma_{\alpha,\beta}$ die Gammaverteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_+^{1;\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k\left(\Gamma_{\alpha,\beta}\right) = M_k\left(\Gamma_{\alpha,\beta}\right) = \frac{\Gamma\left(\alpha+k\right)}{\beta^k\cdot\Gamma\left(k\right)}.$$

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_1\left(\Gamma_{\alpha,\beta}\right) = M_1\left(\Gamma_{\alpha,\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta}$ sowie $\operatorname{var}\left(\Gamma_{\alpha,\beta}\right) = \frac{\alpha}{\beta^2}$.*

Folgerung M.23.7.2. *Seien $\left(\alpha_1,\beta_1\right), \left(\alpha_2,\beta_2\right) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt $\left(\alpha_1,\beta_1\right) = \left(\alpha_2,\beta_2\right)$.*

(ii) *Es ist $\Gamma_{\alpha_1,\beta_1} = \Gamma_{\alpha_2,\beta_2}$.*

Satz M.23.7.5. *Sei $n \in \mathbb{N}$ und bezeichne χ_n^2 die zentrale Chiquadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\chi_n^2 \in \mathcal{M}_+^{1;\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k\left(\chi_n^2\right) = M_k\left(\chi_n^2\right) = \prod_{j=1}^{k}\left[n + (2j-1)\right].$$

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_1\left(\chi_n^2\right) = M_1\left(\chi_n^2\right) = n$ sowie* $\operatorname{var}\left(\chi_n^2\right) = 2n$.

Beweis. Wegen $\chi_n^2 = \Gamma_{\frac{n}{2},\frac{1}{2}}$ folgt alles aus Satz M.23.7.4. □

Satz M.23.7.6. *Sei $\eta \in (0,+\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $E_\eta \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k\left(E_\eta\right) = M_k\left(E_\eta\right) = \frac{k!}{\eta^k}.$$

(c) *Es gelten $\mathcal{M}_1\left(E_\eta\right) = M_1\left(E_\eta\right) = \frac{1}{\eta}$ und* $\operatorname{var}\left(E_\eta\right) = \frac{1}{\eta^2}$.

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.14.6 gilt $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$. Damit folgt alles aus Satz M.23.7.4. □

M.23.8. Hamburgersches Momentenproblem

Aus der Sicht der Stochastik sind insbesondere Potenzmomentenprobleme von starkem Interesse. Aus diesem Grund stellen wir im vorliegenden Abschnitt einige bemerkenswerte Aspekte zur Theorie des Hamburgerschen[1)] Momentenproblems vor. Es zeigt sich, dass es im Zusammenhang mit dieser Aufgabenstellung günstig ist, die vorgegebenen Daten in einer speziellen Weise zu organisieren. Dieses Anliegen führt uns auf den nachfolgend eingeführten Typ strukturierter Matrizen, welche bereits in Untersuchungen von Herrmann Hankel[2)] anzutreffen ist und deshalb nach ihm benannt wurde.

Definition M.23.8.1. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$. Für $(j,k) \in \mathbb{Z}_{0,n} \times \mathbb{Z}_{0,n}$ sei $h_{j,k} := \alpha_{j+k}$. Dann heißt die Matrix $\mathbf{H}_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}} := (h_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{0,n}}$, die durch $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}$ *erzeugte Hankelmatrix*. Es sind beispielsweise

$$\mathbf{H}_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,0}}} = \alpha_0,$$
$$\mathbf{H}_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2}}} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 \\ \alpha_1 & \alpha_2 \end{bmatrix},$$
$$\mathbf{H}_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,4}}} = \begin{bmatrix} \alpha_0 & \alpha_1 & \alpha_2 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \end{bmatrix}.$$

[1)] Hans Ludwig Hamburger (∗05.08.1889; †14.08.1956) war ein deutscher Mathematiker. Er betrachtete in seiner Habilitation eine Verallgemeinerung des Momentenproblems. Es fragt danach, ob und zu welchen Bedingungen zu einer gegebenen Folge reeller Zahlen ein Borel-Maß existiert, dessen k-te Momente den jeweiligen Folgengliedern entsprechen.

[2)] Herrmann Hankel (∗14.02.1839; †29.08.1873) war ein deutscher Mathematiker, welcher zudem Professor an der Universität Leipzig war. Nach ihm benannt sind unter anderem die Hankel-Matrix, die Hankel-Transformation und Hankel-Funktionen.

Bemerkung M.23.8.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}$ eine Folge aus $\mathbb{C}$, dann ist $\mathbf{H}_{(\alpha_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}}$ symmetrisch. ♣

Definition M.23.8.2. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter sei $s \in \mathbb{Z}_{0,n}$. Dann wird die durch die Folge $(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{Z}_{0,2s}}$ erzeugte Hankelmatrix $\mathbf{H}_{(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{Z}_{0,2s}}}$ auch als die *s-te zu* μ *gehörige Hankelmatrix* bezeichnet und mit $\mathbf{H}_{s,\mu}$ bezeichnet.

Definition M.23.8.3. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A}$ eine symmetrische Matrix aus $\mathbb{R}^{q\times q}$. Dann heißt $\mathbf{A}$ *positiv semidefinit* bzw. *positiv definit,* falls für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q$ bzw. alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^q\backslash\{0\}$ die Beziehung

$$\mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \in [0,+\infty) \quad \text{bzw.} \quad \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x} \in (0,+\infty)$$

besteht.

Bezeichnung. Sei $q \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ bzw. $\mathbb{R}_{>}^{q\times q}$ die Menge aller positiv semidefiniten bzw. aller positiv definiten Matrizen aus $\mathbb{R}^{q\times q}$.

Bemerkung M.23.8.2. Es gelten $\mathbb{R}_{\geq}^{1\times 1} = [0,+\infty)$ sowie $\mathbb{R}_{>}^{1\times 1} = (0,+\infty)$. ♣

Beispiel M.23.8.1. Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathbf{O}_{q\times q} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q} \setminus \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

(b) Es ist $\mathbf{I}_q \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

Bemerkung M.23.8.3. Sei $q \in \mathbb{N}$. Dann gilt $\mathbb{R}_{>}^{q\times q} \subsetneq \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. ♣

Bemerkung M.23.8.4. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{q\times q}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

(ii) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ und $\det A \neq 0$. ♣

Bemerkung M.23.8.5. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} = (a_{j,k})_{i,j\in\mathbb{N}_{1,q}} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann gilt:

(a) Seien $j,k \in \mathbb{N}_{1,q}$. Dann gilt

$$a_{j,k}^2 \leq a_{j,j} \cdot a_{k,k}.$$

(b) Sei $j_0 \in \mathbb{N}_{1,q}$ so beschaffen, dass $a_{j_0,j_0} = 0$ erfüllt ist und sei $s \in \mathbb{N}_{1,q}$. Dann gelten

$$a_{j_0,s} = 0 \quad \text{und} \quad a_{s,j_0} = 0.$$

(c) Seien $m \in \mathbb{N}_{1,q}$ sowie $(j_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine streng monoton wachsende Folge aus $\mathbb{N}_{1,q}$. Dann gilt

$$(a_{j_k,,j_l})_{k,l\in\mathbb{N}_{1,m}} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}.$$ ♣

Bemerkung M.23.8.6. Seien $q \in \mathbb{N}$, $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,q}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$ und $\mathbf{A} := \operatorname{diag}(a_1,\ldots,a_q)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ bzw. $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

(ii) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,q}$ gilt $a_j \in [0,+\infty)$ bzw. $a_j \in (0,+\infty)$. ♣

Wir stellen nun ein Prinzip zur Erzeugung positiv semidefiniter Matrizen bereit. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.23.8.7. Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiter seien $r, s \in \mathbb{N}$ sowie $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ und $(y_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ bzw. $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,r}}$ und $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ Folgen aus H bzw. $\mathbb{R}$. Dann gilt:

$$\left\langle \sum_{j=1}^{r} a_j x_j, \sum_{k=1}^{s} b_k y_k \right\rangle = (a_1, \ldots, a_r) \cdot (\langle x_j, y_k \rangle)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,r} \\ k\in\mathbb{N}_{1,s}}} \cdot (b_1, \ldots, b_s)^T .$$

♣

Beweis. Es gilt

$$\begin{aligned}
\left\langle \sum_{j=1}^{r} a_j x_j, \sum_{k=1}^{s} b_k y_k \right\rangle &= \sum_{j=1}^{r}\sum_{k=1}^{s} a_j b_k \langle x_j, y_k \rangle = \sum_{j=1}^{r} a_j \left(\sum_{k=1}^{s} \langle x_j, y_k \rangle b_k \right) \\
&= (a_1, \ldots, a_r) \cdot \begin{pmatrix} \sum_{k=1}^{s} \langle x_1, y_k \rangle b_k \\ \vdots \\ \sum_{k=1}^{s} \langle x_r, y_k \rangle b_k \end{pmatrix} \\
&= (a_1, \ldots, a_r) \cdot \begin{pmatrix} \langle x_1, y_1 \rangle & \ldots & \langle x_1, y_s \rangle \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \langle x_r, y_1 \rangle & \ldots & \langle x_r, y_s \rangle \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_s \end{pmatrix} \\
&= (a_1, \ldots, a_r) \cdot (\langle x_j, y_k \rangle)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,r} \\ k\in\mathbb{N}_{1,s}}} \cdot (b_1, \ldots, b_s)^T .
\end{aligned}$$

□

Definition M.23.8.4. Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus H. Dann heißt die Matrix

$$(\langle x_j, x_k \rangle)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$$

die Gram[3)]sche Matrix der Folge $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ in $(H, \langle .,. \rangle)$.

Satz M.23.8.1. *Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Semiprähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $(x_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus H. Dann gilt:*

(a) *Es ist $(\langle x_j, x_k \rangle)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}$.*

(b) *Sei $(\langle x_j, x_k \rangle)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>}$. Dann sind $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig.*

(c) *Sei $(H, \langle .,. \rangle)$ sogar ein Prähilbertraum über $\mathbb{R}$. Weiterhin seien $x_1, \ldots, x_n \in H$ linear abhängig. Dann gilt*

$$(\langle x_j, x_k \rangle)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>}.$$

[3)] Jørgen Pedersen Gram (∗27.06.1850; †29.04.1916) war ein dänischer Mathematiker, welcher vor allem durch das nach ihm benannte Gram-Schmidtsche-Orthogonalisierungsverfahren bekannt ist.

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.23.8.7 gilt dann

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \cdot u^T = \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle. \tag{2}$$

Da $\langle .,. \rangle$ ein Semiskalarprodukt auf H ist, gilt

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle \in [0, +\infty). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in [0, +\infty). \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann $\left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{\geq}$.

Zu *(b)*: Es bezeichne $\mathcal{O}$ das Nullelement in H. Seien nun $u_1, \ldots, u_n \in \mathbb{R}$ mit

$$\sum_{j=1}^{n} u_j x_j = 0. \tag{5}$$

Aus (5) folgt dann

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle = \langle \mathcal{O}, \mathcal{O}\rangle = 0. \tag{6}$$

Sei

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n). \tag{7}$$

Dann ist $u \in \mathbb{R}^n$ und aus (7), (1) und (2) folgt dann

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \cdot u^T = \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle. \tag{8}$$

Aus (6) und (8) ergibt sich dann

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \cdot u^T = \mathcal{O}.$$

Da aber $\left(\langle x_j, x_k\rangle\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n\times n}_{>}$ gilt dann

$$\mathbf{u} = (0, \ldots, 0)^T. \tag{9}$$

Somit sind also $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig.

Zu *(c)*: Sei

$$\mathbf{u} = (u_1, \ldots, u_n)^T \in \mathbb{R}^n \setminus \{\mathbf{0}_{n\times 1}\}. \tag{10}$$

Da $x_1, \ldots, x_n$ linear unabhängig ist, folgt aus (10) dann

$$\sum_{j=1}^{n} u_j x_j \neq \mathcal{O}. \tag{11}$$

Da $(H, \langle .,. \rangle)$ ein Prähilbertraum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (11) dann sofort

$$\left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle \in (0, +\infty). \tag{12}$$

Wegen (10), (1) und (2) gilt

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k \rangle\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{1,n}} \cdot u^T = \left\langle \sum_{j=1}^{n} u_j x_j, \sum_{k=1}^{n} u_k x_k \right\rangle. \tag{13}$$

Aus (12) und (13) folgt nun

$$u \cdot \left(\langle x_j, x_k \rangle\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{1,n}} \cdot u^T \in (0, +\infty). \tag{14}$$

Aus (14) und (10) folgt dann $\left(\langle x_j, x_k \rangle\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{1,n}} \in \mathbb{R}^{n \times n}_{>}$ und die Behauptung ist bewiesen. □

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Wegen Satz M.22.7.6 ist dann die Abbildung

$$\langle .,. \rangle : \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \times \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}) \longrightarrow \mathbb{R},$$

welche gemäß

$$\langle f, g \rangle \coloneqq \int_{\Omega} f \cdot g \mathrm{d}\mu$$

erklärt ist, ein Semiskalarprodukt.

Satz M.23.8.2. *Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+}^{b,2n}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathscr{P}_{\mathbb{R};2n} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right)$*

(b) *Es ist $\mathscr{P}_{\mathbb{R};2n} \subseteq \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right)$.*

(c) *Sei $s \in \mathbb{N}_{0,2n}$ und sei $P_{s;\mathbb{R}}$ wie bisher. Dann ist $P_{s;\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ sowie*

$$\int_{\mathbb{R}} P_{s;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu = \mathcal{M}_s(\mu)$$

(d) *Es bezeichne $\mathbf{H}_{n,\mu}$ die n-te zu μ gehörige Hankelmatrix. Dann gilt:*

(d1) *Es ist $\left(P_{j;\mathbb{R}}\right)_{j \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ und es gilt*

$$\mathbf{H}_{n,\mu} = \left(\langle P_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}} \rangle\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{0,n}}.$$

(d2) *Es ist $H_{n,\mu} \in \mathbb{R}^{(n+1)\times(n+1)}_{\geq}$*

(d3) *Seien* $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{n+1}$ *sowie* $P \coloneqq \sum_{j=0}^{n} a_j P_{j;\mathbb{R}}$ *und* $Q \coloneqq \sum_{j=0}^{n} b_j P_{j;\mathbb{R}}$. *Dann* $P, Q \in \mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ *und es gilt*

$$\langle P, Q \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{b}.$$

BEWEIS. Nur zu *(d)*:

Zu *(d1)*: Nach Konstruktion ist $(P_{j;\mathbb{R}})_{j \in \mathbb{N}_{0,n}}$ eine Folge aus $\mathscr{P}_{\mathbb{R},n}$. Hieraus folgt mittels *(b)*, dass $(P_{j;\mathbb{R}})_{j \in \mathbb{N}_{0,n}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\Omega, \mathfrak{B}, \mu; \mathbb{R})$ ist. Für $j, k \in \mathbb{Z}_{0,n}$ ergibt sich bei Beachtung von $P_{j;\mathbb{R}} \cdot P_{k;\mathbb{R}} = P_{j+k;\mathbb{R}}$ und Definition M.23.2.1 weiterhin

$$\langle P_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}} \rangle = \int_{\mathbb{R}} P_{j;\mathbb{R}} \cdot P_{k;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu = \int_{\mathbb{R}} P_{j+k;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu = \mathcal{M}_{j+k}(\mu).$$

Hieraus folgt bei Beachtung von Definition M.23.8.1 und Definition M.23.8.2 dann

$$\left(\langle P_{j;\mathbb{R}}, P_{k;\mathbb{R}} \rangle\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{0,n}} = \left(\mathcal{M}_{j+k}(\mu)\right)_{j,k \in \mathbb{N}_{0,n}} = H_{n,\mu}.$$

Zu *(d2)*: Dies folgt wegen *(d1)* und Teil *(a)* von Satz M.23.8.1.

Zu *(d3)*: Dies folgt wegen *(d1)* sogleich aus Bemerkung M.23.8.4. □

Wir geben nun für ein festes gegebenes $n \in \mathbb{N}_0$ eine Charakterisierung der Menge jener Maße $\mathcal{M}_+^{b,2n}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, für die die n-te zu μ gehörige Hankelmatrix singulär ist.

Satz M.23.8.3. *Sei* $n \in \mathbb{N}_0$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gilt:*

(a) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $H_{n\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)} \backslash \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$.

(ii) *Es gibt eine höchstens* n*-elementige Teilmenge* $B_0 \subseteq \mathbb{R}$, *so dass* $\mathbb{R} \backslash B_0 \in \mathcal{N}_\mu$.

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Dann gilt* $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

BEWEIS.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Wegen *(i)* gibt es ein

$$\mathbf{a} \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}_{(n+1)\times 1}\}, \tag{1}$$

so dass

$$\mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{a} = 0. \tag{2}$$

Sei

$$P \coloneqq \sum_{j=0}^{n} a_j \cdot P_{j;\mathbb{R}}. \tag{3}$$

Wegen (3) folgt mittels Teil *(d3)* von Satz M.23.8.2 dann

$$P \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right) \tag{4}$$

und

$$\langle P, P \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{a}. \tag{5}$$

Wegen (4) und der Definition von $\langle ., . \rangle$ gelten dann

$$P^2 \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right) \tag{6}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}} P^2 \mathrm{d}\mu = \langle P, P \rangle . \tag{7}$$

Aus (7), (5) und (2) folgt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} P^2 \mathrm{d}\mu = \langle P, P \rangle = \mathbf{a}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{a} = 0. \tag{8}$$

Wegen (6) und $P^2 \in \mathrm{Abb}\left(\mathbb{R}, [0, +\infty)\right)$ gilt

$$P^2 \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) gilt mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 dann $\left\{P^2 \neq 0\right\} \in \mathcal{N}_\mu$, also wegen $\left\{P^2 \neq 0\right\} = \{P \neq 0\}$ dann

$$\{P \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{10}$$

Sei nun

$$B_0 \coloneqq \{P = 0\}. \tag{11}$$

Wegen (11) ist dann $\{B \neq 0\} = \mathbb{R} \backslash B_0$. Hieraus folgt wegen (10) dann

$$\mathbb{R}^1 \backslash B_0 \in \mathcal{N}_\mu. \tag{12}$$

Da P wegen (1) und (2) ein vom Nullpolynom verschiedenes Polynom vom Grade höchstens n über $\mathbb{R}$ ist, folgt wegen (11) und dem Fundamentalsatz der Algebra dann, dass $\mathrm{card}\, B_0 \leq n$. Hieraus folgt mittels (12) dann *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wegen *(ii)* gibt es Folgen $(x_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}$ bzw. aus $[0, +\infty)$ mit

$$\mu = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{x_k, \mathfrak{B}_1}. \tag{13}$$

Sei nun $Q \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$Q(x) \coloneqq \prod_{j=1}^{n} (x - x_k). \tag{14}$$

Wegen (14) gelten dann

$$Q \in \mathscr{P}_{\mathbb{R},n} \tag{15}$$

und

$$\mathrm{grad} Q = n \tag{16}$$

sowie für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{17}$$

dann

$$Q(x_k) = 0. \tag{18}$$

Wegen (15) und (16) gibt es ein eindeutig bestimmtes

$$\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_n)^T \in \mathbb{R}^{n+1} \backslash \{\mathbf{0}_{n \times 1}\} \tag{19}$$

mit

$$Q = \sum_{j=1}^{n} b_j P_{j;\mathbb{R}}. \tag{20}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie (19) und (20) folgt dann mit Teil *(d3)* von Satz M.23.8.2 dann

$$Q \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right) \tag{21}$$

sowie

$$\langle Q, Q\rangle = \mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{b}. \tag{22}$$

Wegen (21) und der Definition von $\langle ., .\rangle$ gelten $Q^2 \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right)$ und

$$\langle Q, Q\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \mathrm{d}\mu. \tag{23}$$

Wegen (13) folgt mittels Teil *(b)* von Beispiel M.22.4.4 sowie zusätzlicher Beachtung von (17) und (18) dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \mathrm{d}\left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \varepsilon_{x_j,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \left[Q^2\left(x_k\right)\right]^2 = 0. \tag{24}$$

Unter Beachtung von (22), (23) und (24) folgt nun

$$\mathbf{b}^T \cdot \mathbf{H}_{n,\mu} \cdot \mathbf{b} = \langle Q, Q\rangle = \int\limits_{\mathbb{R}} Q^2 \mathrm{d}\mu = 0. \tag{25}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2n}\left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}\right)$ gilt nach Teil *(d2)* von Satz M.23.8.2 dann

$$H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}. \tag{26}$$

Wegen (19), (25) und (26) gilt dann

$$H_{n,\mu} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)} \backslash \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)},$$

also *(i)*.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* ist mit *(i)* auch *(ii)* erfüllt. Wegen *(ii)* gibt es Folgen $\left(x_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}$ und $\left(\alpha_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $[0, +\infty)$ mit $\mu = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varepsilon_{x_k,\mathfrak{B}_1}$. Hieraus folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.23.2.3 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und damit *(b)*. □

Wir wenden uns nun dem HAMBURGERschen Momentenproblem zu. Dieses ist nach dem deutschen Mathematiker HANS LUDWIG HAMBURGER benannt.

Hamburgersches Momentenproblem

Sei $\left(c_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \left(c_k\right)_{k\in\mathbb{N}}\right)$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu bestimmen, welche der Bedingung

$$\left(M_k\left(\mu\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(c_k\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$$

genügen. Wir formulieren nun ein Kriterium für die Lösbarkeit des HAMBURGERschen Momentenproblems. Hierzu benötigen wir die nachfolgenden Begriffsbildungen.

Definition M.23.8.5. Seien $n \in \mathbb{N}_0$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}$ *Hankel-nichtnegativ definit* bzw. *Hankel-positiv definit,* falls für die durch $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2n}}$ erzeugte Hankelmatrix $\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}}$ die Beziehung

$$\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2n}}} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}$$

bzw.

$$\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2n}}} \in \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$$

gilt.

Bezeichnung. Es bezeichne nun $\mathcal{H}_{2n,\geq}$ bzw. $\mathcal{H}_{2n,>}$ die Menge aller Hankel-nichtnegativ definiten- bzw. Hankel-positiv definiten Folgen aus $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2n}}$ aus $\mathbb{R}$.

Definition M.23.8.6. Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt die Folge $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ *Hankel-nichtnegativ definit* bzw. *Hankel-positiv definit,* falls ***für alle*** $n \in \mathbb{N}_0$ die durch $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}$ erzeugte Hankelmatrix $\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}}$ die Beziehung

$$\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}} \in \mathbb{R}_{\geq}^{(n+1)\times(n+1)}$$

bzw.

$$\mathbf{H}_{(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2n}}} \in \mathbb{R}_{>}^{(n+1)\times(n+1)}$$

gilt.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{H}_{\infty,\geq}$ bzw. $\mathcal{H}_{\infty,>}$ die Menge aller Hankel-nichtnegativ definiten- bzw. Hankel-positiv definiten Folgen aus $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_0}$ aus $\mathbb{R}$.

Satz M.23.8.4. *Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

  (i) *Es ist* $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right) \neq \varnothing$.

  (ii) *Es ist* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,\geq}$.

(b) *Ist dann* $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,\geq}\backslash\mathcal{H}_{\infty,>}$, *so besteht die Menge* $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$ *aus* genau *einem Element μ, welches zudem molekular ist.*

Wir stellen nun eine hinreichende Bedingung für die Lösbarkeit des HAMBURGERschen Momentenproblems bereit. Hierzu sei daran erinnert, dass die betrachteten Maße in Satz M.23.2.1 behandelt wurden.

Satz M.23.8.5. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ so beschaffen, dass ein $R \in (0, +\infty)$ mit $\mathbb{R}\backslash[-R, R] \in \mathcal{N}_\mu$ existiert. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Es gilt*

$$\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (M_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}_0}\right) = \{\mu\}.$$

Beispiel M.23.8.2. Es bezeichne $\mu_{[0,1]}$ die kontinuierliche Gleichverteilung auf $[0, 1]$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}\right) = \left\{\mu_{[0,1]}\right\}$.

(b) Es ist $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,>}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.23.7.1 gilt $\mu_{[0,1]} \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\left(M_k\left(\mu_{[0,1]}\right)\right)_{k\in\mathbb{N}_0} = \left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}. \tag{1}$$

Wegen (1) folgt unter Beachtung von $\mu_{[0,1]} \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $\mathbb{R}\backslash[-1,1] \in \mathcal{N}_\mu$ mittels Teil *(b)* von Satz M.23.8.5 dann *(a)*.

Zu *(b)*: Wegen (1) folgt unter Beachtung von $\mu_{[0,1]} \in \mathcal{M}_+^b \in \left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $\mathbb{R}\backslash[-1,1] \in \mathcal{N}_\mu$ mittels Teil *(a)*von Satz M.23.8.4 zunächst $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,\geq}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und der Tatsache, dass μ *kein* molekulares Maß ist, mittels Satz M.23.8.3 dann für $n \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbf{H}_{\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{Z}_{0,2n}}} \in \mathbb{R}_>^{(n+1)\times(n+1)}.$$

Somit ist also $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,>}$. □

Die zur Folge $\left(\frac{1}{k+1}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ gehörige Hankelmatrix wurde von David Hilbert[4)] studiert und wird deshalb als Hilbertmatrix bezeichnet.

Beispiel M.23.8.3. Es seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\sigma^2 \in (0,+\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern α und σ^2. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) Es gilt

$$\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \left(M_k\left(\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right)\right)\right) = \left\{\mathcal{N}_{a,\sigma^2}\right\}.$$

Satz M.23.8.6. *Sei $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$, für die die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$ mindestens zwei Elemente besitzt. Dann enthält $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$ sogar* unendlich *viele Elemente und es gilt $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0} \in \mathcal{H}_{\infty,>}$.*

Wir präsentieren nun ein Beispiel eine Folge aus $\mathbb{R}$, für die die Menge $\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}\right)$ unendlich viele Elemente enthält.

Satz M.23.8.7. *Sei $d_{0,1}\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$d_{0,1}(x) := \begin{cases} \dfrac{1}{x}\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\dfrac{(\ln x)^2}{2}\right), & \text{für } x \in (0,+\infty) \\ 0, & \text{sonst.} \end{cases}$$

Dann gilt:

[4)] David Hilbert (∗23.01.1862; †14.02.1943) war ein deutscher Mathematiker. Er gilt als einer der *bedeutendsten* Mathematiker der Neuzeit. Viele seiner Arbeiten auf dem Gebiet der Mathematik und mathematischen Physik begründeten eigenständige Forschungsgebiete. Mit seinen Vorschlägen begründete er die bis heute bedeutsame formalistische Auffassung von den Grundlagen der Mathematik und veranlasste eine kritische Analyse der Begriffsdefinitionen der Mathematik und des mathematischen Beweises. Hilberts programmatische Rede auf dem internationalen Mathematikerkongress in Paris im Jahre 1900, in der er eine Liste von 23 mathematischen Problemen vorstellte, beeinflusste die mathematische Forschung des 20. Jahrhunderts nachhaltig.

(a) *Es ist* $d_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Unter Beachtung von* (a) *sei* $v_{0,1} \coloneqq \left(\lambda^{(1)}\right)_{d_{0,1}}$. *Dann gilt:*

(b1) *Es ist* $v_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b2) *Sei* $k \in \mathbb{N}_0$. *Dann gilt*

$$\mathcal{M}_k\left(v_{0,1}\right) = M_k\left(v_{0,1}\right) = \exp\left(\frac{k^2}{2}\right).$$

(b3) *Es gilt* $\operatorname{var}\left(v_{0,1}\right) = \mathrm{e} \cdot (\mathrm{e} - 1)$.

Definition M.23.8.7. Das in Satz M.23.8.7 eingeführte Maß $v_{0,1} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ heißt *standardisierte logarithmische Normalverteilung.*

Satz M.23.8.8. *Sei* $d_{0,1}$ *die im Satz M.23.8.7 eingeführte Abbildung. Weiter seien* $\varepsilon \in [-1, 1]$ *und* $f_\varepsilon \colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$f_\varepsilon(x) \coloneqq \begin{cases} d_{0,1}(x) \cdot [1 + \varepsilon \cdot \sin(2x \cdot \ln x)], & \text{falls } x \in (0, +\infty), \\ 0, & \text{falls } x \in (-\infty, 0]. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist* $f_\varepsilon \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) *Unter Beachtung von* (a) *sei* $v_\varepsilon \coloneqq \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_\varepsilon}$. *Dann gilt*

$$v_\varepsilon \in \mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \left(\exp\left(\frac{k^2}{2}\right)\right)_{k \in \mathbb{N}_0}\right).$$

Wir wenden uns nun der finiten Version des HAMBURGERschen Momentenproblems zu.

Finites Hamburgersches Momentenproblem

Seien $m \in \mathbb{N}_0$ und $(c_k)_{k \in \mathbb{N}_{0,m}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,m}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_k)_{k \in \mathbb{N}_{0,m}}\right)$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,m}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu bestimmen, welche der Bedingung

$$\left(M_k(\mu)\right)_{k \in \mathbb{N}_{0,m}} = (c_k)_{k \in \mathbb{N}_{0,m}}$$

genügen. Wir formulieren nun ein Kriterium zur Lösbarkeit des finiten Hamburger Momentenproblems. Hierzu benötigen wir die nachfolgende Begriffsbildung.

Definition M.23.8.8. Sei $s \in \mathbb{N}_0$.

(a) Sei $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}_{0,2s}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $(c_j)_{j \in \mathbb{Z}_{0,2s}}$ *Hankel-nichtnegativ definit erweiterbar* bzw. *Hankel-positiv definit erweiterbar,* falls es reelle Zahlen c_{2s+1} und $c_{2(s+1)}$ derart gibt, dass

$$(c_j)_{j \in \mathbb{Z}_{0,2(s+1)}} \in \mathcal{H}_{2(s+1),\geq}$$

bzw.

$$(c_j)_{j \in \mathbb{Z}_{0,2(s+1)}} \in \mathcal{H}_{2(s+1),>}$$

erfüllt ist.

(b) Sei $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2s+1}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann heißt $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2s+1}}$ *Hankel-nichtnegativ definit erweiterbar* bzw. *Hankel-positiv definit erweiterbar,* falls es eine reelle Zahl $c_{2(s+1)}$ derart gibt, dass

$$(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2(s+1)}} \in \mathcal{H}_{2(s+1),\geq}$$

bzw.

$$(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2(s+1)}} \in \mathcal{H}_{2(s+1),>}$$

erfüllt ist.

Bezeichnung. Für $m \in \mathbb{N}_0$ bezeichne $\mathcal{H}_{m,\geq,e}$ bzw. $\mathcal{H}_{m,>,e}$ die Menge aller Hankel-nichtnegativ definit erweiterbaren bzw. Hankel-positiv definit erweiterbaren Folgen $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,m}}$ aus $\mathbb{R}$.

Bemerkung M.23.8.8. Sei $s \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathcal{H}_{2s,>,e} = \mathcal{H}_{2s,>} \subseteq \mathcal{H}_{2s,\geq,e} \subseteq \mathcal{H}_{2s,\geq}. \qquad \clubsuit$$

Beispiel M.23.8.4. Seien $c_0 := 0$, $c_1 := 0$ und $c_2 := 1$. Dann gilt:

(a) Es ist

$$H_{(c_0,c_1,c_2)} = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in \mathbb{R}^{2\times 2}_{\geq}.$$

(b) Es ist $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2}} \in \mathcal{H}_{2,\geq,e}\backslash\mathcal{H}_{2,>,e}$. Damit gilt also

$$\mathcal{H}_{2,>,e} \subsetneq \mathcal{H}_{2,\geq,e}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies ist einfaches Rechnen.

Zu *(b)*: Seien $c_3, c_4 \in \mathbb{R}$. Dann gilt

$$\mathbf{H}_{(c_j)_{j=0,\ldots,4}} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & c_3 \\ 1 & c_3 & c_4 \end{bmatrix}.$$

Setzen wir nun $\mathbf{H}_{(c_j)_{j=0,\ldots,4}} = (a_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,3}}$, so ist also $a_{12} = 0$ und $a_{31} = 1$. Hieraus folgt wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.23.8.5, dass $\mathcal{H}_{(c_j)_{j=0,\ldots,4}} \in \mathbb{R}^{3\times 3}_{\geq}$. Hieraus folgt in Verbindung mit *(a)* dann die Behauptung. □

Satz M.23.8.9. *Seien $s \in \mathbb{N}$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$.*

(a) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gilt* $\mathcal{M}_+^{b,m}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,s}}\right) \neq \varnothing$.

(ii) *Es ist* $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,s}} \in \mathcal{H}_{s,\geq,e}$.

(b) *Sei* $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,s}} \in \mathcal{H}_{s,\geq,e}\backslash\mathcal{H}_{s,>,e}$. *Dann besteht die Menge* $\mathcal{M}_+^{b,m}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,s}}\right)$ *aus* genau *einem Maß μ und dieses Maß ist zudem molekular.*

Wir stellen nun ein weiteres finites Momentenproblem vor.

Modifiziertes finites Hamburgersches Momentenproblem

Seien $s \in \mathbb{N}$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2s}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann ist die Menge $\mathcal{M}_+^{b,2s,\leq}\big(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2s}}\big)$ aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,2s}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu bestimmen, welche den Bedingungen

$$(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{Z}_{0,2s-1}} = (c_k)_{k\in\mathbb{Z}_{0,2s-1}}$$

und

$$c_{2s} - M_{2s}(\mu) \in [0, +\infty)$$

genügen.

Satz M.23.8.10. *Seien $s \in \mathbb{N}_0$ und $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2s}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{M}_+^{b,2s,\leq}\left(\mathbb{R}, \mathfrak{B}, (c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2s}}\right) \neq \varnothing$.*

(ii) *Es ist $(c_j)_{j\in\mathbb{N}_{0,2s}} \in \mathcal{H}_{2s,\geq}$.*

Beispiel M.23.8.5. Seien $c_0 := 0$, $c_1 := 0$ und $c_2 := 1$. Dann besteht die Menge

$$\mathcal{M}_+^{b,2,\leq}\big(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, (c_j)_{j\in\mathbb{Z}_{0,2}}\big)$$

genau aus dem Nullmaß auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

M.23.9. Maße zweiter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Im Abschnitt M.23.5 haben wir für $m \in \mathbb{N}$ und $k \in \mathbb{N}$ den Begriff eines Maßes von k-ter Ordnung aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ eingeführt. In den Anwendungen ist der Fall eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ von besonderer Bedeutung. Hier ist der Einsatz von Hilbertraummethoden möglich. Wir werden auf Integrale von Matrixfunktionen geführt.

Definition M.23.9.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei

$$\mathbf{f} = (f_{j,k})_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}.$$

Dann wird definiert:

$$\int\limits_\Omega \mathbf{f}\mathrm{d}\mu := \left(\int\limits_\Omega f_{j,k}\mathrm{d}\mu\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,p}\\ k\in\mathbb{N}_{1,q}}}.$$

Lemma M.23.9.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mathbf{f} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. Dann gelten $\mathbf{f}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{q\times p}$ sowie*

$$\int\limits_\Omega \mathbf{f}^T\mathrm{d}\mu = \left(\int\limits_\Omega \mathbf{f}\mathrm{d}\mu\right)^T.$$

Lemma M.23.9.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum sowie $p, q \in \mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Seien* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Dann gelten* $\mathbf{f}+\mathbf{g} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$ *sowie*

$$\int\limits_\Omega (\mathbf{f}+\mathbf{g})\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_\Omega \mathbf{f}\mathrm{d}\mu + \int\limits_\Omega \mathbf{g}\mathrm{d}\mu.$$

(b) *Sei* $\mathbf{f} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Weiterhin seien* $r, s \in \mathbb{N}$ *sowie* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{r\times p}$ *und* $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{q\times s}$. *Dann gelten* $\mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\cdot\mathbf{B} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{r\times s}$ *sowie*

$$\int\limits_\Omega \mathbf{A}\cdot\mathbf{f}\cdot\mathbf{B}\mathrm{d}\mu = \mathbf{A}\cdot\int\limits_\Omega \mathbf{f}\mathrm{d}\mu\cdot\mathbf{B}.$$

Beweisskizze. Man verwende Teil *(d)* von Satz M.22.4.5. □

Lemma M.23.9.3. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $p, q, r \in \mathbb{N}$. *Weiter seien* $\mathbf{f} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$ *und* $\mathbf{g} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{q\times r}$. *Dann gilt*

$$\mathbf{f}\cdot\mathbf{g} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times r}.$$

Beweis. Man verwende Teil *(a)* von Satz M.22.7.6 und Teil *(d)* von Satz M.22.4.5. □

Lemma M.23.9.4. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum sowie* $p, q \in \mathbb{N}$. *Dann gilt:*

(a) *Seien* $\mathbf{f}, \mathbf{g} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *Dann gilt* $\mathbf{f}\cdot\mathbf{g}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times p}$.

(b) *Sei* $\mathbf{f} \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times q}$. *So gelten* $\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}^T \in \left[\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})\right]^{p\times p}$, $|\mathbf{f}|^2 \in \mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ *sowie*

$$\mathrm{tr}\left[\int\limits_\Omega \mathbf{f}\cdot\mathbf{f}^T\mathrm{d}\mu\right] = \int\limits_\Omega |\mathbf{f}|^2\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt sogleich aus Lemma M.23.9.3.

Zu *(b)*: Man verwende *(a)* sowie die Identität

$$\mathrm{tr}\left(\mathbf{f}\cdot\mathbf{f}^T\right) = \left[|\mathbf{f}|_{E,\mathbb{R}^{p\times q}}\right]^2.$$ □

Wir wenden uns nun den Maßen aus $\mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu. Wir erinnern zunächst daran, dass für $m \in \mathbb{N}$, $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ und $k \in \mathbb{N}$ die Abbildung $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ gemäß $(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_j)^k$definiert ist.

Satz M.23.9.1. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. *Dann gilt:*

(a1) *Es ist* $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$.

(a2) *Unter der Beachtung von* (a1) *sei* $\widetilde{M}_j(\mu) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}$, *das heißt*

$$\widetilde{M}_j = \int\limits_{\mathbb{R}^m} x_j \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}).$$

Weiter sei $\pi_{m,j}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß* $(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto x_j$. *Dann ist* $\pi_{m,j}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$*-messbare Abbildung und es gelten* $\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$ *sowie*

$$M_1(\pi_{m,j}(\mu)) = \widetilde{M}_j(\mu).$$

(b) *Sei*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) \coloneqq \left(\widetilde{M}_1(\mu),\ldots,\widetilde{M}_m(\mu)\right)^T.$$

Dann gilt

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\mu.$$

Beweis.

Zu *(a1)*: Dies folgt aus Bemerkung M.23.5.2.

Zu *(a2)*: Wegen Teil *(c)* von Bemerkung M.23.5.2 gelten

$$\pi_{m,j} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m;\mathbb{R}) \tag{1}$$

sowie

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} = P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt dann aus *(a)* dann

$$P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,\mu;\mathbb{R}). \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) folgt dann aus Teil *(b)* von Satz M.22.9.2 dann

$$P_{1;\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R},\mathfrak{B},\pi_{m,j}(\mu);\mathbb{R}) \tag{4}$$

sowie mittels Teil *(c)* von Satz M.22.9.2 weiterhin

$$\int\limits_{\mathbb{R}^n} (P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j})\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}}\mathrm{d}\pi_{m,j}(\mu). \tag{5}$$

Wegen (4) gilt dann

$$\pi_{m,j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right). \tag{6}$$

Unter Beachtung von (6), (5) und (2) ergibt sich

$$M_1(\pi_{m,j}(\mu)) = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}}\mathrm{d}\pi_{m,j}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m,j})\,\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu = \widetilde{M}_j(\mu).$$

Damit ist *(a2)* bewiesen.

Zu *(b)*: Sei

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m. \tag{7}$$

Dann gilt

$$\begin{pmatrix} \widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{m,1;\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \mathbf{x}. \tag{8}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.1 sowie (7) und (8) folgt dann

$$\begin{aligned} \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) &= \begin{pmatrix} \widetilde{M}_1(\mu) \\ \vdots \\ \widetilde{M}_m(\mu) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\mu \\ \vdots \\ \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{m,1;\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\mu \end{pmatrix} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^m}, \ldots, \widetilde{P}_{m,1;\mathbb{R}^m}\right)^T \mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x} \mathrm{d}\mu. \end{aligned}$$

□

Satz M.23.9.1 führt uns auf folgende Verallgemeinerung der Definition des Erwartungswertes eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Definition M.23.9.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es sei $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$ wie in Satz M.23.9.1 erklärt. Dann heißt $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$ der *Erwartungswert von μ.*

Wir nehmen nun eine Verallgemeinerung von Satz M.23.3.2 auf den mehrdimensionalen Fall vor. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.23.9.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ und $k \in \mathbb{N}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$. ♣

Beweis. Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} = \left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right)^k.$$

Hieraus folgt dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}\right| = \left|\left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right)^k\right| = \left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right|^k. \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.23.5.2 gelten

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}) \tag{2}$$

und

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathcal{M}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m; \mathbb{R}). \tag{3}$$

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Wegen *(i)* und (2) liefert Folgerung M.22.4.1 dann $\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right| \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$. Hieraus folgt wegen (1) dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right|^k \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) ist dann $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$. Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wegen *(ii)* gilt $\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right|^k \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$. Hieraus folgt wegen (1) dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\right| \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right). \tag{5}$$

Wegen (5) und (2) liefert Folgerung M.22.4.1 dann $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$. Es gilt also *(i)*. □

Bemerkung M.23.9.2. Seien $k, m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$.

(ii) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$. ♣

Beweis. Nach Bemerkung M.23.5.4 ist *(i)* äquivalent zu:

(i) Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

Nach Satz M.23.9.1 sind *(ii)* und *(i)* äquivalent. Hieraus folgt die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Satz M.23.9.2. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiter seien $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Die Abbildung $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ sei definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und es gilt $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right) \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$.*

(b) *Es gelten $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right) \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$ sowie*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right) = \mathbf{A} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right) + \left[\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right] \cdot \mathbf{a}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{A,a}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbar. Unsere Strategie zum Beweis des zweiten Teiles der Aussagen von *(a)* basiert auf der Verwendung von Teil *(b)* von Satz M.22.9.2 in Kombination mit Bemerkung M.23.9.1. Seien

$$\mathbf{A} = \left(a_{j,k}\right)_{\substack{j\in\mathbb{N}_{1,l}\\ k\in\mathbb{N}_{1,m}}} \tag{1}$$

sowie

$$\mathbf{a} = \left(a_1, \ldots, a_l\right)^T. \tag{2}$$

Unter Beachtung von (1) und (2) ergibt sich für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T$ dann

$$\begin{aligned}\begin{bmatrix}\left(\widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \left(\widetilde{P}_{l,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)(\mathbf{x})\end{bmatrix} &= \left[\begin{pmatrix}\left(\widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^l}\right) \\ \vdots \\ \left(\widetilde{P}_{l,1;\mathbb{R}^l}\right)\end{pmatrix} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right](\mathbf{x}) = \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)(\mathbf{x}) \\ &= T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x}) = \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a} \\ &= \begin{bmatrix}\sum_{s=1}^m a_{1,s}\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^l}(\mathbf{x}) + a_1 \cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^m a_{l,s}\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^l}(\mathbf{x}) + a_l \cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x})\end{bmatrix}.\end{aligned}$$

Somit ist also

$$\begin{bmatrix}\widetilde{P}_{1,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \\ \vdots \\ \widetilde{P}_{l,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\end{bmatrix}(\mathbf{x}) = \begin{bmatrix}\sum_{s=1}^m a_{1,s}\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^l}(\mathbf{x}) + a_1 \cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}) \\ \vdots \\ \sum_{s=1}^m a_{l,s}\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^l}(\mathbf{x}) + a_l \cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x})\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gilt nach Bemerkung für

$$s \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{4}$$

dann

$$\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Aufgrund der Endlichkeit von μ gilt wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.5 dann

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,l}. \tag{7}$$

Da $\mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ nach Folgerung M.22.6.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt aus (4) bis (7) dann

$$\sum_{s=1}^m a_{j,s} \cdot \widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m} + a_j \cdot 1_{\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}).$$

Hieraus folgt aufgrund der wegen (3) und (7) gültigen Identität dann

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \in \mathscr{L}^k(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}). \tag{8}$$

Wegen (8) gilt dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right|^k \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} = \left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l}\right)^k.$$

Hieraus folgt $\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}\right| = \left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l}\right|^k = \left|\widetilde{P}_{j,1,\mathbb{R}^l}\right|^l$. Damit ist aber

$$\left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right|^k = \left|\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^l}\right|^k \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} = \left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}\right| \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}\right| \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right). \tag{11}$$

Da $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung ist, folgt wegen (11) mittels des Teils *(b)* von Satz M.22.9.2 dann

$$\left|\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l}\right| \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l, T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu); \mathbb{R}\right). \tag{12}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.23.5.2 gilt

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l; \mathbb{R}\right). \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) liefert Folgerung M.22.4.1 dann

$$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^l} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l, T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu); \mathbb{R}\right). \tag{14}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ gilt nach Satz M.16.10 dann

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right). \tag{15}$$

Wegen (7), (14) und (15) liefert Bemerkung M.23.5.4 dann

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right).$$

Zu *(b)*: Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ bzw. *(a)* liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ bzw. $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$. Unter Beachtung von Teil *(b)* von Satz M.23.9.1, Teil *(c)* von Satz M.22.9.2, den Teilen *(a)* und *(b)* von Lemma M.23.9.2 sowie nochmals Teil *(b)* von Satz M.23.9.1, ergibt sich

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}^l} 1_{\mathbb{R}^l} \mathrm{d}\left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a})\, \mathrm{d}\mu \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{A}\mathbf{x} \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{a} \cdot 1_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\mu = \mathbf{A} \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x} \mathrm{d}\mu + \left(\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right) \cdot \mathbf{a} \\
&= \mathbf{A} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mu\left(\mathbb{R}^m\right) \cdot \mathbf{a}.
\end{aligned}$$

□

Folgerung M.23.9.1. *Seien $m, k \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiter sei $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ und es sei $\pi_{m;j}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_j$. Dann ist $\pi_{m,j}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt $\pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

Beweis. Aus der Definition der beteiligten Abbildung folgt sogleich

$$\pi_{m;j} = T_{\left[\mathbf{e}_j^{(m)}\right]^T, \mathbf{0}_m}.$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.9.2 dann alle Behauptungen. □

Satz M.23.9.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. Dann gilt:*

(a1) *Es ist* $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(a2) *Sei* $a \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(a3) *Es ist* $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(b) *Sei* $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,m} \times \mathbb{N}_{1,m}$. *Dann gilt:*

(b1) *Es ist* $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(b2) *Unter Beachtung von* (b1) *sei*

$$\widetilde{M}_{j,k}(\mu) \coloneqq \int\limits_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \cdot \widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\mu.$$

Dann gilt

$$\widetilde{M}_{j,k}(\mu) = \widetilde{M}_{k,j}(\mu).$$

(b3) *Seien* $a, b \in \mathbb{R}$. *Dann gilt* $\left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a\right)\left(\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - b\right) \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

(b4) *Unter Beachtung von* (b3) *sei*

$$\mathrm{cov}_{j,k}(\mu) \coloneqq \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)\right] \mathrm{d}\mu.$$

Dann gelten

$$\mathrm{cov}_{j,k}(\mu) = \widetilde{M}_{jk}(\mu) - \widetilde{M}_j(\mu) \cdot \widetilde{M}_k(\mu)$$

sowie

$$\mathrm{cov}_{j,k}(\mu) = \mathrm{cov}_{k,j}(\mu).$$

Beweis.

Zu *(a1)*: Dies folgt wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ aus Bemerkung M.23.9.1.

Zu *(a2)*: Da μ endlich ist, gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.5

$$1_{\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right). \tag{1}$$

Da $\mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$ nach Folgerung M.22.6.2 ein linearer Raum über $\mathbb{R}$ ist, folgt bei Beachtung von *(a1)* und (1) dann $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a \cdot 1_{\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$, also wegen $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a \cdot 1_{\mathbb{R}^m} = \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a$ dann $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a \in \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

Zu *(a3)*: Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.23.9.1 dann $\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$.

Zu *(b1)*: Dies folgt wegen *(a1)* sogleich aus Teil *(a)* von Satz M.22.7.6.

Zu *(b2)*: Dies folgt trivialerweise.

Zu *(b3)*: Dies folgt wegen *(a2)* sogleich aus Teil *(a)* von Satz M.22.7.6.

Zu *(b4)*: Es ist

$$\begin{aligned}&\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{\mathcal{M}}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{\mathcal{M}}_k(\mu)\right]\\ =&\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\left[\widetilde{\mathcal{M}}_k(\mu)\right]\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\left[\widetilde{\mathcal{M}}_j(\mu)\right]\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}+\left[\widetilde{\mathcal{M}}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{\mathcal{M}}_k(\mu)\right]\cdot 1_{\mathbb{R}^m}.\end{aligned}\tag{2}$$

Unter Verwendung von (2), *(b1)*, *(a3)* und (1) ergibt sich mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 sowie zusätzlicher Beachtung von $\mu(\mathbb{R}^m)=1$ dann

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)=&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_k(\mu)\right]\mathrm{d}\mu\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\Big(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\\ &+\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\cdot 1_{\mathbb{R}^m}\Big)\mathrm{d}\mu\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu-\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu-\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\cdot 1_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu-\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu-\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu\\ &+\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\int\limits_{\mathbb{R}^m}1_{\mathbb{R}^m}\mathrm{d}\mu\\ =&\widetilde{M}_{j,k}(\mu)-\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]-\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\\ &+\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\cdot\mu(\mathbb{R}^m)\\ =&\widetilde{M}_{j,k}(\mu)-\left[\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{M}_k(\mu)\right].\end{aligned}$$

Aus der Definition von $\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)$ und $\operatorname{cov}_{k,j}(\mu)$ folgt sogleich $\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)=\operatorname{cov}_{k,j}(\mu)$. □

Satz M.23.9.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.23.9.3. Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Mit den Bezeichnungen aus Satz M.23.9.3 sei

$$\operatorname{cov}(\mu):=\left(\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}.$$

Dann heißt $\operatorname{cov}(\mu)$ die *Kovarianzmatrix von* μ.

Bemerkung M.23.9.3. Sei $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R},\mathfrak{B})$. Dann gilt

$$\operatorname{cov}(\mu)=\operatorname{var}(\mu).$$

Das bedeutet, dass es sich bei der Kovarianzmatrix um eine Verallgemeinerung der Varianz auf Maße aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ handelt. ♣

BEWEIS. Aus den Definitionen der beteiligten Größen folgt sogleich

$$\widetilde{M}_1(\mu) = M_1(\mu) \tag{1}$$

und

$$\widetilde{M}_{1,1}(\mu) = M_2(\mu). \tag{2}$$

Wegen Teil *(b4)* von Satz M.23.9.3 gilt

$$\operatorname{cov}(\mu) = \operatorname{cov}_{1,1}(\mu) = \widetilde{M}_{1,1}(\mu) - \left[\widetilde{M}_1(\mu)\right]^2. \tag{3}$$

Wegen Teil *(d)* von Satz M.23.4.2 gilt

$$\operatorname{var}(\mu) = M_2(\mu) - [M_1(\mu)]^2. \tag{4}$$

Aus (1) bis (4) folgt dann

$$\operatorname{cov}(\mu) = \operatorname{var}(\mu). \qquad \square$$

Wir wenden uns nun einer wesentlichen Struktureigenschaft der Kovarianzmatrix eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu.

Satz M.23.9.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Mit den Bezeichnungen aus Satz M.23.9.3 werde für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ die Setzung $f_j := \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{\mathcal{M}}_j(\mu)$ vorgenommen. Dann ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$ und es ist $\operatorname{cov}(\mu)$ die* GRAM-SCHMIDT*sche Matrix der Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$.*

(b) *Es ist $\operatorname{cov}(\mu) \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}$.*

(c) *Seien $j, k \in \mathbb{N}_{1,m}$. Dann gilt*

$$(\operatorname{cov}_{j,k}(\mu))^2 \leq \operatorname{cov}_{j,j}(\mu) \cdot \operatorname{cov}_{k,k}(\mu).$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a2)* von Satz M.23.9.3 ist $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})$. Aus Definition M.23.9.3 erkennt man sogleich, dass $\operatorname{cov}(\mu)$ die GRAMsche Matrix der Folge $(f_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ im Semiprähilbertraum $\left(\mathscr{L}^2(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}), \langle\cdot,\cdot\rangle_{\mu,\mathbb{R}}\right)$ ist.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* sogleich aus Teil *(a)* von Satz M.23.8.1.

Zu *(c)*: Dies folgt wegen *(b)* sogleich aus Teil *(a)* von Bemerkung M.23.8.5. $\square$

Wir wenden uns nun wichtigen Darstellungen der Kovarianzmatrix eines Maßes μ aus der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu.

Satz M.23.9.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und falls $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$ den Erwartungswert von μ bezeichnet, so gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\,\mathrm{d}\mu.$$

(b) *Mit den Bezeichnungen von vorletztem Satz sei* $\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu) \coloneqq \left(\widetilde{M}_{jk}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}$. *Dann gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T \mathrm{d}\mu$$

(c) *Es bezeichne* $\mathrm{cov}(\mu)$ *die Kovarianzmatrix von* μ. *Dann gilt:*

(c1) *Es ist*

$$\mathrm{cov}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu$$

(c2) *Es ist*

$$\mathrm{cov}(\mu) = \widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu) - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ liefert dann Lemma M.23.5.1 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.23.9.1 dann *(a)*.

Zu *(b)*: Für

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

gilt

$$\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T = (x_j x_k)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} = \left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\cdot\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}. \tag{2}$$

Unter Beachtung von der ersten Definition in diesem Abschnitt sowie (1) und (2) ergibt sich

$$\begin{aligned}\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu) &= \left(\widetilde{M}_{j,k}(\mu)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} = \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\cdot\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\right)\mathrm{d}\mu\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}\cdot\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T\mathrm{d}\mu.\end{aligned}$$

Zu *(c)*: Für

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m \tag{3}$$

gilt

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T &= \left(\left[x_j - \widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[x_k - \widetilde{M}_k(\mu)\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\\ &= \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_k(\mu)\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}.\end{aligned} \tag{4}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.4 und Definition M.23.9.1 sowie (3) und (4) gilt

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\mu) &= \left(\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\\ &= \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_k(\mu)\right]\right)\mathrm{d}\mu\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_j(\mu)\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m}-\widetilde{M}_k(\mu)\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}\mathrm{d}\mu\\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\left[\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T\mathrm{d}\mu.\end{aligned} \tag{5}$$

Damit gilt also *(c1)*. Für $x\in\mathbb{R}^m$ gilt

$$\begin{aligned}&\left(\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\\ =&\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T-\mathbf{x}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)-\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\cdot\mathbf{x}^T+\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T.\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Verwendung von *(c1)*, (5), (6), *(b)* und den Teilen *(a)* und *(b)* von Lemma M.23.9.2 sowie *(a)* folgt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}(\mu) =& \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x}-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\mu(\mathrm{d}x)\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left[\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T-\mathbf{x}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T-\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\cdot\mathbf{x}^T+\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T\right]\mu(\mathrm{d}x)\\ =&\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\cdot\mathbf{x}^T\mu(\mathrm{d}x)-\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\mu(\mathrm{d}x)-\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\cdot\mathbf{x}^T\mu(\mathrm{d}x)\\ &+\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T\mu\cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathrm{d}x)\\ =&\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu)-\left[\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\mathrm{d}\mu\right]\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T-\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\cdot\left[\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\mathrm{d}\mu\right]^T\\ &+\mu(\mathbb{R}^m)\cdot\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T\\ =&\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu)-\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T-\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\cdot\left[\int\limits_{\mathbb{R}^m}\mathbf{x}\mathrm{d}\mu\right]^T+\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\\ =&\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu)-\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T+\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\\ =&\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\mu)-\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\cdot\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)^T.\end{aligned}$$

□

Beispiel M.23.9.1. Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mathbf{c}\in\mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(a) Es ist $\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

(b) Es ist $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{c}$.

(c) Es ist $\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{c}\cdot\mathbf{c}^T$.

(d) Es gilt $\operatorname{cov}(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{O}_{m\times m}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Beispiel M.23.2.1.

Zu *(b)*: Unter Beachtung von Teil *(a)* von Satz M.23.9.5 und Teil *(b)* von Beispiel M.22.4.2 ergibt sich

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{c}.$$

Zu *(c)*: Unter Beachtung von Teil *(b)* von Satz M.23.9.5 und Teil *(b)* von Beispiel M.22.4.2 ergibt sich

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_2(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\mathbf{x}^T\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{c}\mathbf{c}^T.$$

Zu *(d)*: Unter Beachtung von Teil *(c2)* von Satz M.23.9.5 sowie von *(c)* und *(b)* ergibt sich

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathbb{R}^m}) = \widetilde{\mathfrak{M}}_2(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m}) - \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m})\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{c},\mathfrak{B}_m})\right]^T = \mathbf{c}\mathbf{c}^T - \mathbf{c}\mathbf{c}^T = \mathbf{O}_{m\times m}. \qquad \square$$

Satz M.23.9.6. *Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ und es sei $\pi_{m,j}\colon\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß $x=(x_1,\ldots,x_m)^T\longmapsto x_j$. Dann gilt:*

(a) *$\pi_{m,j}$ ist eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt $\pi_{m,j}(\mu)\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$.*

(b) *Es ist $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, $\pi_{m,j}(\mu)\in\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1)$ sowie mit den Bezeichnungen von Satz M.23.9.3 zudem*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_j(\mu) = M_1(\pi_{m,j}(\mu)).$$

(c) *Es gilt $\operatorname{cov}_{j,j}(\mu) = \operatorname{var}(\pi_{m,j}(\mu))$.*

(d) *Sei $k\in\mathbb{N}_{1,m}$. Dann gilt*

$$|\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)| \le \sqrt{\operatorname{var}(\pi_{m,j}(\mu))}\cdot\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{m,k}(\mu))}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies ergibt sich aus Folgerung M.23.9.1.

Zu *(b)*: Wegen $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ liefert Lemma M.23.5.1 dann $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgen mittels Teil *(a2)* von Satz M.23.9.1 die restlichen Behauptungen.

Zu *(c)*: Wegen Teil *(b3)* von Satz M.23.9.3 gilt

$$\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \in \mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,\mu;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Nach Definition ist

$$\operatorname{cov}_{j,j}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \mathrm{d}\mu. \tag{2}$$

Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} = P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m;j}. \tag{3}$$

Aus (3) und *(b)* folgt sogleich

$$\begin{aligned}\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 &= \left[\left(P_{1;\mathbb{R}} \circ \pi_{m;j}\right) - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \\ &= \left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \circ \pi_{m;j}.\end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (1), (4) und der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $\pi_{m;j}$ ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.22.9.2 dann

$$\left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \pi_{m;j}(\mu); \mathbb{R}\right)$$

und mittels Teil *(c)* von Satz M.22.9.2 zudem

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \circ \pi_{m;j}\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \mathrm{d}\left[\pi_{m;j}(\mu)\right]. \tag{5}$$

Wegen *(b)* gilt $\pi_{m;j}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.4.2 dann

$$\operatorname{var}\left(\pi_{m;j}(\mu)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \mathrm{d}\left[\pi_{m;j}(\mu)\right]. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (2), (4), (5) und (6) folgt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_{j,j}(\mu) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - \widetilde{M}_j(\mu)\right]^2 \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \circ \pi_{m;j}\right) \mathrm{d}\mu \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[P_{1;\mathbb{R}} - M_1\left(\pi_{m;j}(\mu)\right)\right]^2 \mathrm{d}\left[\pi_{m;j}(\mu)\right] = \operatorname{var}\left(\pi_{m;j}(\mu)\right).\end{aligned}$$

Zu *(d)*: Unter Beachtung von Teil *(c)* von Satz M.23.9.4 sowie *(c)* ergibt sich

$$\begin{aligned}\left|\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)\right| &\leq \sqrt{\operatorname{cov}_{j,j}(\mu) \cdot \operatorname{cov}_{k,k}(\mu)} = \sqrt{\operatorname{cov}_{j,j}(\mu)} \cdot \sqrt{\operatorname{cov}_{k,k}(\mu)} \\ &= \sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{m,j}(\mu)\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{m,k}(\mu)\right)}.\end{aligned}$$

□

Satz M.23.9.6 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.23.9.4. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2\right)$. Dann heißt die Zahl

$$\operatorname{cor}(\mu) := \begin{cases} \dfrac{\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{2,1}(\mu)\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{2,2}(\mu)\right)}}, & \text{falls } \sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{2,1}(\mu)\right)} \cdot \sqrt{\operatorname{var}\left(\pi_{2,2}(\mu)\right)} \neq 0, \\ 0, & \text{sonst} \end{cases}$$

der *Korrelationskoeffizient von* μ.

Satz M.23.9.7. *Sei* $\mu \in \mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2\right)$ *und bezeichne* $\operatorname{cor}(\mu)$ *den Korrelationskoeffizienten. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $|\operatorname{cor}(\mu)| \leq 1$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{cor}(\mu) = 0$.

(ii) *Es ist* $\operatorname{cov}_{1,2}(\mu) = 0$.

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist* $|\operatorname{cor}(\mu)| = 1$.

(iv) *Es gelten* $\operatorname{var}_{1,2}(\pi_{2,1}(\mu)) \cdot \operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu)) \neq 0$ *und* $\det(\operatorname{cov}(\mu)) = 0$.

Beweis.

Zu *(a)*: Nach Teil *(d)* von Satz M.23.9.6 gilt

$$|\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)| \leq \sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))}. \tag{1}$$

Falls $[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))] \cdot [\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] = 0$, folgt aus Definition M.23.9.4 nun

$$|\operatorname{cor}(\mu)| = |0| = 0 \leq 1,$$

während sich im Falle $[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))] \cdot [\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0$ aus Definition M.23.9.4 und (1) dann

$$|\operatorname{cor}(\mu)| \leq 1$$

ergibt.

Zu *(b)*:

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Falls $[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))] \cdot [\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0$ ist, folgt aus *(i)* mit Definition M.23.9.4 dann $\operatorname{cov}_{1,2}(\mu) = 0$, während sich im Falle $[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))] \cdot [\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] = 0$ aus (1) sogleich $\operatorname{cov}_{1,2}(\mu) = 0$ ergibt. Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Dies folgt sogleich aus Definition M.23.9.4.

Zu *(c)*: Wegen Teil *(b4)* von Satz M.23.9.3 gilt

$$\operatorname{cov}_{1,2}(\mu) = \operatorname{cov}_{2,1}(\mu). \tag{2}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz M.23.9.6 gelten

$$\operatorname{cov}_{1,1}(\mu) = \operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu)) \tag{3}$$

und

$$\operatorname{cov}_{2,2}(\mu) = \operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu)). \tag{4}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.3 sowie (2) bis (4) folgt dann

$$\begin{aligned} \det[\operatorname{cov}(\mu)] &= \det\left[\operatorname{cov}_{j,k}(\mu)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,2}}\right] = \operatorname{cov}_{1,1}(\mu)\operatorname{cov}_{2,2}(\mu) - \operatorname{cov}_{1,2}(\mu)\operatorname{cov}_{2,1}(\mu) \\ &= [\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))][\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] - [\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)]^2 \end{aligned} \tag{5}$$

(iii) $\Rightarrow$ ***(iv)*:** Aus *(iii)* mit Definition M.23.9.4 folgen sogleich

$$[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))]\,[\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0 \tag{6}$$

und

$$1 = [\operatorname{cor}(\mu)]^2 = \left[\frac{\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))}}\right]^2 = \frac{[\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)]^2}{\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))},$$

also

$$[\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)]^2 = \operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu)). \tag{7}$$

Aus (5) und (7) folgt dann

$$\det[\operatorname{cov}(\mu)] = 0.$$

(iv) $\Rightarrow$ ***(iii)*:** Wegen *(iv)* gilt $\det[\operatorname{cov}(\mu)] = 0$. Hieraus folgt wegen (5) dann

$$[\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)]^2 = \operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu)). \tag{8}$$

Wegen *(iv)* gilt

$$[\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))]\,[\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))] \neq 0. \tag{9}$$

Wegen (9), Definition M.23.9.4 und (8) ergibt sich

$$[\operatorname{cor}(\mu)]^2 = \left[\frac{\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)}{\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))}\sqrt{\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))}}\right]^2 = \frac{[\operatorname{cov}_{1,2}(\mu)]^2}{\operatorname{var}(\pi_{2,1}(\mu))\operatorname{var}(\pi_{2,2}(\mu))} = 1.$$

Daraus folgt nun $|\operatorname{cor}(\mu)| = 1$. Es gilt also *(iii)*. □

Wir untersuchen nun, in welcher Weise die Kovarianzmatrix eine Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Lokalisation von μ auf affinen Teilräumen von $\mathbb{R}^m$ bestimmt. Hierzu sind einige Vorbereitungen nötig.

Lemma M.23.9.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten:*

(a) *Es ist*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{b}^T \mathbf{x}\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu).$$

(b) *Es ist*

$$\int_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{b}^T \mathbf{x} - \mathbf{b}^T \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^2 \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \mathbf{b}^T \cdot \operatorname{cov}(\mu) \cdot \mathbf{b}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.23.9.5 gilt

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{1}$$

Unter Verwendung von (1), Teil *(b)* von Lemma M.23.9.2 ergibt sich

$$\mathbf{b}^T \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] = \mathbf{b}^T \cdot \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^m} \mathbf{b}^T \mathbf{x}\, \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}).$$

Zu *(b)*: Wegen Teil *(c1)* von Satz M.23.9.5 gilt

$$\operatorname{cov}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{2}$$

Wegen Teil *(b)* von Lemma M.23.9.2 dann

$$\begin{aligned} \mathbf{b}^T \operatorname{cov}(\mu)\, \mathbf{b} &= \mathbf{b}^T \left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}) \right) \mathbf{b} \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{b}^T \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mathbf{b} \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{3}$$

Für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ gilt nun

$$\begin{aligned} \left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2 &= \left(\mathbf{b}^T \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2 \\ &= \left(\mathbf{b}^T \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right) \left(\mathbf{b}^T \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^T \\ &= \mathbf{b}^T \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mathbf{b}. \end{aligned}$$

Hieraus ergibt sich in Verbindung mit (3) dann

$$\mathbf{b}^T \operatorname{cov}(\mu)\, \mathbf{b} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{b}^T\mathbf{x} - \mathbf{b}^T \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^2 \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}).$$

□

Lemma M.23.9.6. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m \backslash \{0\}$ sowie $\alpha \in \mathbb{R}$. Weiter sei*

$$H_{\mathbf{a},\alpha} \coloneqq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \mathbf{a}^T\mathbf{x} = \alpha\right\}.$$

Dann ist $H_{\mathbf{a},\alpha} \in \mathfrak{B}_m$.

Beweis. Sei $T_{\mathbf{a}^T,-\alpha} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{a}^T\mathbf{x} - \alpha$. Aus den Definitionen von $H_{\mathbf{a},\alpha}$ und $T_{\mathbf{a}^T,-\alpha}$ folgt dann

$$H_{\mathbf{a},\alpha} = \left(T_{\mathbf{a}^T,-\alpha}\right)^{-1}(\{0\}). \tag{1}$$

Wegen $\{0\} \in \mathfrak{B}_1$ und der in Teil *(b)* von Satz M.16.9 gezeigten $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{a}^T,-\alpha}$ folgt aus (1) dann $H_{\mathbf{a},\alpha} \in \mathfrak{B}_m$. □

Lemma M.23.9.7. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und V ein von $\mathbb{R}^m$ verschiedener affiner Unterraum von $\mathbb{R}^m$. Es sei $V = \mathbf{x}_0 + U$ eine Darstellung von V, wobei $\mathbf{x}_0 \in V$ und U der zu V gehörige Unterraum von $\mathbb{R}^m$, bezeichnet. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne $U^\perp$ das orthogonale Komplement von U in $(\mathbb{R}^m, \langle .,. \rangle)$. Dann ist $U^\perp$ ein linearer Unterraum von $\mathbb{R}^m$ und es gelten*

$$\dim\left(U^\perp\right) = m - \dim U.$$

(b) *Sei* $s \coloneqq \dim\left(U^{\perp}\right)$. *Unter Beachtung von* $s \in \mathbb{N}$ *bezeichne* $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *eine Basis von* $U^{\perp}$. *Weiter sei*

$$\mathbf{A} \coloneqq \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_s^T \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{s\times s}.$$

Dann gilt

$$V = \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0\}.$$

(c) *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ *sei*

$$H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\mathbf{x}_0} \coloneqq \left\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,\middle|\, \mathbf{u}_j^T\mathbf{x} = \mathbf{u}_j^T\mathbf{x}_0\right\}.$$

Dann gilt

$$V = \bigcap_{j=1}^{s} H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\mathbf{x}_0}.$$

(d) *Es gilt* $V \in \mathfrak{B}_m$.

Beweis.

Zu *(a)*: Bekannt aus der Linearen Algebra.

Zu *(b)*: Es ist

$$\mathbf{x}_0 \in \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0\}. \tag{1}$$

Weiterhin bezeichne

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) \coloneqq \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{0}_{m\times 1}\} \tag{2}$$

den Nullraum von $\mathbf{A}$. Dann ist $\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0\}$ ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$, für den wegen (1) und (2) die Darstellung

$$\{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0\} = \mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A}) \tag{3}$$

besteht. Sei

$$\mathbf{u} \in U. \tag{4}$$

Für

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{5}$$

folgt wegen $\mathbf{u}_j \in U^{\perp}$ und (4) nun

$$\mathbf{u}_j^T\mathbf{u} = \langle \mathbf{u}_j, \mathbf{u}\rangle_{E,\mathbb{R}^m} = 0. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (5) und (6) folgt nun

$$\mathbf{A}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T \\ \vdots \\ \mathbf{u}_s^T \end{pmatrix}\mathbf{u} = \begin{pmatrix} \mathbf{u}_1^T\mathbf{u} \\ \vdots \\ \mathbf{u}_s^T\mathbf{u} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \mathbf{0}_{s\times 1}. \tag{7}$$

Aus (2) und (7) folgt dann

$$\mathbf{u} \in \mathcal{N}(\mathbf{A}). \tag{8}$$

Aus (4) und (8) folgt nun

$$U \subseteq \mathcal{N}(\mathbf{A}). \tag{9}$$

Aufgrund der linearen Unabhängigkeit der Folge $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ und der Definition von $\mathbf{A}$ gilt

$$\operatorname{Rang}\mathbf{A} = s. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) folgt nun

$$\dim U = m - s = m - \operatorname{Rang}\mathbf{A} = \dim\mathcal{N}(\mathbf{A}). \tag{11}$$

Aus (9), (11) und $\dim\mathcal{N}(\mathbf{A}) < +\infty$ folgt dann

$$\mathcal{N}(\mathbf{A}) = U. \tag{12}$$

Aus der Wahl von U und (12) folgt dann

$$V = \mathbf{x}_0 + U = \mathbf{x}_0 + \mathcal{N}(\mathbf{A}) = \{\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m \mid \mathbf{A}\mathbf{x} = \mathbf{A}\mathbf{x}_0\}.$$

Zu *(c)*: Dies folgt aus *(b)* und der Konstruktion von $\mathbf{A}$.

Zu *(d)*: Wegen Lemma M.23.9.6 ist $\left(H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\mathbf{x}_0}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$\bigcap_{j=1}^{s} H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\mathbf{x}_0} \in \mathfrak{B}_m.$$

Hieraus folgt wegen *(c)* dann $V\in\mathfrak{B}_m$. □

Definition M.23.9.5. Seien $p,q\in\mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{p\times q}$. Unter dem Spaltenraum $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ („Range von $\mathbf{A}$“) von $\mathbf{A}$ verstehen wir dann den von den Spalten von $\mathbf{A}$ erzeugten linearen Teilraum von $\mathbb{R}^p$.

Lemma M.23.9.8. *Seien $p,q\in\mathbb{N}$ und $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gelten:*

(a) *Es ist $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ ein linearer Teilraum von $\mathbb{R}^p$ und es gilt $\dim\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \operatorname{Rang}\mathbf{A}$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^p$.*

(ii) *Es ist $\operatorname{Rang}\mathbf{A} = p$.*

(c) *Sei $p = q$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(iii) *Es ist $\mathcal{R}(\mathbf{A}) = \mathbb{R}^p$.*

(iv) *Es ist $\det\mathbf{A}\neq 0$.*

(d) *Sei $\alpha\in\mathbb{R}\setminus\{0\}$. Dann gilt $\mathcal{R}(\alpha\mathbf{A}) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.*

Lemma M.23.9.9. *Sei $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{p\times q}$. Es bezeichne $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ den Spaltenraum von $\mathbf{A}$ sowie $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^T\right)$ den Nullraum von $\mathbf{A}^T$. Dann sind $\mathcal{R}(\mathbf{A})$ und $\mathcal{N}\left(\mathbf{A}^T\right)$ in $(\mathbb{R}^p,\langle\cdot,\cdot\rangle)$ zueinander orthogonale lineare Teilräume von $\mathbb{R}^p$, für welche*

$$\mathcal{R}(\mathbf{A}) + \mathcal{N}\left(\mathbf{A}^T\right) = \mathbb{R}^p$$

gilt. Zudem ist diese Minkowski-Summe direkt.

Satz M.23.9.8. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1;2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) \in \mathfrak{B}_m$$

und

$$\mu\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\right] = 1.$$

Beweis. Sei zunächst

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = \mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ und μ ein Wahrscheinlichkeitsmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist, gelten dann $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$ und $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$. Hieraus folgen wegen (1) dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) \in \mathfrak{B}_m \tag{2}$$

und

$$\mu\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\right] = 1. \tag{3}$$

Sei nun

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) \subsetneq \mathbb{R}^m. \tag{4}$$

Da $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))$ ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$ ist, welcher wegen (4) von $\mathbb{R}^m$ verschieden ist, liefert Teil *(c)* von Lemma M.23.9.7 dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) \in \mathfrak{B}_m. \tag{5}$$

Es bezeichne $[\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))]^\perp$ das orthogonale Komplement von $\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))$ in $\left(\mathbb{R}^m, \langle\cdot,\cdot\rangle_{E,\mathbb{R}^m}\right)$. Wegen Lemma M.23.9.9 gilt dann

$$[\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))]^\perp = \mathcal{N}\left([\operatorname{cov}(\mu)]^T\right). \tag{6}$$

Wegen Definition M.23.9.3 und Teil *(b4)* von Satz M.23.9.3 gilt

$$\operatorname{cov}(\mu) = [\operatorname{cov}(\mu)]^T. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$[\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))]^\perp = \mathcal{N}(\operatorname{cov}(\mu)). \tag{8}$$

Sei $s \coloneqq \dim\left[\left(\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\right)^T\right]$. Wegen (4) ist nach Teil *(a)* aus Lemma M.23.9.7 dann $s \in \mathbb{N}$. Es bezeichne $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Basis von $[\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))]^T$. Wegen Teil *(c)* von Lemma M.23.9.7 gilt dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = \bigcap_{j=1}^{s} H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]}. \tag{9}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,s}. \tag{10}$$

Wegen (10) und der Wahl von $\mathbf{u}_j$ folgt aus (8) dann $\mathbf{u}_j \in \mathcal{N}(\operatorname{cov}(\mu))$, also

$$[\operatorname{cov}(\mu)]\,\mathbf{u}_j = \mathbf{0}_{m\times 1}. \tag{11}$$

Unter Beachtung von Teil *(b)* von Lemma M.23.9.5 sowie (11) folgt dann

$$\begin{aligned}\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2\mathrm{d}\mu&=\int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{u}_j^T\mathbf{x}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2\mu(\mathrm{d}\mathbf{x})\\&=\mathbf{u}_j^T\operatorname{cov}(\mu)\,\mathbf{u}_j=\mathbf{u}_j^T\mathbf{0}_{m\times1}=\mathbf{0}_{m\times1}.\end{aligned}\tag{12}$$

Weiterhin ist Folgendes erfüllt

$$\left(\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2\in\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m).\tag{13}$$

Wegen (12) und (13) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.1 nun

$$\left\{\left(\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2\neq0\right\}\in\mathcal{N}_\mu.$$

Hieraus folgt wegen

$$\left\{\left(\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\right)^2\neq0\right\}=\left\{\mathbf{u}_j^T\,\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}$$

dann

$$\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}\in\mathcal{N}_\mu.\tag{14}$$

Aus der Definition von $H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]}$ folgt

$$H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]}=\mathbb{R}^m\setminus\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}.\tag{15}$$

Wegen (10) und (14) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.5.1 nun

$$\bigcup_{j=1}^s\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}\in\mathcal{N}_\mu.\tag{16}$$

Wegen $\mu(\mathbb{R}^m)=1$ folgt aus (16) nun

$$\begin{aligned}&\mu\left(\mathbb{R}^m\setminus\bigcup_{j=1}^s\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}\right)\\=&\mu(\mathbb{R}^m)-\mu\left(\bigcup_{j=1}^s\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}\right)\\=&1-0=1.\end{aligned}\tag{17}$$

Unter Beachtung von (15) und (9) gilt

$$\begin{aligned}\mathbb{R}^m\setminus\bigcup_{j=1}^s\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}&=\bigcap_{j=1}^s\left(\mathbb{R}^m\setminus\left\{\mathbf{u}_j^T\cdot\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}-\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]\neq0\right\}\right)\\&=\bigcap_{j=1}^s H_{\mathbf{u}_j,\mathbf{u}_j^T\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]}=\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)).\end{aligned}\tag{18}$$

Wegen (17) und (18) folgt dann

$$\mu\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\right)=1. \tag{19}$$

Wegen (1) bis (5) und (19) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung M.23.9.2. *Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{cov}(\mu)=0$.

(ii) *Es ist* $\mu=\varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu),\mathfrak{B}_m}$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Wegen Satz M.23.9.8 gelten $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\in\mathfrak{B}_m$ und

$$\mu\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\right). \tag{1}$$

Wegen *(i)* gilt $\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))=\mathcal{R}(\mathbf{O}_{m\times m})=\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}$ und somit ist

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))=\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}=\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\mu\left(\left\{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right\}\right)=1. \tag{3}$$

Wegen $\mu(\mathbb{R}^m)=1$ und wegen (3) gilt

$$\mu\left(\mathbb{R}^m\setminus\left\{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right\}\right)=\mu(\mathbb{R}^m)-\mu\left(\left\{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right\}\right)=1-1=0. \tag{4}$$

Wegen (4) folgt mittels Lemma M.23.7.3 sowie (3) dann

$$\mu=\left[\mu\left(\left\{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right\}\right)\right]\cdot\varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu),\mathfrak{B}_m}=\varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu),\mathfrak{B}_m}.$$

Es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Unter Beachtung von *(ii)* und Teil *(d)* von Beispiel M.23.9.1 ergibt sich

$$\operatorname{cov}(\mu)=\operatorname{cov}\left(\varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu),\mathfrak{B}_m}\right)=\mathbf{O}_{m\times m}.$$

Es gilt also *(i)*. □

Satz M.23.9.9. *Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Weiter sei V ein affiner Teilraum von $\mathbb{R}^m$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu(V)=1$.

(ii) *Es ist* $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)+\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu))\subseteq V$.

Satz M.23.9.10. *Seien $m\in\mathbb{N}$ und $\mu\in\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $r\in\mathbb{Z}_{0,m}$, dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\operatorname{Rang}(\operatorname{cov}(\mu)) = r$.

(ii) *Es gibt einen* r*-dimensionalen affinen Teilraum* V *mit* $\mu(V) = 1$ *und falls* $r > 0$ *ist, so gilt für jeden* $(r-1)$*-dimensionalen affinen Teilraum* W *von* $\mathbb{R}^m$ *dann* $\mu(W) = 1$.

(iii) *Es gibt* genau *einen* r*-dimensionalen affinen Teilraum* V *mit* $\mu(V) = 1$ *und falls* $r > 0$ *ist, so gilt für jeden* $(r-1)$*-dimensionalen affinen Teilraum* W *von* $\mathbb{R}^m$ *dann* $\mu(W) = 1$.

(b) *Sei* (i) *erfüllt. Bezeichnet dann* V *den eindeutig bestimmten affinen Teilraum des* $\mathbb{R}^m$*, so gilt*

$$V = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)).$$

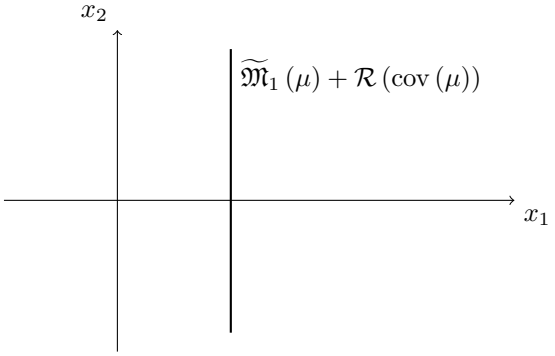
Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2)$. Wir untersuchen nun die Lokalisation von μ auf affinen Teilräumen von $\mathbb{R}^2$. Sei zunächst $\operatorname{Rang}(\operatorname{cov}(\mu)) = 2$. Dann gibt es keinen echten affinen Teilraum V von $\mathbb{R}^2$ mit $\mu(V) = 1$. Sei nun $\operatorname{Rang}(\operatorname{cov}(\mu)) = 1$, dann sind 3 Fälle möglich:

Fall 1: $\operatorname{cov}_{11}(\mu) = 0$ und $\operatorname{cov}_{22}(\mu) \neq 0$.

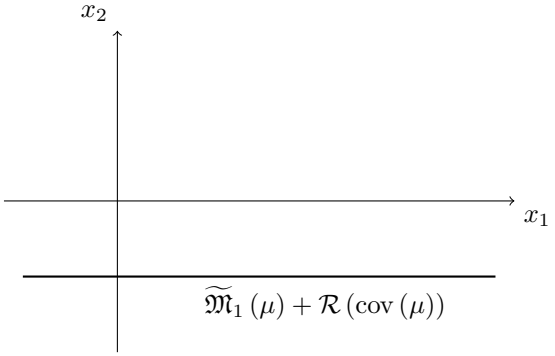
Fall 2: $\operatorname{cov}_{11}(\mu) \neq 0$ und $\operatorname{cov}_{22}(\mu) = 0$.

Fall 3: Es gelten $\operatorname{cov}_{11}(\mu) \neq 0, \operatorname{cov}_{22}(\mu) \neq 0$ und $\operatorname{cov}_{12}(\mu)^2 = \operatorname{cov}_{11}(\mu) \cdot \operatorname{cov}_{22}(\mu)$. Es ist dann also $\det(\operatorname{cov}(\mu)) = 0$ und somit $|\operatorname{cor}(\mu)| = 1$.

Zu 1: Es ist $\operatorname{cov}_{11}(\mu) = 0$, also $\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$.



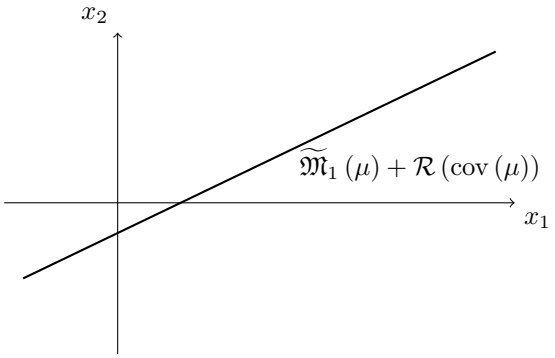
Zu 2: Es ist $\operatorname{cov}_{22}(\mu) = 0$, also $\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}}\left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$.



Zu 3: Es gilt $\operatorname{cov}_{12}(\mu) = \operatorname{cov}_{21}(\mu) \neq 0$. Somit ist $(\operatorname{cov}_{11}(\mu), \operatorname{cov}_{21}(\mu))^T$ nicht proportional zu einen der Vektoren $(0,1)^T$ oder $(1,0)^T$. Es ist dann

$$\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = \operatorname{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} \operatorname{cov}_{11}(\mu) \\ \operatorname{cov}_{21}(\mu) \end{pmatrix} \right\}.$$

Das heißt



Sei nun schließlich noch $\mathcal{R}(\operatorname{cov}(\mu)) = 0$, dann ist $\operatorname{cov}(\mu) = 0$ und damit nach Folgerung M.23.9.2 $\mu = \varepsilon_{\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu), \mathfrak{B}_2}$.

Satz M.23.9.11. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $l \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Es sei $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l)$.*

(b) *Es gilt*
$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)) = \mathbf{A} \cdot \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathbf{a}.$$

(c) *Es gilt*
$$\operatorname{cov}(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)) = \mathbf{A} \cdot [\operatorname{cov}(\mu)] \cdot \mathbf{A}^T.$$

Beweis.

Zu *(a),(b)*: Dies folgt aus Teil *(a)* bzw. Teil *(b)* von Satz M.23.9.2.

Zu *(c)*: Aufgrund der Wahl von μ bzw. wegen *(a)* ergibt sich mittels Teil *(c1)* von Satz M.23.9.5 dann

$$\operatorname{cov}(\mu) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mu(\mathrm{d}\mathbf{x}). \tag{1}$$

bzw.

$$\operatorname{cov}(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)) = \int\limits_{\mathbb{R}^l} \left[\mathbf{y} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu))\right] \left[\mathbf{y} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu))\right]^T [T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)](\mathrm{d}\mathbf{y}). \tag{2}$$

Sei

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{3}$$

Unter Beachtung von *(b)* folgt dann

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x}) - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)) = [\mathbf{A}\mathbf{x} + \mathbf{a}] - \left(\mathbf{A} \cdot \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) + \mathbf{a}\right)\right) = \mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right). \tag{4}$$

Unter Verwendung von (2), Teil *(c)* von Satz M.22.9.2, (3), (4), Teil *(b)* von Lemma M.23.9.2 sowie (1) folgt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right) &= \int\limits_{\mathbb{R}^l} \left[\mathbf{y} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right)\right] \left[\mathbf{y} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right)\right]^T \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right](\mathrm{d}\mathbf{y}) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathbf{x}\right) - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right)\right] \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathbf{x}\right) - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mu\right)\right)\right]^T \mu\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right] \left[\mathbf{A}\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right]^T \mu\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{A}\left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right] \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right]^T \mathbf{A}^T \mu\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \\
&= \mathbf{A} \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right] \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right)\right)\right]^T \mu\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\right) \mathbf{A}^{\mathbf{T}} \\
&= \mathbf{A}\left[\operatorname{cov}\left(\mu\right)\right]\mathbf{A}^T.
\end{aligned}$$

□

Folgerung M.23.9.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiter seien $k \in \mathbb{N}_{1,m}$ und $\left(i_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,k}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Elementen aus $\mathbb{N}_{1,m}$. Es sei $\pi_{m,i_1,\ldots,i_k}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definiert gemäß $\mathbf{x} = \left(x_1,\ldots,x_m\right)^T \longmapsto \left(x_{i_1},\ldots,x_{i_k}\right)^T$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\pi_{m,i_1,\ldots,i_k}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_k$-messbare Abbildung und es gilt*

$$\pi_{m,i_1,\ldots,i_k}\left(\mu\right) \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}_k\right).$$

(b) *Es ist $\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\pi_{m,i_1,\ldots,i_k}\left(\mu\right)\right) = \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_{i_1}\left(\mu\right),\ldots,\widetilde{\mathfrak{M}}_{i_k}\left(\mu\right)\right)^T$.*

(c) *Es ist $\operatorname{cov}\left(\pi_{m,i_1,\ldots,i_k}(\mu)\right) = \left(\operatorname{cov}_{i_r,i_s}\left(\mu\right)\right)_{r,s\in\mathbb{N}_{1,k}}$.*

Beweis. Für $l \in \mathbb{N}_{1,m}$ bezeichne $\mathbf{e}_l^{(m)}$ den l-ten kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^m$. Es sei

$$\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_k} \coloneqq \begin{bmatrix} \left[\mathbf{e}_{i_1}^{(m)}\right]^T \\ \vdots \\ \left[\mathbf{e}_{i_k}^{(m)}\right]^T \end{bmatrix}.$$

Dann ist $\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_k} \in \mathbb{R}^{k\times m}$ und aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt

$$\pi_{m;i_1,\ldots,i_k} = T_{\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_k},\mathbf{0}_{k\times 1}}. \tag{1}$$

Wegen (1) ist die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* bzw. *(c)* eine unmittelbare Konsequenz aus Teil *(a)* bzw. *(b)* bzw. *(c)* von Satz M.23.9.11. □

Definition M.23.9.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ dann heißt μ *standardisiert*, falls $\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu\right) = 0$ und $\operatorname{cov}\left(\mu\right) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ erfüllt sind.

Satz M.23.9.12. *Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann gibt es* genau *ein $\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$ mit $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$.*

Definition M.23.9.7. Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Es bezeichne $\mathbf{B}$ die eindeutig bestimmte Matrix aus $\mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$, mit $\mathbf{B}^2 = \mathbf{A}$. Dann heißt $\mathbf{B}$ die positiv semidefinite *Quadratwurzel aus* $\mathbf{A}$ und wird mit $\sqrt{\mathbf{A}}$ symbolisiert.

Satz M.23.9.13. *Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann gilt:*

(i) *Es gilt* $\operatorname{Spec}(A) \subseteq [0, +\infty)$.

(ii) *Unter Beachtung von* (i) *bezeichne $(l_j(\mathbf{A}))_{j\in\mathbb{N}_{1,q}}$ die absteigend geordnete Folge der unter Berücksichtigung ihrer Vielfachheit gezählten Eigenwerte von A sowie $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,q}}$ eine zugehörige Folge aus $(\mathbb{R}^q, \langle .,. \rangle)$ orthonormierte Folge von Eigenvektoren. Sei nun $\mathbf{U} \coloneqq (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_q)$, dann gilt*

$$\sqrt{\mathbf{A}} = \mathbf{U} \cdot \left[\operatorname{diag}\left(\sqrt{l_1(\mathbf{A})}, \ldots, \sqrt{l_q(\mathbf{A})}\right)\right] \cdot \mathbf{U}^T.$$

Satz M.23.9.14. *Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\det \mathbf{A} \neq 0$ *und* $\mathbf{A}^{-1} \in \mathbb{R}_{>}^{q\times q}$.

(b) *Es ist* $\det \sqrt{\mathbf{A}} \neq 0$ *und es gilt* $\sqrt{\mathbf{A}^{-1}} = \left(\sqrt{\mathbf{A}}\right)^{-1}$.

Es folgt nun eine Verallgemeinerung von Bemerkung M.23.4.2.

Satz M.23.9.15. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so beschaffen, dass* $\operatorname{cov}(\mu) \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ *erfüllt ist. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\det \sqrt{\operatorname{cov}(\mu)} \neq 0$

(b) *Es ist* $T_{\left(\sqrt{\operatorname{cov}(\mu)}\right)^{-1}, -\left(\sqrt{\operatorname{cov}(\mu)}\right)^{-1}\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]}(\mu)$ *ein standardisiertes Maß aus* $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Wir zeigen nun, dass im Falle eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ der Erwartungswert $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$ die eindeutig bestimmte Extremalstelle einer matriziellen Extremalaufgabe ist, welche als Extremwert die Kovarianzmatrix $\operatorname{cov}(\mu)$ besitzt.

Lemma M.23.9.10. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann ist $\mathbf{B}\mathbf{B}^T \in \mathbb{R}_{\geq}^{p\times p}$ und $\mathbf{B}^T\mathbf{B} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$.*

Lemma M.23.9.11. *Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{p\times q}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\operatorname{Rang}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = \operatorname{Rang}\left(\mathbf{A}^T\mathbf{A}\right) = \operatorname{Rang}(\mathbf{A})$.

(b) *Es ist* $\mathcal{R}\left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right) = \mathcal{R}(\mathbf{A})$.

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathbf{A} = \mathbf{O}_{p\times q}$.

(ii) *Es ist* $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{O}_{p\times p}$.

(iii) *Es ist* $\mathbf{A}^T\mathbf{A} = \mathbf{O}_{q\times q}$.

Lemma M.23.9.12. *Seien $q \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q\times q}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathbf{A} = \mathbf{O}_{q\times q}$.

(ii) *Es ist* $\mathrm{tr}\mathbf{A} = 0$.

Satz M.23.9.16. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1;2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Weiter sei* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. *Dann gilt:*

(a) *Sei* $f_{\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m\times m}$ *definiert gemäß* $\mathbf{x} \longmapsto (\mathbf{x}-\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T$. *Dann gilt:*

(a1) *Es ist* $f_{\mathbf{a}} \in \left[\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R})\right]^{m\times m}$.

(a2) *Es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu = \mathrm{cov}(\mu) + \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T.$$

(a3) *Es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu - \mathrm{cov}(\mu) \in \mathbb{R}_{\geq}^{m\times m}.$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mathbf{a} = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$.

(ii) *Es ist*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu = \mathrm{cov}(\mu).$$

(iii) *Es ist*

$$\mathrm{tr}\left(\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu\right) = \mathrm{tr}(\mathrm{cov}(\mu)).$$

Beweis.

Zu *(a1)*: Sei $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T$. Für $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$ gilt dann

$$\begin{aligned} f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) &= (\mathbf{x}-\mathbf{a})(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T = \left([x_j - a_j][x_k - a_k]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \\ &= \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a_j\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - a_k\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}. \end{aligned} \tag{1}$$

Somit ist

$$f_{\mathbf{a}} = \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a_j\right]\left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - a_k\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Satz M.23.9.3 dann

$$f_a \in \left[\mathscr{L}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}^m)\right]^{m\times m}.$$

Zu *(a2)*: Wegen Teil *(a)* bzw. *(c1)* von Satz M.23.9.5 gelten

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x} \mathrm{d}\mu = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) \tag{3}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu = \mathrm{cov}(\mu). \tag{4}$$

Wegen (3) folgt mittels Teil *(a)* von Lemma M.23.9.2 und $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$ dann

$$\begin{aligned}
&\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \mathrm{d}\mu \\
=&\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathbf{x}\mathrm{d}\mu - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) \cdot [\mu(\mathbb{R}^m)] \left(\left[\widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m} - a_j\right] \left[\widetilde{P}_{k,1;\mathbb{R}^m} - a_k\right]\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \\
=&\mathbf{0}_{m\times 1}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen Lemma M.23.9.1 und (5) folgt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mathrm{d}\mu = \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \mathrm{d}\mu\right]^T = \mathbf{0}_{1\times m}. \tag{6}$$

Weiterhin ist wegen $\mu(\mathbb{R}^m) = 1$

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] \left[\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]^T \mathrm{d}\mu &= \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right] \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T \cdot \mu(\mathbb{R}^m) \\
&= \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right] \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T.
\end{aligned} \tag{7}$$

Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}
f_{\mathbf{a}}(\mathbf{x}) =& (\mathbf{x} - \mathbf{a})(\mathbf{x} - \mathbf{a})^T \\
=& \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)\right] \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)\right]^T \\
=& \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T + \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \\
&+ \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T.
\end{aligned} \tag{8}$$

Unter Verwendung von (7), (8) den Teilen *(a)* und *(b)* von Lemma M.23.9.2 sowie (4) bis (6) folgt dann

$$\begin{aligned}
\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}} \mathrm{d}\mu =& \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left[\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T + \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \right. \\
&\left. + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T\right] \mathrm{d}\mu \\
=& \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \mathrm{d}\mu \\
&+ \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu + \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \mathrm{d}\mu \\
=& \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu + \left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right) \mathrm{d}\mu\right] \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \\
&+ \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right) \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \mu(\mathbb{R}^m)
\end{aligned}$$

und weiter

$$\begin{aligned}
&= \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)\left(\mathbf{x} - \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right)^T \mathrm{d}\mu + \mathbf{0}_{m\times 1}\cdot\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \\
&\quad + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)\cdot \mathbf{0}_{1\times m} + \left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)\left(\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right)^T \\
&= \mathrm{cov}(\mu) + \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T,
\end{aligned}$$

was genau *(a2)* bedeutet.

Zu *(a3)*: Wegen *(a2)* gilt $\int_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}\mu - \mathrm{cov}(\mu) = \left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T$. Hieraus folgt mittels Lemma M.23.9.10 dann $\left(\int_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}\mu - \mathrm{cov}(\mu)\right) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$.

Zu *(b)*: Wir zeigen die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. Wegen *(a2)* ist *(ii)* äquivalent zu:

(i') Es ist

$$\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) - \mathbf{a}\right]^T = \mathbf{O}_{m\times m}.$$

Wegen den Teil *(c)* von Lemma M.23.9.11 ist *(i')* äquivalent zu *(ii)*. Somit sind *(i)* und *(ii)* äquivalent.
Nun zeigen wir die Äquivalenz von *(ii)* und *(iii)*. Offensichtlich ist *(ii)* bzw. *(iii)* äquivalent zu:

(ii') Es ist

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}\mu - \mathrm{cov}(\mu) = \mathbf{O}_{m\times m}.$$

(iii') Es ist

$$\mathrm{tr}\left[\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{\mathbf{a}}\mathrm{d}\mu - \mathrm{cov}(\mu)\right] = 0.$$

Wegen *(a3)* liefert Lemma M.23.9.12 dann die Äquivalenz von *(ii')* und *(iii')*. Somit sind also *(ii)* und *(iii)* äquivalent. □

M.24. Maße auf Produkten von messbaren Räumen

M.24.1. Existenz und Konstruktion von Produktmaßen für endliche Folgen von Maßräumen

Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k$ die in Definition M.16.1 eingeführte Produkt σ-Algebra der Folge $(\mathfrak{A}_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Im Mittelpunkt der Betrachtungen dieses Abschnitts steht dann die Diskussion einer Klasse von Maßen auf $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$, welche in einer speziellen Beziehung zur Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ stehen. Hierzu wird das System $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ der zur Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörigen Rechteckmengen herangezogen. Es sei daran erinnert, dass wegen Folgerung M.16.1 die Beziehung

$$\sigma_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k}\left(\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k$$

besteht und somit insbesondere

$$\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j \subseteq \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k$$

erfüllt ist. Es folgt nun die zentrale Begriffsbildung dieses Abschnitts:

Definition M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen und $\Pi \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$. Dann heißt Π das *Produktmaß der Folge* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, falls für alle $\times_{j=1}^{n} A_j \in \boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ die Beziehung

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n}\mu_j(A_j)$$

besteht.

Bemerkung M.24.1.1. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Weiter sei Π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:

(a) Es ist

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j\right) = \prod_{j=1}^{n}\mu_j(\Omega_j).$$

(b) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(I) Es ist π das Nullmaß auf $\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$.

(II) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ für das μ_k das Nullmaß auf $(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ ist.

(c) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $\Pi \in \mathcal{M}_+^b\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$.

(d) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $\Pi \in \mathcal{M}_+^1\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$.

(e) Sei

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)_{\Pi,e} := \left\{E \in \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j \,\middle|\, \Pi(E) \in [0,+\infty)\right\}$$

sowie für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ weiterhin

$$(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} := \{E_j \in \mathfrak{A}_j \,|\, \mu_j(E_j) \in [0,+\infty)\}.$$

Dann gilt

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n}(\mathfrak{A}_j)_{\mu_j,e} \subseteq \left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)_{\Pi,e}.$$

(f) Sei $\times_{j=1}^{n} A_j \in \boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(III) Es ist $\times_{j=1}^{n} A_j \in \mathcal{N}_\Pi$.

(IV) Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $A_k \in \mathcal{N}_{\mu_k}$. ♣

Unser nächstes Ziel besteht darin, eine Situation aufzuzeigen, in der *höchstens* ein Produktmaß existieren kann. Hierzu beweisen wir zunächst einen etwas allgemeineren Sachverhalt:

Satz M.24.1.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathcal{E}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{A}_j$, welcher eine isotone Folge $(E_{jk})_{k\in\mathbb{N}}$ enthält, für welche $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{jk} = \Omega_j$ erfüllt ist und welche für alle $k \in \mathbb{N}$ der Bedingung $\mu_j(E_{jk}) \in [0,+\infty)$ genügt. Dann gibt es höchstens ein Maß Π auf $\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$, welches für alle $\times_{j=1}^{n} E_j \in \boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j$ der Bedingung*

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_j\right) = \prod_{j=1}^{n}\mu_j(E_j)$$

genügt.

Beweis. Unsere Beweisstrategie ist auf eine geeignete Anwendung von Satz M.10.3 orientiert. Wegen Satz M.17.2 gilt

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die Durchschnittsstabilität des Systems $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j$. Sei

$$\left\{\bigtimes_{j=1}^{n} E_j, \bigtimes_{j=1}^{n} F_j\right\} \subseteq \bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathcal{E}_j. \tag{2}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) gilt dann $\{E_j, F_j\} \subseteq \mathcal{E}_j$. Hieraus folgt aufgrund der Durchschnittsstabilität von $\mathcal{E}_j$ dann

$$E_j \cap F_j \in \mathcal{E}_j. \tag{4}$$

Weiterhin gilt

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_j\right) \cap \left(\bigtimes_{j=1}^{n} F_j\right) = \bigtimes_{j=1}^{n} (E_j \cap F_j)\,. \tag{5}$$

Wegen (3) bis (5) gilt dann

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_j\right) \cap \left(\bigtimes_{j=1}^{n} F_j\right) \in \bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j. \tag{6}$$

Aus (1), (2) und (6) folgt nun

(I) Es ist $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$.

Wir zeigen nun die Identität

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk}\right) = \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j.$$

Trivialerweise gilt

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk}\right) \subseteq \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j. \tag{7}$$

Sei nun

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j. \tag{8}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{9}$$

Wegen (9) ist dann $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{jk} = \Omega_j$ und es gibt also ein

$$k_j \in \mathbb{N} \tag{10}$$

mit

$$\omega_j \in E_{jk_j}. \tag{11}$$

Sei

$$l \coloneqq \max_{m \in \mathbb{N}_{1,n}} \{k_m\}\,. \tag{12}$$

Aus (10) und (12) folgen dann

$$l \in \mathbb{N} \tag{13}$$

und

$$k_j \leq l. \tag{14}$$

Aus (10), (13), (14) und der Isotonie der Folge $(E_j)_{j\in\mathbb{N}}$ folgt dann $E_{jk_j} \subseteq E_{jl}$. Hieraus folgt wegen (11) dann

$$\omega_j \in E_{jl}. \tag{15}$$

Aus (9) und (15) folgt nun

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk}. \tag{16}$$

Aus (13) und (16) folgt dann

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk} \right). \tag{17}$$

Aus (8) und (17) folgt dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk} \right). \tag{18}$$

Wegen (7) und (18) gilt also

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk} \right) = \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j. \tag{19}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{20}$$

Nach Konstruktion gelten dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk} \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \tag{21}$$

und

$$\prod_{j=1}^{n} \mu\left(E_{jk}\right) \in [0, +\infty). \tag{22}$$

Seien nun

$$\Pi \in \mathcal{M}_+ \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \right) \tag{23}$$

und

$$\Pi' \in \mathcal{M}_+ \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \right) \tag{24}$$

so beschaffen, dass für alle

$$\bigtimes_{j=1}^{n} E_j \in \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j \tag{25}$$

die Beziehungen

$$\Pi \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_j \right) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j\left(E_j\right) \tag{26}$$

und

$$\Pi' \left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_j \right) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j\left(E_j\right) \tag{27}$$

bestehen. Aus (25) bis (27) folgt dann

$$\Pi \restriction \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j = \Pi' \restriction \boxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{E}_j. \tag{28}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{29}$$

Wegen (29), (20), (21), (25) und (26) gilt dann

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk}\right) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j\left(E_{jk}\right). \tag{30}$$

Wegen (29), (20), (22) und (30) gilt dann

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n} E_{jk}\right) \in [0, +\infty). \tag{31}$$

Wegen *(I)*, (20), (21), (19), (23), (24), (28), (29) und (31) liefert Satz M.10.3 dann

$$\Pi = \Pi'.$$

□

Lemma M.24.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein Maßraum und sei $\mathfrak{A}_{\mu,e} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A} \mid \mu(A) \in [0, +\infty)\}$. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $(A_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$. Dann ist $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$.*

Beweis. Wegen der Subadditivität von μ gelten

$$\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}$$

und

$$0 \leq \mu\left(\bigcup_{j=1}^{n} A_j\right) \leq \sum_{j=1}^{n} \underbrace{\mu\left(A_j\right)}_{<+\infty} < +\infty.$$

Also $\bigcup_{j=1}^{n} A_j \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$. □

Lemma M.24.1.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein σ-endlicher Maßraum. Dann gibt es eine isotone Folge $(E_n)_{n \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$ mit $\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega$.*

Beweis. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ gibt es eine Folge $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_n \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$.

(II) Es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n = \Omega$.

Sei

$$n \in \mathbb{N} \tag{1}$$

und

$$E_n \coloneqq \bigcup_{k=1}^{n} A_k. \tag{2}$$

Da $(A_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ wegen *(I)* eine Folge aus $\mathfrak{A}_{\mu,e}$ ist, folgt wegen (1) und (2) mittels Lemma M.24.1.1 dann

$$E_n \in \mathfrak{A}_{\mu,e}.$$

Aus (1) und (2) folgt sogleich

$$E_n \subseteq E_{n+1}.$$

Unter Verwendung von (1) und (2) folgt weiterhin

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left[\bigcup_{k=1}^{n} A_k \right] = \bigcup_{s=1}^{\infty} A_s. \tag{3}$$

Aus (3) und *(II)* folgt dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} E_n = \Omega.$$

Damit folgt die Behauptung. □

Satz M.24.1.2. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Dann gibt es höchstens ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$.*

Beweis. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}$$

und sei

$$\mathfrak{A}_{\mu_j,e} \coloneqq \{A_j \in \mathfrak{A}_j \mid \mu_j(A_j) \in [0, +\infty)\}.$$

Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_j gilt dann nach Lemma M.24.1.2:

(I) Es gibt eine isotone Folge $(E_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{A}_{\mu_j,e}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{jk} = \Omega_j$.

Da $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, folgt unter Beachtung von Teil *(b)* von Satz M.4.1 und Teil *(d)* von Satz M.4.6 dann:

(II) Es ist $\mathfrak{A}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger auf $\mathfrak{A}_j$.

Unter Beachtung von *(I)*, *(II)* und Definition M.24.1.1 folgt mittels Satz M.24.1.1 dann, dass es höchstens ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ gibt. □

Folgerung M.24.1.1. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen. Dann gibt es höchstens ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$.*

Beweis. Da $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ wegen Bemerkung M.13.3 eine Folge von σ-endlichen Maßräumen ist, liefert Satz M.24.1.2 die Behauptung. □

Satz M.24.1.3. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Weiter sei Π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$. Dann ist Π σ-endlich.*

Beweis. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

und sei

$$\mathfrak{A}_{\mu_j,e} \coloneqq \{A \in \mathfrak{A}_j \mid \mu_j(A_j) \in [0, +\infty)\}. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von μ_j gibt es wegen Lemma M.24.1.2 dann eine Folge $(A_{jk})_{k \in \mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{P}(\Omega_j)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_{j,k} \in \mathfrak{A}_{\mu_j,e}$.

(II) Für alle $k \in \mathbb{N}$ gilt $A_{j,k} \subseteq A_{j,k+1}$.

(III) Es ist $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_{j,k} = \Omega_j$.

Sei

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)_{\Pi,e} := \left\{A \in \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j \,\middle|\, \Pi(A) \in [0,+\infty)\right\}. \tag{3}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{4}$$

Wegen (1) bis (4) und *(I)* folgt mittels Teil *(e)* von Bemerkung M.24.1.1 dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_{j,k} \in \left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)_{\Pi,e}. \tag{5}$$

Wegen (1), *(I)* und *(III)* folgt, wie im Beweis zu Satz M.24.1.1 gezeigt wurde (vgl. Formel (19)) dann

$$\bigcup_{k=1}^{\infty}\left(\bigtimes_{j=1}^{n}A_{j,k}\right) = \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j. \tag{6}$$

Wegen (4) bis (6) ist der Maßraum $\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j, \Pi\right)$ dann σ-endlich. □

Satz M.24.1.4. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $\left((\Omega'_j,\mathfrak{A}'_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge nichttrivialer Maßräume bzw. eine Folge nichttrivialer messbarer Räume. Es sei Π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $T_j \in \operatorname{Abb}(\Omega_j,\Omega'_j)$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung. Die Abbildung $T\colon \times_{j=1}^{n}\Omega_j \longrightarrow \times_{j=1}^{n}\Omega_j$ sei definiert gemäß*

$$(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto (T_1(\omega),\ldots,T_n(\omega)).$$

Dann ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung und Π_T ist ein Produktmaß der Folge $\left([\mu_j]_{T_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.

Beweis. Wegen Folgerung M.16.2 ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung. Sei

$$\bigtimes_{j=1}^{n}A'_j \in \bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}'_j. \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl der Folge $(T_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ folgt dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n}T_j^{-1}(A'_j) \in \bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j. \tag{2}$$

Da Π ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist, folgt aus (2) dann

$$\Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n}T_j^{-1}(A'_j)\right) = \prod_{j=1}^{n}\mu_j\left[T_j^{-1}(A'_j)\right]. \tag{3}$$

Aus der Definition von T folgt sogleich

$$T^{-1}\left(\bigtimes_{j=1}^{n}A'_j\right) = \bigtimes_{j=1}^{n}T_j^{-1}(A'_j). \tag{4}$$

Unter Beachtung der Definition eines Bildmaßes sowie von (4) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}\Pi_T\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A'_j\right) &= \Pi\left(T^{-1}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A'_j\right)\right) = \Pi\left(\bigtimes_{j=1}^{n} T_j^{-1}\left(A'_j\right)\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n} \mu_j\left(T_j^{-1}\left(A'_j\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} T_j\left[\mu_j\right]\left(A'_j\right).\end{aligned} \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) ist Π_T dann ein Produktmaß der Folge $\left(\left[\mu_j\right]_{T_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. □

Satz M.24.1.5. *Seien $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2,\mathfrak{A}_2)$ nicht triviale messbare Räume. Weiter seien I_1 bzw. I_2 ein Abschnitt von $\mathbb{N}$, $(\mu_j)_{j\in I_1}$ bzw. $(\nu_k)_{k\in I_2}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$ bzw. $\mathcal{M}_+(\Omega_2,\mathfrak{A}_2)$ sowie $(\alpha_j)_{j\in I_1}$ bzw. $(\beta_k)_{k\in I_2}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$. Für $(j,k)\in I_1\times I_2$ sei $\Pi_{j,k}$ ein Produktmaß von μ_j und ν_k.*
Dann gelten

$$\sum_{j\in I_1}\alpha_j\mu_j \in \mathcal{M}_+(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$$

sowie

$$\sum_{k\in I_2}\beta_k\nu_k \in \mathcal{M}_+(\Omega_2,\mathfrak{A}_2)$$

und, falls

$$\Pi := \sum_{j\in I_1}\left(\sum_{k\in I_2}\alpha_j\beta_k\Pi_{j,k}\right)$$

gesetzt wird, so ist Π ein Produktmaß von $\sum_{j\in I_1}\alpha_j\mu_j$ und $\sum_{k\in I_2}\beta_k\nu_k$ und es gilt

$$\Pi = \sum_{k\in I_2}\left(\sum_{j\in I_1}\alpha_j\beta_k\Pi_{j,k}\right).$$

Ausgangspunkt für unsere folgenden Überlegungen sind zwei nicht triviale Maßräume $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ und $(\Omega_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$. Dann besteht unsere nächste Zielstellung darin, den Nachweis der Existenz eines Produktmaßes Π von μ_1 und μ_2 zu erbringen. Hierzu ziehen wir den Halbring $\mathfrak{A}_1\boxtimes\mathfrak{A}_2$ der zu $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$ gehörigen Rechteckmengen heran und zeigen, dass die Abbildung $\widetilde{\Pi}\colon \mathfrak{A}_1\boxtimes\mathfrak{A}_2 \longrightarrow [0,+\infty]$ welche gemäß der Vorschrift

$$A_1\times A_2 \longmapsto \mu_1(A_1)\cdot\mu_2(A_2)$$

erklärt ist, ein Prämaß darstellt.

Hieran anknüpfend wird uns dann der grundlegende Fortsetzungssatz M.13.5 das gewünschte Resultat liefern. Da dieser Fortsetzungssatz jedoch auf der Heranziehung des zu $\widetilde{\Pi}$ gehörigen äußeren Maßes vom Typ I auf $\Omega_1\times\Omega_2$ basiert, erhalten wir keine besonders handliche Konstruktion des Produktmaßes von μ_1 und μ_2.

Dieses Manko lässt sich allerdings in jener Situation überwinden, in der *mindestens* einer der beiden vorliegenden Maßräume σ-endlich ist. In diesem Fall stellen wir eine spezielle Methode zur Konstruktion von Produktmaßen vor, welche eine Adaption einer frühen Überlegung von Bonaventura Cavalieri[1)] auf die hier vorliegende abstrakte Situation darstellt. Das gesuchte

[1)] Bonaventura Francesco Cavalieri (∗um 1598; †30.11.1647) war ein italienischer Jesuat, Mathematiker und Astronom. Seine Berechnungen von Oberflächen und Volumina nehmen Methoden der Infinitesimalrechnung vorweg.

Produktmaß wird nach dem CAVALIERI-Prinzip bestimmt. Dieses besteht grob gesprochen darin, dass wir geeignete Schnittmengen bilden, die wir zunächst messen und dann aufintegrieren.

Wir beginnen nun mit der Bereitstellung des zur CAVALIERI-Konstruktion von Produktmaßen benötigten Apparats. In einer frühen Stufe dieses Prozesses werden wir hierbei bereits jene Mittel erhalten, welche den als erstes Teilziel avisierten Nachweises der Existenz eines Produktmaßes ermöglichen. Wir wenden uns zunächst der Einführung der oben genannten Schnittmengen zu:

Definition M.24.1.2. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen. Weiter sei $Q \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. Für $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$ heißt die Menge

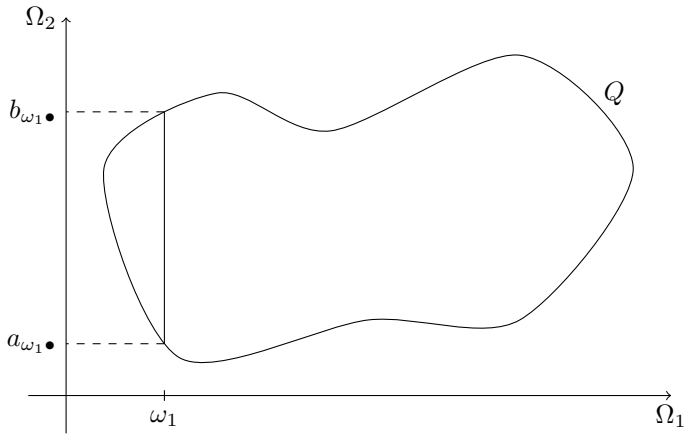
$$Q_{\omega_1 \bullet} := \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \mid (\omega_1, \widetilde{\omega}_2) \in Q\}$$

bzw.

$$Q_{\bullet \omega_2} := \{\widetilde{\omega}_1 \in \Omega_1 \mid (\widetilde{\omega}_1, \omega_2) \in Q\}$$

der $\omega_1\bullet$-*Schnitt* bzw. $\bullet\omega_2$-*Schnitt von* Q.

Geometrische Veranschaulichung an einem Beispiel.



In der Skizze ist $Q_{\omega_1\bullet} = [a_{\omega_1}, b_{\omega_1}]$. ♣

Wir nehmen nun eine Untersuchung der in Definition M.24.1.2 eingeführten Schnittmengen vor:

Lemma M.24.1.3. *Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen sowie $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt:*

(a) *Sei $Q \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$. So gelten $([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q)_{\omega_1\bullet} = Q_2 \setminus Q_{\omega_1\bullet}$ sowie $([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q)_{\bullet\omega_2} = Q_1 \setminus Q_{\bullet\omega_2}$.*

(b) *Sei $(Q_k)_{k\in I}$ eine Familie von Teilmengen $\Omega_1 \times \Omega_2$. Dann gelten*

$$\left(\bigcup_{k\in I} Q_k\right)_{\omega_1\bullet} = \bigcup_{k\in I} [Q_k]_{\omega_1\bullet} \qquad \text{und} \qquad \left(\bigcup_{k\in I} Q_k\right)_{\bullet\omega_2} = \bigcup_{k\in I} [Q_k]_{\bullet\omega_2}.$$

(c) *Seien $A_1 \in \mathfrak{P}(\Omega_1)$ und $A_2 \in \mathfrak{P}(\Omega_2)$. Dann gelten*

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} = \begin{cases} A_2, & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ \varnothing, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1 \end{cases}$$

sowie

$$(A_1 \times A_2)_{\bullet\omega_2} = \begin{cases} A_1, & \text{falls } \omega_2 \in A_2 \\ \varnothing, & \text{falls } \omega_2 \in \Omega_2 \backslash A_2 \end{cases}$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es gilt

$$\begin{aligned} ([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q)_{\omega_1\bullet} &= \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,|\, (\omega_1, \widetilde{\omega}_2) \in [\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q\} \\ &= \Omega_2 \setminus \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,|\, (\omega_1, \widetilde{\omega}_2) \in Q\} \\ &= \Omega_2 \backslash Q_{\omega_1\bullet}, \end{aligned}$$

andere Menge analog.

Zu *(b)*: Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\bigcup_{k\in I} Q_k\right)_{\omega_1\bullet} &= \left\{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,\middle|\, (\omega_1, \widetilde{\omega}_2) \in \bigcup_{k\in I} Q_k\right\} \\ &= \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,|\, \exists k_0 \in I\colon\ (\omega_1, \widetilde{\omega}_2) \in Q_{k_0}\} \\ &= \left\{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,\middle|\, \exists k_0 \in I\colon \widetilde{\omega}_2 \in [Q_k]_{\omega_1\bullet}\right\} \\ &= \bigcup_{k\in I} [Q_k]_{\omega_1\bullet}. \end{aligned}$$

Zu *(c)*: Dies folgt sogleich aus Definition M.24.1.2. □

Wir studieren nun die Schnittmengen von Mengen aus der Produkt-σ-Algebra $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ zweier σ-Algebren $\mathfrak{A}_1$ und $\mathfrak{A}_2$. Wesentlich für unserer weiteres Vorgehen wird die Tatsache sein, dass diese Schnittmengen zu $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ gehören.

Lemma M.24.1.4. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nicht triviale messbare Räume. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathcal{L}_{\omega_1\bullet} := \{A \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \,|\, A_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2\}$ bzw. $\mathcal{L}_{\omega_2\bullet} := \{A \in \mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2) \,|\, A_{\bullet\omega_2} \in \mathfrak{A}_1\}$. Dann ist $\mathcal{L}_{\omega_1\bullet}$ bzw. $\mathcal{L}_{\bullet\omega_2}$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$, welche $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ umfasst.*

(b) *Sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann gelten $Q_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2$ und $Q_{\bullet\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(c)* von Lemma M.24.1.3 gilt

$$(\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega_1\bullet} = \Omega_2. \tag{1}$$

Da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, gilt

$$\Omega_2 \in \mathfrak{A}_2. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{3}$$

Sei

$$A \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{4}$$

Wegen (4) ist dann $A_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, dann

$$\Omega_2 \setminus A_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2. \tag{5}$$

Wegen Teil *(a)* von Lemma M.24.1.3 gilt

$$([\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus A)_{\omega_1\bullet} = \Omega_2 \setminus A_{\omega_1\bullet}. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann

$$[\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus A_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{7}$$

Für

$$k \in \mathbb{N} \tag{8}$$

sei

$$Q_k \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann, dass $\big((Q_k)_{\omega_1\bullet}\big)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$ ist. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, dann

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} (Q_k)_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2. \tag{10}$$

Nach Teil *(b)* von Lemma M.24.1.3 gilt

$$\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k\right)_{\omega_1\bullet} = \bigcup_{k=1}^{\infty} (Q_k)_{\omega_1\bullet}. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$\bigcup_{k=1}^{\infty} Q_k \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{12}$$

Wegen (3), (4), (7), (8), (9) und (12) ist $\mathcal{L}_{\omega_1\bullet}$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$.
Wir zeigen nun, dass $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}$. Sei hierzu

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{13}$$

Wegen (13) folgt mittels Teil *(c)* von Lemma M.24.1.3 dann

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} = \begin{cases} A_2, & \text{falls } \omega_1 \in A_1, \\ \varnothing, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus A_1. \end{cases} \tag{14}$$

Wegen (13) gilt

$$A_2 \in \mathfrak{A}_2. \tag{15}$$

Da $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_2 ist, gilt nach Teil *(a)* von Satz M.4.1 dann

$$\varnothing \in \mathfrak{A}_2. \tag{16}$$

Wegen (16) bis (16) gilt dann $(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2$. Somit ist

$$A_1 \times A_2 \in \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{17}$$

Wegen (13) und (17) gilt dann

$$\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{18}$$

Da $\mathcal{L}_{\omega_1\bullet}$, wie oben gezeigt wurde, eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, folgt aus (18) mittels Teil *(b)* von Satz M.4.6 dann

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}. \tag{19}$$

Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt dann

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathcal{L}_{\omega_1\bullet}.$$

Die Aussagen für $\mathcal{L}_{\bullet\omega_2}$ folgen in ähnlicher Art und Weise.

Zu *(b)*: Dies folgt unmittelbar aus *(a)*. □

Wir betrachten nun zwei nichttrivialer Maßräume. Unter Beachtung von Lemma M.24.1.4 können wir dann die entsprechenden Maße der Schnittmengen bilden. Wir untersuchen nun, die hierdurch definierten Funktionen:

Lemma M.24.1.5. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nicht triviale Maßräume. Für $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sei die Funktion $S_{Q,\mu_2}\colon \Omega_1 \longrightarrow [0,+\infty]$ bzw. $T_{Q,\mu_1}\colon \Omega_2 \longrightarrow [0,+\infty]$ gemäß $\omega_1 \longmapsto \mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet}\right)$ bzw. $\omega_2 \longmapsto \mu_1\left(Q_{\bullet\omega_1}\right)$ definiert. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und $S_{\Omega_1\times\Omega_2,\mu_2}$ bzw. $T_{\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1}$ ist die auf Ω_1 bzw. Ω_2 konstante Funktion mit Wert $\mu_2\left(\Omega_2\right)$ bzw. $\mu\left({}_1\Omega_1\right)$.*

(b) *Sei μ_1 bzw. μ_2 endlich. Weiter sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann gelten $\left[\Omega_1 \times \Omega_2\right] \setminus Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sowie*

$$S_{[\Omega_1\times\Omega_2]\setminus Q,\mu_2} = S_{\Omega_1\times\Omega_2,\mu_2} - S_{Q,\mu_2}$$

bzw.

$$T_{[\Omega_1\times\Omega_2]\setminus Q,\mu_1} = T_{\Omega_1\times\Omega_2,\mu_1} - T_{Q,\mu_1}.$$

(c) *Sei $\left(Q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von paarweise disjunkten Mengen aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann gelten*

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

sowie

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2} \qquad \text{und} \qquad T_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_1} = \sum_{n=1}^{\infty} T_{Q_n,\mu_1}.$$

(d) *Sei $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$. Dann gelten $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sowie*

$$S_{A_1\times A_2,\mu_2} = \mu_2\left(A_2\right) \cdot 1_{A_1}$$

und

$$T_{A_1\times A_2,\mu_1} = \mu_1\left(A_1\right) \cdot 1_{A_2}.$$

Beweis. Sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Wegen Lemma M.24.1.4 gilt für $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$ dann $Q_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2$ bzw. $Q_{\bullet\omega_2} \in \mathfrak{A}_1$. Somit sind S_{Q,μ_2} bzw. T_{Q,μ_1} wohldefiniert. Wir zeigen jeweils die erste Formel:

Zu *(a)*: Da $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, gilt $\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Sei $\omega_1 \in \Omega_1$. Wegen Teil *(c)* von Lemma M.24.1.3 gilt

$$[\Omega_1 \times \Omega_2]_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2.$$

Hieraus folgt

$$S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}(\omega_1) = \mu_2\left((\Omega_1 \times \Omega_2)_{\omega_1 \bullet}\right) = \mu_2(\Omega_2).$$

Somit ist $S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}$ die auf Ω_1 konstante Funktion.

Zu *(b)*: Da $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist und da $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ist, gilt $[\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{1}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(a)* von Lemma M.24.1.3 dann

$$[(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus Q]_{\omega_1 \bullet} = \Omega_2 \setminus Q_{\omega_1 \bullet}. \tag{2}$$

Da μ_2 endlich, ist μ_2 subtraktiv. Hieraus ergibt sich bei Beachtung von (2), $Q_{\omega_1 \bullet} \in \mathfrak{A}_2$ und *(a)* dann

$$\begin{aligned} S_{[\Omega_1 \times \Omega_2] \setminus Q, \mu_2}(\omega_1) &= \mu_2\left([(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus Q]_{\omega_1 \bullet}\right) \\ &= \mu_2(\Omega_2 \setminus Q_{\omega_1 \bullet}) = \mu_2(\Omega_2) - \mu_2(Q_{\omega_1 \bullet}) \\ &= S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}(\omega_1) - S_{Q, \mu_2}(\omega_1). \end{aligned} \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) gilt dann

$$S_{(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus Q, \mu_2} = S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} - S_{Q, \mu_2}.$$

Zu *(c)*: Da $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $(Q_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ gilt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2.$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{4}$$

Wegen (4) gilt nach dem Teil *(b)* von Lemma M.24.1.3 dann

$$\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right]_{\omega_1 \bullet} = \bigcup_{n=1}^{\infty} [Q_n]_{\omega_1 \bullet}. \tag{5}$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $\left([Q_n]_{\omega_1 \bullet}\right)_{n \in \mathbb{N}}$ aus paarweise disjunkten Mengen besteht. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ so gewählt, dass $k \neq l$ erfüllt ist. Dann gilt

$$Q_k \cap Q_l = \varnothing. \tag{6}$$

Wäre nun $[Q_k]_{\omega_1 \bullet} \cap [Q_l]_{\omega_1 \bullet} \neq \varnothing$, so gäbe es ein $\omega_2' \in [Q_k]_{\omega_1 \bullet} \cap [Q_l]_{\omega_1 \bullet}$. Hieraus ergäbe sich dann, dass$(\omega_1, \omega_2') \in Q_k \cap Q_l$, was im Widerspruch zu (6) stünde. Somit ist also

$$[Q_k]_{\omega_1 \bullet} \cap [Q_l]_{\omega_1 \bullet} = \varnothing.$$

Somit ist $\left([Q_n]_{\omega_1\bullet}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge paarweise disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt bei Beachtung von (5) und der σ-Additivität von μ_2 dann

$$\begin{aligned} S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2}(\omega_1) &= \mu_2\left(\left[\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right]_{\omega_1\bullet}\right) = \mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}[Q_n]_{\omega_1\bullet}\right) \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\mu_2\left([Q_n]_{\omega_1\bullet}\right) = \sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2}(\omega_1). \end{aligned} \tag{7}$$

Aus (4) und (7) folgt dann

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2}.$$

Zu *(d)*: Wegen der Folgerung M.16.1 gilt $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{8}$$

Wegen Teil *(c)* von Lemma M.24.1.3 gilt dann

$$(A_1 \times A_2)_{\omega_1\bullet} = \begin{cases} A_2, & \text{falls } \omega_1 \in A_1, \\ \varnothing, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash A_1. \end{cases}$$

Hieraus folgt dann

$$S_{A_1\times A_2,\mu_2}(\omega_1) = \mu_2\left([A_1 \times A_2]_{\omega_1\bullet}\right) = \begin{cases} \mu_2(A_2), & \text{falls } \omega_1 \in A_1 \\ 0, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1\backslash A_1 \end{cases} = \mu_2(A_2)\cdot 1_{A_1}(\omega_1). \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$S_{A_1\times A_2,\mu_2} = \mu_2(A_2)\cdot 1_{A_1}. \qquad \square$$

Wir wenden uns nun dem Nachweis der Existenz eines Produktmaßes zweier Maße zu. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.24.1.2. Seien Ω eine Menge und $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω. Dann ist $\mathfrak{A}$ eine Halbring in Ω. ♣

Beweis. Wegen Teil *(a)* von Satz M.4.1 gilt

$$\varnothing \in \mathfrak{A}. \tag{1}$$

Seien

$$\{A, B\} \subseteq \mathfrak{A}. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil *(b)* bzw. *(c)* von Satz M.4.1 dann

$$A \cap B \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

bzw.

$$A \setminus B \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (1) bis (4) liefert Bemerkung M.1.3 dann, dass $\mathfrak{A}$ ein Halbring in Ω ist. $\square$

Bemerkung M.24.1.3. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n} \Omega_j$. ♣

Beweis. Wegen Bemerkung M.24.1.2 ist für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ nun $\mathfrak{A}_j$ ein Halbring in Ω_j. Hieraus ergibt sich mittels Satz M.1.4, dass $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n} \Omega_j$ ist. □

Lemma M.24.1.6. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nicht triviale Maßräume. Sei $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$. Dann ist $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ und falls die Abbildung $S_{A_1\times A_2,\mu_2}$ bzw. $T_{A_1\times A_2,\mu_1}$, welche wie in Lemma M.24.1.5 erklärt sind, so gelten $S_{A_1\times A_2,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und*

$$\int_{\Omega_1} S_{A_1\times A_2,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)$$

bzw. $T_{A_1\times A_2,\mu_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und

$$\int_{\Omega_2} T_{A_1\times A_2,\mu_1} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2).$$

Beweis. Wegen Teil *(d)* von Lemma M.24.1.5, gelten $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sowie

$$S_{A_1\times A_2,\mu_2} = \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1}. \tag{1}$$

Wegen $A_1 \in \mathfrak{A}_1$ liefern die Bemerkungen M.19.3 und M.19.8 dann

$$1_{A_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1). \tag{2}$$

Wegen $\mu_2(A_2) \in [0, +\infty]$ und (2) folgen mittels Teil *(a)* von Satz M.22.1.2 dann

$$\mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{3}$$

und

$$\int_{\Omega_1} \mu_2(A_2) \cdot 1_{A_1} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_2(A_2) \int_{\Omega_1} 1_{A_1} \mathrm{d}\mu_1. \tag{4}$$

Wegen $A_2 \in \mathfrak{A}_2$ liefert Bemerkung M.22.1.1 dann

$$\int_{\Omega_1} 1_{A_1} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1). \tag{5}$$

Wegen (1) und (3) gilt

$$S_{A_1\times A_2,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{6}$$

und

$$\int_{\Omega_1} S_{A_1\times A_2,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2). \tag{7}$$

Wegen (7) und (7) ist dann der erste Teil der Behauptung bewiesen. Der zweite Teil lässt sich völlig analog beweisen. □

Satz M.24.1.6. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume. Dann gilt:*

(a) *Sei $\widetilde{\Pi}\colon \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $A_1 \times A_2 \longmapsto \mu_1(A_1)\,\mu_2(A_2)$. Dann ist $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ein Halbring in $\Omega_1 \times \Omega_2$ und $\widetilde{\Pi}$ ist ein Prämaß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.*

(b) *Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ die Carathéodory-Fortsetzung von $\widetilde{\Pi}$. Dann ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Bemerkung M.24.1.3 ist $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ ein Halbring in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Aufgrund der Wahl von μ_1 und μ_2 gilt $\mu_1(\varnothing) = 0$ und $\mu_2(\varnothing) = 0$. Hieraus folgt

$$\widetilde{\Pi}(\varnothing) = \widetilde{\Pi}(\varnothing \times \varnothing) = \mu_1(\varnothing)\,\mu_2(\varnothing) = 0 \cdot 0 = 0. \tag{1}$$

Wir zeigen nun die σ-Additivität von $\widetilde{\Pi}$. Sei $(A_{1,n} \times A_{2,n})_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $A_{1,n} \times A_{2,n} \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$.

(II) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $(A_{1,k} \times A_{2,k}) \cap (A_{1,l} \times A_{2,l}) = \varnothing$.

(III) Es gilt $\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1,n} \times A_{2,n}) \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$.

Wegen *(III)* gibt es dann ein

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2. \tag{2}$$

mit

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1,n} \times A_{2,n}) = A_1 \times A_2. \tag{3}$$

Wegen *(III)*, (3) und (2) gilt dann

$$\widetilde{\Pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1,n} \times A_{2,n})\right) = \widetilde{\Pi}(A_1 \times A_2). \tag{4}$$

Wegen (2) gelten nach Lemma M.24.1.6 dann $S_{A_1\times A_2,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie

$$\widetilde{\Pi}(A_1 \times A_2) = \int\limits_{\Omega_1} S_{A_1\times A_2,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1. \tag{5}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{6}$$

Wegen (6) und *(I)* folgt nach Lemma M.24.1.6 dann

$$S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{7}$$

und

$$\widetilde{\Pi}(A_{1,n} \times A_{2,n}) = \int\limits_{\Omega_1} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2}\mathrm{d}\mu_1. \tag{8}$$

Wegen (6) und (7) liefert Folgerung M.22.2.4 (die auf dem Satz der monotonen Konvergenz basiert) dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right) \tag{9}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} \sum_{n=1}^{\infty} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2} \mathrm{d}\mu_1. \tag{10}$$

Wegen $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$, *(I)* und *(II)* folgt mittels Teil *(c)* von Lemma M.24.1.5 weiterhin

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} \left(A_{1,n} \times A_{2,n}\right) \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$$

und

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1,n}\times A_{2,n}),\mu_2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2}. \tag{11}$$

Unter Verwendung von (5), (3), (11), (10), (6) und (8) folgt nun

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Pi}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(A_{1,n}\times A_{2,n}\right)\right) = \widetilde{\Pi}\left(A_1 \times A_2\right) &= \int\limits_{\Omega} S_{A_1\times A_2,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1 \\
&= \int\limits_{\Omega_1} S_{\bigcup_{n=1}^{\infty}(A_{1,n}\times A_{2,n}),\mu_2}\mathrm{d}\mu_1 \\
&= \int\limits_{\Omega_1} \left(\sum_{n=1}^{\infty} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2}\right)\mathrm{d}\mu_1 \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1} S_{A_{1,n}\times A_{2,n},\mu_2}\mathrm{d}\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \widetilde{\Pi}\left(A_{1,n}\times A_{2,n}\right).
\end{aligned} \tag{12}$$

Wegen (1), *(I)* bis *(III)* und (12) ist $\widetilde{\Pi}$ dann ein Prämaß auf $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$.

Zu *(b)*: Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{13}$$

Wegen *(a)*, Definition M.17.1, Teil *(c)* von Satz M.13.5 und (13) ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Maß auf $\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ für das

$$\mu_1 \otimes \mu_2 \restriction \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 = \widetilde{\Pi}$$

erfüllt ist. Hieraus folgt unter Beachtung der Definition von $\widetilde{\Pi}$ sowie der Definition M.24.1.1, dass $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2 ist. □

Satz M.24.1.6 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.24.1.3. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nicht triviale Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das im Teil *(b)* von Satz M.24.1.6 konstruierte Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann heißt $\mu_1 \otimes \mu_2$ das CARATHÉODORY*sche Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2.

Nachdem wir nun die Existenz eines Produktmaßes zweier Maße nachgewiesen haben, richten wir unsere Aufmerksamkeit auf die angestrebte Konstruktion eines Produktmaßes nach dem CAVALIERIschem Prinzip.

Wichtig für unser weiteres Vorgehen ist die Borel-Messbarkeit der beiden in Lemma M.24.1.5 definierten Funktionen S_{Q,μ_2} bzw. T_{Q,μ_1}. Die Untersuchung dieses Sachverhalts sind unsere nächsten Überlegungen gewidmet. Hierbei wird sich herausstellen, dass wir die gewünschte Messbarkeitsaussage *nicht* im allgemeinen Fall nachweisen können. Allerdings werden sich entsprechende σ-Endlichkeitsvoraussetzungen als hinreichend erweisen.

Wir stellen nun eine kleine Beobachtung voran:

Bemerkung M.24.1.4. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann gilt:

(a) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien $A_j \in \mathfrak{P}(\Omega_j)$ und $B_j \in \mathfrak{P}(\Omega_j)$. Dann gilt

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right) \cap \left(\bigtimes_{j=1}^{n} B_j\right) = \bigtimes_{j=1}^{n} [A_j \cap B_j].$$

(b) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathcal{L}_j$ ein durchschnittsstabiles CARATHÉODORY System von Teilmengen von Ω_j. Dann ist

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathcal{L}_j$$

ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen von $\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$. ♣

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt sofort aus der Definition des kartesischen Produkts.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)*. □

Bemerkung M.24.1.5. Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Dann ist $\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ ein ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen von $\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j$. ♣

BEWEIS. Wegen Teil *(b)* von Satz M.4.1 ist für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ nun $\mathfrak{A}_j$ ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen von Ω_j. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.24.1.4 die Behauptung. □

Satz M.24.1.7. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nicht triviale Maßräume. Weiter sei $Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Dann gilt:*

(a) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor. Weiter sei die Abbildung*

$$S_{Q,\mu_2} : \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$$

definiert gemäß $\omega_1 \longmapsto \mu_2(Q_{\omega_1 \bullet})$. Dann gilt $S_{Q,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$.

(b) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor. Weiter sei die Abbildung*

$$T_{Q,\mu_1} : \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$$

definiert gemäß $\omega_2 \longmapsto \mu_1\left(Q_{\bullet\omega_2}\right)$. *Dann gilt* $T_{Q,\mu_1} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2\right)$.

BEWEIS. Wir zeigen nur *(a)*. Wir betrachten zunächst den Fall

$$\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2\right). \tag{1}$$

Es sei

$$\mathfrak{D}_{\mu_2} \coloneqq \left\{D \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \,|\, S_{D,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right)\right\}. \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst, dass $\mathfrak{D}_{\mu_2}$ ein Dynkin-System in $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, welches $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ umfasst. Sei

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2. \tag{3}$$

Wegen (3) gilt nach Lemma M.24.1.6 dann

$$S_{A_1 \times A_2, \mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{4}$$

Wegen $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ folgt aus (3) dann $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt in Verbindung mit (2) und (4) dann

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{5}$$

Aus (3) und (5) folgt dann

$$\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{A}_1$ bzw. $\mathfrak{A}_2$ eine σ-Algebra in Ω_1 bzw. Ω_2 ist, gilt $\Omega_1 \in \mathfrak{A}_1$ bzw. $\Omega_2 \in \mathfrak{A}_2$. Somit ist

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$\Omega_1 \times \Omega_2 \in \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{8}$$

Sei nun

$$D \in \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{9}$$

Wegen (9) und (2) gilt dann

$$S_{D,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{10}$$

Wegen (8) und (2) gilt

$$S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{11}$$

Wegen (1) gelten nach Teil *(b)* von Lemma M.24.1.5 dann

$$\left(\Omega_1 \times \Omega_2\right) \setminus D \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{12}$$

und

$$S_{(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus D, \mu_2} = S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} - S_{D,\mu_2}. \tag{13}$$

Nach Definition von $\mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right)$ gilt

$$\mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right) = \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \operatorname{Abb}\left(\Omega_1, [0, +\infty]\right). \tag{14}$$

Aus (10), (11) und (14) folgt dann

$$\left\{S_{D,\mu_2}, S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2}\right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{15}$$

Wegen (15) und der Wohldefiniertheit von $S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} - S_{D,\mu_2}$ folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.18.6 dann

$$S_{\Omega_1 \times \Omega_2, \mu_2} - S_{D,\mu_2} \in \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right).$$

Hieraus folgt wegen (13) dann

$$S_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{16}$$

Nach Konstruktion gilt

$$S_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1, [0,+\infty]\right). \tag{17}$$

Aus (14), (16) und (17) folgt dann

$$S_{(\Omega_1\times\Omega_2)\setminus D,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{18}$$

Wegen (2), (1) und (18) gilt dann

$$(\Omega_1 \times \Omega_2) \setminus D \in \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{19}$$

Sei nun $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $D_n \in \mathfrak{D}_{\mu_2}$.

(II) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $D_k \cap D_l = \varnothing$.

Wegen *(I)* und (2) gelten für

$$n \in \mathbb{N} \tag{20}$$

dann

$$D_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{21}$$

und

$$S_{D_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{22}$$

Wegen (20), (21) und (22) liefert *(c)* von Lemma M.24.1.5 weiterhin

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{23}$$

und

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,\mu_2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{D_n,\mu_2}. \tag{24}$$

Wegen (20), (22) und (24) ergibt sich mittels Lemma M.19.5 dann

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{25}$$

Wegen (2), (23) und (25) gilt dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} D_n \in \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{26}$$

Wegen (8), (9), (19), *(I)*, *(II)* und (26) ist $\mathfrak{D}_{\mu_2}$ dann ein Dynkin-System in $\Omega_1 \times \Omega_2$. Kombiniert man dies mit (6), so ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.9.5 dann

$$\delta_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{27}$$

Da $\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2$ wegen Bemerkung M.24.1.5 ein durchschnittsstabiles System von Teilmengen von $\Omega_1 \times \Omega_2$ ist, folgt mittels Satz M.9.6 dann

$$\delta_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) = \sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right). \tag{28}$$

Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\sigma_{\Omega_1\times\Omega_2}\left(\mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2\right) = \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{29}$$

Unter Beachtung von (29), (28) und (27) folgt nun

$$\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \subseteq \mathfrak{D}_{\mu_2}. \tag{30}$$

Wegen (30) und (2) gilt für

$$Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{31}$$

dann

$$S_{Q,\mu_2}\mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{32}$$

Wegen (2), (31) und (32) ist für den Fall eines endlichen Maßes μ_2 dann alles gezeigt.
Wir betrachten nun den Fall, dass μ_2 lediglich σ-endlich ist. Unter Beachtung von $\Omega_2 \neq \varnothing$ erbringt Lemma M.24.1.2 dann die Existenz einer Folge $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathfrak{P}\left(\Omega_2\right)$ mir folgenden Eigenschaften:

(III) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $B_n \in \mathfrak{A}_2 \setminus \{\varnothing\}$.

(IV) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $B_n \subseteq B_{n+1}$.

(V) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $\mu_2\left(B_n\right) \in [0, +\infty)$.

(VI) Es ist $\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n = \Omega_2$.

Sei nun

$$n \in \mathbb{N}. \tag{33}$$

Es sei $\mu_{2,n}\colon \mathfrak{A}_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$A_2 \longmapsto \mu_2\left(A_2 \cap B_n\right). \tag{34}$$

Da μ_2 ein Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ist, folgt aus *(III)*, (33) und (34) mittels Teil *(a)* von Satz M.6.4, dass $\mu_{2,n}$ ein Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ist, für das wegen Teil *(b)* von Satz M.6.4 zudem $\mu_{2,n}\left(\Omega_2\right) = \mu_2\left(B_n\right)$ erfüllt ist. Hieraus folgt bei Beachtung von *(V)* dann

$$\mu_{2,n} \in \mathcal{M}_+^b\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2\right). \tag{35}$$

Sei

$$Q \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2. \tag{36}$$

Unter Beachtung von (35) und (36) folgt aus schon Bewiesenen (vgl. (1), (31) und (32)) dann

$$S_{Q,\mu_{2,n}} \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{37}$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{38}$$

Unter Beachtung von (38) und (34) folgt dann

$$S_{Q,\mu_{2,n}}\left(\omega_1\right) = \mu_{2,n}\left(Q_{\omega_1\bullet}\right) = \mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n\right). \tag{39}$$

Wegen (33) und *(IV)* gilt

$$Q_{\omega_1\bullet} \cap B_n \subseteq Q_{\omega_1\bullet} \cap B_{n+1}. \tag{40}$$

Unter Beachtung von *(VI)* folgt

$$\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(Q_{\omega_1\bullet}\cap B_n\right)=Q_{\omega_1\bullet}\cap\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}B_n\right)=Q_{\omega_1\bullet}\cap Q_2=Q_{\omega_1\bullet}. \tag{41}$$

Unter Beachtung von (40), der Unterhalbstetigkeit von μ_2 sowie (41) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet}\cap B_n\right)=\mu_2\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}Q_{\omega_1\bullet}\cap B_n\right)=\mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet}\right). \tag{42}$$

Unter Verwendung von (39) und (42) folgt nun

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}S_{Q,\mu_{2,n}}\left(\omega_1\right)=\sup_{n\in\mathbb{N}}\mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet}\cap B_n\right)=\mu_2\left(Q_{\omega_1\bullet}\right)=S_{Q,\mu_2}\left(\omega_1\right). \tag{43}$$

Wegen (38) und (43) ist dann

$$\sup_{n\in\mathbb{N}}S_{Q,\mu_{2,n}}=S_{Q,\mu_2}. \tag{44}$$

Wegen (33), (37) und (44) liefert Lemma M.19.4 dann

$$S_{Q,\mu_2}\in\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right). \tag{45}$$

Wegen (36) und (45) ist dann *(a)* bewiesen. Die Aussage *(b)* lässt sich analog zeigen. □

Wir sind nun in der Lage, im Falle zweier nichttrivialer Maßräume von denen *mindestens* einer σ-endlich ist, zwei auf der Grundlage des CAVALIERIschem Prinzips basierende Konstruktionen von Produktmaßen vorzunehmen:

Satz M.24.1.8. *Seien $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ und $(\Omega_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$ nicht triviale Maßräume. Dann gilt:*

(a) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor. Weiter sei $\Pi_{1\bullet}\colon\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\longrightarrow[0,+\infty]$ für $Q\in\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ unter Verwendung der in Teil* (a) *von Satz M.24.1.7 eingeführten Abbildung S_{Q,μ_2} definiert gemäß*

$$Q\longmapsto\int\limits_{\Omega_1}S_{Q,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1.$$

Dann ist $\Pi_{1\bullet}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2.

(b) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor. Weiter sei $\Pi_{\bullet 2}\colon\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2\longrightarrow[0,+\infty]$ für $Q\in\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ unter Verwendung der in Teil* (b) *von Satz M.24.1.7 eingeführten Abbildung T_{Q,μ_1} definiert gemäß*

$$Q\longmapsto\int\limits_{\Omega_2}T_{Q,\mu_1}\mathrm{d}\mu_2.$$

Dann ist $\Pi_{\bullet 2}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2.

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.24.1.7 gilt für $Q\in\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ dann $S_{Q,\mu_2}\in\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right)$. Somit ist $\Pi_{1\bullet}$ wohldefiniert. Wir werden zunächst zeigen, dass $\Pi_{1\bullet}$ ein Maß auf $(\Omega_1\times\Omega_2,\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)$ ist. Sei

$$\omega_1\in\Omega_1. \tag{1}$$

Dann ist $\varnothing_{\omega_1 \bullet} = \varnothing$, also

$$S_{\varnothing,\mu_2}(\omega_1) = \mu_2(\varnothing_{\omega_1 \bullet}) = \mu_2(\varnothing) = 0 = 1_{\varnothing}(\omega_1). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt

$$S_{\varnothing,\mu_2} = 1_{\varnothing}. \tag{3}$$

Wegen (3) und Beispiel M.22.1.1 folgt dann

$$\Pi_{1\bullet}(\varnothing) = \int\limits_{\Omega_1} S_{\varnothing,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} 1_{\varnothing} \mathrm{d}\mu_1 = 0. \tag{4}$$

Sei nun $(Q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{P}(\Omega_1 \times \Omega_2)$ mit:

(I) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$.

(II) Für alle $k, l \in \mathbb{N}$ mit $k \neq l$ gilt $Q_k \cap Q_l = \varnothing$.

Wegen *(I)* und *(II)* ergeben sich mittels Teil *(c)* von Lemma M.24.1.5 dann

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2 \tag{5}$$

und

$$S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2} = \sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2}. \tag{6}$$

Aus (6) und der Definition von $\Pi_{1\bullet}$ folgt

$$\Pi_{1\bullet}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) = \int\limits_{\Omega_1} S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1. \tag{7}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Wegen (8) und *(I)* folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.24.1.7 dann

$$S_{Q_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1). \tag{9}$$

Wegen *(I)* und der Definition von $\Pi_{1\bullet}$ gilt

$$\Pi_{1\bullet}(Q_n) = \int\limits_{\Omega_1} S_{Q_n,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1. \tag{10}$$

Wegen (8) und (9) gilt dann mittels Folgerung M.22.2.4 dann

$$\sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{11}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2}\right] \mathrm{d}\mu_1 = \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{\Omega_1} S_{Q_n,\mu_2} \mathrm{d}\mu_2. \tag{12}$$

Unter Verwendung von (7), (6), (11), (8) und (10) folgt dann

$$\begin{aligned}\Pi_{1\bullet}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n\right) &= \int\limits_{\Omega_1} S_{\bigcup_{n=1}^{\infty} Q_n,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{n=1}^{\infty} S_{Q_n,\mu_2}\right]\mathrm{d}\mu_1 \\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\left[\int\limits_{\Omega_1} S_{Q_n,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1\right] = \sum_{n=1}^{\infty}\Pi_{1\bullet}\left(Q_n\right).\end{aligned} \tag{13}$$

Wegen (4), *(I)*, *(II)* und (12) gilt dann

$$\Pi_{1\bullet} \in \mathcal{M}_+\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2\right). \tag{14}$$

Wir zeigen nun, dass $\Pi_{1\bullet}$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2 ist.
Sei

$$A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \boxtimes \mathfrak{A}_2. \tag{15}$$

Wegen (14) folgen mittels Lemma M.24.1.6 dann $A_1 \times A_2 \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ sowie

$$\Pi_{1\bullet}\left(A_1 \times A_2\right) = \int\limits_{\Omega_1} S_{A_1\times A_2,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1\left(A_1\right)\mu_2\left(A_2\right). \tag{16}$$

Wegen (13) bis (16) ist $\Pi_{1\bullet}$ dann ein Produktmaß von μ_1 und μ_2.

Zu *(b)*: Dies lässt sich analog zeigen. □

Satz M.24.1.8 führt uns auf die folgenden Begriffsbildungen.

Definition M.24.1.4. Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ jeweils nicht triviale Maßräume.

(a) Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor. Dann heißt das in Teil *(a)* von Satz M.24.1.8 konstruierte Produktmaß $\Pi_{1\bullet}$ von μ_1 und μ_2 das *erste* Cavalier*sche Produktmaß von μ_1 und μ_2.*

(b) Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor. Dann heißt das in Teil *(b)* von Satz M.24.1.8 konstruierte Produktmaß $\Pi_{\bullet 2}$ von μ_1 und μ_2 das *zweite* Cavalier*sche Produktmaß von μ_1 und μ_2.*

Satz M.24.1.9. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ jeweils nicht triviale Maßräume. Es bezeichne $\mu_1 \otimes \mu_2$ das* Carathéodory*sche Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ das einzige Produktmaß von μ_1 und μ_2.*

(b) *Es bezeichne $\Pi_{1\bullet}$ bzw. $\Pi_{\bullet 2}$ das erste bzw. zweite* Cavalier*sche Produktmaß von μ_1 und μ_2. Dann gelten $\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{1\bullet}$ und $\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{\bullet 2}$.*

(c) *Das Maß $\mu_1 \otimes \mu_2$ ist σ-endlich.*

Beweis.

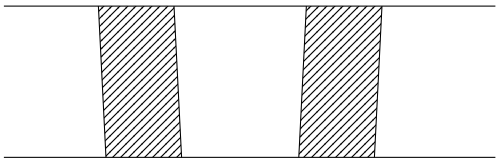
Zu *(a)*: Wegen Definition M.24.1.3 und Satz M.24.1.6 ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ ein Produktmaß von μ_1 und μ_2. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_1 und μ_2 ist $\mu_1 \otimes \mu_2$ wegen Satz M.24.1.2 das einzige Produktmaß von μ_1 und μ_2.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich durch Kombination von *(a)* mit Satz M.24.1.8.

Zu *(c)*: Dies folgt aus Satz M.24.1.3. □

Wir wenden uns nun dem CAVALIERIschem Prinzip zur Bestimmung des Volumens von Körpern zu. Dieses wurde 1629 von BONAVENTURA CAVALIERI formuliert.

Cavalierisches Prinzip. *Zwei Körper, die zwischen zwei parallelen Ebenen liegen, haben gleiches Volumen, wenn sie in gleichen Abständen von einer dieser Ebenen flächengleiche Querschnitte haben.*



Wir präsentieren nun eine abstrakte Version des CAVALIERIschen Prinzips:

Satz M.24.1.10. *Seien* $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ *nicht triviale* σ*-endliche Maßräume und bezeichne* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *das* CARATHÉODORY*sche Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2*. Weiter seien* $Q, R \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$ *so beschaffen, dass mit den Bezeichnungen von Lemma M.24.1.5 eine der Beziehungen*

(I) $\{S_{Q,\mu_2} \neq S_{R,\mu_2}\} \in \mathcal{N}_{\mu_1}$

(II) $\{T_{Q,\mu_1} \neq T_{R,\mu_1}\} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$

besteht. Dann gilt

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (Q) = \mu_1 \otimes \mu_2 (R)$$

BEWEIS. Wegen Teil *(a)* bzw. *(b)* von Satz M.24.1.7 gilt

$$\{S_{Q,\mu_2}, S_{R,\mu_2}\} \subseteq \mathcal{E}^* (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{1}$$

bzw.

$$\{T_{Q,\mu_1}, T_{R,\mu_1}\} \subseteq \mathcal{E}^* (\Omega_2, \mathfrak{A}_2) . \tag{2}$$

Es bezeichne $\Pi_{1\bullet}$ bzw. $\Pi_{\bullet 2}$ das erste bzw. zweite CAVALIERIsche Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von Teil *(b)* von Satz M.24.1.9 sowie der Definition von $\Pi_{1\bullet}$ bzw. $\Pi_{\bullet 2}$ folgt dann

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (Q) = \Pi_{1\bullet} (Q) = \int\limits_{\Omega_1} S_{Q,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 \tag{3}$$

und

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (R) = \Pi_{1\bullet} (R) = \int\limits_{\Omega_1} S_{R,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 \tag{4}$$

bzw.

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (Q) = \Pi_{\bullet 2} (Q) = \int\limits_{\Omega_2} T_{Q,\mu_1} \mathrm{d}\mu_2 \tag{5}$$

und

$$\mu_1 \otimes \mu_2 (R) = \Pi_{\bullet 2} (R) = \int\limits_{\Omega_2} T_{R,\mu_1} \mathrm{d}\mu_2. \tag{6}$$

Falls $\{S_{Q,\mu_2} \neq S_{R,\mu_2}\} \in \mathcal{N}_{\mu_1}$ bzw. $\{T_{Q,\mu_1} \neq T_{R,\mu_1}\} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$ erfüllt ist, so folgt wegen (1) bzw. (2) mittels M.22.5.3 dann

$$\int\limits_{\Omega_1} S_{Q,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} S_{R,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1$$

bzw.

$$\int\limits_{\Omega_2} T_{Q,\mu_1}\mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\Omega_2} T_{R,\mu_1}\mathrm{d}\mu_2.$$

Also wegen (3) und (4) bzw. (5) und (6) dann

$$\mu_1 \otimes \mu_2\,(Q) = \mu_1 \otimes \mu_2\,(R)\,. \qquad \square$$

Unsere nachfolgenden Überlegungen sind nun auf die Konstruktion eines Produktmaßes einer beliebigen endlichen Folge von Maßen gerichtet.

Bemerkung M.24.1.6. Seien $n_1 n_2 \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n_1+n_2}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann ist die Abbildung

$$R_{n_1,n_2}\colon \left(\bigtimes_{j=1}^{n_1}\Omega_j\right)\times\left(\bigtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j\right)\longrightarrow \bigtimes_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j,$$

welche gemäß

$$((\omega_1,\ldots,\omega_{n_1})\,,(\omega_{n_1+1},\ldots,\omega_{n_1+n_2}))\longmapsto(\omega_1,\ldots,\omega_{n_1},\omega_{n_1+1},\ldots,\omega_{n_1+n_2})$$

definiert ist, eine Bijektion zwischen

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n_1}\Omega_j\right)\times\left(\bigtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j\right)\quad\text{und}\quad\bigtimes_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j. \qquad \clubsuit$$

Vereinbarung.

1) Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n_1+n_2}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Dann vereinbaren wir künftig via der Bijektion R_{n_1,n_2} eine Identifizierung von

$$\left(\bigtimes_{j=1}^{n_1}\Omega_j\right)\times\left(\bigtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j\right)$$

und

$$\bigtimes_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j$$

vorzunehmen.

2) Sei $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Dann setzen wir

$$\bigboxtimes_{j=1}^{1}\mathfrak{A}_j := \mathfrak{A}_1$$

und

$$\bigotimes_{j=1}^{1}\mathfrak{A}_j := \mathfrak{A}_1.$$

Bemerkung M.24.1.7. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Dann ist $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ und, falls für $k \in \mathbb{N}$ die Setzung $E_k := \times_{j=1}^{n} \Omega_j$ vorgenommen wird, so ist $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine isotone Folge aus $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$, für welche $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k = \times_{j=1}^{n} \Omega_j$ erfüllt ist. ♣

Beweis. Im Falle $n = 1$ folgt die Behauptung sogleich aus Teil *(b)* von Satz M.4.1 und Teil *(d)* von Satz M.4.6. Im Falle $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ ist $\boxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ wegen Folgerung M.17.1 ein Erzeuger von $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$, welcher wegen Bemerkung M.24.1.5 zudem durchschnittsstabil ist. Die Behauptung über $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sind offensichtlich. □

Das nächste Resultat zeigt, dass die Bildung der Produkt-σ-Algebra in natürlicher Weise in die eben getroffenen Vereinbarungen angepasst ist:

Lemma M.24.1.7. *Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n_1+n_2}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Dann gilt*

$$\left[\bigotimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right] = \bigotimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j.$$

Beweis. Wegen Bemerkung M.24.1.7 gelten

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n_1} \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j \tag{1}$$

sowie

$$\sigma_{\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j \tag{2}$$

bzw.

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n_1+n_2} \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j. \tag{3}$$

Wegen Bemerkung M.24.1.7 und Satz M.17.2 gilt zudem

$$\begin{aligned} &\sigma_{\times_{j=1}^{n_1} \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j\right) \otimes \sigma_{\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \Omega_j}\left(\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right) \\ =&\sigma_{\left[\times_{j=1}^{n_1} \Omega_j\right]\times\left[\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \Omega_j\right]}\left(\left[\boxtimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \left[\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right]\right). \end{aligned} \tag{4}$$

Aufgrund unserer Vereinbarungen ist nun

$$\left[\bigtimes_{j=1}^{n_1} \Omega_j\right] \times \left[\bigtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \Omega_j\right] = \bigtimes_{j=1}^{n_1+n_2} \Omega_j \tag{5}$$

sowie

$$\left[\boxtimes_{j=1}^{n_1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \left[\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j\right] = \boxtimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mathfrak{A}_j. \tag{6}$$

Unter Verwendung von (1), (2), (4), (5), (6) und (3) folgt dann

$$\begin{aligned}\left[\bigotimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j\right]\otimes\left[\bigotimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j\right] &= \sigma_{\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j\right)\otimes\sigma_{\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j\right)\\ &= \sigma_{\left[\times_{j=1}^{n_1}\Omega_j\right]\times\left[\times_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\Omega_j\right]}\left(\left[\boxtimes_{j=1}^{n_1}\mathfrak{A}_j\right]\boxtimes\left[\boxtimes_{j=n_1+1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j\right]\right)\\ &= \sigma_{\times_{j=1}^{n_1+n_2}\Omega_j}\left(\boxtimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j\right)=\bigotimes_{j=1}^{n_1+n_2}\mathfrak{A}_j.\end{aligned}$$

□

Bemerkung M.24.1.8. Seien $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$nicht triviale messbare Räume. Dann gilt

$$(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)\otimes\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3)\,.$$ ♣

Beweis. Wegen Lemma M.24.1.7 gelten

$$(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)\otimes\mathfrak{A}_3=\bigotimes_{j=1}^{3}\mathfrak{A}_j$$

sowie

$$\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3)=\bigotimes_{j=1}^{3}\mathfrak{A}_j.$$

Somit ist

$$(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)\otimes\mathfrak{A}_3=\mathfrak{A}_1\otimes(\mathfrak{A}_2\otimes\mathfrak{A}_3)\,.$$ □

Beispiel M.24.1.1. Seien $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren *höchstens abzählbaren* Mengen. Dann gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{P}(\Omega_j)=\mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j\right)$$

Beweis. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n. Für $n=2$ folgt die Behauptung aus Beispiel M.17.1. Der Induktionsschritt kann mit Standardargumenten vollzogen werden. □

Satz M.24.1.11. *Seien $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Dann gilt:*

(a) *Sei $\widetilde{\Pi}_n\colon\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\longrightarrow[0,+\infty]$ definiert gemäß*

$$\bigtimes_{j=1}^{n}A_j\longmapsto\prod_{j=1}^{n}\mu_j(A_j)\,.$$

Dann ist $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n}\Omega_j$ und $\widetilde{\Pi}_n$ ein Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$.

(b) *Unter Beachtung von* (a) *bezeichne $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j$ die* Carathéodory*-Fortsetzung von $\widetilde{\Pi}_n$. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j$ ein Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wir führen den Beweis mittels vollständiger Induktion über n. Für $n = 2$ folgt die Behauptung von *(a)* aus Teil *(a)* von Satz M.24.1.6. Sei nun $n \in \mathbb{N}\backslash\{1,2\}$ und sei die Behauptung für $k \in \mathbb{N}_{2,n-1}$ bereits gezeigt. Dann ist also $\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j$ und $\widetilde{\Pi}_{n-1}$ ein Prämaß auf $\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$. Es bezeichne Π_{n-1} die Carathéodory-Fortsetzung von $\widetilde{\Pi}_{n-1}$. Da wegen Folgerung M.17.1 nun

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j} \left(\bigboxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j \right) = \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$$

erfüllt ist, gelten dann also

$$\Pi_{n-1} \in \mathcal{M}_+ \left(\bigtimes_{j=1}^{n-1} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j \right) \tag{1}$$

und

$$\Pi_{n-1} \restriction \bigboxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j = \widetilde{\Pi}_{n-1}. \tag{2}$$

Sei $\eta\colon \left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$E \times A_n \longmapsto \Pi_{n-1}(E) \cdot \mu_n(A). \tag{3}$$

Wegen (1), der Wahl von μ_n und (3) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.24.1.6 dann, dass $\left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ein Halbring in $\left[\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j\right] \times \Omega_n$ und η_n ein Prämaß auf $\left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ist. Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\left[\bigboxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j \right] \boxtimes \mathfrak{A}_n \subseteq \left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j \right] \boxtimes \mathfrak{A}_n. \tag{4}$$

Da $\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j$ nach Bemerkung M.24.1.3 ein Halbring in $\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j$ und $\mathfrak{A}_n$ nach Bemerkung M.24.1.2 ein Halbring in Ω_n ist, folgt mittels Satz M.1.4 dann, dass $\left[\boxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ein Halbring in $\left[\times_{j=1}^{n-1} \Omega_j\right] \times \Omega_n$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung von (4) und der Tatsache, dass η_n ein Prämaß auf dem Halbring $\left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ist, dass $\eta_n \restriction \left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ein Prämaß auf $\left[\bigotimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j\right] \boxtimes \mathfrak{A}_n$ ist.
Sei

$$\left[\bigtimes_{j=1}^{n-1} A_j \right] \times A_n \in \left[\bigboxtimes_{j=1}^{n-1} \mathfrak{A}_j \right] \boxtimes \mathfrak{A}_n. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3), (2) und den Definitionen von $\widetilde{\Pi}_{n-1}$ und $\widetilde{\Pi}_n$ folgt dann

$$\begin{aligned} \eta_n \left(\left[\bigtimes_{j=1}^{n-1} A_j \right] \times A_n \right) &= \Pi_{n-1} \left(\bigtimes_{j=1}^{n-1} A_j \right) \cdot \mu_n(A_n) = \widetilde{\Pi}_{n-1} \left(\bigtimes_{j=1}^{n-1} A_j \right) \cdot \mu_n(A_n) \\ &= \left[\prod_{j=1}^{n-1} \mu_j(A_j) \right] \cdot \mu_n(A_n) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(A_j) = \widetilde{\Pi}_n \left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j \right). \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen (5), (6) sowie unserer Vereinbarungen

$$\left[\bigboxtimes_{j=1}^{n-1}\mathfrak{A}_j\right]\boxtimes\mathfrak{A}_n=\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$$

gilt dann

$$\eta_n\restriction\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j=\widetilde{\Pi}_n.$$

Hieraus sowie aus den über η_n Gezeigten folgt dann, dass $\widetilde{\Pi}_n$ ein Prämaß auf $\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ ist.

Zu *(b)*: Dies zeigt man analog zum Beweis von Teil *(b)* von Satz M.24.1.6. □

Satz M.24.1.11 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.24.1.5. Seien $n\in\mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j$ das in Teil *(b)* eingeführte Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann heißt $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j$ das CARATHÉODORY*sche Produktmaß der Folge* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.

Das nachfolgende Resultat beschreibt die Ausnahmestellung des CARATHÉODRYschen Produktmaßes in der Menge aller Produktmaße.

Satz M.24.1.12. *Seien $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j$ das* CARATHÉODRY*sche Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Weiterhin sei Π ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt*

$$\Pi\leq\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j.$$

BEWEIS. Wegen Folgerung M.17.1 gilt

$$\sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left(\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)=\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Sei $\widetilde{\Pi}_n\colon\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\longrightarrow[0,+\infty]$ definiert gemäß

$$\bigtimes_{j=1}^{n}A_j\longmapsto\prod_{j=1}^{n}\mu_j\left(A_j\right). \tag{2}$$

Wegen (2) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.24.1.11 dann:

(I) Es ist $\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$ ein Halbring in $\times_{j=1}^{n}\Omega_j$ und $\widetilde{\Pi}_n$ ein Prämaß auf $\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j$.

Aufgrund der Wahl von Π gelten

$$\Pi\in\mathcal{M}_+\left(\bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j,\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right) \tag{3}$$

sowie

$$\Pi\restriction\bigboxtimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j=\widetilde{\Pi}_n. \tag{4}$$

Da $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ die Carathéodory-Fortsetzung von $\widetilde{\Pi}_n$ ist, folgt bei Beachtung von (1) bis (4) mittels Satz M.13.6 dann

$$\Pi \leq \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_1.$$

□

Satz M.24.1.13. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge nichttrivialer σ-endlicher Maßräumen. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$ das* Carathéodory*sche Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt genau ein Produktmaß Π von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, nämlich*

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j.$$

(b) *Das Maß $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ ist σ-endlich.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Satz M.24.1.11 und Satz M.24.1.2.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Satz M.24.1.3. □

Satz M.24.1.14. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ein Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen. Es bezeichne ferner $\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$ das* Carathéodory*sche Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:*

(a) *Es gibt* genau *ein Produktmaß Π von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$, nämlich*

$$\Pi = \bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j.$$

(b) *Es ist*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j \in \mathcal{M}_+^b \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \right).$$

(c) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt*

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j \in \mathcal{M}_+^1 \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \right).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies ergibt sich aus Teil *(b)* von Satz M.24.1.11 und Folgerung M.24.1.1.

Zu *(b)*-*(c)*: Die Behauptung von *(b)* bzw. *(c)* folgt wegen Teil *(a)* sogleich aus Teil *(c)* bzw. *(d)* von Bemerkung M.24.1.1. □

Die Sätze M.24.1.13 und M.24.1.14 führen uns auf folgende Begriffsbildungen.

Definition M.24.1.6. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es liege einer der folgenden Situationen vor:

(I) Es ist $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen.

(II) Es ist $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen.

Dann wird das CARATHÉODORYsche Produktmaß $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ auch kurz als *Produktmaß von* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezeichnet. Der Maßraum

$$\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j, \bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)$$

heißt das *Produkt der Folge* $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.

Bezeichnung. Wir bezeichnen das Produkt der Folge $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ auch mit

$$\bigotimes_{j=1}^n (\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)\,.$$

Wir nehmen nun eine Spezifizierung von Satz M.24.1.4 vor.

Satz M.24.1.15. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $\left(\left(\Omega'_j, \mathfrak{A}'_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen endlichen Maßräumen bzw. nicht triviale messbare Räume. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $T_j \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_j, \Omega'_j\right)$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'_j$-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$. Dann gilt $T_k(\mu_k) \in \mathcal{M}_+^b(\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k)$.*

(b) *Sei $T\colon \bigtimes_{j=1}^n \Omega_j \longrightarrow \bigtimes_{j=1}^n \Omega'_j$ definiert gemäß*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto (T_1(\omega_1), \ldots, T_n(\omega_n))\,.$$

Dann ist T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung und es gilt

$$T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n T_j(\mu_j)\,.$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen $\mu_k \in \mathcal{M}_+^b(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$ liefert Satz M.16.10 dann $T_k(\mu_k) \in \mathcal{M}_+^b(\Omega'_k, \mathfrak{A}'_k)$.

Zu *(b)*: Da $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ ein Produktmaß von $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist, folgt mittels Satz M.24.1.4 dann, dass T eine $\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}'_j\right)$-messbare Abbildung und $T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)$ ein Produktmaß der Folge $(T_j(\mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist. Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass wegen *(a)* nach Teil *(a)* von Satz M.24.1.14 nun $\bigotimes_{j=1}^n T_j(\mu_j)$ das einzige Produktmaß der Folge $(T_j(\mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist, so folgt dann

$$T\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right) = \bigotimes_{j=1}^n T(\mu_j)\,.$$

□

Satz M.24.1.16. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m \coloneqq \sum_{j=1}^{n} m_j$. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}$ das* Carathédory*sche Produktmaß der Folge $\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}$ das* einzige *Produktmaß der Folge $\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ und es gilt $\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)} = \lambda^{(m)}$.*

Beweis. Es ist $\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von σ-endlichen Maßen. Somit ist $\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}$ nach Teil *(a)* von Satz M.24.1.13 dann das einzige Produktmaß der Folge $\left(\lambda^{(m_j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Nach Konstruktion gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)} \in \mathcal{M}_+\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \mathbb{R}^{m_j}, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{m_j}\right). \tag{1}$$

Nach Vereinbarung gilt

$$\mathbb{R}^m = \bigtimes_{j=1}^{n} \mathbb{R}^{m_j}. \tag{2}$$

Wegen Satz M.17.5 ist

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathfrak{B}_{m_j}. \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) und (3) gilt

$$\lambda^{(m)} \in \mathcal{M}_+\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \mathbb{R}^{m_j}, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{m_j}\right). \tag{4}$$

Wegen Satz M.14.1 und Bemerkung M.14.1 gilt:

(I) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ ist $I_{m_j,l}$ ein durchschnittsstabiler Erzeuger von $\mathfrak{B}_{m_j}$, welcher eine isotone Folge $(E_{j,k})_{k\in\mathbb{N}}$ mit $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_{j,k} = \mathbb{R}^{m_j}$ enthält.

Aus der Definition des Lebesgue-Borel-Maßes folgt:

(II) Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $k \in \mathbb{N}$ gilt $\lambda^{(m_j)}(E_{j,k}) \in [0, +\infty)$.

Sei

$$\bigtimes_{j=1}^{n} A_j \in \bigboxtimes_{j=1}^{n} I_{m_j,l}. \tag{5}$$

Aus Definition M.24.1.1 und der Definition des Lebesgue-Borel-Maßes folgt dann

$$\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}\right)\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}(A_j) = \lambda^{(m)}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right). \tag{6}$$

Wegen *(I)*, *(II)*, (1), (4), (5) und (6) liefert Satz M.24.1.1 dann

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)} = \lambda^{(m)}.$$

□

Folgerung M.24.1.2. *Sei $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Dann gilt*

$$\lambda^{(m)} = \bigotimes_{j=1}^{m} \lambda^{(1)}.$$

Beispiel M.24.1.2. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\omega_j \in \Omega_j$. Dann gilt

$$\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j} = \bigotimes_{j=1}^n \varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}_j}.$$

Beweis. Sei

$$\bigtimes_{j=1}^n A_j \in \boxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j. \tag{1}$$

Aus der Definition der beteiligten Maße folgt dann

$$\begin{aligned}\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j}\left(\bigtimes_{j=1}^n A_j\right) &= \begin{cases}1, & \text{falls } (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \times_{j=1}^n A_j\\ 0, & \text{falls } (\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \left[\times_{j=1}^n \Omega_j\right]\setminus\left[\times_{j=1}^n A_j\right]\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{falls für alle } j\in\mathbb{N}_{1,n}:\ \omega_j\in A_j\\ 0, & \text{falls nicht für alle } j\in\mathbb{N}_{1,n}:\ \omega_j\in A_j\end{cases}\\ &= \prod_{j=1}^n \varepsilon_{\omega_k,\mathfrak{A}_j}(A_j).\end{aligned} \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann, dass $\varepsilon_{(\omega_1,\ldots,\omega_n),\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j}$ ein Produktmaß der Folge $\left(\varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ ist. Hieraus folgt bei Beachtung der Tatsache, dass $\left(\varepsilon_{\omega_j,\mathfrak{A}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von endlichen Maßen ist, mittels Teil *(a)* von Satz M.24.1.14 die Behauptung. □

Beispiel M.24.1.3. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge natürlicher Zahlen und $m := \sum_{j=1}^n m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$. Weiter sei $\mathbf{x} := \begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \vdots\\ \mathbf{x}_n\end{pmatrix}$. Dann gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m} = \bigotimes_{j=1}^m \varepsilon_{\mathbf{x}_j,\mathfrak{B}_{m_j}}.$$

Beweis. Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{B}_{m_j}. \tag{1}$$

Wegen (1) ist die Behauptung eine unmittelbare Konsequenz aus Beispiel M.24.1.2 und aus den Vorbereitungen. □

Beispiel M.24.1.4. Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei Ω_j eine nichtleere, höchstens abzählbare Menge und es bezeichne ν_j das Zählmaß auf $(\Omega_j, \mathfrak{P}(\Omega_j))$. Weiterhin bezeichne ν das Zählmaß auf $\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\times_{j=1}^n \Omega_j\right)\right)$. Dann ist $(\Omega_j, \mathfrak{P}(\Omega_j), \nu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von σ-endlichen Maßräumen und es gelten die Beziehungen

$$\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j\right)$$

und

$$\bigotimes_{j=1}^n \nu_j = \nu.$$

Beispiel M.24.1.5. Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei Ω_j eine nichtleere, endliche Menge und es bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf $(\Omega_j, \mathfrak{P}(\Omega_j))$. Weiterhin bezeichne P die diskrete Gleichverteilung auf $\left(\times_{j=1}^{n} \Omega_j, \mathfrak{P}\left(\times_{j=1}^{n} \Omega_j\right)\right)$. Dann gelten

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{P}(\Omega_j) = \mathfrak{P}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j\right)$$

und

$$\bigotimes_{j=1}^{n} P_j = P.$$

Beispiel M.24.1.6. Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und seien die $\mathbb{R}^m$-Vektoren $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T$ und $\mathbf{b} = (b_1, \ldots, b_m)^T$ so gewählt, dass $a < b$ erfüllt ist. Sei $\Delta := [a, b]$ und für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ ferner $\Delta_j := [a_j, b_j]$. Dann gilt:

(a) Es ist $\Delta \in \mathfrak{B}_m$ sowie

$$\lambda^{(m)}(\Delta) = \prod_{j=1}^{n} (b_j - a_j) \in (0, +\infty).$$

(b) Sei $k \in \mathbb{N}_{1,m}$. Dann gelten $\Delta_k \in \mathfrak{B}_1$ sowie

$$\lambda^{(1)}(\Delta_k) = b_k - a_k \in (0, +\infty).$$

(c) Unter Beachtung von *(a)* bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Unter Beachtung von *(b)* bezeichne für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ weiterhin μ_{Δ_j} die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ_j. Dann ist $\left(\mu_{\Delta_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und es gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_{\Delta_j} = \mu_\Delta.$$

Es folgen nun eine Beobachtungen zur Arithmetik der Bildung des Carathéodoryschen Produktmaßes.

Vereinbarung. Sei $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ ein nichttrivialer Maßraum. Dann setzen wir

$$\bigotimes_{j=1}^{1} \mu_j := \mu_1.$$

Satz M.24.1.17. *Seien $n_1, n_2 \in \mathbb{N}$ sowie $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n_1+n_2}}$ eine Folge von nichttrivialen, σ-endlichen Maßräumen. Dann gilt*

$$\bigotimes_{j=1}^{n_1+n_2} \mu_j = \left[\bigotimes_{j=1}^{n_1} \mu_j\right] \otimes \left[\bigotimes_{j=n_1+1}^{n_2} \mu_j\right].$$

Folgerung M.24.1.3. *Sei $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$ eine Folge von nichttrivialen, σ-endlichen Maßräumen. Dann gilt*

$$(\mu_1 \otimes \mu_2) \otimes \mu_3 = \mu_1 \otimes (\mu_2 \otimes \mu_3).$$

Satz M.24.1.18. *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Ferner sei*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & n \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_n \end{pmatrix}$$

eine Permutation von $\mathbb{N}_{1,n}$. Weiter sei $\pi_{i_1,\ldots,i_n}\colon \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j \longrightarrow \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_{i_j}$ definiert gemäß

$$(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_n}).$$

Dann ist $\pi_{i_1,\ldots,i_n}$ eine $\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$-$\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_{i_j}\right)$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{i_1,\ldots,i_n}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \bigotimes_{j=1}^{n}\mu_{i_j}.$$

Satz M.24.1.19. *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Weiter seien $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $i_1,\ldots,i_m$ paarweise verschiedene Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$. Es sei $\pi_{i_1,\ldots,i_m}\colon \bigtimes_{j=1}^{n}\Omega_j \longrightarrow \bigtimes_{k=1}^{m}\Omega_{i_k}$ definiert gemäß*

$$(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_m}).$$

Dann ist $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ eine $\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$-$(\bigotimes_{k=1}^{m}\Omega_{i_k})$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \bigotimes_{k=1}^{m}\mu_{i_k}.$$

M.24.2. Der Satz von Tonelli

Gegenstand des vorliegenden Abschnitts ist die Integration von nichtnegativen Funktionen bezüglich eines Cavalierischen Produktmaßes. Unsere nachfolgenden Überlegungen sind auf die Herleitung des zentralen Resultats dieses Abschnitts ausgerichtet. Hierbei handelt es sich um den Satz von Tonelli, welcher die Integration nichtnegativer Funktionen bezüglich eines (Cavalierischen) Produktmaßes auf eine endliche Folge iterierter Integrationen bezüglich der Faktoren des Produktmaßes zurückführt. Wir beginnen nun mit den entsprechenden Detailbetrachtungen.

Definition M.24.2.1. Seien Ω_1, Ω_2 und Ω' nichtleere Mengen sowie $f \in \operatorname{Abb}(\Omega_1\times\Omega_2, \Omega')$. Weiterhin sei $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. Es sei $f_{\omega_1\bullet}\colon \Omega_2 \longrightarrow \Omega'$ bzw. $f_{\bullet\omega_2}\colon \Omega_1 \longrightarrow \Omega'$ definiert gemäß

$$\widetilde{\omega}_2 \longmapsto f((\omega_1,\widetilde{\omega}_2)) \qquad \text{bzw.} \qquad \widetilde{\omega}_1 \longmapsto f((\widetilde{\omega}_1,\omega_2)).$$

Dann heißt $f_{\omega_1\bullet}$ bzw. $f_{\bullet\omega_2}$ der *$\omega_1\bullet$-Schnitt* bzw. *$\bullet\omega_2$-Schnitt von f*.

Wir betrachten nun die in Definition M.24.2.1 eingeführte Bildung für den Spezialfall von Indikatorfunktionen.

Bemerkung M.24.2.1. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen sowie $Q \in \mathfrak{P}(\Omega_1\times\Omega_2)$. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt

$$(1_Q)_{\omega_1\bullet} = 1_{Q_{\omega_1\bullet}} \qquad \text{bzw.} \qquad (1_Q)_{\bullet\omega_2} = 1_{Q_{\bullet\omega_2}}. \qquad \clubsuit$$

BEWEIS. Sei

$$\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}(1_Q)_{\omega_1\bullet}(\widetilde{\omega}_2) = 1_Q((\omega_1,\widetilde{\omega}_2)) &= \begin{cases}1, & \text{falls } (\omega_1,\widetilde{\omega}_2) \in Q\\ 0, & \text{falls } (\omega_1,\widetilde{\omega}_2) \in (\Omega_1\times\Omega_2)\setminus Q\end{cases}\\ &= \begin{cases}1, & \text{falls } \widetilde{\omega}_2 \in Q_{\omega_1\bullet}\\ 0, & \text{falls } \widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2\setminus Q_{\omega_1\bullet}\end{cases} \qquad (2)\\ &= 1_{Q_{\omega_1\bullet}}(\widetilde{\omega}_2).\end{aligned}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$(1_Q)_{\omega_1\bullet} = 1_{Q_{\omega_1\bullet}}.$$

Der andere Fall lässt sich analog zeigen. □

Wir weisen nun die nötigen Messbarkeitsaussagen der in Definition M.24.2.1 eingeführten Schnittabbildungen nach. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.24.2.2. Seien Ω_1, Ω_2 und Ω' nichtleere Mengen, $f \in \operatorname{Abb}(\Omega_1\times\Omega_2,\Omega')$ und $A' \in \mathfrak{P}(\Omega')$. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt

$$(f_{\omega_1\bullet})^{-1}(A') = \left(f^{-1}(A')\right)_{\omega_1\bullet}$$

bzw.

$$(f_{\bullet\omega_2})^{-1}(A') = \left(f^{-1}(A')\right)_{\bullet\omega_2}. \qquad \clubsuit$$

BEWEIS. Es ist

$$\begin{aligned}(f_{\omega_1\bullet})^{-1}(A') &= \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \mid f_{\omega_1\bullet}(\widetilde{\omega}_2) \in A'\} = \{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \mid f(\omega_1,\widetilde{\omega}_2) \in A'\}\\ &= \left\{\widetilde{\omega}_2 \in \Omega_2 \,\middle|\, (\omega_1,\widetilde{\omega}_2) \in f^{-1}(A')\right\}\\ &= \left(f^{-1}(A')\right)_{\omega_1\bullet}.\end{aligned}$$

Die andere Aussage folgt analog. □

Lemma M.24.2.1. *Seien $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1)$, $(\Omega_2,\mathfrak{A}_2)$ und $(\Omega',\mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie $f\colon \Omega_1\times\Omega_2 \longrightarrow \Omega'$ eine $(\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Weiterhin sei $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann ist $f_{\omega_1\bullet}$ bzw. $f_{\bullet\omega_2}$ eine $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}'$- bzw. $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung.*

BEWEIS. Sei

$$A' \in \mathfrak{A}'. \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl von f folgt dann

$$f^{-1}(A') \in \mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Teil *(b)* von Lemma M.24.1.4 dann

$$\left(f^{-1}(A')\right)_{\omega_1\bullet} \in \mathfrak{A}_2 \tag{3}$$

und

$$\left(f^{-1}(A')\right)_{\bullet\omega_2} \in \mathfrak{A}_1. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.24.2.2 gelten

$$(f_{\omega_1\bullet})^{-1}(A') = \left(f^{-1}(A')\right)_{\omega_1\bullet} \tag{5}$$

und

$$(f_{\bullet\omega_2})^{-1}(A') = \left(f^{-1}(A')\right)_{\bullet\omega_2}. \tag{6}$$

Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) folgt dann

$$(f_{\omega_1\bullet})^{-1}(A') \in \mathfrak{A}_2 \tag{7}$$

bzw.

$$(f_{\bullet\omega_2})^{-1}(A') \in \mathfrak{A}_1. \tag{8}$$

Aus (1) sowie (7) bzw. (8) folgt dann die $\mathfrak{A}_2$-$\mathfrak{A}'$- bzw. $\mathfrak{A}_1$-$\mathfrak{A}$-Messbarkeit von $f_{\omega_1\bullet}$ bzw. $f_{\bullet\omega_2}$. □

Lemma M.24.2.2. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ jeweils nicht triviale messbare Räume sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Weiter sei $\omega_1 \in \Omega_1$ bzw. $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt $f_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ bzw. $f_{\bullet\omega_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$.*

Beweis. Nach Wahl von f gelten

$$f \in \mathcal{M}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{1}$$

und

$$f \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, [0, +\infty]\right). \tag{2}$$

Wegen (1) folgen aus Lemma M.24.2.1 dann

$$f_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{M}\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{3}$$

und

$$f_{\bullet\omega_2} \in \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{4}$$

Wegen (2) gelten

$$f_{\omega_1\bullet} \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_2, [0, +\infty]\right) \tag{5}$$

und

$$f_{\bullet\omega_2} \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_1, [0, +\infty]\right). \tag{6}$$

Aus (3) und (5) bzw. (4) und (6) folgt dann

$$f_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2) \quad \text{bzw.} \quad f_{\bullet\omega_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1). \qquad \square$$

Der nachfolgende Satz, welcher in einem generischen Spezialfall auf den italienischen Mathematiker Leonida Tonelli zurückgeht, ist von entscheidender Bedeutung für weite Teile von Analysis und Stochastik.

Satz M.24.2.1 (Satz von Tonelli)**.** *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttriviale Maßräume sowie $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$. Dann gilt:*

(a) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor und es bezeichne $\Pi_{1\bullet}$ das erste* Cavalierische *Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung $g_{1,f}\colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$\omega_1 \longmapsto \int_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet}\,\mathrm{d}\mu_2.$$

Dann gelten $g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ *sowie*

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f}\mathrm{d}\mu_1 \qquad \textit{bzw.} \qquad \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1}\left[\int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet}\mathrm{d}\mu_2\right]\mathrm{d}\mu_1.$$

(b) *Es liege* σ*-Endlichkeit von* μ_1 *vor und es bezeichne* $\Pi_{\bullet 2}$ *das zweite* Cavalieri*sche Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2*. Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung* $g_{2,f}\colon \Omega_2 \longrightarrow [0,+\infty]$ *definiert gemäß*

$$\omega_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} f_{\bullet\omega_2}\mathrm{d}\mu_1.$$

Dann gelten $g_{2,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ *sowie*

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}\Pi_{\bullet 2} = \int\limits_{\Omega_2} g_{2,f}\mathrm{d}\mu_2 \qquad \textit{bzw.} \qquad \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_2}\left[\int\limits_{\Omega_1} f_{\bullet\omega_2}\mathrm{d}\mu_1\right]\mathrm{d}\mu_2.$$

Beweis. Der Beweis erfolgt nur für den Teil *(a)*. Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1\times\Omega_2, \mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2)$ gilt für $\omega_1 \in \Omega_1$ nach Lemma M.24.2.2 dann $f_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Somit ist $g_{1,f}$ wohldefiniert. Wir betrachten zunächst den Fall

$$f \in \mathcal{E}(\Omega_1\times\Omega_2, \mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2). \tag{1}$$

Wegen (1) gilt dann:

(I) Es existieren $n \in \mathbb{N}$ sowie Folgen $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw. $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $[0,+\infty)$ bzw. $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ mit

$$f = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k 1_{Q_k}.$$

Wegen *(I)* liefert Folgerung M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f\mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{Q_k}\right]\mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k\Pi_{1\bullet}(Q_k). \tag{2}$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{3}$$

Unter Beachtung von (3) und *(I)* ergibt sich mittels Bemerkung M.24.2.1 dann

$$f_{\omega_1\bullet} = \left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{Q_k}\right]_{\omega_1\bullet} = \sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{[Q_k]_{\omega_1\bullet}}. \tag{4}$$

Da $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ wegen *(I)* eine Folge aus $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ ist, liefert Teil *(b)* von Lemma M.24.1.4 dann:

(II) Es ist $\left([Q_k]_{\omega_1\bullet}\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$.

Wegen *(II)* und der Tatsache, dass $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ wegen *(I)* eine Folge aus $[0,+\infty)$ ist, liefert Folgerung M.22.1.1 dann

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{[Q_k]_{\omega_1\bullet}}\in\mathcal{E}\left(\Omega_2,\mathfrak{A}_2\right) \tag{5}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{[Q_k]_{\omega_1\bullet}}\right]\mathrm{d}\mu_2=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu_2\left(\left[Q_k\right]_{\omega_1\bullet}\right). \tag{6}$$

Wegen (4) und (5) gilt

$$f_{\omega_1\bullet}\in\mathcal{E}\left(\Omega_2,\mathfrak{A}_2\right). \tag{7}$$

Unter Beachtung von (4) und (6) ergibt sich bei Verwendung der im Lemma M.24.1.5 eingeführten Funktionenfolge $(S_{Q_k,\mu_2})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ dann

$$\begin{aligned} g_{1,f}\left(\omega_1\right)&=\int\limits_{\Omega_2}f_{\omega_1\bullet}\mathrm{d}\mu_2\\ &=\int\limits_{\Omega_2}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k 1_{[Q_k]_{\omega_1\bullet}}\right]\mathrm{d}\mu_2=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\mu_2\left(\left[Q_k\right]_{\omega_1\bullet}\right)\\ &=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k S_{Q_k,\mu_2}\left(\omega_1\right). \end{aligned} \tag{8}$$

Aus (3) und (8) folgt dann

$$g_{1,f}=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot S_{Q_k,\mu_2}. \tag{9}$$

Da $(Q_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ wegen *(I)* eine Folge aus $\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2$ und μ_2 zudem σ-endlich ist, liefert Teil *(a)* von Satz M.24.1.7 dann:

(III) Es ist $(S_{Q_k,\mu_2})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right)$.

Wegen *(III)* und der Tatsache, dass $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$ ist, liefern die Teile *(a)* und *(b)* von Satz M.22.2.2 dann

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot S_{Q_k,\mu_2}\in\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right) \tag{10}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1}\left[\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\cdot S_{Q_k,\mu_2}\right]\mathrm{d}\mu_1=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int\limits_{\Omega_1}S_{Q_k,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1. \tag{11}$$

Aus (9) und (10) bzw. (11) folgen dann

$$g_{1,f}\in\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right) \tag{12}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1}g_{1,f}\mathrm{d}\mu_1=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\int\limits_{\Omega_1}S_{Q_k,\mu_2}\mathrm{d}\mu_1. \tag{13}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{14}$$

Wegen (14) folgt aus *(I)* dann $Q_k \in \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Definition M.24.1.4 dann

$$\Pi_{1\bullet}(Q_k) = \int\limits_{\Omega_1} S_{Q_k,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1. \tag{15}$$

Unter Verwendung von (2), (14), (15) und (13) folgt dann

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f \mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \Pi_{1\bullet}(Q_k) = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \int\limits_{\Omega_1} S_{Q_k,\mu_2} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1. \tag{16}$$

Wegen (12) und (16) ist im Fall $f \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ dann alles bewiesen. Sei nun

$$f \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2). \tag{17}$$

Wegen (17) gibt es nach Satz M.19.1 dann eine Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ mit folgenden Eigenschaften:

(IV) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \in \mathcal{E}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$.

(V) Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $f_n \leq f_{n+1}$.

(VI) Es ist $\sup_{n\in\mathbb{N}} f_n = f$.

Wegen (17) sowie *(IV)-(VI)* ergibt sich mittels Definition M.22.2.1 dann

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f \mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \sup_{n\in\mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n \mathrm{d}\Pi_{1\bullet}. \tag{18}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{19}$$

Wegen (19) und *(IV)* folgen nun mit dem schon Gezeigtem dann

$$g_{1,f_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{20}$$

und

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} f_n \mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2} g_{1,f_n} \mathrm{d}\mu_2. \tag{21}$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{22}$$

Wegen (19), *(IV)*, (1), (3) und (7) folgt dann

$$(f_n)_{\omega_1\bullet} \in \mathcal{E}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2). \tag{23}$$

Aus*(V)* folgt sogleich

$$[f_n]_{\omega_1\bullet} \leq [f_{n+1}]_{\omega_1\bullet}. \tag{24}$$

Wegen (19), (23) und (24) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\Omega_2} [f_n]_{\omega_1 \bullet} \, \mathrm{d}\mu_2 \leq \int\limits_{\Omega_2} [f_{n+1}]_{\omega_1 \bullet} \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Hieraus folgt aufgrund der Definition von g_{1,f_n} und $g_{1,f_{n+1}}$ dann

$$g_{1,f_n}(\omega_1) \leq g_{1,f_{n+1}}(\omega_1). \tag{25}$$

Wegen *(VI)* gilt

$$\sup_{n \in \mathbb{N}} [f_n]_{\omega_1 \bullet} = f_{\omega_1 \bullet}. \tag{26}$$

Wegen $f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ folgt bei Beachtung von (19), (23), (24) und (26) mittels Definition M.22.2.1 dann

$$\int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_2} [f_n]_{\omega_1 \bullet} \, \mathrm{d}\mu_2. \tag{27}$$

Aufgrund der Definitionen von $g_{1,f}$ und der Folge $(g_{1,f_n})_{n \in \mathbb{N}}$ ergibt sich aus (27) dann

$$g_{1,f}(\omega_1) = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_{1,f_n}(\omega_1). \tag{28}$$

Aus (22) und (28) folgt dann

$$g_{1,f} = \sup_{n \in \mathbb{N}} g_{1,f_n}. \tag{29}$$

Wegen (19), (20), (25) und (29) liefert der Satz von der monotonen Konvergenz (vgl. Satz M.22.2.3) dann

$$g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{30}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} \left[\sup_{n \in \mathbb{N}} g_{1,f_n} \right] \mathrm{d}\mu_1 = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f_n} \mathrm{d}\mu_1. \tag{31}$$

Unter Verwendung von (8), (9), (21) und (31) folgt dann

$$\begin{aligned} \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}\Pi_{1\bullet} &= \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f_n \mathrm{d}\Pi_{1\bullet} = \sup_{n \in \mathbb{N}} \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1 \\ &= \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1. \end{aligned} \tag{32}$$

Wegen (30) und (32) ist dann *(a)* bewiesen. Teil *(b)* lässt sich analog zu *(a)* zeigen. □

Satz M.24.2.2. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ jeweils nicht triviale Maßräume sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}})$. Dann gilt:*

(a) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor und es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste* Cavalierische *Produktmaß von μ_1 und μ_2. Unter Beachtung von $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ und Lemma M.24.2.2 sei die Funktion $g_{1,|f|} \colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$\omega_1 \longmapsto \int\limits_{\Omega_2} |f|_{\omega_1 \bullet} \, \mathrm{d}\mu_2.$$

Dann gilt:

(a1) *Es gelten* $g_{1,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ *sowie*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, \mathrm{d}\pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,|f|} \mathrm{d}\mu_1.$$

(a2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) f *ist* $\pi_{1\bullet}$*-integrierbar.*

(ii) $g_{1,|f|}$ *ist* μ_1*-integrierbar.*

(b) *Es liege* σ*-Endlichkeit von* μ_1 *vor und es bezeichne* $\pi_{\bullet 2}$ *das zweite* Cavalieri*sche Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2*. Unter Beachtung von* $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ *und Lemma M.24.2.2 sei die Funktion* $g_{2,|f|} \colon \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ *definiert gemäß*

$$\omega_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} |f|_{\bullet\omega_2} \, \mathrm{d}\mu_1.$$

Dann gilt:

(b1) *Es gelten* $g_{2,|f|} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ *sowie*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \, \mathrm{d}\pi_{\bullet 2} = \int\limits_{\Omega_2} g_{2,|f|} \mathrm{d}\mu_2.$$

(b2) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) f *ist* $\pi_{\bullet 2}$*-integrierbar.*

(iv) $g_{2,|f|}$ *ist* μ_2*-integrierbar.*

Beweis.

Zu *(a1)*: Wegen $f \in \mathcal{M}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}\right)$ liefert Bemerkung M.19.9 dann

$$|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2).$$

Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.24.2.1 die Behauptung von *(a1)*.

Zu *(a2)*: Wegen *(a1)* ist *(ii)* äquivalent zu:

(i') $|f|$ ist $\pi_{1\bullet}$-integrierbar.

Aufgrund der Wahl von f ist *(i)* nach Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 äquivalent zu *(i')*. Hieraus folgt aufgrund unserer Herleitung die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*.

Zu *(b)*: Dies kann analog zu *(a)* gezeigt werden. □

Satz M.24.2.3 (Satz von Tonelli)**.** *Seien* $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ *nicht triviale* σ*-endliche Maßräume sowie* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}\right)$*. Dann gilt:*

(a) *Unter Beachtung von Lemma M.24.2.2 sei die Abbildung* $g_{1,f} \colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$ *bzw.* $g_{2,f} \colon \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ *definiert gemäß*

$$\omega_1 \longmapsto \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2 \qquad \text{bzw.} \quad \omega_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} f_{\bullet\omega_2} \mathrm{d}\mu_1.$$

Dann gilt $g_{1,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ *bzw.* $g_{2,f} \in \mathcal{E}^*(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$.

(b) *Es bezeichne* $\mu_1 \otimes \mu_2$ *das* CARATHÉODORY*sche Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2. *Dann gelten*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1,$$

also

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1,$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} g_{2,f} \mathrm{d}\mu_2,$$

also

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} f_{\bullet \omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2.$$

BEWEIS. Aufgrund der Wahl von μ_1 und μ_2 gelten nach Teil *(b)* von Satz M.24.1.9 dann $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{1\bullet}$ und $\mu_1 \otimes \mu_2 = \pi_{\bullet 2}$. Hieraus folgen in Verbindung mit Satz M.24.2.1 dann alle Behauptungen. □

Satz M.24.2.4. *Seien* $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ *und* $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ *nicht triviale* σ*-endliche Maßräume sowie* $f \in \mathcal{M}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2; \overline{\mathbb{R}}\right)$. *Dann gilt:*

(a) *Unter Beachtung von* $|f| \in \mathcal{E}^*(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$ *sowie Lemma M.24.2.2 sei die Funktion* $g_{1,|f|} \colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$ *bzw.* $g_2, |f| : \Omega_2 \longrightarrow [0, +\infty]$ *definiert gemäß*

$$\omega_1 \longmapsto \int\limits_{\Omega_2} |f|_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2$$

bzw.

$$\omega_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} |f|_{\bullet \omega_2} \mathrm{d}\mu_1.$$

Dann gelten $g_{1,|f|} \in \mathcal{E}(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ *und*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,|f|} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} \left(\int\limits_{\Omega_2} |f|_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2 \right) \mathrm{d}\mu_1,$$

bzw. $g_{2,|f|} \in \mathcal{E}(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ *und*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} |f| \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} g_{2,|f|} \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\Omega_2} \left(\int\limits_{\Omega_1} |f|_{\bullet \omega_2} \mathrm{d}\mu_1 \right) \mathrm{d}\mu_2.$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *f ist $(\mu_1 \otimes \mu_2)$-integrierbar.*

(ii) *$g_{1,|f|}$ ist μ_1-integrierbar.*

(iii) *$g_{2,|f|}$ ist μ_2-integrierbar.*

BEWEIS. Aufgrund der Wahl von μ_1 und μ_2 gelten nach Teil *(b)* von Satz M.24.1.9 dann $\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{1\bullet}$ und $\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{\bullet 2}$. Hieraus folgen in Verbindung mit Satz M.24.2.2 dann alle Behauptungen. □

Wir stellen einige Messbarkeitsaussagen bereit.

Lemma M.24.2.3. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiter seien $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sowie $f_j \in \operatorname{Abb}(\Omega_j, \Omega')$ eine $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung. Es sei $g_j \colon \bigtimes_{j=1}^n \Omega_j \longrightarrow \Omega'$ gemäß*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto f_j(\omega_j).$$

Dann gilt:

(a) *Sei $p_j \colon \bigtimes_{k=1}^n \Omega_k \longrightarrow \Omega_j$ definiert gemäß*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto \omega_j.$$

Dann gilt $g_j = f_j \circ p_j$.

(b) *g_j ist $(\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$-messbar.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Wegen Definition M.17.1 und Teil *(a)* von Satz M.16.4 ist p_j dann $(\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$-messbar. Hieraus und aus der $\mathfrak{A}_j$-$\mathfrak{A}'$-Messbarkeit von f_j folgt mittels Teil M.16.3 die $(\bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k)$-$\mathfrak{A}'$-Messbarkeit von $f_j \circ p_j$. Hieraus folgt mit *(a)* die Behauptung. □

Lemma M.24.2.4. *Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k))_{k \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen und $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \mathbb{K})$. Sei $g_j \colon \bigtimes_{k=1}^n \Omega_k \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert gemäß*

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto f_j(\omega_j).$$

Dann gilt $g_j \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k; \mathbb{K}\right)$.

(b) *Sei $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ und sei $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $g_j \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k\right)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Lemma M.24.2.3.

Zu *(b)*: Nach Definition gilt

$$\mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j) = \mathcal{M}\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \operatorname{Abb}\left(\Omega_j, [0, +, \infty]\right). \tag{1}$$

Wegen $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$ folgen aus (1) dann

$$f_j \in \mathcal{M}\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{2}$$

und

$$f_j \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_j, [0, +\infty]\right). \tag{3}$$

Wegen (2) folgt aus *(a)* dann

$$g_j \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k; \mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Aus (3) und der Definition von g_j folgt

$$g_j \in \operatorname{Abb}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, [0, +\infty]\right). \tag{5}$$

Nach Definition gilt

$$\mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right) = \mathcal{M}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}}\right) \cap \operatorname{Abb}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, [0, +, \infty]\right). \tag{6}$$

Aus (4) bis (6) folgt dann

$$g_j \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right).$$

□

Definition M.24.2.2. Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei Ω_j eine nichtleere Menge und $f_j \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_j, \overline{\mathbb{R}}\right)$. Sei $f\colon \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j \longrightarrow \overline{\mathbb{R}}$ definiert gemäß $(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto \prod_{j=1}^{n} f_j(\omega_j)$. Dann heißt f das *Tensorprodukt* der Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$.

Satz M.24.2.5. *Sei $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $f_j \in \mathcal{M}(\Omega_j, \mathfrak{A}_j; \mathbb{K})$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $(f_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$. Dann ist $f \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j; \mathbb{K}\right)$.*

(b) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $f_j \in \mathcal{E}^*(\Omega_j, \mathfrak{A}_j)$. Dann gilt $f \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j\right)$.*

Beweis. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Weiter sei $g_j\colon \bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k \longrightarrow \mathbb{K}$ definiert gemäß

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \longmapsto f_j(\omega_j). \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von f_j folgt im Fall *(a)* bzw. Fall *(b)* mittels Teil *(a)* bzw. Teil *(b)* von Lemma M.24.2.4 dann

$$g_j \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k; \mathbb{K}\right) \tag{3}$$

bzw.

$$g_j \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k; \mathbb{K}\right). \tag{4}$$

Aus (1), (2) und der Definition von f folgt

$$f = \prod_{j=1}^{n} g_j. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (1) und (3) bzw. (4) und (5) ergibt sich mittels Satz M.18.8 (im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$) und Satz M.18.9 (im Fall $\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}$) bzw. Teil *(c)* von Lemma M.19.3 dann

$$f \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j; \mathbb{K}\right)$$

bzw.

$$f \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j; \mathbb{K}\right).$$

□

Wir studieren nun die Integrierbarkeit von Tensorprodukten von Faktoren aus $\mathcal{E}^*$-Klassen bezüglich von Produktmaßen.

Satz M.24.2.6. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $f_k \in \mathcal{E}^*(\Omega_k, \mathfrak{A}_k)$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann ist $f \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right)$ und es gilt*

$$\int\limits_{\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k} f \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} f_k \mathrm{d}\mu_k.$$

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Satz M.24.2.5 gilt

$$f \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k\right). \tag{1}$$

Die Integralformel zeigt man durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 2$. Wir wenden nun Satz M.24.2.3 an. Unter Beachtung von (1) und Lemma M.24.2.2 sie die Abbildung

$$g_{1,f} \colon \Omega_1 \longrightarrow [0, +\infty]$$

definiert gemäß

$$\omega_1 \longmapsto \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2. \tag{2}$$

Wegen (2) folgt aus Satz M.24.2.3 dann

$$g_{1,f} \in \mathcal{E}^* (\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{3}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d} (\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1. \tag{4}$$

Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{5}$$

Aus der Konstruktion von f folgt dann

$$f_{\omega_1 \bullet} = [f_1 (\omega_1)] \cdot f_2. \tag{6}$$

Unter Beachtung von (2), (6), $f_1 (\omega_1) \in [0, +\infty]$ und $f_2 \in \mathcal{E}^* (\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.22.2.2 dann

$$g_{1,f} (\omega_1) = \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\Omega_2} [f_1 (\omega_1)] \cdot f_2 \mathrm{d}\mu_2 = f_1 (\omega_1) \cdot \int\limits_{\Omega_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (4), (5), (7) sowie nochmals Teil *(a)* von Satz M.22.2.2 folgt dann

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d} (\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} f_1 \left[\int\limits_{\Omega_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2 \right] \mathrm{d}\mu_1 = \left[\int\limits_{\Omega_1} f_1 \mathrm{d}\mu_1 \right] \cdot \left[\int\limits_{\Omega_2} f_2 \mathrm{d}\mu_2 \right].$$

Damit ist die Behauptung für $n = 2$ bewiesen. Der Induktionsschritt wird dann unter Beachtung von Satz M.24.1.17 für $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ gültigen Beziehung

$$\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k = \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu \right) \otimes \mu_n$$

vollzogen. □

Beispiel M.24.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\alpha \in (0, +\infty)$. Ferner sei $g_{\alpha;m} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow (0, +\infty)$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|^\alpha}.$$

Dann gilt:

(a) Es ist $g_{\alpha;m} \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{\alpha;m} \mathrm{d}\lambda^{(m)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|^\alpha} \lambda^{(m)} (\mathrm{d}\mathbf{x}) \in (0, +\infty).$$

(b) Sei $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_m)^T \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$g_{2;m} (x) = \prod_{j=1}^{m} g_{2;1} (x_j),$$

also

$$\mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|^2} = \prod_{j=1}^{m} \mathrm{e}^{-x_j^2}.$$

(c) Es ist $g_{2;m} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, also insbesondere $g_{2;1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2;m} \mathrm{d}\lambda^{(m)} = \left[\int\limits_{\mathbb{R}} g_{2;1} \mathrm{d}\lambda^{(1)}\right]^m,$$

also

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \mathrm{e}^{-|\mathbf{x}|^2} \lambda^{(m)}\left(\mathrm{d}\mathbf{x}\right) = \left[\int\limits_{\mathbb{R}} \mathrm{e}^{-x_j^2} \mathrm{d}\mathbf{x}\right]^m.$$

Satz M.24.2.7. *Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $\left(\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j\right)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-*endlichen *Maßräumen. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $f_j \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j\right)$. Es bezeichne f das Tensorprodukt der Folge $\left(f_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ sowie $\mu \coloneqq \bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ das* Carathéodory*sche Produktmaß der Folge $\left(\mu_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $f \in \mathcal{E}^*\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$ und μ_f ist ein Produktmaß der Folge $\left(\left(\mu_j\right)_{f_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.*

(b) *Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\{f_j = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_j}$. Dann ist $\left(\left(\mu_j\right)_{f_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von σ-endlichen Maßen und es gilt*

$$\mu_f = \bigotimes_{j=1}^n \left(\mu_j\right)_{f_j}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.24.2.5 gilt

$$f \in \mathcal{E}^*\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right). \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(a)* von Satz M.22.2.4 dann

$$\mu_f \in \mathcal{M}_+\left(\bigtimes_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right). \tag{2}$$

Sei

$$\bigtimes_{j=1}^n A_j \in \bigboxtimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j. \tag{3}$$

und

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{4}$$

Aus (3) und (4) folgt dann

$$A_j \in \mathfrak{A}_j. \tag{5}$$

Wegen (4),(5) und $f_j \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j\right)$ gilt nach Bemerkung M.19.11 dann

$$1_{A_j} f_j \in \mathcal{E}^*\left(\Omega_j, \mathfrak{A}_j\right). \tag{6}$$

Sei

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j. \tag{7}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned}\left[1_{\times_{j=1}^{n} A_k} \cdot f\right](\omega_1, \ldots, \omega_n) &= \left[1_{\times_{j=1}^{n} A_j}(\omega_1, \ldots, \omega_n)\right] \cdot f(\omega_1, \ldots, \omega_n) \\ &= \prod_{j=1}^{n} 1_{A_j} f_j(\omega_j).\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (4), (6), (7) und (8) folgt mittels Satz M.24.2.6 dann

$$1_{\times_{j=1}^{n} A_j} \cdot f \in \mathcal{E}^* \left(\bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j \right)$$

und

$$\int\limits_{\times_{j=1}^{n} \Omega_j} \left(1_{\times_{j=1}^{n} A_j} \cdot f\right) \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\times_{j=1}^{n} \Omega_j} \left(1_{\times_{j=1}^{n} A_j} \cdot f\right) \mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_j} 1_{A_j} f_j \mathrm{d}\mu_j. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (9) ergibt sich dann

$$\mu_f\left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_j\right) = \int\limits_{\times_{j=1}^{n} \Omega_j} \left(1_{\times_{j=1}^{n} A_j} \cdot f\right) \mathrm{d}\mu = \prod_{j=1}^{n} \int\limits_{\Omega_j} 1_{A_j} \cdot f_j \mathrm{d}\mu_j = \prod_{j=1}^{n} (\mu_j)_{f_j}(A_j). \tag{10}$$

Wegen (2), (3) und (10) ist μ_f dann ein Produktmaß der Folge $\left((\mu_j)_{f_j}\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$.

Zu *(b)*: Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ ist wegen $\{f_j = +\infty\} \in \mathcal{N}_{\mu_j}$ nach Satz M.22.5.6 dann $(\mu_j)_{f_j}$ ein σ-endliches Maß. Hieraus folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.24.1.13, dass das CARATHÉODORYsche Produktmaß $\bigotimes_{j=1}^{n} (\mu_j)_{f_j}$ das einzige Produktmaß der Folge $\left((\mu_j)_{f_j}\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ ist. Hieraus folgt mittels *(a)* dann

$$\mu_f = \bigotimes_{j=1}^{n} (\mu_j)_{f_j}.$$

□

M.24.3. Der Satz von Fubini

Das Ziel des vorliegenden Abschnitts besteht im Studium der Integrierbarkeit numerischer Funktionen bezüglich eines CAVALIERIschen Produktmaßes. Dies läuft auf eine geeignete Verallgemeinerung von Satz M.24.2.1 hinaus. Die klassische Version dieser Aufgabenstellung, welche auf eine Verallgemeinerung des TONELLIschen Satzes M.24.2.3 hinausläuft, wurde von dem italienischen Mathematiker GUIDO FUBINI[1)] bearbeitet. Unsere nachfolgenden Überlegungen sind auf die Herleitung des berühmten FUBINIschen Satzes und seine Verallgemeinerung auf CAVALIERIsche Produktmaße gerichtet.

[1)] GUIDO FUBINI (∗19.02.1879; †06.06.1943) war ein italienischer Mathematiker. Er beschätigte sich mit projektiver Differentialgeometrie und verschiedenen Gebieten der Analysis wie Funktionentheorie und Integralrechnung, weitere Gebiete waren Gruppentheorie und mathematische Physik.

Bemerkung M.24.3.1. Seien Ω_1 und Ω_2 nichtleere Mengen sowie $f \in \operatorname{Abb}\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \overline{\mathbb{R}}\right)$. Weiter seien $\omega_1 \in \Omega_1$ und $\omega_2 \in \Omega_2$. Dann gilt:

(a) Es ist
$$|f|_{\omega_1 \bullet} = |f_{\omega_1 \bullet}| \qquad \text{bzw.} \qquad |f|_{\bullet \omega_2} = |f_{\bullet \omega_2}| \,.$$

(b) Es gilt
$$\left(f^+\right)_{\omega_1 \bullet} = \left(f_{\omega_1 \bullet}\right)^+ \qquad \text{bzw.} \qquad \left(f^+\right)_{\bullet \omega_2} = \left(f_{\bullet \omega_2}\right)^+ .$$

(c) Es gilt
$$\left(f^-\right)_{\omega_1 \bullet} = \left(f_{\omega_1 \bullet}\right)^- \qquad \text{bzw.} \qquad \left(f^-\right)_{\bullet \omega_2} = \left(f_{\bullet \omega_2}\right)^- . \qquad \clubsuit$$

Satz M.24.3.1. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$ nichttrivale Maßräume. Dann gilt:*

(a) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_2 vor und es bezeichne $\pi_{1\bullet}$ das erste* Cavalierische *Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sei $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \pi_{1\bullet}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Es bezeichne $B_{1,f}$ die Menge aller derjenigen $\omega_1 \in \Omega_1$, für welche μ_2-Integrierbarkeit der Funktion $f_{\omega_1 \bullet}$ vorliegt:*

(a1) *Es ist $B_{1,f} = B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-}$ sowie $\Omega_1 \setminus B_{1,f} \in \mathcal{N}_{\mu_1}$.*

(a2) *Sei $h_{1,f} \colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*
$$h_{1,f}(\omega_1) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2, & \text{falls } \omega_1 \in B_{1,f}, \\ 0, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \setminus B_{1,f}. \end{cases}$$

Dann gelten $h_{1,f} \in \mathscr{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R})$ sowie
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}\pi_{1\bullet} = \int_{\Omega_2} h_{1,f} \mathrm{d}\mu_1.$$

(b) *Es liege σ-Endlichkeit von μ_1 vor und es bezeichne $\pi_{\bullet 2}$ das zweite* Cavalierische *Produktmaß von μ_1 und μ_2. Weiterhin sei $f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \pi_{\bullet 2}; \overline{\mathbb{R}}\right)$. Es bezeichne $B_{2,f}$ die Menge aller derjenigen $\omega_2 \in \Omega_2$, für welche μ_1-Integrierbarkeit der Funktion $f_{\bullet \omega_2}$ vorliegt:*

(b1) *Es ist $B_{2,f} = B_{2,f^+} \cap B_{2,f^-}$ sowie $\Omega_2 \setminus B_{2,f} \in \mathcal{N}_{\mu_2}$.*

(b2) *Sei $h_{2,f} \colon \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*
$$h_{2,f}(\omega_2) \coloneqq \begin{cases} \displaystyle\int_{\Omega_1} f_{\omega_2 \bullet} \mathrm{d}\mu_2, & \text{falls } \omega_2 \in B_{2,f}, \\ 0, & \text{falls } \omega_2 \in \Omega_2 \setminus B_{2,f}. \end{cases}$$

Dann gelten $h_{2,f} \in \mathscr{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R})$ sowie
$$\int_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}\pi_{\bullet 2} = \int_{\Omega_1} h_{2,f} \mathrm{d}\mu_2.$$

BEWEIS. Wir beweisen nur *(a)*.

Zu *(a1)*: Als $\pi_1\bullet$-integrierbare Funktion ist f insbesondere $(\mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2)$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbare Funktion. Hieraus folgt mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$\left\{f^+, f^-\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2\right). \tag{1}$$

Definieren wir unter Beachtung von (1) und Lemma M.24.2.2 nun die Funktionen g_{1,f^+} und g_{1,f^-} wie in Teil *(a)* von Satz M.24.2.1, so liefert Teil *(a)* von Satz M.24.2.1 dann

$$\left\{g_{1,f^+}, g_{1,f^-}\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right) \tag{2}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^+ \mathrm{d}\pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f^+} \mathrm{d}\mu_1 \tag{3}$$

und

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f^- \mathrm{d}\pi_{1\bullet} = \int\limits_{\Omega_1} g_{1,f^-} \mathrm{d}\mu_1. \tag{4}$$

Da f laut Voraussetzung $\pi_{1\bullet}$-integrierbar ist, gilt dies nach Integraldefinition auch für f^+ und f^-. Hieraus folgt bei Beachtung von (2) sowie (3) bzw. (4) dann

$$g_{1,f^+} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{5}$$

bzw.

$$g_{1,f^-} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{6}$$

Wegen (5) bzw. (6) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.22.5.5 dann

$$\left\{g_{1,f^+} = +\infty\right\} \in \mathcal{N}_{\mu_1} \tag{7}$$

bzw.

$$\left\{g_{1,f^-} = +\infty\right\} \in \mathcal{N}_{\mu_2}. \tag{8}$$

Aus der Definition der entsprechenden Größen folgt sogleich

$$\left\{g_{1,f^+} = +\infty\right\} = \Omega_1 \setminus B_{1,f^+} \tag{9}$$

und

$$\left\{g_{1,f^-} = +\infty\right\} = \Omega_1 \setminus B_{1,f^-}. \tag{10}$$

Für

$$\omega_1 \in \Omega_1 \tag{11}$$

gelten nach Bemerkung M.24.3.1 nun

$$\left(f^+\right)_{\omega_1\bullet} = \left(f_{\omega_1\bullet}\right)^+ \tag{12}$$

und

$$\left(f^-\right)_{\omega_1\bullet} = \left(f_{\omega_1\bullet}\right)^-. \tag{13}$$

Aus der Definition des Integrals sowie (12) und (13) folgt

$$\begin{aligned} B_{1,f} &= \left\{\omega_1 \in \Omega_1 \,\middle|\, f_{\omega_1\bullet} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \overline{\mathbb{R}}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega_1 \in \Omega_1 \,\middle|\, \left\{\left(f_{\omega_1\bullet}\right)^+, \left(f_{\omega_1\bullet}\right)^-\right\} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \overline{\mathbb{R}}\right)\right\} \\ &= \left\{\omega_1 \in \Omega_1 \,\middle|\, \left\{\left(f^+\right)_{\omega_1\bullet}, \left(f^-\right)_{\omega_1\bullet}\right\} \subseteq \mathscr{L}^1\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \overline{\mathbb{R}}\right)\right\} \\ &= B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-}. \end{aligned} \tag{14}$$

Unter Verwendung von (14), (9) und (10) folgt dann

$$\begin{aligned} \Omega_1 \setminus B_{1,f} &= \Omega_1 \setminus \left(B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-}\right) = \left(\Omega_1 \setminus B_{1,f^+}\right) \cup \left(\Omega_1 \setminus B_{1,f^-}\right) \\ &= \left\{g_{1,f} = +\infty\right\} \cup \left\{g_{2,f} = +\infty\right\}. \end{aligned} \tag{15}$$

Wegen (7), (8) und (15) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.5.1 dann

$$\Omega_1 \setminus B_{1,f} \in \mathcal{N}_{\mu_1}. \tag{16}$$

Wegen (14) und (16) ist dann *(a1)* bewiesen.

Zu *(a2)*: Sei

$$\omega_1 \in B_{1,f}. \tag{17}$$

Wegen (17) gilt dann

$$f_{\omega_1\bullet} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{18}$$

Unter Verwendung von (18), Definition M.22.4.1 sowie (12) und (13) folgt dann

$$\begin{aligned} h_{1,f}\left(\omega_1\right) &= \int\limits_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet} \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\Omega_2} \left(f_{\omega_1\bullet}\right)^+ \mathrm{d}\mu_2 - \int\limits_{\Omega_2} \left(f_{\omega_1\bullet}\right)^- \mathrm{d}\mu_2 \\ &= \int\limits_{\Omega_2} \left(f^+\right)_{\omega_1\bullet} \mathrm{d}\mu_2 - \int\limits_{\Omega_2} \left(f^-\right)_{\omega_1\bullet} \mathrm{d}\mu_2 \\ &= g_{1,f^+}\left(\omega_1\right) - g_{1,f^-}\left(\omega_1\right). \end{aligned} \tag{19}$$

Aus (17), (19) und der Definition von $h_{1,f}$ folgt dann

$$h_{1,f} = 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} - 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}. \tag{20}$$

Wegen (6) gilt insbesondere

$$\Omega_1 \setminus B_{1,f} \in \mathfrak{A}_1. \tag{21}$$

Es ist

$$B_{1,f} = \Omega_1 \setminus \left(\Omega_1 \setminus B_{1,f}\right). \tag{22}$$

Da $\mathfrak{A}_1$ eine σ-Algebra in Ω_1 ist, folgt aus (21) und (22) dann

$$B_{1,f} \in \mathfrak{A}_1. \tag{23}$$

Wegen (23) und (2) liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$\left\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\right\} \subseteq \mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right). \tag{24}$$

Nach Definition von B_{1,f^+} bzw. B_{1,f^-} gilt

$$B_{1,f^+} = \left\{g_{1,f^+} \in \mathbb{R}\right\} \tag{25}$$

bzw.

$$B_{1,f^-} = \left\{g_{1,f^-} \in \mathbb{R}\right\}. \tag{26}$$

Aus (14), (25) und (26) folgt nun

$$B_{1,f} = B_{1,f^+} \cap B_{1,f^-} = \left\{g_{1,f^+} \in \mathbb{R}\right\} \cap \left\{g_{1,f^-} \in \mathbb{R}\right\}. \tag{27}$$

Aus (27) folgt dann

$$\left\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\right\} \subseteq \mathrm{Abb}\left(\Omega_1, \mathbb{R}\right). \tag{28}$$

Wegen

$$\mathcal{E}^*\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1\right) \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right)$$

folgt aus (24) dann

$$\left\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{29}$$

Wegen (28) und (29) liefert Bemerkung M.18.4 dann

$$\left\{1_{B_{1,f}} g_{1,f^+}, 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\right\} \subseteq \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \mathbb{R}\right). \tag{30}$$

Unter Beachtung von (20) und (30) ergibt sich mittels Satz M.18.7 dann

$$h_{1,f} \in \mathcal{M}\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1; \mathbb{R}\right). \tag{31}$$

Es gelten

$$0 \leq 1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^+} \leq g_{1,f^+} \tag{32}$$

und

$$0 \leq 1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^-} \leq g_{1,f^-}. \tag{33}$$

Unter Beachtung von (5), (32) und (30) bzw. (6), (33) und (30) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.4.1 dann

$$1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^+} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}\right) \tag{34}$$

bzw.

$$1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^-} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}\right). \tag{35}$$

Wegen (34), (35) und (20) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.4.5 dann

$$h_{1,f} \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}\right). \tag{36}$$

sowie

$$\int\limits_{\Omega_1} h_{1,f} \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} \left(1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} - 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-}\right) \mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^+} \mathrm{d}\mu_1 - \int\limits_{\Omega_1} 1_{B_{1,f}} g_{1,f^-} \mathrm{d}\mu_1. \tag{37}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\left\{1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^+} \neq g_{1,f^+}\right\} \subseteq \Omega_1 \setminus B_{1,f} \tag{38}$$

und

$$\left\{1_{B_{1,f}} \cdot g_{1,f^-} \neq g_{1,f^-}\right\} \subseteq \Omega_1 \setminus B_{1,f}. \tag{39}$$

Wegen (2), (34) und der Inklusion

$$\mathcal{E}^*\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1\right)\subseteq\mathcal{M}\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1;\overline{\mathbb{R}}\right)$$

folgt mittels Satz M.18.5 dann

$$\left\{\left\{1_{B_{1,f}}\cdot g_{1,f^+}\neq g_{1,f^+}\right\},\left\{1_{B_{1,f}}\cdot g_{1,f^-}\neq g_{1,f^-}\right\}\right\}\subseteq\mathfrak{A}_1. \tag{40}$$

Wegen (16), (38), (39) und (40) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 nun

$$\left\{\left\{1_{B_{1,f}}\cdot g_{1,f^+}\neq g_{1,f^+}\right\},\left\{1_{B_{1,f}}\cdot g_{1,f^-}\neq g_{1,f^-}\right\}\right\}\subseteq\mathcal{N}_{\mu_1}. \tag{41}$$

Wegen (2), (24) und (41) folgen mittels Teil *(a)* von Satz M.22.5.3 dann

$$\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^+}\mathrm{d}\mu_1=\int\limits_{\Omega_1}g_{1,f^+}\mathrm{d}\mu_1 \tag{42}$$

und

$$\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^-}\mathrm{d}\mu_1=\int\limits_{\Omega_1}g_{1,f^-}\mathrm{d}\mu_1. \tag{43}$$

Aus (3) und (42) bzw. (4) und (43) folgen nun

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f^+\mathrm{d}\pi_{1\bullet}=\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^+}\mathrm{d}\mu_1 \tag{44}$$

bzw.

$$\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f^-=\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^-}\mathrm{d}\mu_1. \tag{45}$$

Unter Verwendung von Definition M.22.4.1, (44), (45), (42), (43) und (37) folgt nun

$$\begin{aligned}\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f\mathrm{d}\pi_{1\bullet}&=\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f^+\mathrm{d}\pi_{1\bullet}-\int\limits_{\Omega_1\times\Omega_2}f^-\mathrm{d}\pi_{1\bullet}\\&=\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^+}\mathrm{d}\mu_1-\int\limits_{\Omega_1}1_{B_{1,f}}g_{1,f^-}\mathrm{d}\mu_1=\int\limits_{\Omega_1}g_{1,f^+}\mathrm{d}\mu_1-\int\limits_{\Omega_1}g_{1,f^-}\mathrm{d}\mu_1\\&=\int\limits_{\Omega_1}h_{1,f}\mathrm{d}\mu_1.\end{aligned} \tag{46}$$

Wegen (36) und (46) ist dann *(a2)* bewiesen.

Teil *(b)* lässt sich analog zeigen. □

Wir wenden uns nun den generischen Spezialfall von Satz M.24.3.1 zu.

Satz M.24.3.2 (von Fubini). *Seien* $(\Omega_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1)$ *und* $(\Omega_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2)$ *nicht triviale* σ-endliche *Maßräume. Es bezeichne* $\mu_1\otimes\mu_2$ *das* Carathéodorysche *Produktmaß von* μ_1 *und* μ_2. *Weiterhin sei* $f\in\mathscr{L}^1\left(\Omega_1\times\Omega_2,\mathfrak{A}_1\otimes\mathfrak{A}_2,\mu_1\otimes\mu_2;\overline{\mathbb{R}}\right)$ *und es bezeichne* $B_{1,f}$ *bzw.* $B_{2,f}$ *die Menge aller* $\omega_1\in\Omega_1$ *bzw.* $\omega_2\in\Omega_2$, *für welche* $f_{\omega_1\bullet}\in\mathscr{L}^1\left(\Omega_2,\mathfrak{A}_2,\mu_2;\overline{\mathbb{R}}\right)$ *bzw.* $f_{\bullet\omega_2}\in\mathscr{L}^1\left(\Omega_1,\mathfrak{A}_1,\mu_1;\overline{\mathbb{R}}\right)$ *erfüllt ist. Dann gilt:*

(a) *Es sind* $B_{1,f}=B_{1,f^+}\cap B_{1,f^-}$ *und* $\Omega\backslash B_{1,f}\in\mathcal{N}_{\mu_1}$ *sowie* $B_{2,f}=B_{2,f^+}\cap B_{2,f^-}$ *und* $\Omega_2\backslash B_{2,f}\in\mathcal{N}_{\mu_2}$.

(b) *Sei* $h_{1,f}\colon \Omega_1 \longrightarrow \mathbb{R}$ *bzw.* $h_{2,f}\colon \Omega_2 \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$h_{1,f}(\omega_1) \coloneqq \begin{cases} \int_{\Omega_2} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2, & \text{falls } \omega_1 \in B_{1,f} \\ 0, & \text{falls } \omega_1 \in \Omega_1 \backslash B_{1,f} \end{cases}$$

bzw.

$$h_{2,f}(\omega_2) \coloneqq \begin{cases} \int_{\Omega_1} f_{\bullet \omega_2} \mathrm{d}\mu_1, & \text{falls } \omega_2 \in B_{2,f} \\ 0, & \text{falls } \omega_2 \in \Omega_2 \backslash B_{2,f} \end{cases}.$$

Dann gelten $h_{1,f} \in \mathscr{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R})$ *und*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_1} h_{1,f} \mathrm{d}\mu_1$$

sowie $h_{2,f} \in \mathscr{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R})$ *und*

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\Omega_2} h_{2,f} \mathrm{d}\mu_2.$$

Beweis. Aufgrund der σ-Endlichkeit von μ_1 und μ_2 gelten wegen Teil *(b)* von Satz M.24.1.9 dann

$$\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{1\bullet}$$

bzw.

$$\mu_1 \otimes \mu_2 = \Pi_{\bullet 2}.$$

Hieraus folgen in Verbindung mit M.24.3.1 dann alle Behauptungen. □

Wir geben nun ein Beispiel an, welches zeigt, dass die Ausnahmemenge $\Omega_1 \backslash B_{1,f}$ aus Satz M.24.3.1 durchaus nichtleer sein kann.

Beispiel M.24.3.1. Wir betrachten den Maßraum $\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2, \lambda^{(2)}\right)$. Wegen Satz M.17.5 bzw. Folgerung M.24.1.2 gelten dann

$$\mathfrak{B}_2 = \mathfrak{B}_1 \otimes \mathfrak{B}_2 \tag{1}$$

bzw.

$$\lambda^{(2)} = \lambda^{(1)} \otimes \lambda^{(1)}. \tag{2}$$

Da $\mathbb{Q}$ eine abzählbare Teilmenge von $\mathbb{R}$ ist und zudem $\lambda^{(1)}$ stetig ist, gilt dann

$$\mathbb{Q} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(1)}}. \tag{3}$$

Wegen $\mathbb{R} \in \mathfrak{B}_1$ folgt unter Beachtung von (1) bis (3) mittels Teil *(f)* von Bemerkung M.24.1.1 dann

$$\mathbb{Q} \times \mathbb{R} \in \mathcal{N}_{\lambda^{(2)}}. \tag{4}$$

Wegen (4) ergibt sich unter Beachtung von Bemerkung M.22.1.1 dann $1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2\right)$ und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^2} 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \mathrm{d}\lambda^{(2)} = \lambda^{(2)}(\mathbb{Q} \times \mathbb{R}) = 0. \tag{5}$$

Es ist also $1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}_2, \lambda^{(2)}; \mathbb{R}\right)$. Sei

$$f \coloneqq 1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}} \tag{6}$$

und sei

$$\omega_1 \in \mathbb{R}. \tag{7}$$

Wegen (7) folgt mittels Teil *(c)* von Lemma M.24.1.3 dann

$$(\mathbb{Q} \times \mathbb{R})_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q}, \\ \varnothing, & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{8}$$

Unter Beachtung von (6), Bemerkung M.24.2.1 und (8) folgt dann

$$f_{\omega_1 \bullet} = (1_{\mathbb{Q}\times\mathbb{R}})_{\omega_1 \bullet} = \begin{cases} 1_{\mathbb{R}}, & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q}, \\ 1_{\varnothing}, & \text{falls } \omega_2 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{9}$$

Wegen $\{\mathbb{R}, \varnothing\} \subseteq \mathfrak{B}_1$, folgt aus (9) dann $f_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{E}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie unter Beachtung von Bemerkung M.22.1.1 weiterhin

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_{\omega_1 \bullet} \mathrm{d}\lambda^{(1)} = \begin{cases} \lambda^{(1)}(\mathbb{R}), & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q}, \\ \lambda^{(1)}(\varnothing), & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}, \end{cases} = \begin{cases} +\infty, & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{Q}, \\ 0, & \text{falls } \omega_1 \in \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}. \end{cases} \tag{10}$$

Wegen (10) gilt mit den Bezeichnungen aus Satz M.24.3.1 dann

$$B_{1,f} = \mathbb{R}\backslash\mathbb{Q}$$

sowie

$$h_{1,f} = 1_{\varnothing} = 0.$$

Das nachfolgende Resultat knüpft an die Thematik von Satz M.24.2.6 an.

Satz M.24.3.3. *Seien $\mathbb{K} \in \left\{\mathbb{R}, \overline{\mathbb{R}}\right\}$, $p \in (0, +\infty)$, $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ sowie $((\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen σ-endlichen Maßräumen. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $f_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \mathbb{K})$. Es bezeichne f das Tensorprodukt von $(f_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ sowie $\bigotimes_{k=1}^n \mu_k$ das* Carathéodory*sche Produktmaß von $(\mu_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $f \in \mathcal{M}\left(\times_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k; \mathbb{K}\right)$.*

(b) *Es ist*

$$\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^n \mu_k}(f) = \prod_{k=1}^n \mathcal{N}_{p,\mu_k}(f).$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist $f \in \mathcal{M}_0\left(\times_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^n \mu_k; \mathbb{K}\right)$.*

(iii) *Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $f_k \in \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K})$.*

(d) *Für alle $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ gelte $f_k \in \mathscr{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K})$. Dann ist*

$$f \in \mathscr{L}^p\left(\bigtimes_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^n \mu_k; \mathbb{K}\right)$$

und im Fall $p = 1$ gilt überdies

$$\int\limits_{\times_{k=1}^n \Omega_k} f \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^n \mu_k\right) = \prod_{k=1}^n \int\limits_{\Omega_k} f \mathrm{d}\mu_k.$$

(e) *Sei* $f_k \in \mathscr{L}^p\left(\times_{k=1}^n \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^n \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^n \mu_k; \mathbb{K}\right)$ *und sei* $\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^n \mu_k}(f) \neq 0$. *Weiter sei* $k \in \mathbb{N}_{1,n}$. *Dann gilt*

$$f_k \in \mathscr{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K}) \setminus \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K}).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Satz M.24.2.5.

Zu *(b)*: Für

$$k \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{1}$$

folgt wegen $f_k \in \mathcal{M}(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \mathbb{K})$ mittels Bemerkung M.19.9 dann

$$|f_k|^p \in \mathcal{E}^*(\Omega_k, \mathfrak{A}_k). \tag{2}$$

Für

$$(\omega_1, \ldots, \omega_n) \in \bigtimes_{k=1}^n \Omega_k \tag{3}$$

gilt aufgrund der Konstruktion von f dann

$$\begin{aligned} |f|^p(\omega_1, \ldots, \omega_n) = |f(\omega_1, \ldots, \omega_n)|^p &= \left|\prod_{k=1}^n f_k(\omega_k)\right|^p \\ &= \prod_{k=1}^n |f_k(\omega_k)|^p = \prod_{k=1}^n |f_k|^p(\omega_k). \end{aligned} \tag{4}$$

Wegen (1) bis (3) liefert Satz M.24.2.6 dann

$$\int\limits_{\times_{k=1}^n \Omega_k} |f|^p \,\mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^n \mu_k\right) = \prod_{k=1}^n \int\limits_{\Omega_k} |f_k|^p \,\mathrm{d}\mu_k.$$

Hieraus folgt nun

$$\left[\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^n \mu_k}(f)\right]^p = \int\limits_{\times_{k=1}^n \Omega_k} |f|^p \,\mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^n \mu_k\right) = \prod_{k=1}^n \int\limits_{\Omega_k} |f_k|^p \,\mathrm{d}\mu_k = \left[\prod_{k=1}^n \mathcal{N}_{p,\mu_k}(f)\right]^p.$$

Damit ist aber

$$\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^n \mu_k}(f) = \prod_{k=1}^n \mathcal{N}_{p,\mu_k}(f).$$

Zu *(c)*: Wegen Bemerkung M.22.6.2 ist *(iii)* bzw. *(iii)* äquivalent zu:

(ii') Es ist $\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^n \mu_k}(f) \neq 0$ bzw.

(ii') Es gibt ein $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $\mathcal{N}_{p,\mu_k}(f_k) = 0$.

Aus *(b)* ergibt sich hiermit sofort die Äquivalenz von *(iii)* und *(iii)*.

Zu *(d)*: Für alle $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ gilt wegen *(b)* dann $\mathcal{N}_{p,\bigotimes_{k=1}^{n}\mu_k}(f) \in [0,+\infty)$. Hieraus folgt bei Beachtung, der nach *(a)*gültigen Beziehung $f \in \mathcal{M}\left(\times_{k=1}^{n}\Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k; \mathbb{K}\right)$, mittels Bemerkung M.22.6.3 dann

$$f \in \mathscr{L}^p\left(\bigtimes_{k=1}^{n}\Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n}\mu_k; \mathbb{K}\right). \tag{5}$$

Zu *(e)*: Sei nun speziell

$$p = 1. \tag{6}$$

Weiter sei zunächst

$$\mathbb{K} = \mathbb{R}. \tag{7}$$

Wir führen vollständige Induktion über n durch und betrachten zunächst den Fall $n = 2$. Wegen (7) sowie der Wahl von f_1 und f_2 gelten dann

$$f_1 \in \mathscr{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{8}$$

und

$$f_2 \in \mathscr{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wir streben nun die Anwendung von Satz M.24.3.2 an. Sei hierzu

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{10}$$

Aufgrund der Konstruktion von f gilt dann

$$f_{\omega_1\bullet} = f_1(\omega_1) f_2. \tag{11}$$

Wegen (8) gilt

$$f_1(\omega_1) \in \mathbb{R}. \tag{12}$$

Wegen (12), (9) und (10) folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 dann

$$f_{\omega_1\bullet} \in \mathscr{L}^1(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2; \mathbb{R}) \tag{13}$$

sowie

$$\int_{\Omega_2} f_{\omega_1\bullet}\mathrm{d}\mu_2 = f_1(\omega_1)\int_{\Omega_2} f_2\mathrm{d}\mu_2. \tag{14}$$

Aus (10) und (15) folgt nun

$$h_{1,f} = \left(\int_{\Omega_2} f_2\mathrm{d}\mu_2\right)\cdot f_1. \tag{15}$$

Wegen (8), (9) und (16) folgen mittels Teil *(d)* von Satz M.22.4.5 dann

$$h_{1,f} \in \mathscr{L}^1(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1; \mathbb{R}) \tag{16}$$

und

$$\int_{\Omega_1} h_{1,f}\mathrm{d}\mu_1 = \int_{\Omega_1}\left(\int_{\Omega_2} f_2\mathrm{d}\mu_2\right) f_1\mathrm{d}\mu_1 = \left(\int_{\Omega_2} f_2\mathrm{d}\mu_2\right)\cdot\left(\int_{\Omega_1} f_1\mathrm{d}\mu_1\right) = \prod_{k=1}^{2}\int_{\Omega_k} f_k\mathrm{d}\mu_k. \tag{17}$$

Wegen (8) und (9) folgt aus dem schon Gezeigten (vgl. (5)) dann

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_1 \times \Omega_2, \mathfrak{A}_1 \otimes \mathfrak{A}_2, \mu_1 \otimes \mu_2; \mathbb{R}\right). \tag{18}$$

Wegen (18) ergibt sich mittels Satz M.22.3.2 und (17) dann

$$\int\limits_{\Omega_1 \times \Omega_2} f \mathrm{d}\left(\mu_1 \otimes \mu_2\right) = \int\limits_{\Omega_1} h_{1,f} \mathrm{d}\mu_1 = \prod_{k=1}^{2} \int\limits_{\Omega_k} f_k \mathrm{d}\mu_k. \tag{19}$$

Im Fall $n = 2$ ist damit alles gezeigt. Sei nun $n \in \mathbb{N} \setminus \{1, 2\}$ und sei die Behauptung für ein $s \in \mathbb{N}_{2,n-1}$ bereits gezeigt. Bezeichnet g dann das Tensorprodukt von $(f_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,n-1}}$, so gelten also

$$g \in \mathscr{L}^1\left(\bigtimes_{k=1}^{n-1} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n-1} \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k; \mathbb{R}\right) \tag{20}$$

und

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k} g \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k\right) = \prod_{k=1}^{n-1} \int\limits_{\Omega_k} f_k \mathrm{d}\mu_k. \tag{21}$$

Aus den Definitionen der beteiligten Abbildungen erkennt man, das f das Tensorprodukt von g und f_n ist. Hieraus erkennt man wiederum bei Beachtung von (20) und $f_n \in (\Omega_n, \mathfrak{A}_n, \mu_n; \mathbb{R})$ aus dem schon für $n = 2$ Gezeigten, dann

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\left(\bigtimes_{k=1}^{n-1} \Omega_k\right) \times \Omega_n, \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mathfrak{A}_k\right) \otimes \mathfrak{A}_n, \left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k\right) \otimes \mu_n; \mathbb{R}\right) \tag{22}$$

sowie

$$\int\limits_{\left(\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k\right) \times \Omega_n} f \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k\right) \otimes \mu_n = \left[\int\limits_{\times_{k=1}^{n-1} \Omega_k} g \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k\right)\right] \cdot \left[\int\limits_{\Omega_n} f_n \mathrm{d}\mu_n\right]. \tag{23}$$

Aufgrund unserer Vereinbarung gilt

$$\left(\bigtimes_{k=1}^{n-1} \Omega_k\right) \times \Omega_n = \bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k. \tag{24}$$

Wegen Lemma M.24.1.7 gilt zudem

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mathfrak{A}_k\right) \otimes \mathfrak{A}_n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{25}$$

Wegen Satz M.24.1.17 gilt ferner

$$\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1} \mu_k\right) \otimes \mu_n = \bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k. \tag{26}$$

Wegen (24) und (26) folgt aus (22) dann

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\bigtimes_{k=1}^{n}\Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n}\mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n}\mu_k; \mathbb{R}\right) \tag{27}$$

sowie aus (23) und (21) weiterhin

$$\begin{aligned}\int\limits_{\left(\bigtimes_{k=1}^{n-1}\Omega_k\right)\times\Omega_n} f\mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)\otimes\mu_n &= \left[\int\limits_{\bigtimes_{k=1}^{n-1}\Omega_k} g\mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n-1}\mu_k\right)\right]\cdot\left[\int\limits_{\Omega_n} f_n\mathrm{d}\mu_n\right]\\ &= \left[\prod_{k=1}^{n-1}\int\limits_{\Omega_k} f_k\mathrm{d}\mu_k\right]\cdot\int\limits_{\Omega_n} f_n\mathrm{d}\mu_n\\ &= \prod_{k=1}^{n}\int\limits_{\Omega_k} f_k\mathrm{d}\mu_k.\end{aligned} \tag{28}$$

Wegen (27) und (28) ist dann der Induktionsschritt vollzogen. Im Fall $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ist somit alles bewiesen. Sei nun

$$\mathbb{K} = \overline{\mathbb{R}}. \tag{29}$$

Weiter sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{30}$$

Wegen (29) und (30) ist dann

$$f_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{31}$$

Sei nun

$$C_k \coloneqq \{|f_k| = +\infty\}. \tag{32}$$

Wegen (31) und (32) folgt mittels Satz M.22.5.5 dann

$$C_k \in \mathcal{N}_{\mu_k}. \tag{33}$$

Wegen (33) gilt dann $C_k \in \mathfrak{A}_k$ und somit, da $\mathfrak{A}_k$ eine σ-Algebra Ω_k ist, dann

$$\Omega_k \backslash C_k \in \mathfrak{A}_k. \tag{34}$$

Sei

$$\widetilde{f_k} \coloneqq 1_{\Omega_k\backslash C_k} f_k. \tag{35}$$

Wegen $f_k \in \mathcal{M}\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie (34) und (35) folgt mittels Bemerkung M.18.5 dann

$$\widetilde{f_k} \in \mathcal{M}\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{36}$$

Aus (32) und (35) folgt

$$\left\{f_k \neq \widetilde{f_k}\right\} = C_k. \tag{37}$$

Aus (33) und (37) folgt dann

$$\left\{f_k \neq \widetilde{f_k}\right\} \in \mathcal{N}_{\mu_k}. \tag{38}$$

Wegen (31), (36)und (38) folgen mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.3 dann

$$\widetilde{f}_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \overline{\mathbb{R}}\right) \tag{39}$$

und

$$\int\limits_{\Omega_k} \widetilde{f}_k \mathrm{d}\mu_k = \int\limits_{\Omega_k} f_k \mathrm{d}\mu_k. \tag{40}$$

Wegen (32) und (35) gilt

$$\widetilde{f}_k \in \mathrm{Abb}\left(\Omega_k, \mathbb{R}\right). \tag{41}$$

Aus (39) und (41) folgt nun

$$\widetilde{f}_k \in \mathscr{L}^1\left(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{R}\right). \tag{42}$$

Es bezeichne $\widetilde{f}$ das Tensorprodukt von $\left(\widetilde{f}_k\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Wegen (30) und (42) folgt aus dem schon Gezeigten (vgl. (27) und (28)) dann

$$\widetilde{f} \in \mathscr{L}^1\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k; \mathbb{R}\right) \tag{43}$$

sowie

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n}\Omega_k} \widetilde{f} \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right) = \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} \widetilde{f}_k \mathrm{d}\mu_k. \tag{44}$$

Wir zeigen nun, dass die linke Seite von (44) mit dem analogen Integral von f übereinstimmt. Sei hierzu

$$k \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{45}$$

Für

$$j \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{46}$$

sei

$$A_{jk} \coloneqq \begin{cases} \Omega_j, & \text{falls } j \in \mathbb{N}_{1,n} \setminus \{k\} \\ C_k, & \text{falls } j = k \end{cases}. \tag{47}$$

Da für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j ist, gilt $\Omega_j \in \mathfrak{A}_j$. Hieraus folgt in Verbindung mit (46), (47) und (33) dann

$$\bigtimes_{j=1}^{n} A_{jk} \in \bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j. \tag{48}$$

Wegen (45) bis (48), (30) und (33) folgt mittels Teil *(f)* von Bemerkung M.24.1.1 dann

$$\bigboxtimes_{j=1}^{n} A_{jk} \in \mathcal{N}_{\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j}. \tag{49}$$

Wegen (45) und (49) liefert Teil *(c)* von Satz M.5.1 dann

$$\bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_{jk}\right) \in \mathcal{N}_{\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j}. \tag{50}$$

Unter Beachtung von (37), (45), (46) und (47) folgt

$$\begin{aligned}\left\{f \neq \widetilde{f}\right\} &= \left\{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j \middle| \prod_{k=1}^{n} f_k(\omega_k) = \prod_{k=1}^{n} \widetilde{f}_k(\omega_k)\right\} \\ &\subseteq \left\{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j \middle| \exists k \in \mathbb{N}_{1,n} : f_k(\omega_k) \neq \widetilde{f}_k(\omega_k)\right\} \\ &= \left\{(\omega_1,\ldots,\omega_n) \in \bigtimes_{j=1}^{n} \Omega_j \middle| \exists k \in \mathbb{N}_{1,n} : \omega_k \in C_k\right\} \\ &= \bigcup_{k=1}^{n} \left(\bigtimes_{j=1}^{n} A_{jk}\right).\end{aligned} \tag{51}$$

Wegen (30) und (36) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.24.2.5 dann

$$\widetilde{f} \in \mathcal{M}\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k; \mathbb{R}\right). \tag{52}$$

Wegen *(a)* und (52) liefert Satz M.18.5

$$\left\{f \neq \widetilde{f}\right\} \in \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k. \tag{53}$$

Wegen (50), (51) und (53) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1

$$\left\{f \neq \widetilde{f}\right\} \in \mathcal{N}_{\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k}. \tag{54}$$

Wegen (43), *(a)* und (54) folgen mittels Teil *(b)* von Satz M.22.5.3

$$f \in \mathscr{L}^1\left(\bigtimes_{k=1}^{n} \Omega_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mathfrak{A}_k, \bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k; \mathbb{R}\right) \tag{55}$$

und

$$\int\limits_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} f \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right) = \int\limits_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} \widetilde{f} \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right). \tag{56}$$

Unter Verwendung von (56), (44), (30) und (40) folgt

$$\begin{aligned}\int\limits_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} f \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right) &= \int\limits_{\times_{k=1}^{n} \Omega_k} \widetilde{f} \mathrm{d}\left(\bigotimes_{k=1}^{n} \mu_k\right) \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} \widetilde{f}_k \mathrm{d}\mu_k \\ &= \prod_{k=1}^{n} \int\limits_{\Omega_k} f_k \mathrm{d}\mu_k.\end{aligned} \tag{57}$$

Wegen (55) und (57) ist dann *(d)* bewiesen.

Zu *(e)*: Aufgrund der Wahl von f ergibt sich mittels *(b)* dann

$$\mathcal{N}_{p,\mu_k}(f_k) \in [0,+\infty).$$

Hieraus folgt wegen Bemerkung M.22.6.3 dann

$$f_k \in \mathscr{L}^p(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K})$$

sowie wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.22.6.2 zu dem

$$f_k \notin \mathcal{M}_0(\Omega_k, \mathfrak{A}_k, \mu_k; \mathbb{K}).$$ □

Es folgen nun erste Anwendungen von Satz M.24.3.3, welche auf die Berechnung der Potenzmomente eines Produktmaßes ausgerichtet sind.

Satz M.24.3.4. *Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(k_1,\ldots,k_m) \in \mathbb{N}_0^m$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge von σ-endlichen Maßen auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ das* Carathéodorysche *Produktmaß von $(\mu_1)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^m \mu_j\right) = \prod_{j=1}^n \mathcal{M}_{k_j}(\mu_j).$$

(b) *Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei $\mathcal{M}_{k_j}(\mu_j) \in [0,+\infty)$. Dann ist*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^m \mu_j\right) \in [0,+\infty)$$

und es gilt

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^m \mu_j\right) = \prod_{j=1}^n M_{k_j}(\mu_j).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto \prod_{j=1}^m (x_j)^{k_j}. \tag{1}$$

Sei

$$(x_1,\ldots,x_m)^T \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\left((x_1,\ldots,x_m)^T\right) = \prod_{j=1}^m P_{k_j;\mathbb{R}}(x_j). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt weiterhin

$$\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\left((x_1,\ldots,x_m)^T\right)\right| = \prod_{j=1}^m \left|P_{k_j}\right|(x_j). \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.23.2.1 gilt für

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{5}$$

nun

$$\left|P_{k_j;\mathbb{R}}\right| \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{6}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathfrak{B}_1. \tag{7}$$

Wegen (4) bis (7) ergibt sich mittels Satz M.24.2.6 dann

$$\left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\right| \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{8}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} \left|P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\right| \mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}} \left|P_{k_j;\mathbb{R}}\right| \mathrm{d}\mu_j. \tag{9}$$

Wegen Definition M.23.2.1 aus (9) nun

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \mathcal{M}_{k_j}\left(\mu_j\right). \tag{10}$$

Zu *(b)*: Wegen (10) gilt

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) \in [0, +\infty). \tag{11}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{12}$$

Nach Voraussetzung gilt dann

$$\mathcal{M}_{k_j}\left(\mu_j\right) \in [0, +\infty). \tag{13}$$

Wegen (13) folgt bei Beachtung von Definition M.23.2.1 dann

$$P_{k_j;\mathbb{R}^m} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu; \mathbb{R}\right) \tag{14}$$

und

$$M_{k_j}\left(\mu_j\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} P_{k_j;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_j. \tag{15}$$

Wegen (2), (3), (7), (12) und (14) folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.24.3.3 dann

$$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \mathbb{R}\right)$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) = \prod_{j=1}^{m} \int\limits_{\mathbb{R}} P_{k_j;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu_j. \tag{16}$$

Wegen Definition M.23.3.1 gilt

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\int\limits_{\mathbb{R}^m}P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right). \tag{17}$$

Aus (15) bis (17) folgt dann

$$M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\prod_{j=1}^{m}M_{k_j}\left(\mu_j\right). \tag{18}$$

Wegen (11) und (18) ist *(b)* bewiesen. □

Satz M.24.3.5. *Seien $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Seien $s\in\mathbb{N}_{1,m}$ und $k\in\mathbb{N}_0$. Für $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ sei*

$$k_j:=\begin{cases}k, & \text{falls } j=s\\ 0, & \text{falls } j\neq s\end{cases}.$$

Dann gilt:

(a1) *Es ist*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\mathcal{M}_k\left(\mu_s\right).$$

(a2) *Sei $\mathcal{M}_k\left(\mu_s\right)\in[0,+\infty)$. Dann ist $\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\in[0,+\infty)$ und es gilt*

$$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=M_k\left(\mu_s\right).$$

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Für alle $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\mu_j\in\mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.*

(ii) *Es ist*

$$\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\in\mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right).$$

(c) *Sei $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\in\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$ und es gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\left(\mathcal{M}_1\left(\mu_1\right),\ldots,\mathcal{M}_1\left(\mu_m\right)\right)^T$$

sowie

$$\operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\operatorname{diag}\left(\operatorname{var}\left(\mu_1\right),\ldots,\operatorname{var}\left(\mu_m\right)\right).$$

(d) *Sei* $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *eine standardisierte Folge aus* $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$. *Dann ist*

$$\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$$

und es gelten

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = (0,\ldots,0)^T$$

sowie

$$\operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = \mathrm{I}_m.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{1}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.23.2.2 dann

$$\mathcal{M}_0\left(\mu_j\right) = \mu_j\left(\mathbb{R}\right) = 1. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.23.2.2 weiterhin

$$M_0\left(\mu_j\right) = \mu_j\left(\mathbb{R}\right) = 1. \tag{3}$$

Zu *(a1)*: Unter Beachtung von Teil *(a)* von Satz M.24.3.4 sowie (1) und (2) folgt

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) &= \prod_{j=1}^{m}\mathcal{M}_{k_j}\left(\mu_j\right) = \mathcal{M}_{k_s}\left(\mu_s\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{m}\mathcal{M}_{k_j}\left(\mu_j\right)\\
&= \mathcal{M}_{k_s}\left(\mu_s\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{m}\mathcal{M}_0\left(\mu_j\right)\\
&= \mathcal{M}_{k_s}\left(\mu_s\right)\prod_{\substack{j=1\\j\neq s}}^{m}1\\
&= \mathcal{M}_{k_s}\left(\mu_s\right).
\end{aligned}$$

Zu *(a2)*: Wegen $\mathcal{M}_{k_s}\left(\mu_s\right) \in [0,+\infty)$ sowie (1) und (2) folgt für

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{4}$$

dann

$$\mathcal{M}_{k_j}\left(\mu_j\right) \in [0,+\infty). \tag{5}$$

Wegen (4) und (5) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.24.3.4 sowie zusätzlicher Beachtung von (1) und (3) dann

$$\begin{aligned} M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) &= \prod_{j=1}^{m} M_{k_j}(\mu_j) = M_{k_s}(\mu_s)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m} M_{k_j}(\mu_j) \\ &= M_{k_s}(\mu_s)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m} M_0(\mu_j) \\ &= M_{k_s}(\mu_s)\prod_{\substack{j=1\\ j\neq s}}^{m} 1 \\ &= M_{k_s}(\mu_s). \end{aligned}$$

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a1)*.

Zu *(c)*: Wegen *(b)* folgt sogleich

$$\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{6}$$

Wegen (6) folgt mittels Satz M.23.5.1 dann

$$\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{7}$$

Sei

$$s \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{8}$$

Sei $\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto x_s. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (7) bis (9) setzen wir wie in Satz M.23.9.1 dann

$$\widetilde{M}_s\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\right) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right). \tag{10}$$

Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ sei nun

$$k_j \coloneqq \begin{cases} 1, & \text{falls } j = s \\ 0, & \text{falls } j \neq s \end{cases}. \tag{11}$$

Unter Beachtung von (7) bis (11), Definition M.23.2.1 und *(a2)* folgt dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = M_1(\mu_j). \tag{12}$$

Aus (8) und (12) folgt dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\left(\widetilde{M}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right),\ldots,\widetilde{M}_m\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right)^T=\left(\widetilde{M}_1\left(\mu_1\right),\ldots,\widetilde{M}_1\left(\mu_m\right)\right)^T. \tag{13}$$

Sei

$$(r,s)\in\mathbb{N}_{1,m}^2. \tag{14}$$

Wegen (6) und (14) gilt nach Teil *(b1)* von Satz M.23.9.3 nun

$$\widetilde{P}_{r,1;\mathbb{R}^m}\cdot\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m}\in\mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m,\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j;\mathbb{R}\right). \tag{15}$$

Unter Beachtung von (15) setzen wir dann

$$\widetilde{M}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\coloneqq\int\limits_{\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{r,1;\mathbb{R}^m}\widetilde{P}_{s,1;\mathbb{R}^m}\,\mathrm{d}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right). \tag{16}$$

Wegen Definition M.23.9.3 gilt dann

$$\mathrm{cov}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\widetilde{M}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)-\widetilde{M}_s\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\cdot\widetilde{M}_s\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right). \tag{17}$$

Sei

$$r\neq s. \tag{18}$$

Für $j\in\mathbb{N}_{1,m}$ sei

$$k_j\coloneqq\begin{cases}1, & \text{falls } j\in\{r,s\}\\ 0, & \text{falls } j\in\mathbb{N}_{1,m}\setminus\{r,s\}\end{cases}. \tag{19}$$

Unter Beachtung von (16), (17), (18) sowie Definition M.23.9.1 und Teil *(b)* von Satz M.24.3.4 folgt nun

$$\widetilde{M}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=M_{(k_1,\ldots,k_m)}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\prod_{j=1}^{m}M_{k_j}\left(\mu_j\right). \tag{20}$$

Wegen (19), (1) und (3) gilt für

$$j\in\mathbb{N}_{1,m} \tag{21}$$

nun

$$\begin{aligned}\widetilde{M}_{k_j}\left(\mu_j\right)&=\begin{cases}M_1\left(\mu_r\right), & \text{falls } j=r,\\ M_1\left(\mu_s\right), & \text{falls } j=s,\\ M_0\left(\mu_j\right), & \text{falls } j\in\mathbb{N}_{1,m}\setminus\{r,s\},\end{cases}\\ &=\begin{cases}M_1\left(\mu_r\right), & \text{falls } j=r,\\ M_1\left(\mu_s\right), & \text{falls } j=s,\\ 1, & \text{falls } j\in\mathbb{N}_{1,m}\setminus\{r,s\}.\end{cases}\end{aligned} \tag{22}$$

Aus (20) bis (22) folgt dann

$$\widetilde{M}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = M_1\left(\mu_r\right)M_1\left(\mu_s\right). \tag{23}$$

Unter Verwendung von (17), (23), (8) und (12) folgt nun

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) &= \widetilde{M}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) - \widetilde{M}_{s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\cdot\widetilde{M}_{s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\\ &= M_1\left(\mu_r\right)M_1\left(\mu_s\right) - M_1\left(\mu_r\right)M_1\left(\mu_s\right)\\ &= 0.\end{aligned} \tag{24}$$

Unter Beachtung von Definition M.23.9.3, (18) und (24) folgt dann

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) &= \left(\operatorname{cov}_{rs}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right)_{r,s\in\mathbb{N}_{1,m}}\\ &= \operatorname{diag}\left(\operatorname{cov}_{11}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right),\ldots,\operatorname{cov}_{mm}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right).\end{aligned} \tag{25}$$

Sei

$$s\in\mathbb{N}_{1,m}. \tag{26}$$

Weiter sei $\pi_{m;s}\colon\mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}$ definiert gemäß

$$\left(x_1,\ldots,x_m\right)^T\longmapsto x_s. \tag{27}$$

Unter Beachtung von (6), (26) und (27) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.9.6, dass $\pi_{m;s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung ist und $\pi_{m;s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\in\mathcal{M}_{+}^{1,2}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ erfüllt ist sowie mittels Teil *(a)* von Satz M.23.9.6 weiterhin

$$\operatorname{cov}_{ss}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = \operatorname{var}\left(\pi_{m;s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)\right). \tag{28}$$

Da $\left(\mu_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen ist, folgt mittels Satz M.24.1.19 dann

$$\pi_{m;s}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = \mu_s. \tag{29}$$

Aus (28) und (29) folgt dann

$$\operatorname{cov}_{ss}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right) = \operatorname{var}\left(\mu_s\right). \tag{30}$$

Aus (25) und (30) ergibt sich dann

$$\operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\operatorname{diag}\left(\operatorname{var}\left(\mu_1\right),\ldots,\operatorname{var}\left(\mu_m\right)\right). \tag{31}$$

Wegen *(b)*, (13) und (31) ist dann *(c)* bewiesen.

Zu *(d)*: Wegen *(c)* gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\in\mathcal{M}_{+}^{1,2}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right). \tag{32}$$

Sei

$$s\in\mathbb{N}_{1,m}. \tag{33}$$

Wegen (33) und der Wahl von μ_s gilt dann

$$M_1\left(\mu_s\right)=0 \tag{34}$$

und

$$\operatorname{var}\left(\mu_s\right)=1. \tag{35}$$

Wegen (32) sowie (34) bzw. (35) folgen aus (13) bzw. (31)

$$\widetilde{M}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\left(0,\ldots,0\right)^T \tag{36}$$

bzw.

$$\operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m}\mu_j\right)=\mathbf{I}_m. \tag{37}$$

Wegen (32), (36) und (37) ist dann alles bewiesen. □

Beispiel M.24.3.2. Sei $m\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ und seien die $\mathbb{R}^m$-Vektoren $\mathbf{a}=\left(a_1,\ldots,a_m\right)^T$ und $\mathbf{b}=\left(b_1,\ldots,b_m\right)^T$ so gewählt, dass $\mathbf{a}<\mathbf{b}$ erfüllt ist. Es sei $\Delta\coloneqq[\mathbf{a},\mathbf{b}]$ und es bezeichne μ_Δ die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ. Dann gilt:

(a) Sei $k\in\mathbb{N}$. Dann gilt $\mu_\Delta\in\mathcal{M}_{+}^{1,k}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$.

(b) Es gelten

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu_\Delta\right)=\frac{1}{2}\left(\mathbf{a}+\mathbf{b}\right)$$

sowie

$$\operatorname{cov}\left(\mu_\Delta\right)=\frac{1}{12}\operatorname{diag}\left(\left(b_1-a_1\right)^2,\ldots,\left(b_m-a_m\right)^2\right).$$

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu_\Delta\right)=\mathbf{0}_{m\times1}$ und $\operatorname{cov}\left(\mu_\Delta\right)=\mathbf{I}_m$.

(ii) Es ist $\mathbf{a}=-\sqrt{3}\cdot\mathbf{1}_m$ und $\mathbf{b}=\sqrt{3}\cdot\mathbf{1}_m$.

BEWEIS. Seien

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{1}$$

und

$$\Delta_j \coloneqq [a_j, b_j]\,. \tag{2}$$

Es bezeichne μ_{Δ_j} die kontinuierliche Gleichverteilung auf Δ_j. Wegen Teil *(a)* von Satz M.23.7.1 gilt dann

$$\mu_{\Delta_j} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Wegen Teil *(c)* von Satz M.23.7.1 gelten weiterhin

$$M_1\left(\mu_{\Delta_j}\right) = \frac{1}{2}\left(a_j + b_j\right) \tag{4}$$

sowie

$$\operatorname{var}\left(\mu_{\Delta_j}\right) = \frac{1}{12}\left(b_j - a_j\right)^2. \tag{5}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(c)* von Beispiel M.24.1.6 dann

$$\mu_\Delta = \bigotimes_{j=1}^{m} \mu_{\Delta_j}. \tag{6}$$

Zu *(a)*: Wegen (1), (3) und (6) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.24.3.5.

Zu *(b)*: Wegen *(a)* und (6) folgen mittels Teil *(c)* von Satz M.24.3.5 dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu_\Delta\right) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_j\right) = \left(M_1\left(\mu_{\Delta_1}\right), \ldots, M_1\left(\mu_{\Delta_m}\right)\right)^T \tag{7}$$

und

$$\operatorname{cov}\left(\mu_\Delta\right) = \operatorname{cov}\left(\bigotimes_{j=1}^{m} \mu_{\Delta_j}\right) = \operatorname{diag}\left(\operatorname{var}\left(\mu_{\Delta_1}\right), \ldots, \operatorname{var}\left(\mu_{\Delta_m}\right)\right). \tag{8}$$

Unter Beachtung von (7), (1) bzw. (8), (1) und (5) folgt

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mu_\Delta\right) = \left(\frac{1}{2}\left(a_1 + b_1\right), \ldots, \frac{1}{2}\left(a_m + b_m\right)\right)^T = \frac{1}{2}\left(\mathbf{a} + \mathbf{b}\right)$$

bzw.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\mu_\Delta\right) &= \operatorname{diag}\left(\frac{1}{12}\left(b_1 - a_1\right)^2, \ldots, \frac{1}{12}\left(b_m - a_m\right)^2\right)\\ &= \frac{1}{12}\operatorname{diag}\left(\left(b_1 - a_1\right)^2, \ldots, \left(b_m - a_m\right)^2\right).\end{aligned}$$

Zu *(c)*: Wegen Definition M.23.4.5 sowie (7) und (8) ist *(i)* äquivalent zu:

(i') Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ ist μ_{Δ_j} standardisiert.

Wegen Teil *(d)* von Satz M.23.7.1 ist *(i')* äquivalent zu:

(ii') Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\Delta_j \coloneqq \left[-\sqrt{3}, \sqrt{3}\right]$.

Da nun offensichtlich *(ii')* und *(ii)* äquivalent sind, gilt dies aufgrund unserer Herleitung auch für *(i)* und *(ii)*. □

M.24.4. Die m-dimensionale Normalverteilung

Das Ziel dieses Abschnitts besteht in der Bereitstellung eines mehrdimensionalen Analogons zur in Abschnitt M.22.13 eingeführten Familie von Normalverteilungen.

Bemerkung M.24.4.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Es sei $f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi \det \mathbf{\Sigma}}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1}\left(\mathbf{x}-\mathbf{a}\right)\right).$$

Dann gilt:

(a) Es ist

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m,|.|\right),\left(\mathbb{R},|.|\right)\right) \cap \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right).$$

(b) Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ derart, gewählt dass $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{\Sigma}$ erfüllt ist (z.B. $\mathbf{A} = \sqrt{\mathbf{\Sigma}}$). Dann gelten $\det \mathbf{A} \neq 0$ sowie

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right). \qquad \clubsuit$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Definition von $f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ erkennt man sofort, dass

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^m,|.|\right),\left(\mathbb{R},|.|\right)\right) \tag{1}$$

und

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \operatorname{Abb}\left(\mathbb{R}^m,(0,+\infty)\right). \tag{2}$$

Wegen (1) erbringt Satz M.16.8 dann

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m;\mathbb{R}\right).$$

Hieraus folgt mittels Bemerkung M.18.4 dann

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m;\overline{\mathbb{R}}\right). \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right). \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{\Sigma}$ gilt

$$\det \mathbf{\Sigma} = \det \mathbf{A}\mathbf{A}^T = \det \mathbf{A} \cdot \det \mathbf{A}^T = \left[\det \mathbf{A}\right]^2. \tag{5}$$

Wegen $\det \mathbf{\Sigma} \neq 0$ folgt aus (5) dann

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \tag{6}$$

sowie wegen $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{\Sigma}$ weiterhin

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \left(\mathbf{A}\mathbf{A}^T\right)^{-1} = \left(\mathbf{A}^T\right)^{-1}\mathbf{A}^{-1} = \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T\mathbf{A}^{-1}. \tag{7}$$

Sei

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (7) folgt dann

$$\begin{aligned}(\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{a}) &= (\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \left(\mathbf{A}^{-1}\right)^T \mathbf{A}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{a}) \\ &= \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right]^T \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right] \\ &= \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a}) - \mathbf{0}_{m\times 1}\right]^T \mathbf{I}_m^{-1} \left[\mathbf{A}^{-1}(\mathbf{x}-\mathbf{a})\right].\end{aligned} \tag{9}$$

Unter Beachtung von (5) und (9) folgt nun

$$\begin{aligned}&\left[\frac{1}{\det \mathbf{A}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right](\mathbf{x}) \\ =&\left[\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right](\mathbf{x}) \\ =&\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \\ =&\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \left(\mathbf{A}^{-1}\mathbf{x} - \mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}\right) \\ =&\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \left(\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}-\mathbf{a}]\right) \\ =&\frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \left[(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det \mathbf{I}_m}} \exp\left(\left(\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}-\mathbf{a}] - \mathbf{0}_{m\times 1}\right)^T \mathbf{I}_m^{-1} \left(\mathbf{A}^{-1}[\mathbf{x}-\mathbf{a}] - \mathbf{0}_{m\times 1}\right)^T\right)\right] \\ =&(2\pi)^{-\frac{m}{2}} \frac{1}{\sqrt{\det \boldsymbol{\Sigma}}} \exp\left((\mathbf{x}-\mathbf{a})^T \boldsymbol{\Sigma}^{-1} (\mathbf{x}-\mathbf{a})\right) \\ =&f_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{10}$$

Aus (8) und (10) folgt dann

$$f_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}} = \frac{1}{\det \mathbf{A}} f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}. \tag{11}$$

Wegen (6) und (11) ist damit *(b)* bewiesen. □

Teil *(a)* von Bemerkung M.24.4.1 führt uns zu folgender Begriffsbildung:

Definition M.24.4.1. Seien $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Es sei $f_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}$ die in Bemerkung M.24.4.1 eingeführte Abbildung aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}} := (\lambda^m)_{f_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}}.$$

Dann heißt $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}$ die *m-dimensionale Normalverteilung* mit den Parameter $\mathbf{a}$ und $\boldsymbol{\Sigma}$. Insbesondere wird $\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}$ die *m-dimensionale Standardnormalverteilung* bezeichnet.

Bemerkung M.24.4.2. Seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum_{j=1}^n m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ seien $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ und $\boldsymbol{\Sigma}_j \in \mathbb{R}_>^{m_j\times m_j}$. Weiter seien $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)^T$ sowie $\boldsymbol{\Sigma} := \operatorname{diag}(\boldsymbol{\Sigma}_1,\ldots,\boldsymbol{\Sigma}_n)$. Dann gelten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ sowie $\boldsymbol{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$ und mit der Bezeichnung von Bemerkung M.24.4.1 ist $f_{\mathbf{a},\boldsymbol{\Sigma}}$ das Tensorprodukt der Folge $\left(f_{\mathbf{a}_j,\boldsymbol{\Sigma}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. ♣

Beweis. Aus der Definition der beteiligten Größen folgt sogleich $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m \times m}$. Es ist

$$\det \mathbf{\Sigma} = \det\left(\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n\right)\right) = \prod_{j=1}^{n} \det \mathbf{\Sigma}_j \tag{1}$$

sowie

$$\mathbf{\Sigma}^{-1} = \left(\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n\right)\right)^{-1} = \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n^{-1}\right). \tag{2}$$

Sei

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_n\right)^T \in \mathbb{R}^m, \tag{3}$$

wobei für

$$j \in \mathbb{N}_{1,n} \tag{4}$$

hierbei

$$\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{m_j} \tag{5}$$

gewählt wurde. Unter Beachtung von (2) bis (5) folgt dann

$$\begin{aligned}\left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right) &= \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n \end{pmatrix}^T \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_1^{-1}, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n^{-1}\right) \begin{pmatrix} \mathbf{x}_1 - \mathbf{a}_1 \\ \vdots \\ \mathbf{x}_n - \mathbf{a}_n \end{pmatrix} \\ &= \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)^T \mathbf{\Sigma}_j^{-1} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right).\end{aligned} \tag{6}$$

Unter Beachtung von (1), der Funktionalgleichung der Exponentialfunktion sowie (6) folgt dann

$$\begin{aligned}&\prod_{j=1}^{n} f_{\mathbf{a}_j, \mathbf{\Sigma}_j}\left(\mathbf{x}_j\right) = \prod_{j=1}^{n} \left(2\pi\right)^{-\frac{m_j}{2}} \left(\det \mathbf{\Sigma}_j\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)^T \mathbf{\Sigma}_j^{-1} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)\right) \\ &= \left(2\pi\right)^{-\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{n} m_j} \left(\prod_{j=1}^{n} \det \mathbf{\Sigma}_j^{-1}\right)^{-\frac{1}{2}} \cdot \left[\prod_{j=1}^{n} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)^T \mathbf{\Sigma}_j^{-1} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)\right)\right] \\ &= \left(2\pi\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\det \mathbf{\Sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)^T \mathbf{\Sigma}_j^{-1} \left(\mathbf{x}_j - \mathbf{a}_j\right)\right) \\ &= \left(2\pi\right)^{-\frac{m}{2}} \left(\det \mathbf{\Sigma}\right)^{-\frac{1}{2}} \exp\left(-\frac{1}{2} \left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right)^T \mathbf{\Sigma}^{-1} \left(\mathbf{x} - \mathbf{a}\right)\right) \\ &= f_{\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}}\left(\mathbf{x}\right).\end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (3) bis (5) und (7) ist $f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ dann das Tensorprodukt der Folge $\left(f_{\mathbf{a}_j, \mathbf{\Sigma}_j}\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$. □

Lemma M.24.4.1. *Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathbf{I}_m}$ die m-dimensionale Standardnormalverteilung sowie $\mathcal{N}_{0,1}$ die Standardnormalverteilung. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathbf{I}_m} = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{0,1}.$$

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann ist*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \in \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right).$$

(c) *Es ist*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathbf{0}_{m\times 1}$$

sowie

$$\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathbf{I}_m.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.22.13.2 gilt

$$f_{0,1} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Wegen Definition M.22.13.1 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{0,1}}. \tag{2}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gilt

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^m \mathfrak{B}_1. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.24.4.2 ist $f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}$ das Tensorprodukt von m Exemplaren $f_{0,1}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (4) mittels Teil *(b)* von Satz M.24.2.5 dann erneut $f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie unter Beachtung von $f_{0,1} \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$ mittels Teil *(b)* von Satz M.24.2.7 zudem

$$\bigotimes_{j=1}^m \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,1}} = \left(\bigotimes_{j=1}^m \lambda^{(1)}\right)_{f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}}. \tag{5}$$

Wegen Folgerung M.24.1.2 gilt

$$\lambda^{(m)} = \bigotimes_{j=1}^m \lambda^{(1)}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von M.24.4.1, (6), (5) und (2) dann

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} &= \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}} = \left(\bigotimes_{j=1}^m \lambda^{(1)}\right)_{f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}} = \bigotimes_{j=1}^m \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,1}} \\ &= \bigotimes_{j=1}^m \mathcal{N}_{0,1}.\end{aligned} \tag{7}$$

Wegen (3) und (7) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(a)* von Satz M.23.7.2 gilt $\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Somit ist insbesondere

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.24.3.5 dann *(b)*.

Zu *(c)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.23.7.2 ist $\mathcal{N}_{0,1}$ ein standardisiertes Maß auf $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Hieraus folgt mittels Teil *(d)* von Satz M.24.3.5 dann die Behauptung von *(c)*. □

Unsere nächste Zielstellung besteht nun darin, unter Zugrundlegung von Lemma M.24.4.1 verschiedene Resultate für die allgemeine m-dimensionale Normalverteilung herzuleiten. Hierzu benötigen wir noch einige vorbereitende Resultate zur Bildung von Bildmaßen.

Satz M.24.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Weiterhin sei $T \in \mathrm{Abb}(\Omega, \Omega')$ eine Bijektion, welche $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}'$ messbar ist und für welche die Umkehrabbildung T^{-1} zudem $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-messbar ist. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann gelten*

$$f \circ T^{-1} \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}')$$

sowie

$$T(\mu_f) = [T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}.$$

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie der $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-Messbarkeit von T^{-1} liefert Teil *(b)* von Folgerung M.22.9.1 (angewandt auf $T(\mu)$ und T^{-1} statt μ und T) dann

$$f \circ T^{-1} \in \mathcal{E}^*(\Omega', \mathfrak{A}') \tag{1}$$

sowie

$$T^{-1}\left([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}\right) = \left(T^{-1}[T(\mu)]\right)_f. \tag{2}$$

Aufgrund der Wahl von T und T^{-1} ist $T^{-1} \circ T$ nach Satz M.16.11 dann $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}$-messbar und es gilt

$$\left(T^{-1} \circ T\right)(\mu) = T^{-1}[T(\mu)]. \tag{3}$$

Nach Konstruktion gilt

$$T^{-1} \circ T = \mathrm{id}_\Omega. \tag{4}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist id_Ω eine $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{A}$-messbare Abbildung und es gilt

$$(\mathrm{id}_\Omega)(\mu) = \mu. \tag{5}$$

Unter Verwendung von (5), (4) und (3) folgt nun

$$\mu = (\mathrm{id}_\Omega)(\mu) = \left(T^{-1} \circ T\right)(\mu) = T^{-1}[T(\mu)]. \tag{6}$$

Aus (2) und (6) folgt dann

$$T^{-1}\left([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}\right) = \mu_f. \tag{7}$$

Aufgrund der Wahl von T und T^{-1} ist $T \circ T^{-1}$ nach Satz M.16.11 dann $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}'$-messbar und es gilt

$$\left(T \circ T^{-1}\right)\left([T(\mu)]_{f \circ T^{-1}}\right) = T\left[T^{-1}\left([T(\mu)]\right)_{f \circ T^{-1}}\right]. \tag{8}$$

Nach Konstruktion gilt

$$T \circ T^{-1} = \mathrm{id}_{\Omega'}. \tag{9}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist $\mathrm{id}_{\Omega'}$ eine $\mathfrak{A}'$-$\mathfrak{A}'$-messbare Abbildung und es gilt

$$(\mathrm{id}_{\Omega'})\left([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}\right) = [T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (7) bis (10) folgt nun

$$\begin{aligned} T(\mu_f) &= T\left[T^{-1}[T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}\right] = \left(T\circ T^{-1}\right)\left([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}\right) = \mathrm{id}_{\Omega'}\left([T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}\right) \\ &= [T(\mu)]_{f\circ T^{-1}}. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen (1) und (11) ist dann alles gezeigt. □

Satz M.24.4.2. *Seien $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Weiterhin sei $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m\longrightarrow\mathbb{R}^m$ definiert gemäß $\mathbf{x}\longmapsto\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a}$. Dann ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\lambda^{(m)}\right) = \frac{1}{|\det\mathbf{A}|}\lambda^{(m)}.$$

Beweis. Siehe z.B. [Els11] von Elstrodt[1)], Kapitel 3, §2 oder [Bau92] von Bauer[2)], Satz 8.4. □

Lemma M.24.4.2. *Seien $k,l,m\in\mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{l\times m}$,$\mathbf{B}\in\mathbb{R}^{k\times l}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^l$ und $\mathbf{b}\in\mathbb{R}^k$. Dann gilt*

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} = T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}.$$

Beweis. Sei

$$\mathbf{x}\in\mathbb{R}^m. \tag{1}$$

Dann gilt

$$\begin{aligned} \left(T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)(\mathbf{x}) &= T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x})\right) = T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a}) = \mathbf{B}(\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a})+\mathbf{b} \\ &= \mathbf{BA}\mathbf{x}+\mathbf{Ba}+\mathbf{b} \\ &= T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}(\mathbf{x}). \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} = T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}.$$ □

Lemma M.24.4.3. *Seien $m\in\mathbb{N}$, $\mathbf{a}\in\mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A}\in\mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ bijektiv und es gilt*

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}^{-1} = T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}.$$

Beweis. Unter Beachtung von Lemma M.24.4.2 ergibt sich

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\circ T_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}} = T_{\mathbf{A}\mathbf{A}^{-1},\mathbf{A}(-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a})+\mathbf{a}} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}} \tag{1}$$

und

$$T_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} = T_{\mathbf{A}^{-1}\mathbf{A},\mathbf{A}^{-1}(-\mathbf{A}\mathbf{a})+\mathbf{a}} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{2}$$

Aus der Definition von $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}}$ folgt sogleich

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}. \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgen dann alle Behauptungen. □

[1)] Jürgen Elstrodt (∗08.04.1940) ist ein deutscher Mathematiker. Von Elstrodt stammt ein bekanntes Lehrbuch der Maß- und Integrationstheorie.

[2)] Heinz Bauer (∗31.01.1928; †15.08.2002) war ein deutscher Mathematiker, der sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie und Analysis beschäftigte. 1977 war er Präsident der Deutschen Mathematiker-Vereinigung.

Satz M.24.4.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\left(\lambda^{(m)}\right)_f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(b) *Seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ ein reguläre Matrix. Unter Beachtung von $\det \mathbf{A} \neq 0$ sei*

$$g_{\mathbf{A},\mathbf{a}} := \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right).$$

Dann gilt

$$g_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

(c) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\left(\lambda^{(m)}\right)_f\right) = \left(\lambda^{(m)}\right)_{g_{\mathbf{A},\mathbf{a}}}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(a)* von Satz M.22.2.4.

Zu *(b),(c)*: Wegen $\det \mathbf{A} \neq 0$ ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ nach Lemma M.24.4.3 dann bijektiv und es gilt

$$(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}})^{-1} = T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 und (1) sind $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ und $(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}})^{-1}$ dann jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Damit ergeben sich mittels Satz M.24.4.1 dann aber

$$f \circ (T_{\mathbf{A},\mathbf{a}})^{-1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{2}$$

und

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\left(\lambda^{(m)}\right)_f\right) = \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\lambda^{(m)}\right)\right]_{f\circ(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}})^{-1}}. \tag{3}$$

Wegen Satz M.24.4.2 gilt

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\lambda^{(m)}\right) = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\lambda^{(m)}. \tag{4}$$

Wegen (2) und $\frac{1}{|\det \mathbf{A}|} \in (0, +\infty)$ ist nach Satz M.22.2.5 dann

$$\frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right) \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{5}$$

und es gilt

$$\left(\lambda^{(m)}\right)_{\frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f\circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right)} = \left(\frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\lambda^{(m)}\right)_{f\circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}}. \tag{6}$$

Aufgrund der Definition von $g_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ folgen aus (5) und (6) dann

$$g_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{7}$$

und

$$\left(\lambda^{(m)}\right)_{g_{\mathbf{A},\mathbf{a}}} = \left(\frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\lambda^{(m)}\right)_{f\circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}}. \tag{8}$$

Unter Verwendung von (3), (1), (4) und (8) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\left(\lambda^{(m)}\right)_f\right) &= \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\lambda^{(m)}\right)\right]_{f\circ(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}})^{-1}} = \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\lambda^{m}\right)\right]_{f\circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}} \\ &= \left(\frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\lambda^{(m)}\right)_{f\circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}} \\ &= \left(\lambda^{m}\right)_{g_{\mathbf{A},\mathbf{a}}}. \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen (7) und (9) sind dann auch *(b)* und *(c)* bewiesen. □

Satz M.24.4.4. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern $\mathbf{a}$ und $\mathbf{\Sigma}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so gewählt, dass $\mathbf{A}\mathbf{A}^T = \mathbf{\Sigma}$ erfüllt ist. Weiter sei $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a}$ erklärt. Dann ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}.$$

(b) *Sei $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}^{1,k}_{+}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right).$$

(c) *Es ist*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathbf{a}$$

und

$$\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \Sigma.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.24.4.1 gelten

$$\det \mathbf{A} \neq 0 \tag{1}$$

und

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \frac{1}{|\det \mathbf{A}|}\left(f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \circ T_{\mathbf{A}^{-1},-\mathbf{A}^{-1}\mathbf{a}}\right). \tag{2}$$

Wegen $\mathbf{0}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{I}_m \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ gilt nach Teil *(a)* von Bemerkung M.24.4.1 dann

$$f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{3}$$

Wegen (1) bis (3) gilt nach Teil *(b)* von Satz M.24.4.3 dann $f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, während Teil *(b)* von Satz M.24.4.3 die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ sowie die Beziehung

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}}\right) = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}} \tag{4}$$

liefert. Wegen Definition M.24.4.1 gelten nun

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}} \tag{5}$$

und

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}}. \tag{6}$$

Aus (4) bis (6) folgt nun

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}. \tag{7}$$

Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(b)* von Lemma M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \in \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{8}$$

Wegen (7) und (8) ergibt sich mittels Satz M.16.11 dann

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}_+^{1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{9}$$

Wegen (7) bis (9) ergibt sich mittels Teil*(a)* von Satz M.23.9.2 dann

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}_+^{1,k}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right).$$

Zu *(c)*: Wegen (8) gilt insbesondere

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m} \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{10}$$

Wegen Teil *(c)* von Lemma M.24.4.1 gelten

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathbf{0}_{m\times 1} \tag{11}$$

und

$$\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathbf{I}_m. \tag{12}$$

Wegen (7), (10) und (11) bzw. (12) ergibt sich mittels Teil *(b)* bzw. Teil *(c)* von Satz M.23.9.11 dann

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\right) = \mathbf{A}\mathbf{0}_{m\times 1} + \mathbf{a} = \mathbf{a} \tag{13}$$

bzw.

$$\begin{aligned}\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) &= \operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\right) = \mathbf{A}\operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{A}\mathbf{I}_m\mathbf{A}^T = \mathbf{A}\mathbf{A}^T \\ &= \mathbf{\Sigma}.\end{aligned} \tag{14}$$

Wegen (13) und (14) ist dann *(c)* bewiesen. □

Folgerung M.24.4.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien die geordneten Paare $(\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_1)$ und $(\mathbf{a}_2, \mathbf{\Sigma}_2)$ aus $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}_>^{m\times m}$ so beschaffen, dass die Beziehung $\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{\Sigma}_1} = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2,\mathbf{\Sigma}_2}$ erfüllt ist. Dann gelten*

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{a}_2 \qquad \textit{und} \qquad \mathbf{\Sigma}_1 = \mathbf{\Sigma}_2.$$

Beweis. Unter Beachtung von Teil *(c)* von Satz M.24.4.4 gelten

$$\mathbf{a}_1 = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{\Sigma}_1}\right) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2,\mathbf{\Sigma}_2}\right) = \mathbf{a}_2$$

sowie

$$\mathbf{\Sigma}_1 = \operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{\Sigma}_1}\right) = \operatorname{cov}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2,\mathbf{\Sigma}_2}\right) = \mathbf{\Sigma}_2.$$ □

Satz M.24.4.5. *Seien* $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathbb{N}$ *und* $m := \sum_{j=1}^{n} m_j$. *Für* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *seien* $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ *und* $\mathbf{\Sigma}_j \in \mathbb{R}^{m_j\times m_j}_{>}$. *Weiterhin seien* $\mathbf{a} := (\mathbf{a}_1, \ldots, \mathbf{a}_n)^T$ *sowie* $\mathbf{\Sigma} := \operatorname{diag}(\mathbf{\Sigma}_1, \ldots, \mathbf{\Sigma}_n)$. *Dann gelten* $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ *und*

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \bigotimes_{j=1}^{m} \mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}.$$

Beweis. Wegen Bemerkung M.24.4.2 gelten $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,n}. \tag{1}$$

Sei $f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}$ wie in Bemerkung M.24.4.1 eingeführt. Wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.24.4.1 gilt dann

$$f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right). \tag{2}$$

Wegen Definition M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j} = \left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}}. \tag{3}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_m = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_{m_j}. \tag{4}$$

Wegen Bemerkung M.24.4.2 ist mit den Bezeichnungen von Bemerkung M.24.4.1 dann $f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ das Tensorprodukt der Folge $\left(f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Hieraus folgt bei Beachtung von (1), (2) und (4) mittels Teil *(b)* von Satz M.24.2.5 dann

$$f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$$

sowie unter Beachtung der Reellwertigkeit der Folge $\left(f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von Abbildungen mittels Teil *(b)* von Satz M.24.2.7 weiterhin

$$\bigotimes_{j=1}^{n} \left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}} = \left(\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}\right)_{f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}}. \tag{5}$$

Wegen Satz M.24.1.16 gilt

$$\lambda^{(m)} = \bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}. \tag{6}$$

Unter Beachtung von Definition M.24.4.1, (6), (5), (2) und (3) folgt dann

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}} = \left(\bigotimes_{j=1}^{n} \lambda^{(m_j)}\right)_{f_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}} = \bigotimes_{j=1}^{n} \left(\lambda^{(m_j)}\right)_{f_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}.$$

□

Wir studieren nun das Transformationsverhalten der m-dimensionalen Normalverteilung unter affinen Abbildungen $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ des $\mathbb{R}^m$ mit regulärem $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Lemma M.24.4.4. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann gilt*

$$\mathbf{B\Sigma B}^T \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}.$$

Beweis. Wegen $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ gilt $\mathbf{\Sigma} = \mathbf{\Sigma}^T$. Hieraus folgt nun

$$\left(\mathbf{B\Sigma B}^T\right)^T = \left(\mathbf{B}^T\right)^T \mathbf{\Sigma}^T \mathbf{B}^T = \mathbf{B\Sigma B}^T. \tag{1}$$

Sei

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}. \tag{2}$$

Wegen $\det \mathbf{B} = \det \mathbf{B}^T$ gilt $\det \mathbf{B}^T \neq 0$. Hieraus folgt wegen (2) nun

$$\mathbf{B}^T\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m\setminus\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}. \tag{3}$$

Wegen $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ folgt aus (3) dann

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right)^T \mathbf{\Sigma} \left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right) \in (0, +\infty). \tag{4}$$

Nun ist wegen (4) dann

$$\left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right)^T \mathbf{\Sigma} \left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{B\Sigma B}^T\mathbf{x} \in (0, +\infty). \tag{5}$$

Wegen (1), (2) und (5) gilt dann

$$\mathbf{B\Sigma B}^T \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}. \qquad \square$$

Satz M.24.4.6. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$. Weiter seien $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ und $\mathbf{B} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ eine reguläre Matrix. Dann ist $T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten $\mathbf{Ba} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{B\Sigma B}^T \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ sowie*

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{Ba}+\mathbf{b},\mathbf{B\Sigma B}^T}.$$

Beweis. Aus der Wahl von $\mathbf{B}$,$\mathbf{b}$ und $\mathbf{a}$ folgt sogleich

$$\mathbf{Ba} + \mathbf{b} \in \mathbb{R}^{m\times m}. \tag{1}$$

Wegen Lemma M.24.4.4 gilt

$$\mathbf{B\Sigma B}^T \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}. \tag{2}$$

Sei $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ so gewählt, dass

$$\mathbf{AA}^T = \mathbf{\Sigma}. \tag{3}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ dann eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und wegen (3) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.24.4.4 dann

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}. \tag{4}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}$ dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Aus (4) folgt nun

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\right). \tag{5}$$

Wegen Satz M.16.11 ist $T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\right) = \left(T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right). \tag{6}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} = T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}. \tag{7}$$

Nach (3) gilt zudem

$$(\mathbf{BA})\,(\mathbf{BA})^T = \mathbf{BAA}^T\mathbf{B}^T = \mathbf{B\Sigma B}^T. \tag{8}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}$ dann eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Wegen (1), (2) und (8) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.24.4.4 dann

$$T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{Ba}+\mathbf{b},\mathbf{B\Sigma B}^T}. \tag{9}$$

Unter Verwendung von (5), (6), (7) und (9) folgen dann

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) &= T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right)\right) = \left(T_{\mathbf{B},\mathbf{b}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\right)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) \\ &= T_{\mathbf{BA},\mathbf{Ba}+\mathbf{b}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}\right) \\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{Ba}+\mathbf{b},\mathbf{B\Sigma B}^T}. \end{aligned} \tag{10}$$

Wegen (1), (2) und (10) ist dann alles gezeigt. □

Folgerung M.24.4.2. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Dann ist $\sqrt{\mathbf{\Sigma}}$ eine reguläre Matrix aus $\mathbb{R}^{m\times m}$, $T_{\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1},-\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1},-\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}.\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}.$$

Beweis. Wegen $\sqrt{\mathbf{\Sigma}}\sqrt{\mathbf{\Sigma}} = \sqrt{\mathbf{\Sigma}}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^T = \mathbf{\Sigma}$ folgt aus Teil *(b)* Bemerkung M.24.4.1 dann

$$\det\sqrt{\mathbf{\Sigma}} \neq 0 \tag{1}$$

sowie unter Beachtung von $\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right)^T = \left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^T\right)^{-1} = \sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}$ weiterhin

$$\begin{aligned} \sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{\Sigma}\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right)^T &= \sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right)^T = \left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}\right)\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right) = \mathbf{I}_m \cdot \mathbf{I}_m \\ &= \mathbf{I}_m. \end{aligned} \tag{2}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1},-\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Unter Beachtung (1) ergeben sich mittels Satz M.24.4.6 sowie zusätzlicher Beachtung von (2) dann

$$\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{\Sigma}\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right)^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$$

und

$$T_{\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1},-\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a}-\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{a},\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\mathbf{\Sigma}\left(\sqrt{\mathbf{\Sigma}}^{-1}\right)^T} = \mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{I}_m}.$$ □

Folgerung M.24.4.3. *Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} = (a_1,\ldots,a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$. Weiter sei*

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & \cdots & m \\ i_1 & i_2 & \cdots & i_m \end{pmatrix}$$

eine Permutation der Menge $\mathbb{N}_{1,m}$ und die Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei definiert gemäß

$$(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto (x_{i_1},\ldots,x_{i_m})^T.$$

Dann ist $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$*-messbare Abbildung. Werden zusätzlich die Setzungen* $\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} \coloneqq (a_{i_1},\ldots,a_{i_m})^T$ *sowie* $\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m} = \left(\sigma_{i_j i_k}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ *vorgenommen, gelten zudem* $\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ *sowie*

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m},\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}}.$$

Beweis. Es bezeichne $\left(\mathbf{e}_j^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$. Es sei

$$\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m} \coloneqq \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(m)},\ldots,\mathbf{e}_{i_m}^{(m)}\right). \tag{1}$$

Aus (1) folgt dann

$$\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T \mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m} = \mathbf{I}_m.$$

Somit ist

$$\det \mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T \neq 0. \tag{2}$$

Aus (1) und der Definition von $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ folgt

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m} = T_{\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) ist wegen Satz M.24.4.6 dann $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten $\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m} \cdot \mathbf{\Sigma} \cdot \mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ sowie

$$\begin{aligned}
\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) &= T_{\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) \\
&= \mathcal{N}_{\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\mathbf{a}+\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\right)^T} \\
&= \mathcal{N}_{\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\mathbf{a},\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\right)^T}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Aus (1) folgen sogleich

$$\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T \mathbf{a} = \mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} \tag{5}$$

und

$$\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T \mathbf{\Sigma}\left(\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m}^T\right)^T = \mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}. \tag{6}$$

Aus (4) bis (6) folgt dann

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m},\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}}. \qquad \square$$

Unsere nächste Überlegung ist nun darauf gerichtet, Bildmaße m-dimensionaler Normalverteilungen unter speziellen affinen Abbildungen des $\mathbb{R}^m$ zu berechnen. Hierzu stellen wir zunächst einige matrizentheoretischen Resultate von eigenständigen Interesse bereit.

Satz M.24.4.7. *Seien* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$. *Weiter seien* $\mathbf{A}_{1,2} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, $\mathbf{A}_{1,2} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1}$ *und* $\mathbf{A}_{2,2} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$. *Es sei*

$$\mathbf{A} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{A}_{1,1} & \mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{A}_{2,2} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(a) *Sei* $\det \mathbf{A}_{1,1} \neq 0$. *Dann gilt:*

(a1) *Es gilt*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

(a2) *Es gilt*

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}\left(\mathbf{A}_{1,1}, \mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ -\mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(a3) *Es gilt*

$$\det \mathbf{A} = \det \mathbf{A}_{1,1} \cdot \det\left(\mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right).$$

(a4) *Es gilt*

$$\operatorname{Rang} \mathbf{A} = \operatorname{Rang} \mathbf{A}_{1,1} + \operatorname{Rang}\left(\mathbf{A}_{2,2} - \mathbf{A}_{2,1}\mathbf{A}_{1,1}^{-1}\mathbf{A}_{1,2}\right).$$

(b) *Sei* $\det \mathbf{A}_{2,2} \neq 0$. *Dann gilt:*

(b1) *Es ist*

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2}^{-1} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbf{A}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2}^{-1}\mathbf{A}_{2,1}, \mathbf{A}_{2,2}\right) \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ \mathbf{A}_{2,2}^{-1}\mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

(b2) *Es ist*

$$\begin{aligned} &\operatorname{diag}\left(\mathbf{A}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2}^{-1}\mathbf{A}_{2,1}, \mathbf{A}_{2,2}\right) \\ &= \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2}^{-1} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ -\mathbf{A}_{2,2}^{-1}\mathbf{A}_{2,1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

(b3) *Es gilt*

$$\det \mathbf{A} = \det\left(\mathbf{A}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2,}^{-1}\mathbf{A}_{2,1}\right) \cdot \det \mathbf{A}_{2,2}.$$

(b4) *Es gilt*

$$\operatorname{Rang} \mathbf{A} = \operatorname{Rang}\left(\mathbf{A}_{1,1} - \mathbf{A}_{1,2}\mathbf{A}_{2,2,}^{-1}\mathbf{A}_{2,1}\right) + \operatorname{Rang} \mathbf{A}_{2,2}.$$

Folgerung M.24.4.4. *Seien* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ *sowie* $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}$. *Dann gelten*

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \cdot \operatorname{diag}\left(\mathbf{I}_{m_2}, \mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{X}^T\mathbf{X}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{X} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}$$

sowie

$$\begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{X} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{X} \\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} \operatorname{diag}\left(\mathbf{I}_{m_1} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T, \mathbf{I}_{m_2}\right) \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2} \\ \mathbf{X}^T & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Satz M.24.4.8. *Seien* $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$ *und* $\mathbf{a} \coloneqq (\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2)^T$. *Weiter seien die Matrizen* $\mathbf{\Sigma}_{1,1} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_1}$, $\mathbf{\Sigma}_{1,2} \in \mathbb{R}^{m_1\times m_2}$, $\mathbf{\Sigma}_{2,1} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1}$ *und* $\mathbf{\Sigma}_{2,2} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_2}$ *so gewählt, dass mit den Setzungen* $m \coloneqq m_1 + m_2$ *und*

$$\mathbf{\Sigma} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{\Sigma}_{1,1} & \mathbf{\Sigma}_{1,2} \\ \mathbf{\Sigma}_{2,1} & \mathbf{\Sigma}_{2,2} \end{bmatrix}$$

die Beziehung $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_{>}^{m\times m}$ *besteht. Dann gilt:*

(a) *Es gelten* $\mathbf{\Sigma}_{1,1} \in \mathbb{R}_{>}^{m_1 \times m_1}$ *und* $\det \mathbf{\Sigma}_{1,1} \neq 0$ *sowie* $\mathbf{\Sigma}_{2,2} \in \mathbb{R}_{>}^{m_2 \times m_2}$ *und* $\det \mathbf{\Sigma}_{2,2} \neq 0$.

(b) *Sei*

$$\mathbf{C} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1 \times m_2} \\ -\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(b1) *Es ist*

$$\det \mathbf{C} = 1.$$

(b2) *Es ist* $T_{\mathbf{C},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$*-messbare Abbildung und es gelten*

$$\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right) \in \mathbb{R}_{>}^{m \times m}$$

sowie

$$T_{\mathbf{C},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right)}.$$

(b3) *Sei* $\mathbf{E}_{m_1,m_2} \coloneqq [\mathbf{I}_{m_1}, \mathbf{O}_{m_1 \times m_2}]$. *Dann ist* $T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2},\mathbf{0}_{m_1\times 1}}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_1}$*-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2},\mathbf{0}_{m_1\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1,\mathbf{\Sigma}_{1,1}}.$$

(c) *Sei*

$$\mathbf{D} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{\Sigma}_{1,2}\mathbf{\Sigma}_{2,2}^{-1} \\ \mathbf{O}_{m_1 \times m_2} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix}.$$

Dann gilt:

(c1) *Es ist*

$$\det \mathbf{D} = 1.$$

(c2) *Es ist* $T_{\mathbf{D},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$*-messbare Abbildung und es gelten*

$$\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1} - \mathbf{\Sigma}_{1,2}\mathbf{\Sigma}_{2,2}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2}\right) \in \mathbb{R}_{>}^{m \times m}$$

sowie

$$T_{\mathbf{D},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 - \mathbf{\Sigma}_{1,2}\mathbf{\Sigma}_{2,2}^{-1}\mathbf{a}_2 \\ \mathbf{a}_2 \end{bmatrix}, \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1} - \mathbf{\Sigma}_{1,2}\mathbf{\Sigma}_{2,2}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2}\right)}.$$

(c3) *Sei* $\mathbf{F}_{m_1,m_2} \coloneqq [\mathbf{O}_{m_2 \times m_1}, \mathbf{I}_{m_2}]$. *Dann ist* $T_{\mathbf{F}_{m_1,m_2},\mathbf{0}_{m_2\times 1}}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_{m_2}$*-messbare Abbildung und es gilt*

$$T_{\mathbf{F}_{m_1,m_2},\mathbf{0}_{m_2\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2,\mathbf{\Sigma}_{2,2}}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der linearen Algebra.

Zu *(b1)*: Dies folgt aus der Gestalt von $\mathbf{C}$.

Zu *(b2)*: Wegen *(b1)* folgt mittels Satz M.24.4.6, dass $T_{\mathbf{C},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung ist sowie die Beziehungen $\mathbf{Ca}+\mathbf{0}_{m\times 1}\in\mathbb{R}^m$,

$$\mathbf{C\Sigma C}^T\in\mathbb{R}_>^{m\times m} \tag{1}$$

und

$$T_{\mathbf{C},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right)=\mathcal{N}_{\mathbf{Ca}+\mathbf{0}_{m\times 1},\mathbf{C\Sigma C}^T} \tag{2}$$

bestehen. Es ist

$$\mathbf{Ca}+\mathbf{0}_{m\times 1}=\mathbf{Ca}=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2}\\ -\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1\end{bmatrix}. \tag{3}$$

Wegen $\mathbf{\Sigma}\in\mathbb{R}_>^{m\times m}$ gilt $\mathbf{\Sigma}^T=\mathbf{\Sigma}$. Hieraus folgen

$$\mathbf{\Sigma}_{1,1}^T=\mathbf{\Sigma}_{1,1} \tag{4}$$

und

$$\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T=\mathbf{\Sigma}_{1,2}. \tag{5}$$

Aus (5) und (4) folgen nun

$$\left(-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\right)^T=-\left(\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\right)^T=-\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\right)^T\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T=-\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}^T\right)^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T=-\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T. \tag{6}$$

Unter Verwendung von (6) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathbf{C}^T&=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2}\\ -\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}^T=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1}^T & \left(-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\right)^T\\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1}^T & \mathbf{I}_{m_2}^T\end{bmatrix}\\ &=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T\\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}.\end{aligned} \tag{7}$$

Unter Verwendung von (7) sowie Teil *(a2)* von Satz M.24.4.7 ergibt sich

$$\begin{aligned}\mathbf{C\Sigma C}^T&=\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1\times m_2}\\ -\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}\cdot\mathbf{\Sigma}\cdot\begin{bmatrix}\mathbf{I}_{m_1} & -\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{2,1}^T\\ \mathbf{O}_{m_2\times m_1} & \mathbf{I}_{m_2}\end{bmatrix}\\ &=\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1},\mathbf{\Sigma}_{2,2}-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right).\end{aligned} \tag{8}$$

Aus (8) folgt dann

$$\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1},\mathbf{\Sigma}_{2,2}-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right)\in\mathbb{R}_>^{m\times m}. \tag{9}$$

Aus (2), (3) und (8) folgt weiterhin

$$T_{\mathbf{C},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right)=\mathcal{N}_{\begin{bmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1\end{bmatrix},\operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1},\mathbf{\Sigma}_{2,2}-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right)}. \tag{10}$$

Damit ist *(b2)* bewiesen.

Zu *(b3)*: Wegen (9) gilt

$$\mathbf{\Sigma}_{2,2}-\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\in\mathbb{R}_>^{m_2\times m_2}. \tag{11}$$

Wegen $\mathbf{\Sigma}_{1,1} \in \mathbb{R}_{>}^{m_1 \times m_1}$ folgt mittels Satz M.24.4.5 dann

$$\begin{aligned} &\mathcal{N}_{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right)} \\ =&\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}}. \end{aligned} \tag{12}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.24.4.4 gelten

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{13}$$

und

$$\mathcal{N}_{\mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^{m_2}, \mathfrak{B}_{m_2}\right). \tag{14}$$

Unter Beachtung der Identifikation von $\mathbb{R}^m$ mit $\mathbb{R}^{m_1} \times \mathbb{R}^{m_2}$ erkennt man, dass $T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}$ gerade die Projektion von $\mathbb{R}^m$ auf $\mathbb{R}^{m_1}$ vermittelt. Berücksichtigt man dies, so ergibt sich wegen (12) bis (14) mittels Satz M.24.1.19

$$T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}}. \tag{15}$$

Aus der Definition der beteiligten Matrizen folgt

$$\mathbf{E}_{m_1,m_2} \cdot \mathbf{C} = [\mathbf{I}_{m_1}, \mathbf{O}_{m_1 \times m_2}] \cdot \begin{bmatrix} \mathbf{I}_{m_1} & \mathbf{O}_{m_1 \times m_2} \\ -\mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1} & \mathbf{I}_{m_2} \end{bmatrix} = [\mathbf{I}_{m_1}, \mathbf{O}_{m_1 \times m_2}] = \mathbf{E}_{m_1,m_2}. \tag{16}$$

Unter Verwendung von Lemma M.24.4.3 und (16) folgt

$$\begin{aligned} T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}} \circ T_{\mathbf{C}, \mathbf{0}_{m \times 1}} &= T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2} \cdot \mathbf{C}, \mathbf{E}_{m_1,m_2} \cdot \mathbf{0}_{m \times 1} + \mathbf{0}_{m_1 \times 1}} = T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2} \cdot \mathbf{C}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}} \\ &= T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}. \end{aligned} \tag{17}$$

Unter Verwendung von (17), der nach Satz M.16.11 vorliegenden Transitivität der Bildung von Bildmaßen sowie von (10), (12) und (15) folgt dann

$$\begin{aligned} &T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}}\right) \\ =&\left(T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}} \circ T_{\mathbf{C}, \mathbf{0}_{m \times 1}}\right)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}}\right) = T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}\left[T_{\mathbf{C}, \mathbf{0}_{m \times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}, \mathbf{\Sigma}}\right)\right] \\ =&T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}\left(\mathcal{N}_{\begin{bmatrix} \mathbf{a}_1 \\ \mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1 \end{bmatrix}, \operatorname{diag}\left(\mathbf{\Sigma}_{1,1}, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}\right)}\right) \\ =&T_{\mathbf{E}_{m_1,m_2}, \mathbf{0}_{m_1 \times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}} \otimes \mathcal{N}_{\mathbf{a}_2 - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{2,2} - \mathbf{\Sigma}_{2,1}\mathbf{\Sigma}_{1,1}^{-1}\mathbf{\Sigma}_{1,2}}\right) \\ =&\mathcal{N}_{\mathbf{a}_1, \mathbf{\Sigma}_{1,1}}. \end{aligned}$$

Damit ist *(b3)* bewiesen.

Zu *(c)*: Der Beweis von *(c1)* bis *(c3)* kann analog zum Beweis von *(b1)* bis *(b3)* geführt werden. □

Folgerung M.24.4.5. *Seien* $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ *und* $\mathbf{\Sigma} = (\sigma_{jk})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. *Weiter seien* $s \in \mathbb{N}_{1,m-1}$ *und* $(i_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus* $\mathbb{N}_{1,m}$. *Die Abbildung* $\pi_{m;i_1,\ldots,i_s}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^s$ *sei definiert gemäß*

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_s})^T .$$

Dann ist $\pi_{m;i_1,\ldots,i_s}$ *eine* $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$*-messbare Abbildung. Werden zudem die Setzungen* $\mathbf{a}_{m;i_1,\ldots,i_s} \coloneqq (a_{i_1}, \ldots, a_{i_s})^T$ *sowie* $\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s} \coloneqq \left(\sigma_{i_j i_k}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ *vorgenommen, so gelten außerdem* $\mathbf{a}_{m;i_1,\ldots,i_s} \in \mathbb{R}^s$, $\Sigma_{m;i_1,\ldots,i_s} \in \mathbb{R}_>^{s\times s}$ *und*

$$\pi_{m;i_1,\ldots,i_s}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{m;i_1,\ldots,i_s},\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s}}.$$

Beweis. Seien $i_{s+1}, \ldots, i_m$ die $m-s$ paarweise verschiedenen Elemente der Folge $(i_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ aus $\mathbb{N}_{1,m}\backslash\{i_1, \ldots, i_s\}$. Weiter seien $\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} \coloneqq (a_{i_1}, \ldots, a_{i_m})^T$ und $\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m} = \left(\sigma_{i_j i_k}\right)_{j,k\in\mathbb{N}_{1,m}}$. Die Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})^T .$$

Wegen Folgerung M.24.4.3 liegt dann $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ vor und es gelten

$$\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}^m$$

und

$$\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathbb{R}_>^{m\times m} \tag{1}$$

sowie

$$\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m},\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}}. \tag{2}$$

Setzen wir $\mathbf{b} \coloneqq \left(a_{i_{s+1}}, \ldots, a_m\right)^T$, so ist dann also

$$\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m} = \begin{pmatrix} \mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_s} \\ \mathbf{b} \end{pmatrix}. \tag{3}$$

Sei $\mathbf{E}_{s,m-s} \coloneqq \left(\mathbf{I}_s, \mathbf{O}_{s\times(m-s)}\right)$. Dann ist

$$\mathbf{E}_{s,m-s}\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}\mathbf{E}_{s,m-s}^T = \mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s}, \tag{4}$$

das heißt es ist $\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s}$gerade der $s \times s$-Block in der linken oberen Ecke von $\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}$. Wegen (1) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.24.4.8 dann

$$\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s} \in \mathbb{R}_>^{s\times s}. \tag{5}$$

Wegen Teil *(b3)* von Satz M.24.4.8 ergibt sich die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}}$ sowie unter Beachtung von (3) und (4) weiterhin

$$T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m},\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{m;i_1,\ldots,i_s},\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s}}. \tag{6}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sogleich

$$\pi_{m;i_1,\ldots,i_s} = T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}} \circ \pi_{i_1,\ldots,i_m}. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (7), Satz M.16.11, (2) und (6) ergeben sich dann die $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-Messbarkeit von $\pi_{m;i_1,\ldots,i_s}$ sowie

$$\begin{aligned}\pi_{m;i_1,\ldots,i_s}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) &= T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}} \circ \pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right)\\ &= T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}}\left(\pi_{i_1,\ldots,i_m}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right)\right)\\ &= T_{\mathbf{E}_{s,m-s},\mathbf{0}_{s\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_{i_1,\ldots,i_m},\mathbf{\Sigma}_{i_1,\ldots,i_m}}\right)\\ &= \mathcal{N}_{\mathbf{a}_{m;i_1,\ldots,i_s},\mathbf{\Sigma}_{m;i_1,\ldots,i_s}}.\end{aligned}$$

□

Folgerung M.24.4.6. *Seien $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$, $n \in \mathbb{N}_{2,m}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ mit $\sum_{j=1}^n m_j = m$. Weiter seien $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_>$. Wir betrachten die Blockeinteilungen $\mathbf{a} = (\mathbf{a}_1,\ldots,\mathbf{a}_n)^T$, in der für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ gerade $\mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde, sowie $\mathbf{\Sigma} = (\mathbf{\Sigma}_{j,k})_{j,k\in\mathbb{N}_{1,n}}$, in der für $(j,k) \in \mathbb{N}_{1,n}\times\mathbb{N}_{1,n}$ gerade $\mathbf{\Sigma}_{j,k} \in \mathbb{R}^{m_j\times m_k}$ gewählt wurde. Sei $s \in \mathbb{N}_{1,n}$ und sei $\widetilde{\pi}_{m;j}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^{m_j}$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x} = (\mathbf{x}_1,\ldots\mathbf{x}_n)^T \longmapsto \mathbf{x}_j,$$

wobei hier für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ wieder $\mathbf{x}_j \in \mathbb{R}^{m_j}$ gewählt wurde.
Dann ist $\widetilde{\pi}_{m;s}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_s$-messbare Abbildung und es gelten

$$(\mathbf{a}_s, \mathbf{\Sigma}_{s,s}) \in \mathbb{R}^{m_s} \times \mathbb{R}^{m_s\times m_s}_>$$

sowie

$$\widetilde{\pi}_{m;s}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{a}_s,\mathbf{\Sigma}_{s,s}}.$$

Beweis. Dies ist ein Spezialfall von Folgerung M.24.4.5. □

M.24.5. Marginalmaße

Wir betrachten in diesem Abschnitt zu vorgegebenen $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ eine Folge $((\Omega_j,\mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von nichttrivialen messbaren Räumen. Ist nun $\nu \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$, so interessieren wir uns für die Bildmaße von ν, welche sich unter Projektionsabbildungen auf entsprechende Teilkomponenten ergeben.

Wir präzisieren nun diesen Gedankengang und stellen zunächst einen Sachverhalt bereit, der zur Einführung der entscheidenden Begriffsbildungen benötigt wird.

Satz M.24.5.1. *Seien $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und $(\Omega_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichtleeren Mengen. Weiter sei $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $(i_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$. Die Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}\colon \times_{j=1}^m \Omega_j \longrightarrow \times_{k=1}^n \Omega_{i_k}$ sei definiert gemäß*

$$(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_m}).$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $\pi_{i_1,\ldots,i_m} = \bigotimes_{k=1}^m \pi_{i_k}$.*

(b) *Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ sei $\mathfrak{A}_j$ eine σ-Algebra in Ω_j. So ist $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ eine $\left[\bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right]$-$[\bigotimes_{k=1}^m \mathfrak{A}_{i_k}]$-messbare Abbildung.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt unmittelbar aus der Definition der Produktabbildung (vergleiche Definition M.17.2) sowie den Bildungsgesetzen für $\pi_{i_1,\dots,i_m}$ und $\pi_{i_1},\dots,\pi_{i_m}$.

Zu *(b)*: Wegen Definition M.17.1 gilt

$$\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j = \sigma_{\times_{j=1}^{n}\Omega_j}\left[\bigcup_{j=1}^{n} p_j^{-1}\left(\mathfrak{A}_j\right)\right].$$

Hieraus folgt für $k \in \mathbb{N}_{1,m}$ dann $p_{i_k}^{-1}\left(\mathfrak{A}_{i_k}\right) \subseteq \bigotimes_{j=1}^{m}\mathfrak{A}_j$, also $\left[\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right]$-$\mathfrak{A}_{i_k}$-Messbarkeit von p_{i_k}. Hieraus folgt mittels Satz M.17.4 dann die $\left[\bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right]$-$[\bigotimes_{k=1}^{m}\mathfrak{A}_{i_k}]$-Messbarkeit von $\bigotimes_{k=1}^{m}\pi_{i_k}$. Daraus folgt wegen *(a)* die Behauptung von *(b)*. □

Satz M.24.5.1 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.24.5.1. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen sowie $\nu \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$. Weiterhin seien $m \in \mathbb{N}_{1,n}$ und $(i_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ eine Folge paarweise verschiedener Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,n}$. Es sei $\pi_{i_1,\dots,i_m}\colon \times_{j=1}^{n}\Omega_j \longrightarrow \times_{k=1}^{m}\Omega_k$ definiert gemäß

$$(\omega_1,\dots,\omega_n) \longmapsto (\omega_{i_1},\dots,\omega_{i_m}).$$

Dann heißt das Bildmaß $\pi_{i_1,\dots,i_m}(\nu)$ das zur Folge $(i_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,m}}$ gehörige *Marginalmaß von* ν.

Sei $k \in \mathbb{N}_{1,n}$. So hat die Menge $\mathbb{N}_{1,n}$ genau $\binom{n}{k}$ k-elementige Teilmengen. Somit gibt es genau $k!\binom{n}{k}$ geordnete k-Tupel, welche ohne Wiederholung aus den Elementen von $\mathbb{N}_{1,n}$ zusammengestellt werden können. Dies impliziert, dass jedes Maß $\nu \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$ genau $\sum_{k=1}^{n} k!\binom{n}{k}$ Marginalmaße besitzt.

Es entsteht nun in natürlicher Weise die Frage, inwieweit das Maß ν durch gewisse Teile dieser Marginalmaße bestimmt ist. Die oben aufgezeigte Struktur des Systems der Marginalmaße eines Maßes macht bereits deutlich, dass es schwierig erscheint, ein Maß aus gewissen Marginalmaßen zu rekonstruieren. Wir formulieren exemplarisch das vielleicht einfachste inverse Marginalproblem.

Kanonisches inverses Marginalproblem. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von nichttrivialen Maßräumen. Dann ist die Menge $\mathcal{K}\left((\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$ aller derjenigen Maße $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^{n}\Omega_j, \bigotimes_{j=1}^{n}\mathfrak{A}_j\right)$ anzugeben, welche für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ der Bedingung $\pi_j(\mu) = \mu_j$ genügen.

Bemerkung M.24.5.1. Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $\left((\Omega_j,\mathfrak{A}_j,\mu_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge von Wahrscheinlichkeitsräumen. Dann gilt:

(a) Es ist $\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j \in \mathcal{K}\left((\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$.

(b) Es ist $\mathcal{K}\left((\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right) \neq \varnothing$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Satz M.24.1.19.

Zu *(b)*: Dies folgt aus *(a)*. □

Bemerkung M.24.5.2. Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $k \in \mathbb{N}_{1,m}$ und $(i_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,k}}$ eine Folge von paarweise verschiedenen Zahlen aus $\mathbb{N}_{1,m}$. Es sei $\pi_{m;i_1,\ldots,i_k}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^k$ definiert gemäß

$$(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto (x_{i_1},\ldots,x_{i_k})^T.$$

Es bezeichne $\left(\mathbf{e}_j^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ die kanonische Basis des $\mathbb{R}^m$ und es sei

$$\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_k} \coloneqq \begin{bmatrix} \mathbf{e}_{i_1}^T \\ \mathbf{e}_{i_2}^T \\ \vdots \\ \mathbf{e}_{i_k}^T \end{bmatrix}.$$

Dann gilt

$$\pi_{m;i_1,\ldots,i_k} = T_{\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_k},\mathbf{0}_{k\times 1}}. \qquad \clubsuit$$

Beweis. Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen. □

Wir geben nun ein Beispiel zweier verschiedener Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^2,\mathfrak{B}_2\right)$ an, welche dieselben eindimensionalen Marginalmaße besitzen.

Beispiel M.24.5.1. Seien

$$\mu \coloneqq \frac{1}{4}\left[\varepsilon_{(0,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \varepsilon_{(0,1)^T,\mathfrak{B}_2} + \varepsilon_{(1,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \varepsilon_{(1,1)^T,\mathfrak{B}_2}\right]$$

sowie

$$\nu \coloneqq \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{(0,0)^T,\mathfrak{B}_2} + \varepsilon_{(1,1)^T,\mathfrak{B}_2}\right].$$

Dann gilt:

(a) Es gelten $\mu,\nu \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^2,\mathfrak{B}_2\right)$ sowie $\mu \neq \nu$.

(b) Sei $\pi_{2;1}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ bzw. $\pi_{2;2}\colon \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1,x_2)^T \longmapsto x_1$$

bzw.

$$(x_1,x_2)^T \longmapsto x_2.$$

So sind $\pi_{2;1}$ und $\pi_{2;2}$ jeweils $\mathfrak{B}_2$-$\mathfrak{B}_1$-messbar und es gelten

$$\pi_{2;1}(\nu) = \pi_{2;1}(\mu)$$

sowie

$$\pi_{2;2}(\nu) = \pi_{2;2}(\mu),$$

denn es ist $\pi_{2;1}(\mu) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_2}\right]$ und $\pi_{2;2}(\mu) = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}\right]$.

(c) Es gelten $\frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}+\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_2}\right] \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\mu = \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}+\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_2}\right] \otimes \frac{1}{2}\left[\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}+\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_2}\right].$$

Seien $m \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern $\mathbf{a}$ und $\mathbf{\Sigma}$. Blicken wir nochmals auf die Folgerungen M.24.4.3 und M.24.4.5 zurück, so liefern diese uns das *vollständige* System aller Marginalmaße von $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$. Insbesondere erhalten wir also, dass jedes Marginalmaß von $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ selbst wieder eine Normalverteilung ist. Die Umkehrung hiervon gilt im Allgemeinen nicht, denn es gibt von den Normalverteilungen verschiedene Wahrscheinlichkeitsmaße $\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m\right)$ deren eindimensionale Marginalmaße gerade sämtlich Normalverteilungen sind.

Wir behandeln nun eine Fragestellung vom inversen Typ.

Beispiel M.24.5.2. Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a}_1 \in \mathbb{R}^{m_1}$, $\mathbf{a}_2 \in \mathbb{R}^{m_2}$, $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}_>^{m_1\times m_1}$ und $\mathbf{\Sigma}_2 \in \mathbb{R}_>^{m_2\times m_2}$. Weiterhin sei

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{\Sigma}_1,\mathbf{\Sigma}_2\right) \coloneqq \left\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1} \,\middle|\, \begin{bmatrix}\mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{X}^T\\ \mathbf{X} & \mathbf{\Sigma}_2\end{bmatrix} \in \mathbb{R}_>^{(m_1+m_2)\times(m_1+m_2)}\right\}.$$

Sei $\mathbf{X} \in \mathcal{L}\left(\mathbf{\Sigma}_1,\mathbf{\Sigma}_2\right)$. Dann gilt

$$\mathcal{N}_{\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{a}_1\\ \mathbf{a}_2\end{smallmatrix}\right],\left[\begin{smallmatrix}\mathbf{\Sigma}_1 & \mathbf{X}^T\\ \mathbf{X} & \mathbf{\Sigma}_2\end{smallmatrix}\right]} \in \mathcal{K}\left(\left(\mathcal{N}_{\mathbf{a}_j,\mathbf{\Sigma}_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,2}}\right).$$

Beweis. Dies folgt aus den Teilen *(b3)* und *(c3)* von Satz M.24.4.8. □

Satz M.24.5.2. *Seien $m_1, m_2 \in \mathbb{N}$ sowie*

$$\mathbb{D}_{m_2\times m_1;\mathbb{R}} \coloneqq \left\{\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{m_2\times m_1} \,\middle|\, \mathbf{I}_{m_2} - \mathbf{X}\mathbf{X}^T \in \mathbb{R}_>^{m_2\times m_2}\right\}.$$

Weiter seien $\mathbf{\Sigma}_1 \in \mathbb{R}_>^{m_1\times m_1}$, $\mathbf{\Sigma}_2 \in \mathbb{R}_>^{m_2\times m_2}$ sowie $\mathcal{L}\left(\mathbf{\Sigma}_1,\mathbf{\Sigma}_2\right)$ wie in Beispiel M.24.5.2 definiert. Dann gilt

$$\mathcal{L}\left(\mathbf{\Sigma}_1,\mathbf{\Sigma}_2\right) = \left\{\sqrt{\mathbf{\Sigma}_2}\cdot\mathbf{K}\cdot\sqrt{\mathbf{\Sigma}_1} \,\middle|\, \mathbf{K} \in \mathbb{D}_{m_2\times m_1;\mathbb{R}}\right\}.$$

M.25. Die Faltung in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Das Faltungskonzept ist von großer Bedeutung für weite Teile der Analysis und Stochastik.Unsere Zielstellung ist auf eine Anwendung der Faltungsoperation in der Stochastik ausgerichtet. In verschiedenen Kontexten der Wahrscheinlichkeitstheorie spielen endliche Summen von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen auf einen Wahrscheinlichkeitsraum $(\Omega, \mathfrak{A}, P)$ eine signifikante Rolle. Bei der Berechnung der Verteilung einer solchen Summe wird man in natürlicher Art und Weise auf die Faltung einer endlichen Folge von Maßen aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ geführt.

Eines der Hauptziele dieses Kapitels ist es, den Nachweis dafür zu erbringen, dass die Menge $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit der Faltungsoperation, zu einer kommutativen Halbgruppe mit Einselement wird. Weiterhin werden wir interessante Unterhalbgruppen diskutieren.

M.25.1. Kernabbildungen zwischen messbaren Räumen

Die im vorliegenden Abschnitt eingeführte Begriffsbildung einer Kernabbildung zwischen messbaren Räumen spielt eine Schlüsselrolle in weiten Bereichen der Stochastik und fungiert darüber hinaus als Bindeglied an der Nahtstelle zwischen Stochastik und Potentialtheorie.

Wir beschränken uns in diesem Abschnitt lediglich auf eine erste Einführung in die Theorie der Kernabbildungen unter dem Aspekt ihrer Anwendungen auf die Faltungsoperation in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Definition M.25.1.1. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume. Weiterhin sei $K\colon \Omega \times \mathfrak{A}' \longrightarrow [0, +\infty]$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für jedes $A' \in \mathfrak{A}'$ gilt $K_{\bullet A'} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$.

(II) Für jedes $\omega \in \Omega$ gilt $K_{\omega\bullet} \in \mathcal{M}_+(\Omega', \mathfrak{A}')$.

Dann heißt K ein *Kern von* $(\Omega, \mathfrak{A})$ nach $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Im Fall $(\Omega, \mathfrak{A}) = (\Omega', \mathfrak{A}')$ spricht man auch kurz von einem *Kern auf* $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Definition M.25.1.2. Seien $(\Omega, \mathfrak{A})$ und $(\Omega', \mathfrak{A}')$ nicht triviale messbare Räume sowie K ein Kern von $(\Omega, \mathfrak{A})$ nach $(\Omega', \mathfrak{A}')$. Dann heißt K *markovsch* bzw. *submarkovsch*, falls für alle $\omega \in \Omega$ gilt

$$K((\omega, \Omega')) = 1$$

bzw.

$$K((\omega, \Omega')) \in [0, 1].$$

Beispiel M.25.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum. Es sei $I\colon \Omega \times \mathfrak{A} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$(\omega, A) \longmapsto \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}(A).$$

Dann gilt:

(a) Sei $A \in \mathfrak{A}$. Dann gilt $I_{\bullet A} = 1_A$.

(b) Sei $\omega \in \Omega$. Dann gilt $I_{\omega\bullet} = \varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$.

(c) I ist ein Markov-Kern auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Beispiel M.25.1.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.25.1.3. Sei $(\Omega, \mathfrak{A})$ ein nichttrivialer messbarer Raum und bezeichne I, den in Beispiel M.25.1.1 eingeführten Kern auf $(\Omega, \mathfrak{A})$. Dann heißt I der *Einheitskern* auf $(\Omega, \mathfrak{A})$.

Wir betrachten nun zwei nicht triviale messbare Räume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$, einen Kern K von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ sowie ein Maß $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Das Ziel der nächsten Überlegung besteht dann darin, eine Möglichkeit aufzuzeigen, mit deren Hilfe das Maß μ auf $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ mittels K in natürlicher Weise in ein Maß $\mu^{(K)}$ auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ überführt werden kann.

Satz M.25.1.1. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nicht triviale messbare Räume sowie K ein Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $A_2 \in \mathfrak{A}_2$. Dann gilt $K_{\bullet A_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$.*

(b) *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Unter Beachtung von* (a) *sei die Abbildung $\mu^{(K)}\colon \mathfrak{A}_2 \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß*

$$A_2 \longmapsto \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} \mathrm{d}\mu.$$

Dann ist

$$\mu^{(K)} \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2).$$

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Definition M.25.1.1.

Zu *(b)*: Sei

$$\omega_1 \in \Omega_1. \tag{1}$$

Aus (1) und der Wahl von K folgt dann

$$K_{\omega_1 \bullet} \in \mathcal{M}_+(\Omega_2, \mathfrak{A}_2). \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$K_{\omega_1 \bullet}(\varnothing) = 0. \tag{3}$$

Nach Konstruktion gilt

$$K_{\bullet \varnothing}(\omega_1) = K((\omega_1, \varnothing)) = K_{\omega_1 \bullet}(\varnothing). \tag{4}$$

Aus (1), (2) und (4) folgt dann

$$K_{\bullet \varnothing} = 1_{\varnothing}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (5) und Beispiel M.22.1.1 folgt dann

$$\mu^{(K)}(\varnothing) = \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet \varnothing} \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\Omega_1} 1_{\varnothing} \mathrm{d}\mu = 0. \tag{6}$$

Sei nun $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ eine Folge paarweiser disjunkter Mengen aus $\mathfrak{A}_2$. Wegen (1) und (2) gilt dann

$$K_{\omega_1 \bullet}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} K_{\omega_1 \bullet}(B_n). \tag{7}$$

Nach Konstruktion gelten nun

$$K_{\bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n}(\omega_1) = K\left(\left(\omega_1, \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right)\right) = K_{\omega_1 \bullet}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) \tag{8}$$

sowie für

$$n \in \mathbb{N} \tag{9}$$

weiterhin

$$K_{\bullet B_n}(\omega_1) = K((\omega_1, B_n)) = K_{\omega_1 \bullet}(B_n). \tag{10}$$

Aus (1) sowie (7) bis (10) folgt dann

$$K_{\bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} = \sum_{n=1}^{\infty} K_{\bullet B_n}. \tag{11}$$

Da $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathfrak{A}_2$ ist, ist $(K_{\bullet B_n})_{n\in\mathbb{N}}$wegen *(a)* eine Folge aus $\mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$. Hieraus ergibt sich mittels Folgerung M.22.2.4

$$\sum_{n=1}^{\infty} K_{\bullet B_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1) \tag{12}$$

sowie

$$\int_{\Omega_1} \left[\sum_{n=1}^{\infty} K_{\bullet B_n}\right] \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_1} K_{\bullet B_n} \mathrm{d}\mu\right]. \tag{13}$$

Wegen (11) folgt aus (12) bzw. (13) dann $K_{\bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \in \mathcal{E}^*(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ sowie

$$\int_{\Omega_1} K_{\bullet \bigcup_{n=1}^{\infty} B_n} \mathrm{d}\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\int_{\Omega_1} K_{\bullet B_n} \mathrm{d}\mu\right]. \tag{14}$$

Unter Verwendung der Definition von $\mu^{(K)}$ und (14) folgt nun

$$\mu^{(K)}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} B_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(K)}(B_n).$$

Somit ist $\mu^{(K)}$ also σ-additiv und damit unter Beachtung von (6) ein Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. □

Folgerung M.25.1.1. *Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nichttrivale messbare Räume, K ein Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ nach $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ und $\omega_1 \in \Omega_1$. Mit den Bezeichnungen von Satz M.25.1.1 gilt dann*

$$(\varepsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1})^{(K)} = K_{\omega_1 \bullet}.$$

Beweis. Sei

$$A_2 \in \mathfrak{A}_2. \tag{1}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(a)* von Satz M.25.1.1 dann

$$K_{\bullet A_2} \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A}). \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Beispiel M.22.2.2 dann

$$\int_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} \mathrm{d}\varepsilon_{\omega_1, \mathfrak{A}_1} = K_{\bullet A_2}(\omega_1). \tag{3}$$

Unter Beachtung der Definition von $(\varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{A}_1})^{(K)}$ sowie von (3) folgt dann

$$(\varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{A}_1})^{(K)}(A_2) = \int\limits_{\Omega_1} K_{\bullet A_2} \mathrm{d}\varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{A}_1} = K_{\bullet A_2}(\omega_1) = K((\omega_1, A_2)) = K_{\omega_1 \bullet A_2}. \tag{4}$$

Aufgrund von (4) folgt dann

$$(\varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{A}_1})^{(K)} = K_{\omega_1 \bullet}. \qquad \square$$

Interpretation (von Satz M.25.1.1). Seien $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ nicht triviale messbare Räume sowie K ein Kern von $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$. Dann wird die Integrationsprozedur von Satz M.25.1.1 vielfach als ein durch den Kern K gesteuerter Diffusionsvorgang interpretiert, in dessen Ergebnis ein gegebenes Maß μ auf $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1)$ in ein Maß $\mu^{(K)}$ auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$ überführt wird.

In Fortsetzung dieses Gedankengangs erlaubt Folgerung M.25.1.1 dann eine Interpretation des Kerns K selbst: Für ein gegebenes $\omega_1 \in \Omega_1$ beschreibt nämlich $K_{\omega_1 \bullet}$ genau jenes Maß auf $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2)$, in welches das Dirac-Maß $\varepsilon_{\omega_1,\mathfrak{A}_1}$ durch den durch K gesteuerten Diffusionsprozess überführt wird. ♣

M.25.2. Definition und Eigenschaften der Faltung in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Wir betrachten in diesem Abschnitt bei vorgegebenen $m \in \mathbb{N}$ und $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ Folgen $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unser Ziel besteht dann in der Konstruktion und ersten Diskussion eines speziellen Bildmaßes des CARATHÉODORYschen Produktmaßes $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$.

Unsere Konstruktion basiert auf folgender Beobachtung:

Bemerkung M.25.2.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$. Die Abbildung $A_{m,n}\colon \mathbb{R}^{n\cdot m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei folgendermaßen definiert: Wir unterteilen $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^{n\cdot m}$ in $m \times 1$-Blöcke gemäß

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T\right)^T$$

und definieren

$$A_{m,n}(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^n \mathbf{x}_j.$$

Dann gilt:

(a) Sei $\mathbf{E}_{m,n} := (\mathbf{I}_m, \ldots, \mathbf{I}_m) \in \mathbb{R}^{m\times n\cdot m}$. Dann gilt

$$A_{m,n} = T_{\mathbf{E}_{m,n}, \mathbf{0}_{m\times 1}}.$$

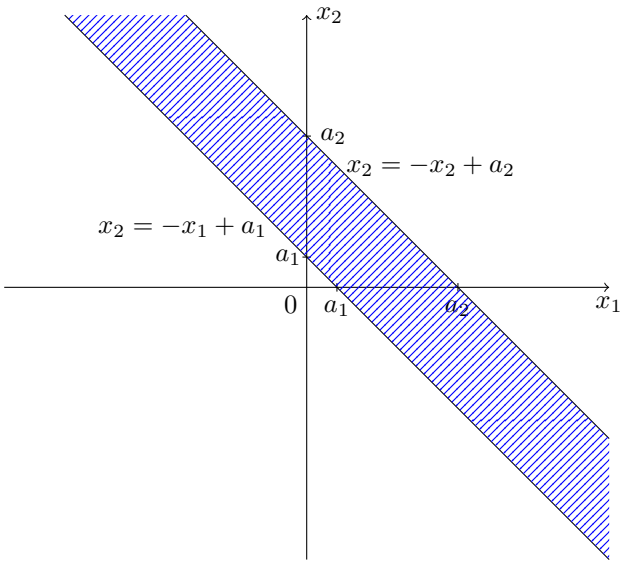
(b) Es ist $A_{m,n}$ eine $\mathfrak{B}_{n\cdot m}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. ♣

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Dies wegen *(a)* aus Teil *(b)* von Satz M.16.9. $\square$

Skizze. Seien $a_1 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \in (a_1, +\infty)$. Dann ist $[a_1, a_2] \in \mathfrak{B}_1$ und $A_{1,2}^{-1}([a_1, a_2])$ ist der schraffierte Streifen in der folgenden Abbildung:



Es ist nämlich

$$\begin{aligned} A_{1,2}^{-1}\left([a_1,a_2]\right) &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, (x_1+x_2) \in [a_1,a_2] \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, a_2 \leq x_1+x_2 \leq a_2 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, -x_1+a_1 \leq x_2 \right\} \cap \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \,\middle|\, x_2 \leq -x_1+a_2 \right\}. \end{aligned}$$

Dies ist gerade der Durchschnitt zweier Halbebenen.

Bemerkung M.25.2.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.25.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\bigotimes_{j=1}^n \mu_j$ das CARATHÉODORYsche Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$. Weiterhin bezeichne $A_{m,n}$ die in Bemerkung M.25.2.1 eingeführte $\mathfrak{B}_{m\cdot n}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Dann wird das Bildmaß

$$A_{m,n}\left(\bigotimes_{j=1}^n \mu_j\right)$$

als das *Faltungsprodukt* oder auch als die *Faltung* der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bezeichnet und durch

$$\bigstar_{j=1}^n \mu_j$$

oder auch durch

$$\mu_1 \star \mu_2 \star \ldots \star \mu_n$$

symbolisiert.

Bemerkung M.25.2.2. Seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:

(a) Es gilt

$$\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right)(\mathbb{R}^m) = \prod_{j=1}^{n} \mu_j(\mathbb{R}^m).$$

(b) Es ist $\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Es bezeichne $\mathfrak{o}$ das Nullmaß aus $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j = \mathfrak{o}$.

(ii) Es gibt ein $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ mit $\mu_j = \mathfrak{o}$.

(d) Sei $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Unter Beachtung von Satz M.16.10 und Teil *(a)* von Bemerkung M.24.1.1 ergibt sich

$$\begin{aligned}\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right)(\mathbb{R}^m) &= \left[A_{m,n}\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\right)\right](\mathbb{R}^m) = \left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\right)(\mathbb{R}^{n\cdot m}) = \left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j\right)\left(\bigtimes_{j=1}^{n} \mathbb{R}^m\right)\\ &= \prod_{j=1}^{n} \mu_j(\mathbb{R}^m).\end{aligned}$$

Zu *(b)*-*(d)*: Dies folgt unmittelbar aus *(a)*. □

Unsere nächsten Überlegungen sind dem Studium der Integration von *nichtnegativen* Funktionen bezüglich des Faltungsprodukts *zweier* Maße gewidmet.

Satz M.25.2.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiterhin sei $A_{m,2}\colon \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow \mathbb{R}^m$ die gemäß $(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T \longmapsto \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2$ definierte $\mathfrak{B}_{2m}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Dann gilt:*

(a) *Sei $F := f \circ A_{m,2}$. Dann gelten $F \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m}\right)$ und*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} F \mathrm{d}(\mu_1 \otimes \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d}(\mu_1 \star \mu_2).$$

(b) *Sei $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $F_{\mathbf{x}_1 \bullet} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(c) *Unter Beachtung von* (b) *sei die Abbildung $g_{1,F}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x}_1 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1 \bullet} \mathrm{d}\mu_2.$$

Dann ist $g_{1,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d}(\mu_1 \star \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{1,F} \mathrm{d}\mu_1.$$

(d) *Sei* $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$. *Dann gilt* $F_{\bullet \mathbf{x}_2} \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(e) *Unter Beachtung von* (d) *sei die Abbildung* $g_{2,F} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ *definiert gemäß*

$$\mathbf{x}_2 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet \mathbf{x}_2} \mathrm{d}\mu_1.$$

Dann ist $g_{2,F} \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ *und es gilt*

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d} (\mu_1 \star \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F} \mathrm{d}\mu_2.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen $f \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.1 gilt nach Satz M.22.9.1 dann $F \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie unter zusätzlicher Beachtung von Definition M.25.2.1 weiterhin

$$\begin{aligned} \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d} (\mu_1 \star \mu_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d} (A_{m,2} (\mu_1 \otimes \mu_2)) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (f \circ A_{m,2}) \, \mathrm{d} (\mu_1 \otimes \mu_2) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} F \mathrm{d} (\mu_1 \otimes \mu_2) . \end{aligned}$$

Zu *(b)*-*(e)*: Wegen *(a)* folgt *(b)*-*(e)* unmittelbar aus Satz M.24.2.3 (Satz von Tonelli). □

Unsere nächste Zielstellung lässt sich wie folgt formulieren:

Seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann möchten wir einen Kern $K_{\mu_2,\star}$ auf dem messbaren Raum $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ konstruieren, welcher die Eigenschaft besitzt, dass für ein beliebiges Maß $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Faltung $\mu_1 \star \mu_2$ gerade in den durch Satz M.25.1.1 suggerierten Weise gewonnen wird, also für $B \in \mathfrak{B}_m$ die Beziehung

$$(\mu_1 \star \mu_2) (B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,\star})_{\bullet B} \, \mathrm{d}\mu_1$$

besteht. Hierzu ist noch eine kleine Vorbereitung nötig.

Bemerkung M.25.2.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $B \in \mathfrak{B}_m$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}$$

und weiterhin sei

$$B - \mathbf{a} \coloneqq \{\mathbf{x} - \mathbf{a} \,|\, \mathbf{x} \in B\} .$$

Dann gilt:

(a) Es ist $B - \mathbf{a} = (T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})^{-1} (B)$.

(b) Es ist $B - \mathbf{a} \in \mathfrak{B}_m$.

(c) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+ (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}} (\mu) \in \mathcal{M}_+ (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

sowie

$$[T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}} (\mu)] (B) = \mu (B - \mathbf{a}) . \qquad \clubsuit$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Wegen $\det \mathbf{I}_m \neq 0$ ist nach Lemma M.24.4.3 die Abbildung $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$bijektiv und es gilt

$$(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})^{-1} = T_{(\mathbf{I}_m)^{-1},-(\mathbf{I}_m)^{-1}\mathbf{a}} = T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}. \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) folgt dann

$$B - \mathbf{a} = \{\mathbf{x} - \mathbf{a} \,|\, \mathbf{x} \in B\} = \{T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}(\mathbf{x}) \,|\, \mathbf{x} \in B\} = T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}(B) = (T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})^{-1}(B).$$

Zu *(b)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Somit ist $(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})^{-1}(B) \in \mathfrak{B}_m$, also wegen *(a)* dann $B - \mathbf{a} \in \mathfrak{B}_m$.

Zu *(c)*: Wegen Satz M.16.10 ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unter Beachtung von *(a)* folgt dann

$$[T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu)](B) = \mu\left((T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})^{-1}(B)\right) = \mu(B - \mathbf{a}). \qquad \square$$

Satz M.25.2.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unter Beachtung von Teil* (b) *von Bemerkung M.25.2.3 sei die Abbildung $K_{\mu_2,\bigstar}\colon \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß $(\mathbf{x}, B) \longmapsto \mu_2(B - \mathbf{x})$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $K_{\mu_2,\bigstar}$ ein Kern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und für $(\mathbf{x}, B) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m$ gilt*

$$K_{\mu_2,\bigstar}((\mathbf{x}, B)) = [T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}}(\mu_2)](B).$$

(b) *Sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $K_{\mu_2,\bigstar}((x, \mathbb{R}^m)) = \mu_2(\mathbb{R}^m)$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *$K_{\mu_2,\bigstar}$ ist markovsch.*

(ii) *$\mu_2 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *$K_{\mu_2,\bigstar}$ ist submarkovsch.*

(iv) *$\mu_2(\mathbb{R}^m) \in [0,1]$.*

(e) *Sei $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $B \in \mathfrak{B}_m$. Dann ist $(K_{\mu_2,\bigstar})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt*

$$(\mu_1 \star \mu_2)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,\bigstar})_{\bullet B} \, \mathrm{d}\mu_1.$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Sei

$$(\mathbf{x}, B) \in \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m. \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) und Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.3 ergibt sich

$$K_{\mu_2,\bigstar}((\mathbf{x}, B)) = \mu_2(B - \mathbf{x}) = [T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}}(\mu_2)](B). \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann

$$(K_{\mu_2,\bigstar})_{\mathbf{x}\bullet} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}}(\mu_2). \tag{3}$$

Wegen Satz M.16.10 ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt wegen (3) dann

$$(K_{\mu_2,\bigstar})_{\mathbf{x}\bullet} \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{4}$$

Wegen (1) folgt aufgrund den Bemerkungen M.19.8 und M.19.3 für

$$f \coloneqq 1_B \tag{5}$$

dann

$$f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{6}$$

Sei

$$F \coloneqq f \circ A_{m,2}. \tag{7}$$

Weiter sei

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m. \tag{8}$$

Wegen (6) bis (8) liefert Teil *(d)* von Satz M.25.2.1 dann

$$F_{\mathbf{x}_1\bullet} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{9}$$

Unter Beachtung von (9) sei die Abbildung $g_{1,F}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß

$$\mathbf{x}_1 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1\bullet}\mathrm{d}\mu_2. \tag{10}$$

Wegen $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie (6) bis (10) folgt mittels Teils *(c)* von Satz M.25.2.1 dann

$$g_{1,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{11}$$

Wir berechnen nun die Funktion $g_{1,F}$. Sei hierzu

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m. \tag{12}$$

Wegen (12) folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.3 dann

$$T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(B) = B - \mathbf{x}_1. \tag{13}$$

Sei

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{14}$$

Unter Beachtung von (7), (5) und (13) folgt dann

$$\begin{aligned}
F_{\mathbf{x}_1\bullet}(\mathbf{x}_2) &= F\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right) = (f\circ A_{m,2})\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right) = f\left(A_{m,2}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right)\right)\\
&= f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = f\left(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2)\right) = 1_B\left(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2)\right)\\
&= \begin{cases}1, & \text{falls } T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2)\in B,\\ 0, & \text{falls } T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2)\in \mathbb{R}^m\backslash B\end{cases}\\
&= \begin{cases}1, & \text{falls } \mathbf{x}_2\in T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(B),\\ 0, & \text{falls } \mathbf{x}_2\in \mathbb{R}^m\backslash T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(B)\end{cases}\\
&= 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_1}(B)}(\mathbf{x}_2)\\
&= 1_{B-\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2).
\end{aligned} \tag{15}$$

Wegen (14) und (15) gilt also

$$F_{\mathbf{x}_1\bullet} = 1_{B-\mathbf{x}_1}. \tag{16}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.3 dann

$$B - \mathbf{x}_1 \in \mathfrak{B}_m. \tag{17}$$

Unter Beachtung von (10), (16), (17) und Bemerkung M.22.1.1 folgt dann

$$\begin{aligned} g_{1,F}(\mathbf{x}_1) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1\bullet} \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{B-\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2 = \mu_2(B-\mathbf{x}_1) = K_{\mu_2,\star}((\mathbf{x}_1, B)) \\ &= (K_{\mu_2,\star})_{\bullet B}(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen (12) und (18) gilt also

$$g_{1,F} = (K_{\mu_2,\star})_{\bullet B}. \tag{19}$$

Wegen (11) und (19) ist dann

$$(K_{\mu_2,\star})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{20}$$

Wegen (1), (4) und (20) ist $K_{\mu_2,\star}$ dann ein Kern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Damit ist unter Beachtung von (1) und (2) dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, gilt $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$. Wegen (1), (2) und Satz M.16.10 ergibt sich

$$K_{\mu_2,\star}((\mathbf{x}, \mathbb{R}^m)) = [T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}}(\mu_2)](\mathbb{R}^m) = \mu_2(\mathbb{R}^m).$$

Zu *(c)*-*(d)*: Dies folgt sogleich aus *(b)* und Definition M.25.2.1.

Zu *(e)*: Unter Verwendung von Bemerkung M.22.1.1, (1), (5), (6) bis (10), Teil *(c)* von Satz M.25.2.1 sowie (19) ergibt sich

$$\begin{aligned} (\mu_1 \star \mu_2)(B) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B \mathrm{d}(\mu_1 \star \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d}(\mu_1 \star \mu_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{1,F} \mathrm{d}\mu_1 \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_2,\star})_{\bullet B} \mathrm{d}\mu_1. \end{aligned}$$

□

Satz M.25.2.2 führt uns auf folgende Begriffsbildung:

Definition M.25.2.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es sei $K_{\mu_2,\star}\colon \mathbb{R}^m \times \mathfrak{B}_m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$(\mathbf{x}, B) \longmapsto \mu_2(B - \mathbf{x}).$$

Dann heißt $K_{\mu_2,\star}$ der durch μ_2 *erzeugte Faltungskern* auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Wir studieren nun die Rolle der Dirac-Maße im Faltungskalkül.

Satz M.25.2.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Es sei $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x} \longrightarrow \mathbf{x} + \mathbf{a}.$$

Dann ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gelten

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

sowie

$$\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \mu = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu).$$

BEWEIS. Wegen Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.3 ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $K_{\mu,\star}$ den durch μ erzeugten Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Sei

$$B \in \mathfrak{B}_m. \tag{1}$$

Wegen (1) folgen mittels Teil *(e)* Satz M.25.2.2 dann

$$(K_{\mu,\star})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \tag{2}$$

sowie bei Beachtung von $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ zudem

$$(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \mu)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,\star})_{\bullet B}\, \mathrm{d}\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}. \tag{3}$$

Wegen (2) liefert Beispiel M.22.2.2 nun

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,\star})_{\bullet B}\, \mathrm{d}\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} = (K_{\mu,\star})_{\bullet B}(\mathbf{a}). \tag{4}$$

Wegen Teil *(a)* von Satz M.25.2.2 gilt

$$K_{\mu,\star}((\mathbf{a},B)) = [T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu)](B). \tag{5}$$

Unter Beachtung von (3), (4) und (5) folgt nun

$$(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \mu)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu,\star})_{\bullet B}\, \mathrm{d}\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} = (K_{\mu,\star})_{\bullet B}(\mathbf{a}) = K_{\mu,\star}((\mathbf{a},B)) = [T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu)](B). \tag{6}$$

Aus (1) und (6) folgt dann

$$\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \mu = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu). \qquad \square$$

Folgerung M.25.2.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann gilt*

$$\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} \star \mu = \mu.$$

BEWEIS. Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} \star \mu = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu). \tag{1}$$

Aus der Definition der beteiligten Abbildungen folgt sofort

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}. \tag{2}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}(\mu) = \mu. \tag{3}$$

Aus (1) bis (3) folgt dann sogleich

$$\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} \star \mu = \mu. \qquad \square$$

Folgerung M.25.2.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt*

$$\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \varepsilon_{\mathbf{b},\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathfrak{B}_m}.$$

Beweis. Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \varepsilon_{\mathbf{b},\mathfrak{B}_m} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}\left(\varepsilon_{\mathbf{b},\mathfrak{B}_m}\right). \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Beispiel M.16.5 gilt

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}\left(\varepsilon_{\mathbf{b},\mathfrak{B}_m}\right) = \varepsilon_{\mathbf{T}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mathbf{b}),\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{a}+\mathbf{b},\mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) folgt dann die Behauptung. □

Bemerkung M.25.2.4. Seien $m, l \in \mathbb{N}$ sowie $\mathbf{A}, \mathbf{B} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a}, \mathbf{b} \in \mathbb{R}^l$. Weiter sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right)\right] \star \left[T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right)\right] = T_{\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{a}+\mathbf{b}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Beispiel M.16.5 gelten

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right) = \varepsilon_{T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x}),\mathfrak{B}_m} \tag{1}$$

und

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right) = \varepsilon_{T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}(\mathbf{x}),\mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Wegen Folgerung M.25.2.2 gilt

$$\varepsilon_{T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x}),\mathfrak{B}_m} \star \varepsilon_{T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}(\mathbf{x}),\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x})+T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}(\mathbf{x}),\mathfrak{B}_m}. \tag{3}$$

Weiterhin gilt

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mathbf{x}) + T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}(\mathbf{x}) = (\mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a}) + (\mathbf{B}\mathbf{x}+\mathbf{b}) = (\mathbf{A}+\mathbf{B})\,\mathbf{x} + (\mathbf{a}+\mathbf{b}) = T_{\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{a}+\mathbf{b}}(\mathbf{x}). \tag{4}$$

Aus (1) bis (4) folgt dann

$$\left[T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right)\right] \star \left[T_{\mathbf{B},\mathbf{b}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right)\right] = T_{\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{a}+\mathbf{b}}\left(\varepsilon_{\mathbf{x},\mathfrak{B}_m}\right). \qquad \square$$

Die folgenden Betrachtungen sind nun darauf ausgerichtet, den Nachweis dafür zu erbringen, dass das geordnete Paar $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$ eine kommutative Halbgruppe ist. Hierzu zeigen wir zunächst die Kommutativität der Faltung.

Satz M.25.2.4. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt*

$$\mu_1 \star \mu_2 = \mu_2 \star \mu_1.$$

Beweis. Es bezeichne $K_{\mu_1,\star}$ den durch μ_1 erzeugten Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Sei

$$B \in \mathfrak{B}_m. \tag{1}$$

Wegen (1) gelten nach Teil *(e)* von Satz M.25.2.2 dann $(K_{\mu_1,\star})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und

$$(\mu_2 \star \mu_1)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}\, \mathrm{d}\mu_2. \tag{2}$$

Wegen (1) folgt aufgrund der Bemerkung M.19.3 und M.19.8 für

$$f = 1_B \tag{3}$$

dann

$$f \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{4}$$

Sei

$$F \coloneqq f \circ A_{m,2}. \tag{5}$$

Weiter sei

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{6}$$

Wegen (4) bis (6) liefert Teil *(d)* von Satz M.25.2.1 dann

$$F_{\bullet \mathbf{x}_2} \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{7}$$

Unter Beachtung von (7) sei die Abbildung $g_{2,F} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$\mathbf{x}_2 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet \mathbf{x}_2} \mathrm{d}\mu_1. \tag{8}$$

Wegen $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b \left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie (4) bis (8) folgen mittels Teil *(e)* von Satz M.25.2.1 dann

$$g_{2,F} \in \mathcal{E}^* \left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{9}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d} \left(\mu_1 \star \mu_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F} \mathrm{d}\mu_2. \tag{10}$$

Wegen (1) gilt nach Bemerkung M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B \mathrm{d} \left(\mu_1 \star \mu_2\right) = \left(\mu_1 \star \mu_2\right)(B). \tag{11}$$

Unter Beachtung von (11), (3) und (10) folgt

$$\begin{aligned} \left(\mu_1 \star \mu_2\right)(B) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B \mathrm{d} \left(\mu_1 \star \mu_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f \mathrm{d} \left(\mu_1 \star \mu_2\right) \\ &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F} \mathrm{d}\mu_2. \end{aligned} \tag{12}$$

Wir berechnen nun die Funktion $g_{2,F}$. Sei hierzu

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{13}$$

Wegen (13) gilt nach Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.3 dann

$$\left(T_{\mathbf{I}_m, \mathbf{x}_2}\right)^{-1}(B) = B - \mathbf{x}_2. \tag{14}$$

Sei

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m. \tag{15}$$

Unter Beachtung von (5), (3) und (14) folgt dann

$$\begin{aligned} F_{\bullet\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1) &= F\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right) = (f\circ A_{m,2})\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right) = f\left[A_{m,2}\left(\begin{pmatrix}\mathbf{x}_1\\ \mathbf{x}_2\end{pmatrix}\right)\right] \\ &= f(\mathbf{x}_1+\mathbf{x}_2) = f\left(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(x_1)\right) = 1_B\left(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1)\right) \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1)\in B, \\ 0, & \text{falls } T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1)\in \mathbb{R}^m\backslash B \end{cases} \\ &= \begin{cases} 1, & \text{falls } \mathbf{x}_1\in T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B), \\ 0, & \text{falls } \mathbf{x}_1\in \mathbb{R}^m\backslash T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B) \end{cases} \\ &= 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)}(\mathbf{x}_1) \\ &= 1_{B-\mathbf{x}_2}(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt dann

$$F_{\bullet\mathbf{x}_2} = 1_{B-\mathbf{x}_2}(x_1). \tag{17}$$

Wegen (1) gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.3 dann

$$B-\mathbf{x}_2\in\mathfrak{B}_m. \tag{18}$$

Wegen (18) liefert Bemerkung M.22.1.1 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{B-\mathbf{x}_2}\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(B-\mathbf{x}_2). \tag{19}$$

Nach Definition von $K_{\mu_1,\star}$ gilt

$$K_{\mu_1,\star}((\mathbf{x}_2,B)) = \mu_1(B-\mathbf{x}_2). \tag{20}$$

Unter Verwendung von (8), (17), (19) und (20) folgt dann

$$\begin{aligned} g_{2,F}(\mathbf{x}_2) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet\mathbf{x}_2}\mathrm{d}\mu_1 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{B-\mathbf{x}_2}\mathrm{d}\mu_1 = \mu_1(B-\mathbf{x}_2) = K_{\mu_1,\star}((\mathbf{x}_2,B)) \\ &= (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}(\mathbf{x}_2). \end{aligned} \tag{21}$$

Aus (13) und (21) folgt nun

$$g_{2,F} = (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}. \tag{22}$$

Unter Verwendung von (12), (22) und (2) ergibt sich nun

$$\begin{aligned} (\mu_1\star\mu_2)(B) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F}\mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}\,\mathrm{d}\mu_2 \\ &= (\mu_2\star\mu_1)(B). \end{aligned} \tag{23}$$

Aus (1) und (23) folgt dann

$$\mu_1\star\mu_2 = \mu_2\star\mu_1. \qquad \square$$

Wir wenden uns nun der Assoziativität der Faltung zu.

Satz M.25.2.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ sowie $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n+1}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten*

$$\bigstar_{j=1}^{n+1} \mu_j = \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right) \star \mu_{n+1}$$

sowie

$$\bigstar_{j=1}^{n+1} \mu_j = \mu_1 \star \left(\bigstar_{j=2}^{n+1} \mu_j\right).$$

Beweis. Sei $B_{m,n+1}\colon \mathbb{R}^{(n+1)m} \longrightarrow \mathbb{R}^{2m}$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T \longmapsto \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T. \tag{1}$$

Für $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)m}$ gilt wegen (1) überdies

$$\begin{aligned}(A_{m,2} \circ B_{m,n+1})(\mathbf{x}) = A_{m,2}\left(B_{m,n+1}(\mathbf{x})\right) &= A_{m,2}\left(\left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T\right) \\ &= \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j\right) + \mathbf{x}_{n+1} = \sum_{j=1}^{n+1} \mathbf{x}_j = A_{m,n+1}(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Es ist also

$$A_{m,2} \circ B_{m,n+1} = A_{m,n+1}. \tag{2}$$

Aus (1) folgt für jedes $\mathbf{x} = \left(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T \in \mathbb{R}^{(n+1)m}$ zudem

$$B_{m,n+1}(\mathbf{x}) = \left(\sum_{j=1}^{n} \mathbf{x}_j^T, \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T = \left(A_{m,n}\left(\left(\mathbf{x}_1^T, \ldots, \mathbf{x}_n^T\right)^T\right), \mathbf{x}_{n+1}^T\right)^T. \tag{3}$$

Sei

$$C_1 \times C_2 \in \mathfrak{B}_m \boxtimes \mathfrak{B}_m. \tag{4}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_{2m} = \mathfrak{B}_m \otimes \mathfrak{B}_m. \tag{5}$$

Aus (4) und (5) folgt

$$C_1 \times C_2 \in \mathfrak{B}_{2m}. \tag{6}$$

Aus (3) folgt

$$(B_{m,n+1})^{-1}(C_1 \times C_2) = \left[(A_{m,n})^{-1}(C_1)\right] \times C_2. \tag{7}$$

Aus (1) erkennt man sogleich, dass $B_{m,n+1} \in \mathscr{C}\left(\left(\mathbb{R}^{(n+1)m}, |\cdot|\right), \left(\mathbb{R}^{2m}, |\cdot|\right)\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.16.8 nun die $\mathfrak{B}_{(n+1)m}$-$\mathfrak{B}_{2m}$-Messbarkeit von $B_{m,n+1}$. Wir bestimmen nun das Bildmaß

$B_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)$. Unter Beachtung von (6), (7) und Satz M.24.1.17 sowie (4) ergibt sich nun

$$\begin{aligned}\left[B_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)\right](C_1\times C_2) &= \left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)\left(\left(B_{m,n+1}\right)^{-1}(C_1\times C_2)\right)\\ &= \left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)\left(\left[\left(A_{m,n}\right)^{-1}(C_1)\right]\times C_2\right)\\ &= \left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\otimes\mu_{n+1}\right)\left(\left[\left(A_{m,n}\right)^{-1}(C_1)\right]\times C_2\right)\\ &= \left[\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right)\left(\left(A_{m,n}\right)^{-1}(C_1)\right)\right]\cdot\left[\mu_{n+1}(C_2)\right]\\ &= \left(\left[A_{m,n}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right)\right](C_1)\right)\cdot\left[\mu_{n+1}(C_2)\right]\\ &= \left[\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right)(C_1)\right]\cdot\left[\mu_{n+1}(C_2)\right].\end{aligned} \tag{8}$$

Wegen (4) und (8) ist $B_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)$ dann ein Produktmaß von $\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right)$ und μ_{n+1}. Hieraus folgt bei Beachtung der nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 gültigen Beziehung $\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\in\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ mittels Teil *(a)* von Satz M.24.1.14 dann

$$B_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right)\otimes\mu_{n+1}. \tag{9}$$

Unter Beachtung von (2), Satz M.16.11 und (9) folgt nun

$$\begin{aligned}\bigstar_{j=1}^{n+1}\mu_j &= A_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right) = \left(A_{m,2}\circ B_{m,n+1}\right)\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right) = A_{m,2}\left[B_{m,n+1}\left(\bigotimes_{j=1}^{n+1}\mu_j\right)\right]\\ &= A_{m,2}\left(\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right)\otimes\mu_{n+1}\right) = \left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right)\star\mu_{n+1}.\end{aligned}$$

Analog zeigt man

$$\bigstar_{j=1}^{n+1}\mu_j = \mu_1\star\left(\bigstar_{j=2}^{n+1}\mu_j\right).$$

□

Folgerung M.25.2.3. *Seien $m\in\mathbb{N}$ sowie $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,3}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann gilt*

$$(\mu_1\star\mu_2)\star\mu_3 = \mu_1\star(\mu_2\star\mu_3).$$

Beweis. Wähle in Satz M.25.2.5 $n=2$. □

Satz M.25.2.6. *Sei $m\in\mathbb{N}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ *eine kommutative Halbgruppe mit Einselement* $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$.

(b) *Es ist* $\left(\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ *eine Unterhalbgruppe von* $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$*, welche das Einselement* $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$ *enthält.*

Beweis.

Zu *(a)*: Kombiniere Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2, Folgerung M.25.2.3, Satz M.25.2.4 und Folgerung M.25.2.1.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Teil *(d)* von Bemerkung M.25.2.2 sowie aus $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. □

Folgerung M.25.2.4. *Sei* $m \in \mathbb{N}$*. Dann ist* $\left(\left\{\varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m} \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\right\}, *\right)$ *eine kommutative Gruppe, welche vermöge der Abbildung* $U_m \colon \left\{\varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m} \,\middle|\, \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\right\} \longrightarrow \mathbb{R}^m$*, die gemäß*

$$\varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m} \longmapsto \mathbf{a}$$

erklärt ist, isomorph zur kommutativen Gruppe $\left(\mathbb{R}^m, +\right)$ *ist.*

Beweisidee. Verwende Folgerung M.25.2.2. □

Beispiel M.25.2.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $\left(\mathbf{a}_j\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^m$. Dann ist $\left(\varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ und es gelten $\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j \in \mathbb{R}^m$ sowie

$$\bigstar_{j=1}^n \varepsilon_{\mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^n \mathbf{a}_j, \mathfrak{B}_m}.$$

Beweisidee. Führe vollständige Induktion über n durch und verwende Folgerung M.25.2.2 und Satz M.25.2.5. □

Wir präsentieren nun ein Prinzip zur Erzeugung von Unterhalbgruppen von $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$.

Satz M.25.2.7. *Seien* $m \in \mathbb{N}$*,* $(G, \cdot)$ *eine Unterhalbgruppe von* $([0, +\infty), \cdot)$ *sowie*

$$\mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \coloneqq \left\{\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \,\middle|\, \mu\left(\mathbb{R}^m\right) \in G\right\}.$$

Dann ist $\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ *eine Unterhalbgruppe von* $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$.

Beweis. Nach Wahl von G ist $G \neq \varnothing$. Sei nun $u \in G$. Dann ist $u \cdot \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Somit ist

$$\mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \neq \varnothing. \tag{1}$$

Seien nun

$$\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{2}$$

Wegen (2) gilt dann $\left\{\mu_1\left(\mathbb{R}^m\right), \mu_2\left(\mathbb{R}^m\right)\right\} \subseteq G$. Hieraus folgt nach Wahl von G dann

$$\mu_1\left(\mathbb{R}^m\right) \mu_2\left(\mathbb{R}^m\right) \in G. \tag{3}$$

Nach Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.2 gilt

$$\left(\mu_1 \star \mu_2\right)\left(\mathbb{R}^m\right) = \mu_1\left(\mathbb{R}^m\right) \mu_2\left(\mathbb{R}^m\right). \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) ist also $\left(\mu_1 \star \mu_2\right)\left(\mathbb{R}^m\right) \in G$. Somit ist

$$\mu_1 \star \mu_2 \in \mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{5}$$

Wegen (1), (2) und (5) ist $\left(\mathcal{M}_+^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$. □

Bemerkung M.25.2.5.

(a) Es sind $(\mathbb{N}_0, \cdot)$ und $(\mathbb{N}, \cdot)$ jeweils Unterhalbgruppen von $([0, +\infty), \cdot)$.

(b) Sei $t \in (0, 1]$. Dann sind $([0, t], \cdot)$ und $([0, t), \cdot)$ jeweils Unterhalbgruppen von $([0, +\infty), \cdot)$.

(c) Sei $t \in [1, +\infty)$. Dann sind $([t, +\infty), \cdot)$ und $((t, +\infty), \cdot)$ jeweils Unterhalbgruppen von $([0, +\infty), \cdot)$. ♣

Satz M.25.2.8. *Seien $m, l \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Weiter seien $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ und $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $T_{\mathbf{A}, \mathbf{0}_{m \times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung, $\left(T_{\mathbf{A}, \mathbf{0}_{m \times 1}}[\mu_j]\right)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$ und es gilt*

$$T_{\mathbf{A}, \mathbf{0}_{m \times 1}}\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right) = \bigstar_{j=1}^{n} T_{\mathbf{A}, \mathbf{0}_{m \times 1}}(\mu_j).$$

Definition M.25.2.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(a) Unter *Spiegelung* $\mu^\vee$ von μ verstehen wir dann das Bildmaß $T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m \times 1}}(\mu)$.

(b) Es heißt μ *symmetrisch*, falls $\mu = \mu^\vee$ erfüllt ist.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Menge aller symmetrischen Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und

$$\mathcal{M}_{+,s}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) := \mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

bzw.

$$\mathcal{M}_{+,s}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) := \mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Bemerkung M.25.2.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\mu^\vee$ die Spiegelung von μ. Dann gilt:

(a) Es gilt $(\mu^\vee)^\vee = \mu$.

(b) Sei $\mu_S := \frac{1}{2}(\mu + \mu^\vee)$. Dann gilt $\mu_S \in \mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Man nennt μ_S die *Symmetrisierung* von μ.

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Es ist $\mu_S = \mu$.

(d) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(e) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(f) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\mu \star \mu^\vee \in \mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Bemerkung M.25.2.7. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

(a) Sei $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $(\varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m})^\vee = \varepsilon_{-\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}$.

(b) Es ist $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m \times 1}, \mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_{+,s}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Satz M.25.2.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind $\left(\mathcal{M}_{+,s}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ und $\left(\mathcal{M}_{+,s}^{1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ jeweils Unterhalbgruppen von $\left(\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ welche das Einselement $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$ enthalten.*

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.7 gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_{+,s}^{1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \subseteq \mathcal{M}_{+,s}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{1}$$

Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_{+,s}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt $\mu_1^{\vee} = \mu_1$ sowie $\mu_2^{\vee} = \mu_2$. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.25.2.8 dann

$$\left(\mu_1 \star \mu_2\right)^{\vee} = T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_1 \star \mu_2\right) = \left[T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_1\right)\right] \star \left[T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_2\right)\right] = \mu_1^{\vee} \star \mu_2^{\vee} = \mu_1 \star \mu_2. \tag{2}$$

Somit ist $\mu_1 \star \mu_2 \in \mathcal{M}_{+,s}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Hieraus folgt in Verbindung mit (1) die erste Behauptung. Aus dieser Überlegung folgt wegen $\mathcal{M}_{+,s}^{1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) = \mathcal{M}_{+,s}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \cap \mathcal{M}_{+,s}^{1}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, (1) und Teil *(b)* von Satz M.25.2.6 dann die zweite Behauptung. □

Wir untersuchen nun die Distributivitätseigenschaften der Faltung.

Bemerkung M.25.2.8. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ sowie ferner $\left(\alpha_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ bzw.$\left(\mu_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiterhin sei $\mu \coloneqq \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \mu_j$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$.

(b) Es bezeichne $K_{\mu,\star}$ den durch μ erzeugten Faltungskern auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie $K_{\mu_j,\star}$ den durch μ_j erzeugten Faltungskern auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt

$$K_{\mu,\star} = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j K_{\mu_j,\star}.$$

♣

Bemerkung M.25.2.9. Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie ferner $\left(\alpha_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ bzw. $\left(\mu_j\right)_{j\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ derart, dass durch $\mu \coloneqq \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_j \mu_j$ ein Maß aus $\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ definiert wird. Es bezeichne $K_{\mu,\star}$ den durch μ erzeugten Faltungskern auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie für $j \in \mathbb{N}$ weiterhin $K_{\mu_j,\star}$ den durch μ_j erzeugten Faltungskern auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt

$$K_{\mu,\star} = \sum_{j=1}^{\infty} K_{\mu_j,\star}.$$

♣

Satz M.25.2.10. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie I und J Abschnitte aus $\mathbb{N}$. Weiterhin seien $\left(\mu_k\right)_{k\in I}$ und $\left(\nu_l\right)_{l\in J}$ bzw. $\left(\alpha_k\right)_{k\in I}$ und $\left(\beta_l\right)_{l\in J}$ Folgen aus $\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ bzw. $[0, +\infty)$ derart, dass die Maße $\mu \coloneqq \sum_{k\in I} \alpha_k \mu_k$ und $\nu \coloneqq \sum_{l\in J} \beta_l \nu_l$ jeweils zu $\mathcal{M}_{+}^{b}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ gehören. Dann gilt:*

(a) *Es ist*

$$\mu \star \nu = \sum_{k\in I} \alpha_k \left[\sum_{l\in J} \beta_l \left(\mu_k \star \nu_l\right)\right]$$

sowie

$$\mu \star \nu = \sum_{l\in J} \beta_l \left[\sum_{k\in I} \alpha_k \left(\mu_k \star \nu_l\right)\right].$$

(b) *Sei H ein zu $I \times J$ gleichmächtiger Abschnitt von $\mathbb{N}$ und sei φ eine Bijektion zwischen H und $I \times J$. Falls $j \in H$ und $\varphi(j) = (k,l)$, so setzen wir $\gamma_j := \alpha_k \beta_l$ sowie $\varrho_j := \mu_k \star \nu_l$. Dann gilt*

$$\mu \star \nu = \sum_{j \in H} \gamma_j \varrho_j.$$

Beweisidee. Verwende Satz M.25.2.2 und beachte Bemerkung M.25.2.8 und M.25.2.9. □

Folgerung M.25.2.5. *Seien $m, r, s \in \mathbb{N}$ sowie $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,r}}$ und $(\nu_l)_{l \in \mathbb{N}_{1,s}}$ bzw. $(\alpha_k)_{k \in \mathbb{N}_{1,r}}$ und $(\beta_l)_{l \in \mathbb{N}_{1,s}}$ Folgen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ bzw. $[0, +\infty)$. Weiterhin sei $\mu := \sum_{k=1}^r \alpha_k \mu_k$ und $\nu := \sum_{l=1}^s \beta_l \nu_l$. Dann gehören μ und ν jeweils zu $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gelten*

$$\sum_{k=1}^r \alpha_k \left(\sum_{l=1}^s \beta_l (\mu_k \star \nu_l) \right) = \mu \star \nu = \sum_{l=1}^s \beta_l \left(\sum_{k=1}^r \alpha_k (\mu_k \star \nu_l) \right).$$

Wir berechnen nun unter Zugrundlegung von Satz M.25.2.10 das Faltungsprodukt zweier diskreter Maße.

Satz M.25.2.11. *Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{b,d} \in (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hierbei seien I und J bzw. $(\alpha_k)_{k \in I}$ und $(\beta_l)_{l \in J}$ bzw. $(\mathbf{x}_k)_{k \in I}$ und $(\mathbf{y}_l)_{l \in J}$, die nach Satz M.7.1 existierenden Abschnitte von $\mathbb{N}$ bzw. Folgen aus $[0, +\infty)$ bzw. $\mathbb{R}^m$, mit denen die Darstellungen*

$$\mu = \sum_{k \in I} \alpha_k \varepsilon_{\mathbf{x}_k, \mathfrak{B}_m} \qquad \text{bzw.} \qquad \nu = \sum_{l \in J} \beta_l \varepsilon_{\mathbf{y}_l, \mathfrak{B}_m}$$

bestehen. Dann gilt:

(a) *Es gelten*

$$\mu \star \nu = \sum_{k \in I} \alpha_k \left[\sum_{l \in J} \beta_l \varepsilon_{\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_l, \mathfrak{B}_m} \right]$$

bzw.

$$\mu \star \nu = \sum_{l \in J} \beta_l \left[\sum_{k \in I} \alpha_k \varepsilon_{\mathbf{x}_k + \mathbf{y}_l, \mathfrak{B}_m} \right].$$

(b) *Sei H ein zu $I \times J$ gleichmächtiger Abschnitt von $\mathbb{N}$ und sei φ eine Bijektion zwischen H und $I \times J$. Falls $j \in H$ und $\varphi(j) = (k,l)$, so setzen wir $\gamma_j := \alpha_k \beta_l$ sowie $\mathbf{z}_j = \mathbf{x}_k + \mathbf{y}_l$. Dann gilt*

$$\mu \star \nu = \sum_{j \in H} \gamma_j \varepsilon_{\mathbf{z}_j, \mathfrak{B}_m}.$$

(c) *Es ist $\mu \star \nu$ diskret.*

Beweis.

Zu *(a)*-*(b)*: Unter Beachtung von Folgerung M.25.2.2 ergibt sich die Behauptung von *(a)* bzw. *(b)* sogleich aus Teil *(a)* bzw. *(b)* von Satz M.25.2.10.

Zu *(c)*: Wegen *(b)* folgt mittels Teil *(a)* von Lemma M.7.2 sogleich, dass $\mu \star \nu$ diskret ist. □

Folgerung M.25.2.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\mathcal{M}_+^{b,d}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ bzw. $\left(\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ jeweils eine Unterhalbgruppe von $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, welche $\varepsilon_{0_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$ enthält.*

Wegen Satz M.7.2 gestattet jedes Maß aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ eine eindeutige Darstellung als Summe eines stetigen und eines diskreten Maßes aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Sind nun $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, so ist nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 dann $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Somit erwächst die Aufgabe der Bestimmung des stetigen und stetigen Anteils von $\mu \star \nu$.

Satz M.25.2.12. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt:*

(a) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Mindestens eines der Maße μ, ν ist stetig.*

(ii) *Es ist $\mu \star \nu$ stetig.*

(b) *Für $\varrho \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ bezeichne ϱ_c bzw. ϱ_d den stetigen bzw. diskreten Anteil von ϱ. Dann gelten*

$$(\mu \star \nu)_c = (\mu_c \star \mu_c) + (\mu_c \star \nu_d) + (\mu_d \star \nu_c)$$

und

$$(\mu \star \nu)_d = \mu_d \star \nu_d.$$

Beweis.

Zu *(a)*:

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Sei zunächst ν stetig. Weiter sei

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Sei

$$\mathbf{y} \in \mathbb{R}^m. \tag{2}$$

Aufgrund der Stetigkeit von ν gilt dann

$$\{\mathbf{x} - \mathbf{y}\} \in \mathcal{N}_\nu. \tag{3}$$

Es bezeichne $K_{\nu,\star}$ den zu ν gehörigen Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unter Beachtung von (3) folgt dann

$$\left(K_{\nu,\star}\right)_{\bullet\{\mathbf{x}\}}(y) = K_{\nu,\star}\left((\mathbf{y}, \{\mathbf{x}\})\right) = \nu\left(\{\mathbf{x}\} - \mathbf{y}\right) = \nu\left(\{\mathbf{x} - \mathbf{y}\}\right) = 0. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) gilt dann

$$\left(K_{\nu,\star}\right)_{\bullet\{\mathbf{x}\}} = 1_\varnothing. \tag{5}$$

Unter Verwendung von Teil *(e)* von Satz M.25.2.2, (5) und Beispiel M.22.1.1 folgt dann

$$(\mu \star \nu)(\{\mathbf{x}\}) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} \left(K_{\nu,\star}\right)_{\bullet\{\mathbf{x}\}} \mathrm{d}\mu = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_\varnothing \mathrm{d}\mu = 0. \tag{6}$$

Aus (1) und (6) folgt dann, dass $\mu \star \nu$ stetig ist.
Sei nun μ stetig. Dann folgt aus dem eben Gezeigten sogleich, dass $\nu \star \mu$ stetig ist. Hieraus folgt, da nach Satz M.25.2.4 nun $\mu \star \nu = \nu \star \mu$ erfüllt ist, dass $\mu \star \nu$ stetig ist. Somit gilt also *(ii)*.

Zu *(b)*: Nach Konstruktion gelten

$$\mu = \mu_c + \mu_d \qquad \text{und} \qquad \nu = \nu_c + \nu_d.$$

Hieraus ergibt sich mittels Folgerung M.25.2.5 dann

$$\mu \star \nu = (\mu_c + \mu_d) \star (\nu_c + \nu_d) = (\mu_c \star \nu_c) + (\mu_c \star \nu_d) + (\mu_d \star \nu_c) + (\mu_d \star \nu_d). \tag{7}$$

Da μ_c und ν_c stetig sind, folgt aus dem schon bewiesenen Teil von *(a)*, dass die Maße $\mu_c \star \nu_c$, $\mu_c \star \nu_d$ und $\mu_d \star \nu_c$ sämtlich stetig sind. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.7.6, dass $(\mu_c \star \nu_c) + (\mu_c \star \nu_d) + (\mu_d \star \nu_c)$ ein stetiges Maß ist. Da nach Konstruktion μ_d und ν_d diskret sind, liefert Teil *(c)* von Satz M.25.2.11, dass $\mu_d \star \nu_d$ diskret ist. Somit folgt aus (7) in Verbindung mit Teil *(d)* von Satz M.7.2 dann dann

$$(\mu \star \nu)_c = (\mu_c \star \nu_c) + (\mu_c \star \nu_d) + (\mu_d \star \nu_c)$$

und

$$(\mu \star \nu)_d = \mu_d \star \nu_d.$$

Zu *(a)*:

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Wegen *(ii)* folgt mittels Teil *(f)* von Satz M.7.2 dann $(\mu \star \nu)_d = \mathfrak{o}_m$. Hieraus folgt wegen *(b)* dann $\mu_d \star \nu_d = \mathfrak{o}_m$. Hieraus folgt mittels Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.2 dann $\mu_d = \mathfrak{o}_m$ oder $\nu_d = \mathfrak{o}_m$. Hieraus folgt mittels Teil *(f)* von Satz M.7.2 dann, dass μ oder ν stetig ist. Es gilt also *(i)*. □

Folgerung M.25.2.7. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\left(\mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$ eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$.*

Satz M.25.2.13. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so gewählt, dass $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ erfüllt ist. Dann gilt $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$.*

Beweis. Da $\mu \star \nu$ nach Voraussetzung diskret ist, folgt aus Teil *(b)* von Satz M.25.2.12 sogleich

$$\mu \star \nu = \mu_d \star \nu_d.$$

Demnach gilt wegen $\mu \star \nu \neq \mathfrak{o}_m$ nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 dann

$$\mu_d \neq \mathfrak{o}_m \tag{1}$$

und

$$\nu_d \neq \mathfrak{o}_m. \tag{2}$$

Da $\mu \star \nu$ diskret ist, folgt aus Teil *(b)* von Satz M.25.2.12 weiterhin

$$\mu_c \star \nu_d + \mu_d \star \nu_c + \mu_c \star \nu_c = \mathfrak{o}_m,$$

woraus sich sofort $\mu_c \star \nu_d = \mathfrak{o}_m$ und $\mu_d \star \mu_c = \mathfrak{o}_m$ ergibt. Beachtet man dies, so gilt wegen (1), (2) und Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 dann $\mu_c = \mathfrak{o}_m$ und $\nu_c = \mathfrak{o}_m$. Somit nach Konstruktion $\mu = \mu_d$ und $\nu = \nu_d$. Folglich sind μ und ν diskret sowie wegen (1) und (2) vom Nullmaß $\mathfrak{o}_m$ verschieden. □

Wir präsentieren nun ein Resultat, welches eine Reihe nützlicher Charakterisierungen der Stetigkeit eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ enthält.

Satz M.25.2.14. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\mu^\vee$ die Spiegelung von μ. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(b) *Sei $X_{\mathfrak{B}_m,\mu} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \mid \mu(\{x\}) \in (0, +\infty)\}$. Dann ist $X_{\mathfrak{B}_m,\mu}$ höchstens abzählbar.*

(c) *Es gilt*

$$(\mu \star \mu^\vee)(\{\mathbf{0}_{m\times 1}\}) = \begin{cases} 0, & \text{falls } X_{\mathfrak{B}_m,\mu} = \varnothing, \\ \displaystyle\sum_{x \in X_{\mathfrak{B}_\mu,\mu}} [\mu(\{x\})]^2, & \text{falls } X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \neq \varnothing. \end{cases}$$

(d) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(ii) *Es ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(iii) *Es ist $\mu \star \mu^\vee \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(iv) *Es ist $\{\mathbf{0}_{m\times 1}\} \in \mathcal{N}_{\mu\star\mu^\vee}$.*

Wir betrachten nun zwei endliche Maße $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und studieren erste Zusammenhänge zwischen den Momenten μ_1 und μ_2 einerseits und $\mu_1 \star \mu_2$ andererseits.

Satz M.25.2.15. *Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt:*

(a) *Es gilt $\mathcal{M}_k(\mu_1 \star \mu_2) \leq \mathcal{M}_k(\mu_1)\mathcal{M}_k(\mu_2)$.*

(b) *Seien $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt $\mu_1 \star \mu_2 \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

Folgerung M.25.2.8. *Sei $k \in \mathbb{N}$, $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt*

$$\bigstar_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1).$$

Folgerung M.25.2.9. *Es sind $\left(\mathcal{M}_+^{b;\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), \star\right)$ und $\left(\mathcal{M}_+^{1;\infty}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), \star\right)$ Unterhalbgruppen von $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), \star\right)$, welche jeweils das Einselement $\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$ enthalten.*

Satz M.25.2.16. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\bigstar_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt*

$$M_1\left(\bigstar_{j=1}^n \mu_j\right) = \sum_{j=1}^n M_1(\mu_j).$$

(b) *Es gilt*

$$\operatorname{var}\left(\bigstar_{j=1}^n \mu_j\right) = \sum_{j=1}^n \operatorname{var}(\mu_j).$$

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\bigstar_{j=1}^n \mu_j \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(ii) *Es ist* $\operatorname{var}\left(\bigstar_{j=1}^n \mu_j\right) \in [0, +\infty)$.

(iii) *Für alle* $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ *gilt* $\operatorname{var}(\mu_j) \in [0, +\infty)$.

(iv) *Es ist* $(\mu_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,n}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Wir wenden uns nun einer Prozedur zu, welche darin besteht, dass aus einen Maß μ aus der Klasse $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und einer Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}}$ aus $[0, +\infty)$ durch eine Kombination aus Faltung und unendlicher Summation ein neues Maß aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gewonnen wird.

Definition M.25.2.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $k \in \mathbb{N}_0$ wird definiert

$$\mu^{(k)} := \begin{cases} \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}, & \text{falls } k = 0, \\ \mu, & \text{falls } k = 1, \\ \bigstar_{j=1}^{k} \mu, & \text{falls } k \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \end{cases}$$

Dann heißt $\left(\mu^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die *Folge der zu* μ *gehörigen Faltungspotenzen.*

Bemerkung M.25.2.10. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\left(\mu^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ der zu μ gehörigen Faltungspotenzen. Dann gilt:

(a) Sei $k \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt $\mu^{(k)}(\mathbb{R}^m) = [\mu(\mathbb{R}^m)]^k$.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $k \in \mathbb{N}_0$. Dann ist $\mu^{(k)} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(c) Seien $k, l \in \mathbb{N}_0$. Dann gelten $k + l \in \mathbb{N}_0$ und $\mu^{(k)} \star \mu^{(l)} = \mu^{(k+l)}$.

(d) Es ist $\left(\left\{\mu^{(k)} \,\middle|\, k \in \mathbb{N}_0\right\}, \star\right)$ eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$. ♣

Beispiel M.25.2.2. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mathfrak{o}_m \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Es bezeichne $\left(\mathfrak{o}_m^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der zu $\mathfrak{o}_m$ gehörigen Faltungspotenzen. Weiter sei $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt

$$\mathfrak{o}_m^{(n)} = \begin{cases} \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}, & \text{falls } n = 0, \\ \mathfrak{o}_m, & \text{falls } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Bemerkung M.25.2.11. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mu := \varepsilon_{\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}$. Dann ist $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und, falls $\left(\mu^{(s)}\right)_{s \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ gehörigen Faltungspotenzen bezeichnet, so gilt für $k \in \mathbb{N}_0$ dann

$$\mu^{(k)} = \varepsilon_{k\mathbf{a}, \mathfrak{B}_m}.$$ ♣

Wir studieren nun für ein Maß aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die ersten Momente seiner Faltungspotenzen.

Satz M.25.2.17. *Seien* $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ *und* $s \in \mathbb{N}$. *Es bezeichne* $\mu^{(s)}$ *die* s*-te zu* μ *gehörige Faltungspotenz. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\mathcal{M}_1\left(\mu^{(s)}\right) \leq s \cdot \mathcal{M}_1(\mu)$.

(b) *Sei* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gelten* $\mu^{(s)} \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie* $M_1\left(\mu^{(s)}\right) = s \cdot [M_1(\mu)]$, $\operatorname{var}\left(\mu^{(s)}\right) = s \cdot \operatorname{var}(\mu)$ *und* $\mathcal{M}_2\left(\mu^{(s)}\right) = s \cdot [\mathcal{M}_2(\mu)] + s(s-1) \cdot [M_1(\mu)]^2$.

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(ii) *Es ist* $\operatorname{var}(\mu) \in [0, +\infty)$.

(iii) *Es ist* $\operatorname{var}\left(\mu^{(s)}\right) \in [0, +\infty)$.

(iv) *Es ist* $\mu^{(s)} \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Bemerkung M.25.2.12. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Es bezeichne $\left(\mu^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ gehörigen Faltungspotenzen. Weiter seien $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ und

$$\tau \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{(k)}.$$

Dann gilt:

(a) Es gelten $\tau \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ und

$$\tau\left(\mathbb{R}^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right]^k.$$

(b) Es sei $\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie $\sum_{k=0}^{\infty} a_k = 1$. Dann gilt $\tau \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. ♣

Wir spezifizieren nun die Wahl der Folge $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ in Bemerkung M.25.2.12.

Satz M.25.2.18. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. *Es bezeichne* $\left(\mu^{(k)}\right)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *die Folge der zu* μ *gehörigen Faltungspotenzen. Weiter sei* $R \in \left(\mu\left(\mathbb{R}^m\right), +\infty\right)$ *und* f *eine in* $K_{|\cdot|,\mathbb{C}}(\mathbf{0}; R)$ *holomorphe Funktion mit Taylorkoeffizientenfolge* $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ *aus* $[0, +\infty)$. *Es sei*

$$\mu_{[f]} \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{(k)}.$$

Dann gelten $\mu_{[f]} \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ *sowie* $\mu_{[f]}\left(\mathbb{R}^m\right) = f\left(\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right)$.

Beweis. Da $(a_k)_{k \in \mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ ist, liefert Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.12 dann $\mu_{[f]} \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sowie unter zusätzlicher Beachtung von $\mu\left(\mathbb{R}^m\right) \in K_{|\cdot|,\mathbb{C}}(0; R)$ weiterhin

$$\mu_{[f]}\left(\mathbb{R}^m\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left[\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right]^k = f\left(\mu\left(\mathbb{R}^m\right)\right).$$

Somit ist $\mu_{[f]} \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. □

Bemerkung M.25.2.13. Es sind exp, cosh und sinh nichtkonstante, in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen mit Taylorkoeffizientenfolge aus $[0, +\infty)$. ♣

BEWEIS. Die obigen Funktionen sind holomorph in $\mathbb{C}$ und ihre Taylorkoeffizientenfolge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ ist für $k \in \mathbb{N}_0$ gegeben durch $a_k = \frac{1}{k!}$ bzw.

$$a_k = \begin{cases} \frac{1}{k!}, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ 0, & \text{falls } k \text{ ungerade} \end{cases}$$

bzw.

$$a_k = \begin{cases} 0, & \text{falls } k \text{ gerade,} \\ \frac{1}{k!}, & \text{falls } k \text{ ungerade.} \end{cases}$$

□

Bemerkung M.25.2.14. Sei f eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit nichtnegativer Taylorkoeffizientenfolge. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\mu_{[f]} \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ wohldefiniert. Insbesondere sind also $\mu_{[\exp]}$, $\mu_{[\cosh]}$ und $\mu_{[\sinh]}$ wohldefiniert. ♣

Satz M.25.2.19. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\left(\mu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ zugehörigen Faltungspotenzen. Weiter sei $R \in (\mu(\mathbb{R}^m), +\infty)$ sowie f und g in $K_{|\cdot|,\mathbb{C}}(\mathbf{0}; R)$ holomorphe Funktionen, deren Taylorkoeffizienten $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ und $(b_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ jeweils zu $[0, +\infty)$ gehören. Weiter sei*

$$\mu_{[f]} \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{(k)}$$

sowie

$$\mu_{[g]} \coloneqq \sum_{k=0}^{\infty} b_k \mu^{(k)}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $f \cdot g$ eine in $K_{|\cdot|,\mathbb{C}}(\mathbf{0}, R)$ holomorphe Funktion und, falls $(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ deren Taylorkoeffizientenfolge bezeichnet, so gelten für $k \in \mathbb{N}_0$ dann*

$$c_k = \sum_{j=0}^{k} a_k b_{j-k} \qquad \text{und} \qquad c_k \in [0, +\infty).$$

(b) *Es gehören $\mu_{[f]}$, $\mu_{[g]}$ und $\mu_{[f\cdot g]}$ zu $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt*

$$\mu_{[f]} \star \mu_{[g]} = \mu_{[f\cdot g]}.$$

BEWEIS.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Arithmetik holomorpher Funktionen.

Zu *(b)*: Aufgrund der Wahl von f und g bzw. wegen *(a)* folgt mittels Satz M.25.2.18 dann

$$\left\{\mu_{[f]}, \mu_{[g]}\right\} \subseteq \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

bzw.

$$\mu_{[f\cdot g]} \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Wir berechnen nun $\mu_{[f]} \star \mu_{[g]}$ mittels Teil *(b)* von Satz (1). Hierbei wollen wir jene Bijektion zwischen $\mathbb{N}_0 \times \mathbb{N}_0$ und $\mathbb{N}_0$ anwenden, welche der Anwendung des CAUCHYsche Schrägreihenverfahrens zur Anordnung einer unendlichen Matrix zu einer Folge entspricht. Führen wir dies durch und beachten wir Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.10 sowie *(a)*, so ergibt sich

$$\begin{aligned}\mu_{[f]} \star \mu_{[g]} &= \left(\sum_{k=0}^{\infty} a_k \mu^{(k)}\right) \star \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \mu^{(l)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \left(\mu^{(k)} \star \mu^{(l)}\right)\right) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} a_k \left(\sum_{l=0}^{\infty} b_l \left(\mu^{(k+l)}\right)\right) = \sum_{r=0}^{\infty} \left(\sum_{s=0}^{r} a_s b_{r-s}\right) \mu^{(r)} \\ &= \sum_{r=0}^{\infty} c_r \mu^{(r)} = \mu_{[f \cdot g]}.\end{aligned}$$

□

Wir stellen nun eine für unsere weiteren Überlegungen bedeutsame Familie $(g_t)_{t\in[0,+\infty)}$ von $\mathbb{C}$ holomorphen Funktionen mit nichtnegativen Taylorkoeffizienten bereit.

Bemerkung M.25.2.15. Sei $t \in [0, +\infty)$ und sei $g_t \colon \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert gemäß

$$z \longmapsto \exp\left(t\,(z-1)\right).$$

Dann gilt:

(a) Es ist g_t holomorph in $\mathbb{C}$ und falls $(a_{k,t})_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Taylorkoeffizientenfolge von g_t bezeichnet, so gelten für $k \in \mathbb{N}_0$ dann

$$a_{k,t} = \exp(-t) \cdot \frac{t^k}{k!}$$

und

$$a_{k,t} \in [0, +\infty).$$

(b) Es bezeichne π_t die Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt

$$a_{k,t} = \pi_t(\{k\}).$$

(c) Sei $s \in [0, +\infty)$. Dann gelten $s + t \in [0, +\infty)$ und

$$g_{s+t} = g_s \cdot g_t.$$

♣

Bemerkung M.25.2.15 berechtigt uns zu folgender Begriffsbildung.

Definition M.25.2.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $t \in [0, +\infty)$ und es bezeichne g_t die in Bemerkung M.25.2.15 eingeführte in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion mit nichtnegativer Taylorkoeffizientenfolge. Dann heißt das mittels μ und g_t gemäß Satz M.25.2.17 eingeführte Maß $\mu_{[g_t]}$ die durch μ *erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t*. Statt $\mu_{[g_t]}$ verwenden wir auch das Symbol $\nu_{\mu,t}$.

Bemerkung M.25.2.16. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\left(\mu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ gehörigen Faltungspotenzen. Weiter sei $t \in [0, +\infty)$ und bezeichne $\nu_{\mu,t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t sowie π_t die Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt

$$\nu_{\mu,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \pi_t(\{k\}) \cdot \mu^{(k)}.$$

♣

Beispiel M.25.2.3. Sei $\mu \coloneqq \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}$. Weiterhin sei $t \in [0,+\infty)$ und es bezeichne π_t bzw. $\nu_{\mu,t}$ die Poisson-Verteilung zum Parameter t bzw. die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt

$$\pi_t = \nu_{\mu,t}.$$

BEWEIS. Es bezeichne $\left(\mu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ gehörigen Faltungspotenzen. Wegen Definition M.25.2.5 gilt dann

$$\nu_{\mu,t} = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t)\,\frac{t^k}{k!}\mu^{(k)}. \tag{1}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_0. \tag{2}$$

Wegen Bemerkung M.25.2.11 gilt dann

$$\mu^{(k)} = \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{3}$$

Wegen Definition M.15.5 gilt

$$\pi_t = \sum_{k=0}^{\infty} \exp(-t)\,\frac{t^k}{k!}\varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{4}$$

Aus (1) bis (4) folgt dann

$$\pi_t = \nu_{\mu,t}. \qquad \square$$

Bemerkung M.25.2.17. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $s \in [0,+\infty)$ bezeichne $\nu_{\mu,s}$ die durch μ erzeugte Poisson-Verteilung zum Parameter s. Dann gilt:

(a) Es ist $\nu_{\mu,0} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$.

(b) Sei $t \in [0,+\infty)$. Dann gelten $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie

$$\nu_{\mu,t}(\mathbb{R}^m) = \exp\left[t\left(\mu(\mathbb{R}^m) - 1\right)\right].$$

(c) Folgende Aussagen sind äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Für alle $t \in [0,+\infty)$ gilt $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(iii) Es gibt ein $t_0 \in (0,+\infty)$ mit $\nu_{\mu,t_0} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Satz M.25.2.20. *Sei $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $s,t \in [0,+\infty)$ und es bezeichne $\nu_{\mu,s}$ bzw. $\nu_{\mu,t}$ bzw. $\nu_{\mu,s+t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter s bzw. t bzw. $s+t$. Dann sind $\nu_{\mu,s}$, $\nu_{\mu,t}$ und $\nu_{\mu,s+t}$ Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es gilt*

$$\nu_{\mu,s} \star \nu_{\mu,t} = \nu_{\mu,s+t}.$$

BEWEIS. Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.17 gilt $\{\nu_{\mu,s}, \nu_{\mu,t}, \nu_{\mu,s+t}\} \subseteq \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Unter Verwendung von Definition M.25.2.5, Teil *(b)* von Satz M.25.2.19, Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.15 und erneut Definition M.25.2.5 ergibt sich

$$\nu_{\mu,s} \star \nu_{\mu,t} = \mu_{[g_s]} \star \mu_{[g_t]} = \mu_{[g_s \cdot g_t]} = \mu_{[g_{s+t}]} = \nu_{\mu,s+t}. \qquad \square$$

M.25.3. Faltung von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht das Studium der Faltungen der nachfolgend eingeführten Teilklassen von $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Definition M.25.3.1. Es seien

$$\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right) \coloneqq \left\{\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \,\middle|\, \mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0 \in \mathcal{N}_\mu\right\}$$

sowie

$$\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right) \coloneqq \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right) \cap \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Bemerkung M.25.3.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\{k\}\right) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}$.

(b) Es ist $\mu\left(\mathbb{R}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu\left(\{k\}\right)$.

(c) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,d}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. ♣

Bemerkung M.25.3.2. Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $[0, +\infty)$ mit $\sum_{k=0}^{\infty} a_k \in [0, +\infty)$. Weiter sei

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} a_k \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

Dann ist $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$. ♣

Beispiel M.25.3.1. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Es bezeichne $\beta_{n,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Dann gilt $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$.

Beweis. Wegen Definition M.15.1 gilt

$$\beta_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} p^k \left(1-p\right)^{n-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.15.1 gilt

$$\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) liefert Bemerkung M.25.3.2 die Behauptung. □

Beispiel M.25.3.2. Sei $\alpha \in [0, +\infty)$ und bezeichne π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter α. Dann gilt $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$.

Beweisidee. Betrachte Definition M.15.5. □

Beispiel M.25.3.3. Seien $s \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(n_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $p \in [0, 1]$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,s}$ bezeichne $\beta_{n_k,p}$ die Binomialverteilung zu den Parametern n_k und p. Dann ist $(\beta_{n_k,p})_{k\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$ und es gilt

$$\bigstar_{k=1}^{s} \beta_{n_k,p} = \beta_{[\sum_{k=1}^{s} n_k],p}.$$

BEWEIS. Wir führen den Beweis per vollständiger Induktion über s. Sei zunächst $s = 2$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,2}$ gilt wegen Definition M.15.1 dann

$$\beta_{n_j,p} = \sum_{k=0}^{n_j} \binom{n_j}{k} p^k (1-p)^{n_j-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) ergibt sich mittels Satz M.25.2.11 dann

$$\begin{aligned}
\beta_{n_1,p} \star \beta_{n_2,p} &= \left[\sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right] \star \left[\sum_{k=0}^{n_2} \binom{n_2}{k} p^k (1-p)^{n_2-k} \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n_1} \binom{n_1}{k} p^k (1-p)^{n_1-k} \left[\sum_{l=0}^{n_2} \binom{n_2}{l} p^l (1-p)^{n_2-l} \varepsilon_{k+l,\mathfrak{B}_1}\right] \\
&= \sum_{k=0}^{n_1} \sum_{l=0}^{n_2} \binom{n_1}{k}\binom{n_2}{l} p^{k+l} (1-p)^{(n_1+n_2)-(k+l)} \varepsilon_{k+l,\mathfrak{B}_1} \\
&= \sum_{r=0}^{n_1+n_2} \left[\sum_{s=0}^{r} \binom{n_1}{s}\binom{n_2}{r-s}\right] p^r (1-p)^{(n_1+n_2)-r} \varepsilon_{r,\mathfrak{B}_1} \\
&= \sum_{r=0}^{n_1+n_2} \binom{n_1+n_2}{r} p^r (1-p)^{(n_1+n_2)-r} \varepsilon_{r,\mathfrak{B}_1} \\
&= \beta_{n_1+n_2,\mathfrak{B}_1}.
\end{aligned}$$

Den Induktionsschritt erhält man durch analoge Überlegungen. □

Satz M.25.3.1. *Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$. Dann gilt*

$$\mu \star \nu = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\sum_{l=0}^{k} \mu(\{l\})\, \nu(\{k-l\})\right] \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}.$$

BEWEIS. Wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.25.3.1 gelten

$$\mu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{k\})\, \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{1}$$

und

$$\nu = \sum_{l=0}^{\infty} \mu(\{l\})\, \varepsilon_{l,\mathfrak{B}_1}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.25.2.11 dann

$$\mu \star \nu = \sum_{k=0}^{\infty} \mu(\{k\}) \left[\sum_{l=0}^{\infty} \nu(\{l\})\, \varepsilon_{k+l,\mathfrak{B}_1}\right] = \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} \mu(\{k\})\, \nu(\{l\})\, \varepsilon_{k+l,\mathfrak{B}_1}. \tag{3}$$

Aufgrund des großen Umordnungssatzes lässt sich eine Doppelreihe mit nichtnegativen Gliedern mittels CAUCHYschem Schrägreihenverfahren umordnen. Damit folgt

$$\mu \star \nu = \sum_{r=0}^{\infty} \left[\sum_{s=0}^{r} \mu(\{s\})\, \nu(\{r-s\})\right] \varepsilon_{r,\mathfrak{B}_1}.$$

□

Folgerung M.25.3.1. *Es sind* $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{N}_0\right),\star\right)$ *und* $\left(\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{N}_0\right),\star\right)$ *jeweils Unterhalbgruppen von* $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right),\star\right)$.

Beispiel M.25.3.4. Seien $n\in\mathbb{N}\setminus\{1\}$ und $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $[0,+\infty)$. Für $k\in\mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne π_{α_k} die Poisson-Verteilung zum Parameter α_k. Dann gelten $\sum_{k=1}^n\alpha_k\in[0,+\infty)$ und

$$\bigstar_{k=1}^n\pi_{\alpha_k}=\pi_{\sum_{k=1}^n\alpha_k}.$$

Beweis. Wir führen den Beweis über vollständige Induktion über $\mathbb{N}$. Sei zunächst $n=2$. Für $j\in\mathbb{N}_{1,2}$ gilt wegen Definition M.15.5 dann

$$\pi_{\alpha_j}=\sum_{k=0}^\infty \mathrm{e}^{-\alpha_j}\frac{\alpha_j^k}{k!}\varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}. \tag{1}$$

Unter Verwendung von Beispiel M.25.3.2, Satz M.25.3.1 und (1) folgt dann

$$\pi_{\alpha_1}\star\pi_{\alpha_2}=\sum_{r=0}^\infty\left[\sum_{s=0}^r\mathrm{e}^{-\alpha_1}\frac{\alpha_1^s}{s!}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha_2}\frac{\alpha_2^{r-s}}{(r-s)!}\right]\varepsilon_{r,\mathfrak{B}_1}. \tag{2}$$

Unter Verwendung des Binomischen Satzes gilt dann

$$\begin{aligned}\sum_{s=0}^r\mathrm{e}^{-\alpha_1}\frac{\alpha_1^s}{s!}\cdot\mathrm{e}^{-\alpha_2}\frac{\alpha_2^{r-s}}{(r-s)!}&=\sum_{s=0}^r\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{1}{r!}\frac{r!}{s!\,(r-s)!}\alpha_1^s\alpha_2^{r-s}\\&=\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{1}{r!}\cdot\sum_{s=0}^r\binom{r}{s}\alpha_1^s,\alpha_2^{r-s}\\&=\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^r}{r!}.\end{aligned} \tag{3}$$

Unter Beachtung von (2) bis (3) und Definition M.15.5 folgt nun

$$\pi_{\alpha_1}\star\pi_{\alpha_2}=\sum_{r=0}^\infty\mathrm{e}^{-(\alpha_1+\alpha_2)}\frac{(\alpha_1+\alpha_2)^r}{r!}\varepsilon_{r,\mathfrak{B}_1}=\pi_{\alpha_1+\alpha_2}.$$

Für $n=2$ ist damit alles gezeigt. Der Induktionsschritt erfolgt durch analoge Überlegungen. □

Alternativer Beweis. Sei $\mu=\varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}$. Wegen Beispiel M.25.2.3 ist für $u\in[0,+\infty)$ dann die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung $\nu_{\mu,u}$ zum Parameter u gerade π_u. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.25.2.20 für $s,t\in(0,+\infty)$ dann $\pi_s\star\pi_t=\nu_{\mu,s}\star\nu_{\mu,t}=\nu_{\mu,s+t}=\pi_{s+t}$. □

Satz M.25.3.2. *Seien* $\mu\in\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ *und* $\nu\in\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{N}_0\right)$. *Es bezeichne* $\left(\mu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ *die Folge der zu* μ *zugehörigen Faltungspotenzen. Weiter sei* $\tau:=\sum_{k=0}^\infty\left[\nu\left(\{k\}\right)\right]\cdot\mu^{(k)}$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $\tau\in\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$ *sowie* $\tau\left(\mathbb{R}\right)=\nu\left(\mathbb{R}\right)$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $\tau\in\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.

(ii) *Es ist* $\nu\in\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$.

(c) *Es gilt* $\mathcal{M}_1(\tau) \leq \mathcal{M}_1(\mu) \cdot \mathcal{M}_1(\nu)$.

(d) *Es gelte* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gilt:*

(d1) *Es ist* $\tau \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(d2) *Es gilt* $M_1(\tau) = M_1(\mu) \cdot M_1(\nu)$.

(d3) *Es gilt* $\mathcal{M}_2(\tau) = \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\nu) + M_1(\mu) \cdot \mathcal{M}_2(\nu)$.

(d4) *Sei* $\nu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann gelten* $\nu, \tau \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ *sowie*

$$\operatorname{var}(\tau) = \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\nu) + [M_1(\mu)]^2 \cdot \operatorname{var}(\nu).$$

(d5) *Seinen* $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. *Dann ist* $\tau \in \mathcal{M}_+^{1,2}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(a)* bzw. *(b)* von Bemerkung M.25.3.1 gilt

$$\nu = \sum_{k=0}^{\infty} [\nu(\{k\})] \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1} \tag{1}$$

bzw.

$$\nu(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(\{k\}). \tag{2}$$

Da $(\nu(\{k\}))_{k\in\mathbb{N}_0}$ eine Folge aus $[0, +\infty]$ ist, liefert Teil *(a)* von Satz M.6.1 dann

$$\tau \in \mathcal{M}_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist $\left(\mu^{(k)}\right)_{k\in\mathbb{N}_0}$ nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.10 eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Hieraus folgt wegen Teil *(c1)* von Satz M.6.1 dann

$$\tau(\mathbb{R}) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu(\{k\}). \tag{4}$$

Aus (2) und (4) folgt nun

$$\tau(\mathbb{R}) = \nu(\mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie (3) und (5) folgt dann

$$\tau \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) ist dann *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus (5).

Zu *(c)*: Unter Beachtung von Teil *(a)* von Satz M.23.2.5 ergibt sich

$$\mathcal{M}_1(\tau) = \mathcal{M}_1\left(\sum_{k=0}^{\infty} [\nu(\{k\})] \cdot \mu^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\nu(\{k\}) \cdot \mathcal{M}_1\left(\mu^{(k)}\right)\right]. \tag{7}$$

Wegen Definition M.25.2.4 gilt

$$\mu^{(0)} = \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}. \tag{8}$$

Wegen Teil *(a)* von Beispiel M.23.2.1 gilt

$$\mathcal{M}_1\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\right) = |0|^1 = 0. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$\mathcal{M}_1\left(\mu^{(0)}\right) = 0. \tag{10}$$

Aus (7) und (10) folgt dann

$$\mathcal{M}_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\nu(\{k\}) \cdot \mathcal{M}_1\left(\mu^{(k)}\right)\right]. \tag{11}$$

Für

$$k \in \mathbb{N} \tag{12}$$

gilt wegen Teil *(a)* von Satz M.25.2.16 nun

$$\mathcal{M}_1\left(\mu^{(k)}\right) \leq s \cdot \mathcal{M}_1(\mu). \tag{13}$$

Wegen (1) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(\nu) &= \mathcal{M}_1\left(\sum_{k=0}^{\infty}\nu(\{k\}) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty}|k| \cdot \nu(\{k\}) = \sum_{k=0}^{\infty}k \cdot \nu(\{k\}) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty}k \cdot \nu(\{k\}).\end{aligned} \tag{14}$$

Unter Verwendung von (11) bis (14) folgt nun

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_1(\tau) = \sum_{k=1}^{\infty}\left[\nu(\{k\}) \cdot \mathcal{M}_1\left(\mu^{(k)}\right)\right] &\leq \sum_{k=1}^{\infty}\left[\nu(\{k\}) \cdot k \cdot \mathcal{M}_1(\mu)\right] = \mathcal{M}_1(\mu) \cdot \sum_{k=1}^{\infty}k \cdot \nu(\{k\}) \\ &= \mathcal{M}_1(\mu) \cdot \mathcal{M}_1(\nu).\end{aligned}$$

Zu *(d1)*: Dies folgt sogleich aus *(c)*.

Zu *(d2)*: Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ gilt nach Teil *(b)* von Satz M.25.2.16 für

$$k \in \mathbb{N} \tag{15}$$

dann

$$\mu^{(k)} \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{16}$$

sowie

$$M_1\left(\mu^{(k)}\right) = k \cdot M_1(\mu). \tag{17}$$

Wegen (8) gilt nach Teil *(b)* von Beispiel M.23.2.1 dann

$$\mu^{(0)} \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{18}$$

Wegen (15), (16) und (18) folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.23.3.5 dann

$$P_{1;\mathbb{R}} \in \bigcap_{k=0}^{\infty}\mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \mu^{(k)}; \mathbb{R}\right). \tag{19}$$

Wegen *(d1)* folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.23.3.5 weiterhin

$$P_{1;\mathbb{R}} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \tau; \mathbb{R}\right). \tag{20}$$

Wegen (19) und (20) liefert Teil *(b)* von Satz M.22.4.7 dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}} \mathrm{d}\tau = \sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}} P_{1;\mathbb{R}} \mathrm{d}\mu^{(k)}.$$

Hieraus folgt wegen Definition M.23.2.1 dann

$$M_1(\tau) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot M_1\left(\mu^{(k)}\right). \tag{21}$$

Wegen Teil *(b)* von Beispiel M.23.2.1 gilt

$$M_1\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\right) = 0^1 = 0. \tag{22}$$

Aus (8) und (22) folgt dann

$$M_1\left(\mu^{(0)}\right) = 0. \tag{23}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_+^{b,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und (1) gilt nach Teil *(b)* von Satz M.23.2.3 dann

$$M_1(\nu) = \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \nu\left(\{k\}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \nu\left(\{k\}\right). \tag{24}$$

Unter Verwendung von (21), (23), (15), (17) und (24) folgt nun

$$\begin{aligned} M_1(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot M_1\left(\mu^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot M_1\left(\mu^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot k \cdot M_1(\mu) \\ &= M_1(\mu) \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \nu\left(\{k\}\right) = M_1(\mu) \cdot M_1(\nu). \end{aligned}$$

Zu *(d3)*: Unter Beachtung von Teil *(a)* von Satz M.23.2.5 ergibt sich

$$\mathcal{M}_2(\tau) = \mathcal{M}_2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot \mu^{(k)}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \nu\left(\{k\}\right) \cdot \mathcal{M}_2\left(\mu^{(k)}\right). \tag{25}$$

Wegen Teil *(a)* von Beispiel M.23.2.1 gilt

$$\mathcal{M}_2\left(\varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}\right) = |0|^2 = 0. \tag{26}$$

Aus (8) und (26) folgt dann

$$\mathcal{M}_2\left(\mu^{(0)}\right) = 0. \tag{27}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ folgt mittels *(b)* von Satz M.25.2.16 für

$$k \in \mathbb{N} \tag{28}$$

dann

$$\mathcal{M}_2\left(\mu^{(k)}\right) = k \cdot \mathcal{M}_2(\mu) + k(k-1) M_1(\mu)^2 . \tag{29}$$

Unter Verwendung von (25), (27), (28), (29) und (24) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\tau) &= \sum_{k=0}^{\infty} \nu(\{k\}) \cdot \mathcal{M}_2\left(\mu^{(k)}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \nu(\{k\}) \cdot \mathcal{M}_2\left(\mu^{(k)}\right) \\
&= \sum_{k=0}^{\infty} \nu(\{k\}) \cdot \left[k \cdot \mathcal{M}_2(\mu) + k(k-1) M_1(\mu)^2\right] \\
&= \mathcal{M}_2(\mu) \sum_{k=0}^{\infty} k \cdot \nu(\{k\}) + M_1(\mu)^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \nu(\{k\}) \\
&= \mathcal{M}_2(\mu) \cdot M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \cdot \sum_{k=0}^{\infty} k(k-1) \cdot \nu(\{k\}) .
\end{aligned} \tag{30}$$

Unter Beachtung von (1) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.23.2.3 dann

$$\mathcal{M}_2(\nu) = \mathcal{M}_2\left(\sum_{k=0}^{\infty} \nu(\{k\}) \cdot \varepsilon_{k,\mathfrak{B}_1}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} |k|^2 \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \nu(\{k\}) . \tag{31}$$

Unter Beachtung von (31) und (24) folgt nun

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\nu) - M_1(\nu) &= \sum_{k=1}^{\infty} k^2 \cdot \nu(\{k\}) - \sum_{k=1}^{\infty} k \cdot \nu(\{k\}) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[k^2 \cdot \nu(\{k\}) - k \cdot \nu(\{k\})\right] \\
&= \sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot \nu(\{k\}) .
\end{aligned} \tag{32}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ gilt nach Teil *(c)* von Satz M.23.4.2 dann

$$\operatorname{var}(\mu) = \mathcal{M}_2(\mu) - M_1(\mu)^2 . \tag{33}$$

Unter Verwendung von (30), (32)und (33) folgt dann

$$\begin{aligned}
\mathcal{M}_2(\tau) &= \mathcal{M}_2(\mu)^2 M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \left[\sum_{k=1}^{\infty} k(k-1) \cdot \nu(\{k\})\right] \\
&= \mathcal{M}_2(\mu) M_1(\mu) + M_1(\mu)^2 \left(\mathcal{M}_2(\nu) - M_1(\nu)\right) \\
&= \left(\mathcal{M}_2(\mu) - M_1(\mu)^2\right) M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \mathcal{M}_2(\nu) \\
&= \operatorname{var}(\mu) M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \mathcal{M}_2(\nu) .
\end{aligned}$$

Damit ist *(d3)* bewiesen.

Zu *(d4)*: Aus der Wahl von ν folgt sogleich

$$\nu \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) . \tag{34}$$

Wegen $\nu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ folgt mittels *(b)* dann $\tau \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Hieraus folgt aufgrund von *(d1)* dann

$$\tau \in \mathcal{M}_+^{1,1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) . \tag{35}$$

Wegen (34) bzw. (35) gilt nach Teil *(c)* von Satz M.23.4.2 dann

$$\operatorname{var}(\nu) = \mathcal{M}_2(\nu) - M_1(\nu)^2 \tag{36}$$

bzw.

$$\operatorname{var}(\tau) = \mathcal{M}_2(\tau) - M_1(\tau)^2. \tag{37}$$

Unter Verwendung von (37), *(d3)*, *(d2)* und (36) folgt dann

$$\begin{aligned}
\operatorname{var}(\tau) &= \mathcal{M}_2(\tau) - M_1(\tau)^2 \\
&= \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \cdot \mathcal{M}_2(\nu) - M_1(\mu) \cdot M_1(\nu)^2 \\
&= \operatorname{var}(\mu) M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \mathcal{M}_2(\nu) - M_1(\mu)^2 \cdot M_1(\nu)^2 \\
&= \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \left(M_2(\nu) - M_1(\nu)^2\right) \\
&= \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\nu) + M_1(\mu)^2 \cdot \operatorname{var}(\nu).
\end{aligned} \tag{38}$$

Wegen (34), (35) und (38) ist dann *(d4)* bewiesen.

Zu *(d5)*: Aufgrund der Wahl von μ und ν gilt nach Teil *(b)* von Satz M.23.4.2 dann $\operatorname{var}(\mu) \in [0, +\infty)$ und $\operatorname{var}(\nu) \in [0, +\infty)$. Hieraus folgt in Verbindung mit (38) dann $\operatorname{var}(\tau) \in [0, +\infty)$. Die erneute Anwendung von Satz M.23.4.2 liefert dann $\tau \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. □

Es folgt nun eine erste Konsequenz aus Satz M.25.3.2.

Satz M.25.3.3. *Seien $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und $t \in [0, +\infty)$. Es bezeichne $\nu_{\mu,t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

(b) *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann gilt:*

(b1) *Es ist $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_+^{1,1}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

(b2) *Es ist $M_1(\nu_{\mu,t}) = t \cdot M_1(\mu)$.*

(b3) *Es gilt $\mathcal{M}_2(\nu_{\mu,t}) = t \cdot \operatorname{var}(\mu) + t(t+1) \cdot M_1(\mu)^2$.*

(b4) *Es gilt $\operatorname{var}(\nu_{\mu,t}) = t \cdot \left[\operatorname{var}(\mu) + M_1(\mu)^2\right]$.*

(b5) *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann ist $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.17.

Zu *(b)*: Es bezeichne π_t die Poisson-Verteilung zum Parameter t. Wegen Beispiel M.25.3.2 gilt dann

$$\pi_t \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0). \tag{1}$$

Es bezeichne $\left(\mu^{(s)}\right)_{s \in \mathbb{N}_0}$ die Folge der zu μ gehörigen Faltungspotenzen. Wegen Bemerkung M.25.2.16 gilt dann

$$\nu_{\mu,t} = \sum_{s=0}^{\infty} \pi_t(\{s\}) \cdot \mu^{(s)}. \tag{2}$$

Wegen Satz M.23.6.3 gelten weiterhin

$$\pi_t \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{3}$$

bzw.

$$M_1(\pi_t) = t \tag{4}$$

bzw.

$$M_2(\pi_t) = t(t+1) \tag{5}$$

und schließlich

$$\operatorname{var}(\pi_t) = t. \tag{6}$$

Wegen (3) gilt nach Bemerkung M.23.2.3 dann $\mathcal{M}_2(\pi_t) = M_2(\pi_t)$. Hieraus folgt mit (5) dann

$$\mathcal{M}_2(\pi_t) = t(t+1). \tag{7}$$

Zu *(b1)*: Dies folgt wegen (1) bis (3) und der Wahl von μ sogleich aus Teil *(d1)* von Satz M.25.3.2.

Zu *(b2)*: Unter Beachtung von (1) bis (4) folgt mittels Teil *(d2)* von Satz M.25.3.2 dann

$$M_1(\nu_{\mu,t}) = M_1(\mu) \cdot M_1(\pi_t) = t \cdot M_1(\mu).$$

Zu *(b3)*: Unter Beachtung von (1) bis (4) und (7) folgt mittels Teil *(d3)* von Satz M.25.3.2 dann

$$\mathcal{M}_2(\nu_{\mu,t}) = \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\pi_t) + M_1(\mu)^2 \cdot \mathcal{M}_2(\pi_t) = t \cdot \operatorname{var}(\mu) + t(t+1) M_1(\mu)^2.$$

Zu *(b4)*: Unter Beachtung von (1) bis (4) und (6) folgt mittels Teil *(d4)* von Satz M.25.3.2 dann

$$\begin{aligned}\operatorname{var}(\nu_{\mu,t}) &= \operatorname{var}(\mu) \cdot M_1(\pi_t) + M_1(\mu)^2 \cdot \operatorname{var}(\pi_t) = t \cdot \operatorname{var}(\mu) + t \cdot M_1(\mu)^2 \\ &= t \cdot \left[\operatorname{var}(\mu) + M_1(\mu)^2\right].\end{aligned}$$

Zu *(b5)*: Dies folgt unter Beachtung von (1) bis (3) aus Teil *(d5)* von Satz M.25.3.2. □

M.25.4. Das Faltungsprodukt von $\lambda^{(m)}$-stetigen Maßen

Der vorliegende Abschnitt ist der Untersuchung des Faltungsprodukts von Maßen aus der Klasse $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ in jener Situation gewidmet, in der unter den das Faltungsprodukt bildenden Faktoren mindestens ein $\lambda^{(m)}$-stetiges Maß vorkommt. In diesem Fall wird sich auch das Faltungsprodukt als $\lambda^{(m)}$-stetig erweisen. Dies ist der Inhalt der nachfolgenden Satzes, auf dessen Grundlage im weiteren Verlauf dieses Abschnitts zahlreiche konkrete Faltungsprodukte berechnet werden.

Bezeichnung. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann setzen wir

$$\mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) := \left\{\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \,\middle|\, \mu \text{ ist } \lambda^{(m)}\text{-stetig}\right\}$$

sowie

$$\mathcal{M}_+^{1,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) := \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m).$$

Satz M.25.4.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne f_1 eine Dichteversion von μ_1 bezüglich $\lambda^{(m)}$. Dann gilt:*

(a) *Sei $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$ und sei $f_{1,\mathbf{x}_1} : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x}_2 \longmapsto f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2).$$

Dann ist $f_{1,\mathbf{x}_1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) *Unter Beachtung von* (a) *sei $h_{f_1,\mu_2} : \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x}_1 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2,$$

also

$$\mathbf{x}_1 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} f(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \mathrm{d}\mu_2.$$

Dann gelten $h_{f_1,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \cap \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \mu; \overline{\mathbb{R}}\right)$ sowie

$$\mu_1 \star \mu_2 = \left(\lambda^{(m)}\right)_{h_{f_1,\mu_2}}.$$

(c) *Sei $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und bezeichne f_2 von μ_2 bezüglich $\lambda^{(m)}$. Weiter sei $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten $f_{1,\mathbf{x}_1} \cdot f_2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie*

$$h_{f_1,\mu_2}(\mathbf{x}_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \cdot f_2 \mathrm{d}\lambda^{(m)}.$$

Beweis. Nach Wahl von μ_1 und f_1 gelten

$$f_1 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

und

$$\mu_1 = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_1}. \tag{2}$$

Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_{2m} = \mathfrak{B}_m \otimes \mathfrak{B}_m. \tag{3}$$

Zu *(a)*: Sei $G_1 : \mathbb{R}^{2m} \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)^T \longmapsto f(\mathbf{u}_1 - \mathbf{u}_2). \tag{4}$$

Aus (4) folgt sogleich

$$G_1 = f_1 \circ T_{(\mathbf{I}_m, -\mathbf{I}_m), \mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{5}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{(\mathbf{I}_m, -\mathbf{I}_m), \mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_{2m}$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. Kombiniert man dies mit (1), (5) und der Definition von $\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m}\right)$, so ergibt sich mittels Satz M.16.3 dann

$$G_1 \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m}\right). \tag{6}$$

Aus (4) und der Definition von f_{1,x_1} folgt dann

$$f_{1,\mathbf{x}_1} = (G_1)_{\mathbf{x}_1 \bullet}. \tag{7}$$

Wegen (3), (6) und (7) liefert Lemma M.24.2.2 dann $f_{1,\mathbf{x}_1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Zu *(b)*: Es bezeichne $K_{\mu_1,\star}$ den durch μ_1 erzeugten Faltungskern auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Sei

$$B \in \mathfrak{B}_m. \tag{8}$$

Wegen (8) gelten nach Teil *(c)* von Satz M.25.2.2 dann

$$(K_{\mu_1,\star})_{\bullet B} \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{9}$$

und

$$(\mu_2 \star \mu_1)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B} \, \mathrm{d}\mu_2. \tag{10}$$

Wegen Satz M.25.2.4 gilt

$$\mu_2 \star \mu_1 = \mu_1 \star \mu_2. \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$(\mu_1 \star \mu_2)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B} \, \mathrm{d}\mu_2. \tag{12}$$

Sei

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{13}$$

Unter Beachtung von (13) und (8) ergibt sich mittels Teil *(a)* von Satz M.25.2.2 dann

$$K_{\mu_1,\star}((x_2, B)) = (T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}[\mu_1])(B). \tag{14}$$

Aufgrund der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}$ folgt aus (8) dann

$$T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B) \in \mathfrak{B}_m. \tag{15}$$

Wegen (1) und (15) folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)} \cdot f_1 \in \mathcal{E}^* (\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{16}$$

sowie aufgrund der Definition von $\left(\lambda^{(m)}\right)_{f_1}$ weiterhin

$$\left(\lambda^{(m)}\right)_{f_1} \left(T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)} f_1 \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{17}$$

Unter Beachtung von (14), (2) und (17) folgt nun

$$\begin{aligned} (K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}(\mathbf{x}_2) &= K_{\mu_1,\star}((\mathbf{x}_2, B)) = (T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}[\mu_1])(B) = \mu_1\left(T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right) \\ &= \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_1}\left(T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)} f_1 \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \end{aligned} \tag{18}$$

Wegen $\det \mathbf{I}_m = 1$ folgt aus Satz M.24.4.2 dann

$$T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[\lambda^{(m)}\right] = \frac{1}{|\det \mathbf{I}_m|}\lambda^{(m)} = \lambda^{(m)}. \tag{19}$$

Aus (18) und (19) folgt nun

$$(K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}(\mathbf{x}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)} f_1 \mathrm{d}T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[\lambda^{(m)}\right]. \tag{20}$$

Wegen (16) und der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-Messbarkeit von $T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}$ gelten nach Teil *(a)* von Folgerung M.22.9.1 dann

$$1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right]} \cdot (f_1 \circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}) \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{21}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)} \cdot f_1 \mathrm{d}T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[\lambda^{(m)}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_{T^{-1}_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right]} \cdot (f_1 \circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2})\, \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{22}$$

Unter Beachtung von Lemma M.24.4.2 ergibt sich

$$T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2} \circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2} = T_{\mathbf{I}_m\cdot\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2-\mathbf{x}_2} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}. \tag{23}$$

Unter Beachtung von Bemerkung M.16.1 und (23) ergibt sich

$$T^{-1}_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left[T^{-1}_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2}(B)\right] = \left(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{x}_2} \circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\right)^{-1}(B) = \mathrm{id}^{-1}_{\mathbb{R}^m}(B) = B. \tag{24}$$

Unter Verwendung von (20), (22) und (24) folgt nun

$$(K_{\mu_1,\star})_{\bullet B}(\mathbf{x}_2) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B \cdot (f_1 \cdot T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2})\, \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{25}$$

Unter Beachtung von (25) erkennt man nun, dass die rechte Seite von (12) ein iteriertes Integral darstellt. Wir wollen nun unter Heranziehung des TONELLIschen Satzes M.24.2.3 zeigen, dass sich diesem iterierten Integral die Integrationsreihenfolge vertauschen lässt. Hierzu sei zunächst bemerkt, dass wegen $\mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und der σ-Endlichkeit von $\lambda^{(m)}$ die σ-Endlichkeitsvoraussetzung von Satz M.24.2.3 für μ_2 und $\lambda^{(m)}$ erfüllt ist. Sei

$$F := 1_{B\times\mathbb{R}^m} \cdot G_1. \tag{26}$$

Da $\mathfrak{B}_m$ eine σ-Algebra in $\mathbb{R}^m$ ist, gilt $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$. Hieraus folgt in Verbindung mit (8) dann zunächst $B \times \mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m \boxtimes \mathfrak{B}_m$, also aufgrund von Folgerung M.17.1 bestehenden Inklusion $\mathfrak{B}_m \boxtimes \mathfrak{B}_m \subseteq \mathfrak{B}_m \otimes \mathfrak{B}_m$ sowie (3) dann

$$B \times \mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_{2m}. \tag{27}$$

Wegen (26), (27) und (6) liefert Teil *(b)* von Bemerkung M.19.11 dann

$$F \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^{2m}, \mathfrak{B}_{2m}\right). \tag{28}$$

Wegen (3) und (28) folgt mittels Lemma M.24.2.2 für

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m \tag{29}$$

dann

$$F_{\bullet\mathbf{x}_2} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{30}$$

Unter Beachtung von (29) und (30) sei die Funktion $g_{2,F}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty]$ gemäß

$$\mathbf{x}_2 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet\mathbf{x}_2}\mathrm{d}\lambda^{(m)} \tag{31}$$

definiert. Wegen (28), (31) sowie der σ-Endlichkeit von $\lambda^{(m)}$ und μ_2 folgt mittels des Satzes von Tonelli (Satz M.24.2.3) dann

$$g_{2,F} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{32}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} F\mathrm{d}\left(\lambda^{(m)} \otimes \mu_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F}\mathrm{d}\mu_2. \tag{33}$$

Wir bestimmen nun die Funktion $g_{2,F}$. Sei dazu

$$\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m. \tag{34}$$

Unter Beachtung von (26) und (4) folgt für $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$ dann

$$\begin{aligned} F_{\bullet\mathbf{x}_2}\left(\mathbf{x}_1\right) &= F\left(\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)^T\right) = \left(1_{B\times\mathbb{R}^m}\cdot G_1\right)\left(\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)^T\right) \\ &= 1_{B\times\mathbb{R}^m}\left(\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)^T\right)\cdot G_1\left(\left(\mathbf{x}_1,\mathbf{x}_2\right)^T\right) = 1_B\left(\mathbf{x}_1\right)1_{\mathbb{R}^m}\left(\mathbf{x}_2\right)f_1\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right) \\ &= 1_B\left(\mathbf{x}_1\right)f_1\left(\mathbf{x}_1-\mathbf{x}_2\right) = 1_B\left(\mathbf{x}_1\right)f_1\left(T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\left(\mathbf{x}_1\right)\right) \\ &= 1_B\left(\mathbf{x}_1\right)\left[f_1\circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\right]\left(\mathbf{x}_1\right). \end{aligned}$$

Somit gilt

$$F_{\bullet\mathbf{x}_2} = 1_B\left(f_1\circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\right). \tag{35}$$

Unter Beachtung von (13), (25), (34), (35) und (31) folgt nun

$$\left(K_{\mu_1,\star}\right)_{\bullet B}\left(\mathbf{x}_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B\cdot\left(f_1\circ T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{x}_2}\right)\mathrm{d}\lambda^{(m)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\bullet\mathbf{x}_2}\mathrm{d}\lambda^{(m)} = g_{2,F}\left(\mathbf{x}_2\right). \tag{36}$$

Aus (34) und (36) folgt nun

$$\left(K_{\mu_1,\star}\right)_{\bullet B} = g_{2,F}. \tag{37}$$

Unter Verwendung von (12), (37) und (33) folgt dann

$$\left(\mu_1\star\mu_2\right)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^m}\left(K_{\mu_1,\star}\right)_{\bullet B}\mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{2,F}\mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} F\mathrm{d}\left(\lambda^{(m)}\otimes\mu_2\right). \tag{38}$$

Wegen (3) und (28) folgt mittels Lemma M.24.2.2 für

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m \tag{39}$$

dann

$$F_{\mathbf{x}_1\bullet} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{40}$$

Unter Beachtung von (39) und (40) sei die Funktion $g_{1,F}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß

$$\mathbf{x}_1 \longmapsto \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1\bullet}\mathrm{d}\mu_2. \tag{41}$$

Wegen (28), (41) sowie der σ-Endlichkeit von $\lambda^{(m)}$ und μ_2 folgt mittels Satz M.24.2.3 dann

$$g_{1,F} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{42}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} F \mathrm{d}\left(\lambda^{(m)} \otimes \mu_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{1,F} \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{43}$$

Wir bestimmen nun die Funktion $g_{1,F}$. Sei

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m. \tag{44}$$

Unter Beachtung von (26), (4) und der Definition von $f_{1,\mathbf{x}_1}$ folgt für $\mathbf{x}_2 \in \mathbb{R}^m$ dann

$$\begin{aligned} F_{\mathbf{x}_1\bullet}(\mathbf{x}_2) &= F\left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T\right) = (1_{B\times\mathbb{R}^m} \cdot G)\left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T\right) \\ &= 1_{B\times\mathbb{R}^m}\left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T\right) \cdot G\left((\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2)^T\right) \\ &= 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot 1_{\mathbb{R}^m}(\mathbf{x}_1) \cdot f_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) \\ &= 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_1(\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2) = 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_{1,\mathbf{x}_1}(\mathbf{x}_2). \end{aligned}$$

Es ist also

$$F_{\mathbf{x}_1\bullet} = 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_{1,\mathbf{x}_1}. \tag{45}$$

Wegen *(a)* und $1_B(\mathbf{x}_1) \in [0, +\infty)$ folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.2.2 $1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_{1,\mathbf{x}_1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2 = 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2. \tag{46}$$

Unter Beachtung von (41), (45), (46) und der Definition von h_{f_1,μ_2} folgt nun

$$\begin{aligned} g_{1,F}(\mathbf{x}_1) &= \int\limits_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1\bullet} \mathrm{d}\mu_2 = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2 \\ &= 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\mu_2 = 1_B(\mathbf{x}_1) \cdot h_{f_1,\mu_2}(\mathbf{x}_1) \\ &= (1_B \cdot h_{f_1,\mu_2})(\mathbf{x}_1). \end{aligned} \tag{47}$$

Aus (44) und (47) folgt dann

$$g_{1,F} = 1_B \cdot h_{f_1,\mu_2}. \tag{48}$$

Unter Beachtung von (38), (43) und (48) ergibt sich dann

$$(\mu_1 \star \mu_2)(B) = \int\limits_{\mathbb{R}^{2m}} F \mathrm{d}\left(\lambda^{(m)} \otimes \mu_2\right) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} g_{1,F} \mathrm{d}\lambda^{(m)} = \int\limits_{\mathbb{R}^m} 1_B \cdot h_{f_1,\mu_2} \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{49}$$

Wegen $\mathbb{R}^m \in \mathfrak{B}_m$, (8), (42) und (48) gilt

$$h_{f_1,\mu_2} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{50}$$

Aus (50), (8) und (49) folgt nun

$$\mu_1 \star \mu_2 = \left(\lambda^{(m)}\right)_{h_{f_1,\mu_2}}. \tag{51}$$

Wegen (51) sowie Teil *(b)* von Satz M.22.2.4 ergibt sich

$$(\mu_1 \star \mu_2)(\mathbb{R}^m) = \left(\lambda^{(m)}\right)_{h_{f_1,\mu_2}}(\mathbb{R}^m) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{f_1,\mu_2} \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{52}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 gilt

$$(\mu_1 \star \mu_2)(\mathbb{R}^m) \in [0, +\infty). \tag{53}$$

Aus (52) und (53) folgt dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} h_{f_1,\mu_2} \mathrm{d}\lambda^{(m)} \in [0, +\infty). \tag{54}$$

Wegen (50) und (54) ist also

$$h_{f_1,\mu_2} \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m, \lambda^{(m)}; \overline{\mathbb{R}}\right). \tag{55}$$

Wegen (50), (51) und (55) ist dann *(b)* bewiesen.

Zu *(c)*: Nach Wahl von μ_2 und f_2 gelten

$$f_2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{56}$$

und

$$\mu_2 = \left(\lambda^{(m)}\right)_{f_2}. \tag{57}$$

Sei

$$\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m. \tag{58}$$

Wegen (58), *(a)* und (56) liefert Teil *(d1)* von Satz M.22.2.4 dann

$$f_{1,\mathbf{x}_1} \cdot f_2 \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{59}$$

und

$$\int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\left[\left(\lambda^{(m)}\right)_{f_2}\right] = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \cdot f_2 \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{60}$$

Aus (60) und der Definition von h_{f_1,μ_2} folgt nun

$$h_{f_1,\mu_2}(\mathbf{x}_1) = \int\limits_{\mathbb{R}^m} f_{1,\mathbf{x}_1} \cdot f_2 \mathrm{d}\lambda^{(m)}. \tag{61}$$

Wegen (58), (59) und (61) ist dann *(c)* bewiesen. □

Folgerung M.25.4.1. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind die Tupel*

$$\left(\mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right) \qquad \text{und} \qquad \left(\mathcal{M}_+^{1,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$$

Unterhalbgruppen von $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$.

Folgerung M.25.4.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und f eine Dichteversion von μ bezüglich $\lambda^{(m)}$. Es bezeichne $\mu^\vee$ die Spiegelung von μ. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $f \circ T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}$ ist eine Dichterversion von $\mu^\vee$ bezüglich $\lambda^{(m)}$.*

(b) *Sei $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$ und $F_{\mathbf{x}_1}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty]$ definiert gemäß $\mathbf{x}_2 \longmapsto f(\mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2) f(\mathbf{x}_2)$. Dann ist $F_{\mathbf{x}_1} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(c) *Unter Beachtung von* (a) *bezeichne $h_{f,\mu^\vee}$ die in Teil* (b) *von Satz M.25.4.1 eingeführte Funktion. Weiter sei $\mathbf{x}_1 \in \mathbb{R}^m$. Dann gelten $h_{f,\mu^\vee}(\mathbf{x}_1) = \int_{\mathbb{R}^m} F_{\mathbf{x}_1} \mathrm{d}\lambda^{(m)}$ sowie*

$$h_{f,\mu^\vee}(\mathbf{x}_1) = h_{f,\mu^\vee}(-\mathbf{x}_1).$$

(d) *Es gelten $h_{f,\mu^\vee} \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie*

$$\mu \star \mu^\vee = \left(\lambda^{(m)}\right)_{h_{f,\mu^\vee}}.$$

Beispiel M.25.4.1. Sei $\eta \in (0, +\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt:

(a) Es bezeichne $L_{0,\eta}$ die Laplace-Verteilung mit den Parametern 0 und η. Dann sind E_η und $E_\eta^\vee$ Wahrscheinlichkeitsmaße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und es gilt

$$E_\eta \star E_\eta^\vee = L_{0,\eta}.$$

(b) Es gilt

$$E_\eta \star E_\eta^\vee = \frac{1}{2}\left(E_\eta + E_\eta^\vee\right).$$

Wir geben nun ein Beispiel eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(1)}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, welches so beschaffen ist, dass wenn f eine Dichteversion von μ bezüglich $\lambda^{(1)}$ bezeichnet, die im Teil *(b)* von Satz M.25.4.1 definierte Funktion $h_{f,\mu}$ den Wert $+\infty$ annimmt.

Beispiel M.25.4.2. Sei $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \cap \mathrm{Abb}(\mathbb{R}, [0, +\infty))$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Für $x \in \mathbb{R}$ gilt $f(x) = f(-x)$.

(II) Es ist $f \in \mathscr{L}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right)$.

(III) Es ist $f \notin \mathscr{L}^2\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1, \lambda^{(1)}; \mathbb{R}\right)$.

Weiter sei $\mu := \left(\lambda^{(1)}\right)_f$. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(1)}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) Es bezeichne $h_{f,\mu}$ die in Teil *(b)* von Satz M.25.4.1 definierte Funktion. Dann gelten $f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$h_{f,\mu}(0) = \int\limits_{\mathbb{R}} f^2 \mathrm{d}\lambda^{(1)} = +\infty.$$

Bemerkung M.25.4.1. Sei $f\colon \mathbb{R} \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß

$$f(x) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } x \in \{0\} \cup \mathbb{R} \setminus [-1,1], \\ |x|^{-1/2}, & \text{falls } x \in [-1,1] \setminus \{0\}. \end{cases}$$

Dann besitzt f die Eigenschaften *(I)* bis *(III)* aus Beispiel M.25.4.2. ♣

Unsere nächste Überlegung ist auf die Berechnung des Faltungsproduktes einer endlichen Folge von Normalverteilungen ausgerichtet. Hierzu stellen wir zunächst ein Hilfsresultat bereit.

Lemma M.25.4.1. *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,+\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T_{1,a}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung, und es gilt*

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{1,a}\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right).$$

(b) *Es gilt*

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma^2}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 ist $T_{\sigma,a}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \mathcal{N}_{a,\sigma^2} \tag{1}$$

sowie $T_{\sigma,a}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{\sigma,0}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \mathcal{N}_{0,\sigma^2}. \tag{2}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{1,a} \circ T_{\sigma,0} = T_{1\cdot\sigma,0+a} = T_{\sigma,a}. \tag{3}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 ist $T_{1,a}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung. Unter Verwendung (1), (3), Satz M.16.11 und (2) folgt dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \left(T_{1,a} \circ T_{\sigma,0}\right)\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = T_{1,a}\left(T_{\sigma,0}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right)\right) = T_{1,a}\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right).$$

Zu *(b)*: Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$T_{1,a}\left(\mathcal{N}_{0,\sigma^2}\right) = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma^2}.$$

Hieraus folgt mittels *(a)* dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma^2}.$$ □

Satz M.25.4.2. *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((a_k, \sigma_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $\mathcal{N}_{a_k,\sigma_k^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a_k und σ_k^2. Dann ist $\left(\mathcal{N}_{a_k,\sigma_k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und es gelten $\left(\sum_{k=1}^n a_k, \sqrt{\sum_{k=1}^n \sigma_k^2}\right) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ sowie*

$$\bigstar_{k=1}^{n} \mathcal{N}_{a_k,\sigma_k^2} = \mathcal{N}_{\sum_{k=1}^n a_k, \sum_{k=1}^n \sigma_k^2}.$$

Beweis. Sei

$$(a,\sigma) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty). \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) sei die Funktion $f_{a,\sigma^2}\colon \mathbb{R} \longrightarrow (0,+\infty)$ definiert gemäß

$$u \longmapsto \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \mathrm{e}^{-\frac{(u-a)^2}{2\sigma^2}}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.13.2 dann

$$f_{a,\sigma^2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{3}$$

Unter Beachtung von (1) bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Wegen Definition M.22.13.1 gilt dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{a,\sigma^2}}. \tag{4}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gilt

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{5}$$

Wegen Teil *(b)* von Lemma M.25.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma^2}. \tag{6}$$

Wegen (3) und (4) gilt nach Teil *(b)* von Satz M.22.2.4 dann

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2}(\mathbb{R}) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{a,\sigma^2} \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{7}$$

Aus (5) und (7) ergibt sich dann

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_{a,\sigma^2} \mathrm{d}\lambda^{(1)} = 1. \tag{8}$$

Wir führen nun den Beweis über vollständige Induktion nach n. Sei zunächst $n = 2$. Wegen (1) und (5) ist dann $\left(\mathcal{N}_{a_k,\sigma_k^2}\right)_{k\in\mathbb{N}_{1,2}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und zudem gilt

$$\left(a_1+a_2, \sqrt{\sigma_1+\sigma_2}\right) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty). \tag{9}$$

Nach Folgerung M.25.2.2 gilt

$$\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \varepsilon_{a_2,\mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{a_1+a_2,\mathfrak{B}_1}. \tag{10}$$

Unter Verwendung von (1), (6), Teil *(a)* von Satz M.25.2.6 und (10) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{a_2,\sigma^2} &= \left(\varepsilon_{a_1,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_1^2}\right) \star \left(\varepsilon_{a_2,\mathfrak{B}_1} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}\right) = \left(\varepsilon_{a_1,\mathfrak{B}_1} \star \varepsilon_{a_2,\mathfrak{B}_1}\right) \star \left(\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}\right) \\ &= \varepsilon_{a_1+a_2,\mathfrak{B}_1} \star \left(\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}\right).\end{aligned} \tag{11}$$

Wir berechnen nun $\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}$. Wegen (3) und (4) kann hierzu Satz M.25.4.1 herangezogen werden. Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,2}. \tag{12}$$

Wir setzen

$$f_k \coloneqq f_{0,\sigma_k^2} \tag{13}$$

und

$$\mu_k \coloneqq \mathcal{N}_{0,\sigma_k^2}. \tag{14}$$

Wegen (12), (13), (1) und (3) ist dann

$$f_k \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{15}$$

Wegen (12) bis (14) und (1) gilt

$$\mu_k = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_k}. \tag{16}$$

Wegen (12), (14), (1) und (4) gilt

$$\mu_k \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{17}$$

Sei

$$x_1 \in \mathbb{R}. \tag{18}$$

Unter Beachtung von (18) sei die Funktion $f_{1,x_1} : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$x_2 \longmapsto f_1\left(x_1 - x_2\right). \tag{19}$$

Wegen (12) bis (19) gilt nach Teil *(c)* von Satz M.25.4.1 dann

$$f_{1,x_1} \cdot f_2 \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{20}$$

sowie für die im Teil *(b)* von Satz M.25.4.1 definierte Funktion h_{f_1,μ_2} weiterhin

$$h_{f_1,\mu_2}\left(x_1\right) = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{1,x_1} \cdot f_2 \mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{21}$$

Wegen (12) bis (19) folgen mittels Teil *(b)* von Satz M.25.4.1 zudem

$$h_{f_1,\mu_2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{22}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{0,\sigma_2^2} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{h_{f_1,\mu_2}}. \tag{23}$$

Wir berechnen nun h_{f_1,μ_2}. Hierzu berechnen wir wegen (22) zunächst $f_{1,x_1} \cdot f_2$. Unter Beachtung von $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty)$ sei

$$\tau \coloneqq \frac{\sigma_1 \sigma_2}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \tag{24}$$

Wegen $\sigma_1, \sigma_2 \in (0, +\infty)$ folgen aus (25) dann

$$\tau \in (0, +\infty) \tag{25}$$

sowie

$$\frac{1}{\sigma_1 \sigma_2} = \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}}. \tag{26}$$

Weiterhin sei

$$a_{x_1} \coloneqq \frac{x_1 \sigma_1}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}. \tag{27}$$

Aus (18) und (28) folgt

$$a_{x_1} \in \mathbb{R}. \tag{28}$$

Sei

$$x_2 \in \mathbb{R}. \tag{29}$$

Unter Beachtung von (24) und (27) folgt dann

$$\begin{aligned}
\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} &= \frac{x_1^2}{2\sigma_1^2} - \frac{x_1 x_2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} \\
&= \frac{x_1^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{2\sigma_1^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} - \frac{x_1 x_2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\
&= \frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + \frac{x_1^2 \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} - \frac{x_1 x_2}{\sigma_1^2} + \frac{x_2^2 \left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \\
&= \frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + \frac{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}{2\sigma_1^2 \sigma_2^2} \left(\frac{x_1^2 \sigma_2^4}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)^2} - \frac{2 x_1 x_2 \sigma_2}{\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + x_2^2 \right) \\
&= \frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + \frac{1}{2\tau^2} \left(x_2 - \frac{x_1 \sigma_2^2}{\sigma_1^2 + \sigma_2^2} \right) \\
&= \frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + \frac{\left(x_2 - a_{x_1}\right)^2}{2\tau^2}.
\end{aligned} \tag{30}$$

Unter Beachtung von (19), (12), (13), (1), (2), (26), (30), (25), (28), (9), (1) und (2) folgt dann

$$\begin{aligned}
\left(f_{1,x_1} \cdot f_2\right)(x_2) &= f_{1,x_1}(x_2) \cdot f_2(x_2) = f_1(x_1 - x_2) \cdot f_2(x_2) = f_{0,\sigma_1^2}(x_1 - x_2) \cdot f_{0,\sigma_2^2}(x_2) \\
&= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_1} \exp\left(-\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_1^2} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_2} \exp\left(-\frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} \right) \\
&= \frac{1}{2\pi\sigma_1\sigma_2} \exp\left(-\left[\frac{(x_1 - x_2)^2}{2\sigma_1^2} + \frac{x_2^2}{2\sigma_2^2} \right] \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \cdot \frac{1}{\tau} \cdot \frac{1}{\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\left[\frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} + \frac{\left(x_2 - a_{x_1}\right)^2}{2\tau^2} \right] \right) \\
&= \left[\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}} \exp\left(-\frac{x_1^2}{2\left(\sigma_1^2 + \sigma_2^2\right)} \right) \cdot \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(\frac{\left(x_2 - a_{x_1}\right)^2}{2\tau^2} \right) \right] \\
&= f_{0,\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(x_1) \cdot f_{a_{x_1},\tau^2}(x_2).
\end{aligned} \tag{31}$$

Aus (29) und (31) folgt nun

$$f_{1,x_1} \cdot f_2 = f_{0,\sigma_1^2 + \sigma_2^2}(x_1) \cdot f_{a_{x_1},\tau^2}. \tag{32}$$

Wegen (1), (2) und (9) gilt

$$f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1) \in (0,+\infty). \tag{33}$$

Wegen (1), (3), (28) und (25) gilt

$$f_{a_{x_1},\tau^2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right). \tag{34}$$

Wegen (33) und (34) folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.22.2.2 dann

$$f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1)\cdot f_{a_{x_1},\tau^2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right). \tag{35}$$

sowie

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1)\cdot f_{a_{x_1},\tau^2}\mathrm{d}\lambda^{(1)} = f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} f_{a_{x_1},\tau^2}\mathrm{d}\lambda^{(1)}. \tag{36}$$

Wegen (28), (25), (1) und (8) gilt

$$\int\limits_{\mathbb{R}} f_{a_{x_1},\tau^2}\mathrm{d}\lambda^{(1)} = 1. \tag{37}$$

Unter Beachtung von (21), (32), (36) und (37) folgt dann

$$\begin{aligned} h_{f_1,\mu_2}(x_1) &= \int\limits_{\mathbb{R}} f_{1,x_1}\cdot f_2\mathrm{d}\lambda^{(1)} = \int\limits_{\mathbb{R}} f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1)\cdot f_2\mathrm{d}\lambda^{(1)} = f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1)\cdot\int\limits_{\mathbb{R}} f_{a_{x_1},\tau^2}\mathrm{d}\lambda^{(1)} \\ &= f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}(x_1). \end{aligned} \tag{38}$$

Aus (18) und (38) folgt nun

$$h_{f_1,\mu_2} = f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}. \tag{39}$$

Wegen $\left(0,\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right) \in \mathbb{R} \in (0,+\infty)$ sowie (3) und (4) gelten

$$f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$$

und

$$\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}}. \tag{40}$$

Unter Beachtung von (23), (39) und (40) folgt nun

$$\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2}\star\mathcal{N}_{0,\sigma_2^2} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{h_{f_1,\mu_2}} = \left(\lambda^{(1)}\right)_{f_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}} = \mathcal{N}_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2}. \tag{41}$$

Unter Beachtung von (11), (41), (9), (1) und (6) folgt nun

$$\mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2}\star\mathcal{N}_{a_2,\sigma_2^2} = \varepsilon_{a_1+a_2,\mathfrak{B}_1}\star\left(\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2}\star\mathcal{N}_{0,\sigma_2^2}\right) = \varepsilon_{a_1+a_2,\mathfrak{B}_1}\star\mathcal{N}_{0,\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2}.$$

Damit ist der Fall $n = 2$ gezeigt. Hiermit kann nun der Induktionsschritt sehr einfach durchgeführt werden. □

Es folgen nun einige wichtige Faltungsprodukte von bekannten Verteilungen, welche jedoch ohne Beweis angegeben werden.

Satz M.25.4.3. *Sei $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $((\alpha_k, \beta_k))_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}\times(0,+\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $\gamma_{\alpha_k,\beta_k}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern α_k und β_k. Dann ist $(\gamma_{\alpha_k,\beta_k})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gelten $(\sum_{k=1}^n \alpha_k, \sum_{k=1}^n \beta_k) \in \mathbb{R}\times(0,+\infty)$ sowie*

$$\bigstar_{k=1}^{n} \gamma_{\alpha_k,\beta_k} = \gamma_{\sum_{k=1}^n \alpha_k, \sum_{k=1}^n \beta_k}.$$

Satz M.25.4.4. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $(\alpha_k)_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $(0,+\infty)$ und $\beta \in (0,+\infty)$. Für $k \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $\Gamma_{\alpha_k,\beta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern α_k und β. Dann ist $(\Gamma_{\alpha_k,\beta})_{k\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gelten $(\sum_{k=1}^n \alpha_k, \beta) \in (0,+\infty)\times(0,+\infty)$ sowie*

$$\bigstar_{k=1}^{n} \Gamma_{\alpha_k,\beta} = \Gamma_{\sum_{k=1}^n \alpha_k,\beta}.$$

Folgerung M.25.4.3. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$, $\eta \in (0,+\infty)$, bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η sowie $\Gamma_{n,\eta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern n und η. Dann ist $E_\eta \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gilt*

$$\bigstar_{k=1}^{n} E_\eta = \Gamma_{n,\eta}.$$

Beweis. Wegen dem Teil *(b)* von Satz M.22.14.3 gilt $E_\eta \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Wegen Teil *(a)* gilt M.22.14.6 $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$. Hieraus folgt in Verbindung mit Satz M.25.4.4 dann

$$\bigstar_{k=1}^{n} E_\eta = \bigstar_{k=1}^{n} \Gamma_{1,\eta} = \Gamma_{\sum_{k=1}^n 1,\eta} = \Gamma_{n,\eta}.$$

□

Folgerung M.25.4.4. *Seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $(n_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ bezeichne $\chi^2_{n_j}$ die zentrale Chiquadrat-Verteilung mit n_j Freiheitsgraden. Dann ist $\left(\chi^2_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und es gelten $\sum_{j=1}^n n_j \in \mathbb{N}$ und*

$$\bigstar_{j=1}^{n} \chi^2_{n_j} = \chi^2_{\sum_{j=1}^n n_j}.$$

Beweis. Wegen der Definition M.22.14.6 gilt für

$$k \in \mathbb{N}, \tag{1}$$

dann

$$\chi^2_k = \Gamma_{\frac{k}{2},\frac{1}{2}}. \tag{2}$$

Wegen (1), (2) und Teil *(b)* von Satz M.22.14.5 ist $\left(\chi^2_{n_j}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Da $(n_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ ist, gilt $\sum_{j=1}^n n_j \in \mathbb{N}$. Unter Beachtung von (1), (2) und Satz M.25.4.4 folgt

$$\bigstar_{j=1}^{n} \chi^2_{n_j} = \bigstar_{j=1}^{n} \Gamma_{\frac{n_j}{2},\frac{1}{2}} = \Gamma_{\sum_{j=1}^n \frac{n_j}{2},\frac{1}{2}} = \Gamma_{\frac{1}{2}\sum_{j=1}^n n_j,\frac{1}{2}} = \chi^2_{\sum_{j=1}^n n_j}.$$

□

Folgerung M.25.4.5. *Sei $m \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1},\mathbf{I}_m}$ die n-dimensionale Standardnormalverteilung und χ_n^2 die zentrale χ^2-Verteilung mit n Freiheitsgraden. Weiterhin sei $Q_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß*

$$\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x}^T\mathbf{x}.$$

Dann ist Q_n eine $\mathfrak{B}_n$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$Q_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1},\mathbf{I}_m}\right) = \chi_n^2.$$

Beweis. Wegen Satz M.17.5 gilt

$$\mathfrak{B}_n = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{B}_1. \tag{1}$$

Wegen Teil *(a)* von Lemma M.24.4.1 gilt

$$\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1},\mathbf{I}_m} = \bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{0,1}. \tag{2}$$

Sei $g\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$u \longmapsto u^2. \tag{3}$$

Wegen (3) gelten nach Satz M.22.14.7 dann

$$g \in \mathcal{M}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{R}\right) \tag{4}$$

und

$$g\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \chi_1^2. \tag{5}$$

Sei $g_n\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_n)^T \longmapsto \left(g(x_1), \ldots, g(x_n)\right)^T. \tag{6}$$

Wegen (1), (4) und (6) ist g_n nach Teil *(b)* von Satz M.24.1.15 dann $\mathfrak{B}_n$-$\mathfrak{B}_n$-messbar und es gilt

$$g_n\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{0,1}\right) = \bigotimes_{j=1}^{n} g\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{7}$$

Unter Verwendung von (2), (7) und (5) folgt nun

$$g_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1},\mathbf{I}_n}\right) = g_n\left(\bigotimes_{j=1}^{n} \mathcal{N}_{0,1}\right) = \bigotimes_{j=1}^{n} g\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) = \bigotimes_{j=1}^{n} \chi_1^2. \tag{8}$$

Sei $A_{1,n}\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_n)^T \longmapsto \sum_{j=1}^{n} x_j. \tag{9}$$

Sei

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)^T \in \mathbb{R}^n. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (6), (3) und (9) folgt dann

$$\begin{aligned}(A_{1,n} \circ g_n)(\mathbf{x}) &= A_{1,n}(g_n(\mathbf{x})) = A_{1,n}\left((g(x_1), \ldots, g(x_n))^T\right) = A_{1,n}\left((x_1^2, \ldots, x_n^2)^T\right) \\ &= \sum_{j=1}^{n} x_j^2 = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = Q_n(\mathbf{x}).\end{aligned} \tag{11}$$

Aus (10) und (11) folgt dann

$$Q_n = A_{1,n} \circ g_n. \tag{12}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.1 ist $A_{1,n}$ eine $\mathfrak{B}_n$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung. Beachtet man dies sowie die $\mathfrak{B}_n$-$\mathfrak{B}_n$-Messbarkeit von g_n, so folgt wegen (12) mittels Satz M.16.11 dann die $\mathfrak{B}_n$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von Q_n sowie

$$Q_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{i}_m}\right) = (A_{1,n} \circ g_n)\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{I}_n}\right) = A_{1,n}\left(g_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{I}_n}\right)\right). \tag{13}$$

Wegen Definition M.25.2.1 gilt

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\bigstar}} \chi_1^2 = A_{1,n}\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\bigotimes}} \chi_1^2\right). \tag{14}$$

Wegen Folgerung M.25.4.4 gilt

$$\overset{n}{\underset{j=1}{\bigstar}} \chi_1^2 = \chi_n^2. \tag{15}$$

Unter Verwendung von (13), (8), (14) und (15) folgt dann

$$Q_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{i}_m}\right) = A_{1,n}\left(g_n\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{n\times 1}, \mathbf{I}_n}\right)\right) = A_{1,n}\left(\overset{n}{\underset{j=1}{\bigotimes}} \chi_1^2\right) = \overset{n}{\underset{j=1}{\bigstar}} \chi_1^2 = \chi_n^2.$$

□

M.25.5. Unbeschränkt teilbare Maße in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt meiner Klasse von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche beim Studium des Grenzverhaltens von Summen stochastisch unabhängiger $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen besondere Aufmerksamkeit erlangten. Zur Vorbereitung der Einführung dieser Klasse beschäftigen wir uns im ersten Teil dieses Abschnitts zunächst mit den Eigenschaften der n-ten Faltungswurzel eines Maßes aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Definition M.25.5.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und $\mu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ_n eine *n-te Faltungswurzel* aus μ, falls für die n-te Faltungspotenz

$$\mu_n^{(n)} = \overset{n}{\underset{k=1}{\bigstar}} \mu_n$$

die Beziehung $\mu_n^{(n)} = \mu$ gilt.

Vereinbarung. Für $m \in \mathbb{N}$ und $\mu_1 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sei

$$\overset{1}{\underset{k=1}{\bigstar}} \mu_k = \mu_1.$$

Bemerkung M.25.5.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gibt es *genau* eine Faltungswurzel μ_1 aus μ, nämlich $\mu_1 = \mu$. ♣

Beispiel M.25.5.1. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gibt es genau eine n-te Faltungswurzel μ_n aus $\mathfrak{o}_m$, nämlich $\mu_n = \mathfrak{o}_m$.

Beweis. Dies folgt aus Definition M.25.5.1 und Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.2. □

Beispiel M.25.5.2. Seien $m, n \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Für $\mathbf{b} \in \mathbb{R}^m$ bezeichne $\varepsilon_{\mathbf{b},\mathfrak{B}_m}$ das Dirac-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit Einheitsmaße in $\mathbf{b}$. Dann ist $\varepsilon_{\frac{1}{n}\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.2.1. □

Beispiel M.25.5.3. Seien $n \in \mathbb{N}$ und $p \in [0,1]$. Für $j \in \mathbb{N}$ bezeichne $\beta_{j,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern j und p. Dann ist $\beta_{1,p}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\beta_{n,p}$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.3.3. □

Beispiel M.25.5.4. Sei $\alpha \in [0,+\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $\delta \in [0,+\infty)$ bezeichne π_δ die Poisson-Verteilung zum Parameter δ. Dann ist $\frac{\alpha}{n} \in [0,+\infty)$ und $\pi_{\frac{\alpha}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus π_α.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.3.4. □

Beispiel M.25.5.5. Seien $(a,\sigma) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Für $(b,\rho) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ bezeichne $\mathcal{N}_{b,\rho^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern b und ρ^2. Dann ist $\left(\frac{a}{n}, \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ und es ist $\mathcal{N}_{\frac{a}{n},\frac{\sigma^2}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz M.25.4.2. □

Beispiel M.25.5.6. Seien $(\alpha,\beta) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ und $n \in \mathbb{N}$. Für $(a,b) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ bezeichne $\gamma_{a,b}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern a und b. Dann ist $\left(\frac{\alpha}{n}, \frac{\beta}{n}\right) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty)$ und es ist $\gamma_{\frac{\alpha}{n},\frac{\beta}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\gamma_{\alpha,\beta}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz M.25.4.3. □

Beispiel M.25.5.7. Seien $\alpha, \beta \in (0,+\infty)$ sowie $n \in \mathbb{N}$. Für $\delta \in (0,+\infty)$ bezeichne $\Gamma_{\delta,\beta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern δ und β. Dann ist $\frac{\alpha}{n} \in (0,+\infty)$ und $\Gamma_{\frac{\alpha}{n},\beta}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\Gamma_{\alpha,\beta}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz M.25.4.4. □

Beispiel M.25.5.8. Seien $m \in \mathbb{N}$, $t \in [0,+\infty)$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $s \in [0,+\infty)$ bezeichne $\nu_{\mu,s}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter s. Dann ist $\frac{t}{n} \in [0,+\infty)$ und $\nu_{\mu,\frac{t}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\nu_{\mu,t}$.

Beweis. Dies folgt aus Satz M.25.2.19. □

Bemerkung M.25.5.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann gilt:

(a) Es ist $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \sqrt[n]{\mu(\mathbb{R}^m)}$.

(b) Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\mu_n \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

BEWEIS.

Zu *(a)*: Unter Beachtung der Wahl von μ_n gilt wegen Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.2 dann

$$[\mu_n(\mathbb{R}^m)]^n = \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_n\right)(\mathbb{R}^m) = \mu(\mathbb{R}^m).$$

Hieraus folgt wegen $\mu_n(\mathbb{R}^m) \in [0, +\infty)$ dann $\mu_n(\mathbb{R}^m) = \sqrt[n]{\mu(\mathbb{R}^m)}$.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus *(a)*. □

Bemerkung M.25.5.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, $G \in \{[0,1], [0,1), [1,+\infty), (1,+\infty)\}$ sowie ferner $\mu \in \mathcal{M}_+^G(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann gilt $\mu_n \in \mathcal{M}_+^G(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

BEWEIS. Dies folgt aus Teil *(a)* von Bemerkung M.25.5.2 und der Wahl von G. □

Bemerkung M.25.5.4. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\alpha \in [0, +\infty)$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann ist $\alpha\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\sqrt[n]{\alpha} \cdot \mu_n$ eine n-te Faltungswurzel aus $\alpha\mu$. ♣

BEWEISIDEE. Verwende Folgerung M.25.2.5. □

Satz M.25.5.1. *Seien $n \in \mathbb{N}$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie μ_n bzw. ν_n eine n-te Faltungswurzel aus μ bzw. ν. Dann ist $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mu_n \star \nu_n$ eine n-te Faltungswurzel aus $\mu \star \nu$.*

BEWEIS. Aufgrund der Wahl von μ und ν gilt nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 dann $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Aufgrund der Wahl von μ_n bzw. ν_n gelten

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

und

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu_n = \mu \tag{2}$$

bzw.

$$\nu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{3}$$

und

$$\bigstar_{j=1}^{n} \nu_n = \nu. \tag{4}$$

Wegen (1) und (3) folgt mittels Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 dann

$$\mu_n \star \nu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{5}$$

Unter Verwendung von (2), (4) und Teil *(a)* von Satz M.25.2.6 folgt weiterhin

$$\mu \star \nu = \left[\bigstar_{j=1}^{n} \mu_n\right] \star \left[\bigstar_{k=1}^{n} \nu_n\right] = \bigstar_{j=1}^{n} (\mu_n \star \nu_n). \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) ist $\mu_n \star \nu_n$ dann eine n-te Faltungswurzel aus $\mu \star \nu$. □

Satz M.25.5.2. *Seien $m, l \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ sowie μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$ und $T_{\mathbf{A},\frac{1}{n}\mathbf{a}}(\mu_n)$ eine n-te Faltungswurzel.*

Beweis. Nach Wahl von μ_n gelten

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

und

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu_n = \mu. \tag{2}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ bzw. (1) folgen mittels Satz M.16.10 dann

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right) \tag{3}$$

und

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right) \tag{4}$$

bzw.

$$T_{\mathbf{A},\frac{1}{n}\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right) \tag{5}$$

und

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu_n) \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right). \tag{6}$$

Unter Beachtung von Lemma M.24.4.2 ergeben sich

$$T_{\mathbf{I}_l,\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}} = T_{\mathbf{I}_l\cdot\mathbf{A}_l,\mathbf{a}+\mathbf{0}_{l\times 1}} = T_{\mathbf{A},\mathbf{a}} \tag{7}$$

sowie

$$T_{\mathbf{I}_l,\frac{1}{n}\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{A}.\mathbf{0}_{l\times 1}} = T_{\mathbf{I}_l\cdot\mathbf{A},\frac{1}{n}\mathbf{a}+\mathbf{0}_{l\times 1}} = T_{\mathbf{A}.\frac{1}{n}\mathbf{a}}. \tag{8}$$

Aus (7) bzw. (8) ergibt sich mittels Satz M.16.11 und Satz M.25.2.3 nun

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) = \left(T_{\mathbf{I}_l,\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}\right)(\mu) = T_{\mathbf{I}_l,\mathbf{a}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu)\right) = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_l} \star \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu)\right] \tag{9}$$

bzw.

$$T_{\mathbf{A},\frac{1}{n}\mathbf{a}}(\mu_n) = \left(T_{\mathbf{I}_l,\frac{1}{n}\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}\right)(\mu_n) = T_{\mathbf{I}_l,\frac{1}{n}\mathbf{a}}\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n)\right) = \varepsilon_{\frac{1}{n}\mathbf{a},\mathfrak{B}_l} \star \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n)\right]. \tag{10}$$

Wegen Satz M.25.2.8 gilt

$$T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_n\right) = \bigstar_{j=1}^{n} T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n). \tag{11}$$

Aus (11) und (2) folgt nun

$$\bigstar_{j=1}^{n} T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n) = T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu). \tag{12}$$

Wegen (4), (6) und (12) ist dann $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n)$ eine n-te Faltungswurzel aus $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu)$. Kombiniert man dies mit der Tatsache, dass nach Beispiel M.25.5.2 dann $\varepsilon_{\frac{1}{n}\mathbf{a},\mathfrak{B}_l}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_l}$ ist, so folgt mittels Satz M.25.5.1, dass $\varepsilon_{\frac{1}{n}\mathbf{a},\mathfrak{B}_l} \star \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_n)\right]$ eine n-te Faltungswurzel aus $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_l} \star \left[T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu)\right]$ ist. Hieraus folgt wegen (10) und (9), dass $T_{\mathbf{A},\frac{1}{n}\mathbf{a}}(\mu_n)$ eine n-te Faltungswurzel aus $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu)$ ist. □

Folgerung M.25.5.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $(\mu_n)^\vee$ eine n-te Faltungswurzel aus $\mu^\vee$.*

BEWEIS. Wegen $\mu^\vee = T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)$ folgen beide Behauptungen sogleich aus Satz M.25.5.1. □

Folgerung M.25.5.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann gelten $\mu \star \mu^\vee \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\mu_n \star \mu_n^\vee$ eine n-te Faltungswurzel aus $\mu \star \mu^\vee$.*

BEWEIS. Wegen Folgerung M.25.5.1 ist $\mu^\vee \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $(\mu_n)^\vee$ eine n-te Faltungswurzel aus $\mu^\vee$. Hieraus und aus der Wahl von μ_n ergeben sich mit Satz M.25.5.2. □

Satz M.25.5.3. *Seien $s \in \mathbb{N}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ sowie $m := \sum_{j=1}^s m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right)$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $\mu_{j,n}$ eine n-te Faltungswurzel aus μ_j. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^s \mu_j \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\bigotimes_{j=1}^s \mu_{j,n}$ eine n-te Faltungswurzel aus $\bigotimes_{j=1}^s \mu_j$.*

Satz M.25.5.4. *Sei $a \in (0, +\infty)$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ derart gewählt, dass $\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a] \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$ und es sei μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann gilt $\mathbb{R}^1 \setminus \left[-\frac{a}{n}, \frac{a}{n}\right] \in \mathcal{N}_{\mu_n}$.*

Satz M.25.5.5. *Sei $a \in (0, +\infty)$ und sei $\mu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ derart gewählt, dass $\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a] \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Weiter seien $n \in \mathbb{N}$ und es existiere eine n-te Einheitswurzel aus μ. Dann gilt $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie $\operatorname{var}(\mu) \in \left[0, \frac{a^2}{n}\right]$.*

Satz M.25.5.6. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiterhin seien $n \in \mathbb{N}$ sowie μ_n eine n-te Faltungswurzel aus μ. Dann gilt $\mu_n \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

BEWEIS. Es bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Wegen Bemerkung M.7.2 gilt dann

$$\mathfrak{o}_m \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{1}$$

Unter Beachtung von (1) sei zunächst

$$\mu = \mathfrak{o}_m. \tag{2}$$

Wegen (2) liefert Beispiel M.25.5.1 dann

$$\mu_n = \mathfrak{o}_m. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt dann

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{4}$$

Sei nun

$$\mu \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}. \tag{5}$$

Sei zunächst $n = 1$. Wegen Bemerkung M.25.5.1 gilt dann $\mu_1 = \mu$. Hieraus folgt wegen (5) dann

$$\mu_1 \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{6}$$

Sei nun

$$n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{7}$$

Wegen Definition M.25.5.1, (7) sowie Teil *(a)* von Satz M.25.2.6 folgt dann

$$\mu = \bigstar_{j=1}^{n} \mu_n = \mu_n \star \left(\bigstar_{j=1}^{n-1} \mu_n \right). \tag{8}$$

Wegen (5) und (8) liefert Satz M.25.2.13 dann

$$\mu_n \in \mathcal{M}_+^{b,d}\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{9}$$

Wegen (1), (4), (5), (6), (7) und (9) ist dann alles gezeigt. □

Wir kommen nun zum zentralen Objekt dieses Abschnitts. Hierbei handelt es sich um jene Teilklasse von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$, welche Faltungswurzeln aller Ordnung besitzen.

Definition M.25.5.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann heißt μ *unbeschränkt teilbar*, falls es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-te Faltungswurzel aus μ gibt.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ die Menge aller unbeschränkt teilbaren Maße aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiter sei $\mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \coloneqq \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \cap \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Für eine nichtleere Teilmenge $G \subseteq [0, +\infty)$ sei schließlich $\mathcal{M}_{+,u}^G\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) = \left\{\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b \,\middle|\, \mu\left(\mathbb{R}^m\right) \in G\right\}$.

Die bereits erhaltenen Resultate über n-te Faltungswurzeln lassen sich nun in einfacher Weise auf den Fall der unbeschränkten Teilbarkeit erweitern. Hierbei erhalten wir zunächst eine ganze Reihe von Beispielen von Maßen aus $\mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Diese Beispiele lassen bereits erahnen, dass die Klasse $\mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ sehr reichhaltig ist und insbesondere zahlreiche markante Wahrscheinlichkeitsmaße enthält.

Beispiel M.25.5.9. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann gilt $\mathfrak{o}_m \in \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.2. □

Beispiel M.25.5.10. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.3. □

Beispiel M.25.5.11. Sei $\alpha \in [0, +\infty)$ und bezeichne π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter α. Dann gilt $\pi_\alpha \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.4. □

Beispiel M.25.5.12. Sei $(a, \sigma) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ und bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Dann gilt $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.5. □

Beispiel M.25.5.13. Sei $(\alpha, \beta) \in \mathbb{R} \times (0, +\infty)$ und bezeichne $\gamma_{\alpha,\beta}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.6. □

Beispiel M.25.5.14. Sei $(\alpha, \beta) \in (0, +\infty) \times (0, +\infty)$ und bezeichne $\Gamma_{\alpha,\beta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt $\Gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.7. □

Beispiel M.25.5.15. Sei $\eta \in (0, +\infty)$ und bezeichne E_η die Exponentialverteilung zum Parameter η. Dann gilt $E_\eta \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Da wegen Teil *(a)* von Satz M.22.14.6 dann $E_\eta = \Gamma_{1,\eta}$ erfüllt ist, folgt die Behauptung aus Beispiel M.25.5.14. □

Beispiel M.25.5.16. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie $t \in [0, +\infty)$. Es bezeichne $\nu_{\mu,t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt $\nu_{\mu,t} \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beweis. Dies folgt aus Beispiel M.25.5.8. □

Bemerkung M.25.5.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine n-te Faltungswurzel $\mu_n \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Teil *(b)* von Bemerkung M.25.5.2. □

Bemerkung M.25.5.6. Seien $m \in \mathbb{N}$, $G \in \{[0,1], [0,1), [1,+\infty), (1,+\infty)\}$ und zudem noch $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^G(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(ii) Zu jedem $n \in \mathbb{N}$ gibt es eine n-te Faltungswurzel $\mu_n \in \mathcal{M}_+^G(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ aus μ. ♣

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.25.5.3. □

Bemerkung M.25.5.7. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann gilt $\alpha\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beweis. Dies folgt aus Bemerkung M.25.5.4. □

Satz M.25.5.7. *Seien $m, l \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$. Dann ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}(\mu) \in \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$.*

Beweis. Dies folgt aus Satz M.25.5.2. □

Folgerung M.25.5.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Es bezeichne $\mu^\vee$ die Spiegelung von μ. Dann gilt $\mu^\vee \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

Beweis. Dies folgt wegen $\mu^\vee = T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)$ aus Satz M.25.5.7. □

Folgerung M.25.5.4. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $l \in \mathbb{N}$ und $(i_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,l}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}_{1,m}$. Es bezeichne $\pi_{m;i_1,\ldots,i_l} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ diejenige Abbildung, welche gemäß*

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_l})^T$$

definiert ist. Dann ist $\pi_{m;i_1,\ldots,i_l}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung und es gilt $\pi_{m;i_1,\ldots,i_l}(\mu) \in \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$.

BEWEIS. Es bezeichne $\left(\mathbf{e}_j^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$. Weiter sei

$$\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_l} \coloneqq \begin{pmatrix} \left(\mathbf{e}_{i_1}^{(m)}\right)^T \\ \vdots \\ \left(\mathbf{e}_{i_l}^{(m)}\right)^T \end{pmatrix}.$$

Dann gilt $\pi_{m;i_1,\ldots,i_l} = T_{\mathbf{E}_{m;i_1,\ldots,i_l},\mathbf{0}_{l\times 1}}$. Hieraus ergeben sich mittels Satz M.25.5.7 dann alle Behauptungen. □

Satz M.25.5.8. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu,\nu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\mu\star\nu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.5.2. □

Folgerung M.25.5.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann ist*

$$\mu\star\mu^\vee \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m).$$

BEWEIS. Kombiniere Folgerung M.25.5.3 und Satz M.25.5.8. □

Satz M.25.5.9. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann sind $\left(\mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m),\star\right)$ und $\left(\mathcal{M}_{+,u}^1(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m),\star\right)$ jeweils Unterhalbgruppen von $\left(\mathcal{M}_{+}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m),\star\right)$ mit Einselement $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.5.8 und Beispiel M.25.5.10. □

Satz M.25.5.10. *Seien $s \in \mathbb{N}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m = \sum_{j=1}^s m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $\mu_j \in \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^{m_j},\mathfrak{B}_{m_j}\right)$. Dann ist $\bigotimes_{j=1}^s \mu_j \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.5.3. □

Satz M.25.5.11. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $a \in (0,+\infty)$ und $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ so gewählt, dass die Beziehung $\mathbb{R}^m \setminus \left[\bigtimes_{j=1}^m [-a,a]\right] \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann gibt es ein $\mathbf{x}_0 \in \bigtimes_{j=1}^m [-a,a]$ mit*

$$\mu = \mu(\mathbb{R}^m)\cdot\varepsilon_{\mathbf{x}_0,\mathfrak{B}_m}.$$

BEWEIS. Wir betrachten zunächst den Fall, dass $\mu = \mathfrak{o}_m$ ist. Dann ist

$$\mathbf{0}_{m\times 1} \in \bigtimes_{j=1}^m [-a,a] \tag{1}$$

und trivialerweise gilt

$$\mathfrak{o}_m = 0\cdot\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m} = [\mathfrak{o}_m(\mathbb{R}^m)]\cdot\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist im Falle $\mu = \mathfrak{o}_m$ alles bewiesen. Sei nun

$$\mu \neq \mathfrak{o}_m. \tag{3}$$

Wegen (3) und $\mu \in \mathcal{M}_{+}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ gilt dann

$$\mu(\mathbb{R}^m) \in (0,+\infty). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4) sei

$$\nu := \frac{1}{\mu(\mathbb{R}^m)} \cdot \mu. \tag{5}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie (3) und (5) ergibt sich mittels Folgerung M.6.1 sowie Bemerkung M.25.5.7 dann

$$\nu \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{6}$$

Wegen (4) und (5) gilt weiterhin $\mathcal{N}_\mu = \mathcal{N}_\nu$. Hieraus folgt dann

$$\mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{j=1}^m [-a, a] \in \mathcal{N}_\nu. \tag{7}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{8}$$

und sei $\pi_{m;j} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_j. \tag{9}$$

Wegen (6), (8) und (9) ist $\pi_{m;j}$ nach Folgerung M.25.5.4 dann eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$\pi_{m;j}(\nu) \in \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{10}$$

Wir zeigen nun, dass $\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a] \in \mathcal{N}_{\pi_{m;j}(\nu)}$ erfüllt ist. Wegen $\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a] \in \mathfrak{B}_1$ und der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $\pi_{m;j}$ gilt

$$(\pi_{m;j})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a]\right) \in \mathfrak{B}_m. \tag{11}$$

Wir betrachten zunächst den Fall

$$m = 1. \tag{12}$$

Wegen (12), (8) und (9) gilt dann

$$\pi_{m;j} = \pi_{1;1} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}.$$

Somit gilt also

$$(\pi_{m;j})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a]\right) = (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a, a]\right) = \mathbb{R}^1 \setminus [-a, a] = \mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{j=1}^m [-a, a]. \tag{13}$$

Sei nun

$$m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}. \tag{14}$$

Für

$$s \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{15}$$

sei dann

$$A_{s,j} := \begin{cases} [-a, a], & \text{falls } s = j, \\ \mathbb{R}^1, & \text{falls } s \in \mathbb{N}_{1,m} \setminus \{j\}. \end{cases} \tag{16}$$

Aus (15) und (16) folgt dann

$$\bigtimes_{s=1}^m [-a, a] \subseteq \bigtimes_{s=1}^m A_{s,j} \tag{17}$$

sowie unter zusätzlicher Beachtung von (8) und (9) weiterhin

$$(\pi_{m;j})^{-1}([-a,a]) = \bigtimes_{j=1}^{m} A_{s,j}. \tag{18}$$

Aus (17) folgt

$$\mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} A_{s,j} \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a]. \tag{19}$$

Unter Beachtung von (18) ergibt sich

$$(\pi_{m;j})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a]\right) = \mathbb{R}^m \setminus \left[(\pi_{m;j})^{-1}([-a,a])\right] = \mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} A_{s,j}. \tag{20}$$

Aus (19) und (20) folgt dann

$$(\pi_{m;j})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a]\right) \subseteq \mathbb{R}^m \setminus \left[\bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a]\right]. \tag{21}$$

Wegen (11) bis (14), (21) und (7) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$(\pi_{m;j})^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a]\right) \in \mathcal{N}_\nu. \tag{22}$$

Nach Definition von $\pi_{m;j}(\nu)$ gilt

$$[\pi_{m;j}(\nu)]\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a]\right) = \nu\left([\pi_{m;j}]^{-1}\left(\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a]\right)\right). \tag{23}$$

Aus (22) und (23) folgt dann

$$\mathbb{R}^1 \setminus [-a,a] \in \mathcal{N}_{\pi_{m;j}(\nu)}. \tag{24}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{25}$$

Wegen (10) und (25) gibt es dann eine n-te Faltungswurzel $\nu_{n;j}$ von $\pi_{m;j}(\nu)$. Berücksichtigt man dies sowie (24), so liefert Satz M.25.5.5 dann $\pi_{m;j}(\nu) \in \mathcal{M}_+^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ sowie

$$\operatorname{var}(\pi_{m;j}(\nu)) \in \left[0, \frac{a^2}{n}\right]. \tag{26}$$

Wegen $\lim_{n\to\infty} {}^{a^2}/_n = 0$ gilt

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left[0, \frac{a^2}{n}\right] = \{0\}. \tag{27}$$

Aus (25), (26) und (27) folgt nun

$$\operatorname{var}(\pi_{m;j}(\nu)) = 0. \tag{28}$$

Wegen (28) liefert Teil *(b)* von Satz M.23.4.4 dann $x_{j,0} \in \mathbb{R}^1$ und mit

$$\pi_{m;j}(\nu) = \varepsilon_{x_{j,0},\mathfrak{B}_1}. \tag{29}$$

Wegen (24), (29) und $\varepsilon_{x_{j,0},\mathfrak{B}_1}(\{x_{j,0}\}) = 1$ folgt dann

$$x_{j,0} \in [-a,a]. \tag{30}$$

Sei

$$\mathbf{x}_0 \coloneqq (x_{1,0}, \ldots, x_{m,0})^T. \tag{31}$$

Aus (8), (30) und (31) folgt dann

$$\mathbf{x}_0 \in \bigtimes_{s=1}^{m} [-a, a]. \tag{32}$$

Wegen (8), (29) und (31) liefert Lemma M.25.7.1 weiterhin

$$\nu = \varepsilon_{\mathbf{x}_0, \mathfrak{B}_m}. \tag{33}$$

Aus (5) und (33) folgt dann

$$\mu = \mu(\mathbb{R}^m) \cdot \nu = \mu(\mathbb{R}^m) \cdot \varepsilon_{\mathbf{x}_0, \mathfrak{B}_m}. \tag{34}$$

Wegen (32) und (34) ist dann alles gezeigt. □

Satz M.25.5.11 gibt uns die Möglichkeit, eine Entscheidung darüber zu treffen, dass gewisse Maße $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ *nicht* unbeschränkt teilbar ist.

Beispiel M.25.5.17. Sei $n \in \mathbb{N}$ und $p \in (0,1)$. Es bezeichne $\beta_{n,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern n und p. Dann gilt $\beta_{n,p} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \setminus \mathcal{M}_{+,u}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, das heißt $\beta_{n,p}$ ist *nicht* unbeschränkt teilbar.

Beweis. Aufgrund der Wahl von p ist $\beta_{n,p}$ ein molekulares Maß mit Massen in $0, 1, \ldots, n$, also *kein* Vielfaches eines Dirac-Maßes. Hieraus folgt mittels Satz M.25.5.11 die Behauptung. □

Beispiel M.25.5.18. Seien $m \in \mathbb{N}$ und B eine beschränkte Menge aus $\mathfrak{B}_m \setminus \mathcal{N}_{\lambda^{(m)}}$. Dann gilt:

(a) Es ist $\lambda^{(m)}(B) \in (0, +\infty)$.

(b) Unter Beachtung von *(a)* bezeichne μ_B die kontinuierliche Gleichverteilung auf B. Dann gilt $\mu_B \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \mathcal{M}_{+,u}^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, das heißt die kontinuierliche Gleichverteilung ist *nicht* unbeschränkt teilbar.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt wegen $\lambda^{(m)} \in \widetilde{\mathcal{M}}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Satz M.25.5.11. □

Es sei daran erinnert, dass im Falle $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ die Setzung $X_{\mathfrak{B}_m, \mu} \coloneqq \{x \in \mathbb{R}^m \mid \mu(\{x\}) \neq 0\}$ vorgenommen wurde.

Folgerung M.25.5.6. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ derart beschaffen, dass* $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m, \mu} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ *erfüllt ist. Dann ist μ* nicht *unbeschränkt teilbar.*

Beweis. Aufgrund der Wahl von μ ist $X_{\mathfrak{B}_m, \mu}$ endlich. Sei

$$a \coloneqq \max_{x \in \mathfrak{B}_{m,\mu}} |x|. \tag{1}$$

Da $X_{\mathfrak{B}_m, \mu}$ mindestens zwei Elemente enthält, folgt aus (1) dann

$$a \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Aus (1) folgt weiterhin

$$X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \subseteq \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a]\,. \tag{3}$$

Nach Wahl von μ gilt

$$\mathbb{R}^m \setminus X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{4}$$

Wegen (3) gilt

$$\mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a] \subseteq \mathbb{R}^m \setminus X_{\mathfrak{B}_m,\mu}. \tag{5}$$

Zudem gilt

$$\mathbb{R}^m \setminus \left[\bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a]\right] \in \mathfrak{B}_m. \tag{6}$$

Wegen (4) bis (6) liefert Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann

$$\mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a] \in \mathcal{N}_\mu. \tag{7}$$

Angenommen, es wäre $\mathbf{x}_0 \in \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a]$ mit $\mu = \mu(\mathbb{R}^m) \cdot \varepsilon_{\mathbf{x}_0,\mathfrak{B}_m}$. Hieraus ergäbe sich dann $X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \in \{0,1\}$, was im Widerspruch zur Voraussetzung $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$ stünde. Somit ist μ *nicht* unbeschränkt teilbar. □

Folgerung M.25.5.7. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $a \in (0,+\infty)$. Weiter sei $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ so beschaffen, dass $\mathbb{R}^m \setminus \bigtimes_{s=1}^{m} [-a,a] \in \mathcal{N}_\mu$ erfüllt ist. Dann ist μ nicht unbeschränkt teilbar.*

Beweis. Wäre μ unbeschränkt teilbar, so wäre wegen Satz M.25.5.11 und Teil *(a)* von Lemma M.7.2 dann $\mu \in \mathcal{M}_+^d(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann wäre also

$$\mu \in \mathcal{M}_+^d(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \cap \left[\mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}\right].$$

Dies stünde im Widerspruch dazu, dass nach Bemerkung M.7.7

$$\mathcal{M}_+^d(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \cap \left[\mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}\right] = \varnothing$$

gilt. Somit ist μ nicht unbeschränkt teilbar. □

Folgerung M.25.5.8. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $B \in \mathfrak{B}_m$ beschränkt. Weiter sei $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ eine Funktion mit folgenden Eigenschaften:*

(I) *Es ist $1_B \cdot f = f$.*

(II) *Es ist $\int_{\mathbb{R}^m} \mathrm{d}\lambda^{(m)} \in (0,+\infty)$.*

Sei $\mu := \left(\lambda^{(m)}\right)_f$. Dann gilt:

(a) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,c}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$.*

(b) *Es ist $\mathbb{R}^m \setminus B \in \mathcal{N}_\mu$.*

(c) *Es ist μ nicht unbeschränkt teilbar.*

M.25.6. Faltungshalbgruppen in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Im Mittelpunkt dieses Abschnitts steht die Behandlung einer speziellen Klasse von parametrischen Unterhalbgruppen der Halbgruppe $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$. Als Parametermenge dient das Intervall $[0, +\infty)$. Hierbei wird der Tatsache Rechnung getragen, dass das $([0, +\infty), +)$ selbst eine Halbgruppe ist. In den Anwendungen wird das Intervall $[0, +\infty)$ als Zeitbereich gedeutet. Es folgt nun die grundlegende Begriffsbildung dieses Abschnitts.

Definition M.25.6.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine *Faltungshalbgruppe* in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, falls für alle $u, v \in [0, +\infty)$ die Beziehung

$$\mu_u \star \mu_v = \mu_{u+v}$$

besteht.

Die nachfolgende Beobachtung lässt die Terminologie „Faltungshalbgruppe“ deutlich werden.

Bemerkung M.25.6.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $(\{\mu_t \mid t \in [0, +\infty)\}, \star)$ eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$. ♣

Bemerkung M.25.6.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist die Abbildung $h\colon [0, +\infty) \longrightarrow \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche gemäß

$$t \longmapsto \mu_t$$

erklärt ist, ein Halbgruppenhomomorphismus zwischen $([0, +\infty), +)$ und $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$. ♣

Beweis. Seien $u, v \in [0, +\infty)$. Dann gilt

$$h(u+v) = \mu_{u+v} = \mu_u \star \mu_v = h(u) \star h(v).$$ □

Faltungshalbgruppen in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ werden in zahlreichen Fällen zur Modellierung von System herangezogen, deren Zustände Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sind. Ist hierbei $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe, so bedeutet dies gerade, dass sich das zugrundeliegende System zum Zeitpunkt t im Zustand μ_t befindet.

Bemerkung M.25.6.3. Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Familie aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit folgenden Eigenschaften:

(I) Es ist $\mu_0 = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$.

(II) Für alle $\mu, \nu \in (0, +\infty)$ gilt $\mu_u \star \mu_v = \mu_{u+v}$.

Dann ist $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beweis. Dies ergibt sich mittels Folgerung M.25.2.1. □

Bemerkung M.25.6.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt $\mu_0 = \mathfrak{o}_m$ oder $\mu_0 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beweis. Aufgrund der Wahl von $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ gilt $\mu_0 \star \mu_0 = \mu_{0+0} = \mu_0$. Hieraus folgt mittels Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.2 dann

$$[\mu_0(\mathbb{R}^m)]^2 = \mu_0(\mathbb{R}^m)$$

bzw. $\mu_0(\mathbb{R}^m)[\mu_0(\mathbb{R}^m) - 1] = 0$. Hieraus ergibt sich somit $\mu_0(\mathbb{R}^m) = 0$ oder $\mu_0(\mathbb{R}^m) = 1$. Daraus folgt die Behauptung. □

Beispiel M.25.6.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $t \in (0, +\infty)$ sei $\mu_t \coloneqq \mathfrak{o}_m$. Dann gilt:

(a) Sei $\mu_0 \coloneqq \mathfrak{o}_m$. Dann ist $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Sei $\mu_0 \coloneqq \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1}, \mathfrak{B}_m}$. Dann ist $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beispiel M.25.6.1 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.25.6.2. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ derart, dass für alle $t \in (0, +\infty)$ gilt $\mu_t = \mathfrak{o}_m$. Dann heißt $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine *triviale Faltungshalbgruppe* in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Die in Teil *(a)*- bzw. Teil *(b)* von Beispiel M.25.6.1 auftretende Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ wird als triviale Faltungshalbgruppe vom Typ I bzw. Typ II bezeichnet.

Es folgt nun das erste Hauptresultat dieses Abschnitts. Dieses stellt eine Verbindung zwischen Faltungshalbgruppen und unbeschränkter Teilbarkeit her.

Satz M.25.6.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $s \in [0, +\infty)$. Dann gilt $\mu_s \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und für $n \in \mathbb{N}$ ist $\mu_{\frac{s}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus μ_s, welche selbst zu $\mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gehört.*

(b) *Es existiere ein $t_0 \in [0, +\infty)$ mit $\mu_{t_0} \coloneqq \mathfrak{o}_m$. Dann ist $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Sei $n \in \mathbb{N}$. Aus Definition M.25.6.1 folgt dann induktiv

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu_{\frac{s}{n}} = \mu_{\sum_{j=1}^{n} \frac{s}{n}} = \mu_{n\cdot\frac{s}{n}} = \mu_s.$$

Somit ist $\mu_{\frac{s}{n}}$ eine n-te Faltungswurzel aus μ_s. Folglich gilt also

$$\mu_s \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{1}$$

Wegen $\frac{s}{n} \in [0, +\infty)$ folgt aus (1) dann $\mu_{\frac{s}{n}} \in \mathcal{M}_{+,u}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Damit ist *(a)* gezeigt.

Zu *(b)*: Sei

$$u \in (0, +\infty). \tag{2}$$

Wegen

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_0}{n} = 0$$

und (2) gibt es dann ein

$$n_0 \in \mathbb{N} \tag{3}$$

mit

$$\frac{t_0}{n_0} \in [0, u). \tag{4}$$

Wegen $t_0 \in (0, +\infty)$ und (3) ist dann $\mu_{\frac{t_0}{n_0}}$ eine n_0-te Faltungswurzel aus μ_{t_0}. Hieraus folgt wegen $\mu_{t_0} = \mathfrak{o}_m$ mittels Beispiel M.25.6.1 dann

$$\mu_{\frac{t_0}{n_0}} = \mathfrak{o}_m. \tag{5}$$

Wegen (4) gilt

$$u - \frac{t_0}{n_0} \in (0, +\infty). \tag{6}$$

Unter Beachtung von (4), (6), (5) sowie Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.2 folgt dann

$$\mu_u = \mu_{\frac{t_0}{n_0} + \left(u - \frac{t_0}{n_0}\right)} = \mu_{t_0} \star \mu_{u - \frac{t_0}{n_0}} = \mathfrak{o}_m \star \mu_{u - \frac{t_0}{n_0}} = \mathfrak{o}_m. \tag{7}$$

Wegen (2) und (7) ist $(\mu_t)_{t \in [0,+\infty)}$ dann eine triviale Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. □

Satz M.25.6.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $t \in [0, +\infty)$ bezeichne $\nu_{\mu,t}$ die durch μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann gilt:*

(a) *Es ist $(\nu_{\mu,t})_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche* nicht *trivial ist.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $(\nu_{\mu,t})_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(ii) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen Satz M.25.2.19 ist $(\nu_{\mu,t})_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Sei

$$t \in [0, +\infty). \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.17 gilt dann

$$\nu_{\mu,t}(\mathbb{R}^m) = \mathrm{e}^{t(\mu(\mathbb{R}^m)-1)} \neq 0.$$

Damit ist

$$\nu_{\mu,t} \neq \mathfrak{o}_m. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist die Faltungshalbgruppe $(\nu_{\mu,t})_{t \in [0,+\infty)}$ dann nicht trivial.

Zu *(b)*: Dies folgt aus Teil *(c)* von Bemerkung M.25.2.17. □

Definition M.25.6.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt $(\mu_t)_{t \in [0,+\infty)}$ *symmetrisch,* falls für alle $t \in (0, +\infty)$ gilt $\mu_t \in \mathcal{M}_{+,s}^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Satz M.25.6.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Weiter seien $l \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l \times m}$. Die Abbildung $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}} : \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ sei definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_l$-messbare Abbildung sowie $\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_t)\right)_{t \in [0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l, \mathfrak{B}_l\right)$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine triviale Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

(ii) *Es ist* $\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_t)\right)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine triviale Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l,\mathfrak{B}_l\right)$.

(c) *Sei* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine symmetrische Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. *Dann ist*

$$\left(T_{\mathbf{A},\mathbf{0}_{l\times 1}}(\mu_t)\right)_{t\in[0,+\infty)}$$

eine symmetrische Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^l,\mathfrak{B}_l\right)$.

BEWEISIDEE. Verwende Satz M.25.2.8. □

Folgerung M.25.6.1. *Seien* $m\in\mathbb{N}$ *und* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. *Für* $t\in[0,+\infty)$ *bezeichne* $\mu_t^\vee$ *die Spiegelung von* μ_t. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $(\mu_t^\vee)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine triviale Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

(ii) *Es ist* $(\mu_t^\vee)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine triviale Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

Satz M.25.6.4. *Seien* $m\in\mathbb{N}$ *sowie* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *und* $(\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *jeweils Faltungshalbgruppen in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. *Dann gilt:*

(a) *Es ist* $(\mu_t\star\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *eine Faltungshalbgruppe in* $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

(b) *Seien* $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *und* $(\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *zusätzlich symmetrisch. Dann ist* $(\mu_t\star\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ *symmetrisch.*

BEWEIS.

Zu *(a)*: Sei

$$(u,v)\in[0,+\infty)\times[0,+\infty)\,. \tag{1}$$

Wegen (1) sowie der Wahl von $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ bzw. $(\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ gilt dann

$$\mu_u\star\mu_v=\mu_{u+v} \tag{2}$$

bzw.

$$\nu_u\star\nu_v=\nu_{u+v}. \tag{3}$$

Unter Verwendung von Teil *(a)* von Satz M.25.2.6 sowie (2) und (3) folgt dann

$$(\mu_u\star\nu_u)\star(\mu_v\star\nu_v)=(\mu_u\star\mu_v)\star(\nu_u\star\nu_v)=\mu_{u+v}\star\nu_{u+v}. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) ist dann $(\mu_t\star\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.

Zu *(b)*: Sei

$$u\in(0,+\infty)\,. \tag{5}$$

Nach der Voraussetzung gilt $\{\mu_u,\nu_u\}\subseteq\mathcal{M}_{+,s}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Hieraus folgt wegen Satz M.25.2.9 dann

$$\mu_u\star\nu_u\in\mathcal{M}_{+,s}^b(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)\,. \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) ist $(\mu_t\star\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ dann symmetrisch. □

Folgerung M.25.6.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $t \in [0,+\infty)$ bezeichne $(\mu_t)^\vee$ die Spiegelung von μ_t. Dann ist $\left(\mu_t \star (\mu_t)^\vee\right)_{t\in[0,+\infty)}$ eine symmetrische Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

BEWEIS. Wegen Teil *(a)* von Folgerung M.25.6.1 ist $\left((\mu_t)^\vee\right)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hieraus und aus der Wahl von $(\mu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ folgt mittels Teil *(a)* von Satz M.25.6.4, dass $\left(\mu_t \star (\mu_t)^\vee\right)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist. Die Symmetrie $\left(\mu_t \star (\mu_t)^\vee\right)_{t\in[0,+\infty)}$ folgt schließlich aus Teil *(f)* von Bemerkung M.25.2.6. □

Satz M.25.6.5. *Seien $s \in \mathbb{N}$, $(m_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathbb{N}$ und $m := \sum_{j=1}^s m_j$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $(\mu_{t,j})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^{m_j}, \mathfrak{B}_{m_j}\right)$. Für $t \in [0,+\infty)$ sei*

$$\nu := \bigotimes_{j=1}^s \mu_{t,j}.$$

Dann gilt:

(a) *Es ist $(\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(b) *Für jedes $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ sei $(\mu_{t,j})_{t\in[0,+\infty)}$ symmetrisch. Dann ist auch $(\nu_t)_{t\in[0,+\infty)}$ symmetrisch.*

BEWEIS. Es folgen nun einige wichtige Beispiele von Faltungshalbgruppen in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. □

Beispiel M.25.6.2. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

BEWEIS. Dies ergibt sich aus Folgerung M.25.2.2. □

Beispiel M.25.6.3. Seien $\beta \in (0,+\infty)$ und sei $\Gamma_{0,\beta} := \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. Für $t \in (0,+\infty)$ bezeichne $\Gamma_{t,\beta}$ die Gamma-Verteilung mit den Parametern t und β. Dann ist $(\Gamma_{t,\beta})_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, die sogenannte *Gamma-Faltungshalbgruppe zum Parameter β*.

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.4.4. □

Beispiel M.25.6.4. Für $t \in [0,+\infty)$ bezeichne π_t die Poisson-Verteilung zum Parameter t. Dann ist $(\pi_t)_{t\in[0,+\infty)}$ eine Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, die sogenannte POISSON*sche Faltungshalbgruppe.*

BEWEIS. Dies folgt aus Beispiel M.25.3.4. □

Beispiel M.25.6.5. Sei $\mathcal{N}_{0,0} := \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. Für $t \in (0,+\infty)$ bezeichne $\mathcal{N}_{0,t}$ die Normalverteilung mit den Parametern 0 und t. Dann ist $(\mathcal{N}_{0,t})_{t\in[0,+\infty)}$ eine symmetrische Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, die sogenannte BROWN*sche*[1] *Faltungshalbgruppe.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.4.2. □

Beispiel M.25.6.6. Sei $\gamma_{0,0} := \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1}$. Für $t \in (0,+\infty)$ bezeichne $\gamma_{0,t}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern 0 und t. Dann ist $(\gamma_{0,t})_{t\in[0,+\infty)}$ eine symmetrische Faltungshalbgruppe in $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, die sogenannte CAUCHY*sche Faltungshalbgruppe.*

BEWEIS. Dies folgt aus Satz M.25.4.3. □

[1] ROBERT BROWN (∗21.12.1773; †10.06.1858) war schottischer Botaniker. Seine berühmteste Entdeckung ist die BROWNsche Bewegung, welche die Bewegung von Teilchen in Flüssigkeiten und Gasen beschreibt.

M.25.7. Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen

Oftmals treten Situationen auf in denen sich ein zufälliger Effekt durch *additive* Überlagerung einer *endlichen* Anzahl stochastisch unabhängiger Effekte darstellen lässt. Man ist dann daran interessiert, aus der Kenntnis des Gesamteffektes, Informationen über die Einzeleffekte zu erhalten. Dies führt auf folgende etwas allgemeinere maßtheoretische Aufgabenstellung:

Aufgabe. Gegeben seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind alle Maße $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu bestimmen, für welche $\mu_1 \star \mu_2 = \mu$ erfüllt ist.

Wir zeigen zunächst, dass jedes $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ eine dem $\mathbb{R}^m$ gleichmächtige Menge „trivialer Zerlegungen" $\mu_1 \star \mu_2 = \mu$ besitzt.

Bemerkung M.25.7.1. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}} \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{x} + \mathbf{a}$. Dann ist $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und es gilt

$$\mu = \varepsilon_{-\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen dem Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}} = T_{\mathbf{I}_m\mathbf{I}_m,\mathbf{I}_m\mathbf{a}-\mathbf{a}} = T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}. \tag{1}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung und

$$\mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}(\mu) = \mu. \tag{2}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.16.9 sind die Abbildungen $T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}$ und $T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}$ jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Hieraus folgt mittels Satz M.16.11 dann

$$(T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})(\mu) = T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu)). \tag{3}$$

Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$\varepsilon_{-\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu) = T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (1) bis (4) folgt dann schließlich

$$\mu = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^m}(\mu) = (T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}} \circ T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}})(\mu) = T_{\mathbf{I}_m,-\mathbf{a}}(T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu)) = \varepsilon_{-\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star T_{\mathbf{I}_m,\mathbf{a}}(\mu). \qquad \square$$

Eine grundlegende Aufgabe der Wahrscheinlichkeitstheorie besteht darin, bei gegebenen Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ alle diejenigen Zerlegungen $\mu = \mu_1 \star \mu_2$ mit gewissen $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ zu bestimmen, bei denen weder μ_1 noch μ_2 ein Diracmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist.

Dies ist eine recht komplizierte Aufgabe, zu deren umfassender Behandlung der leistungsstarke Apparat der harmonischen Analyse nötig ist. Wir beschäftigen uns in diesem Abschnitt stattdessen lediglich mit einen einfachen Spezialfall der angesprochenen Aufgabenstellung. Hierzu prägen wir vor dem Hintergrund von Bemerkung M.25.7.1 zunächst die grundlegende Begriffsbildung dieses Abschnitts:

Definition M.25.7.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ *unzerlegbar*, falls μ folgende Eigenschaft besitzt:

(I) Sind $\mu_1, \mu_2 \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit $\mu_1 \star \mu_2 = \mu$, so gibt es ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mu_1 = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ oder $\mu_2 = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$.

Wir studieren nun in diesem Abschnitt speziell die Unzerlegbarkeit von Maßen aus der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Hierzu beginnen wir mit einigen Vorbetrachtungen:

Definition M.25.7.2. Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{P}(V)$. Dann sei

$$A + B := \begin{cases} \varnothing, & \text{falls } A = \varnothing \text{ oder } B = \varnothing, \\ \{a + b \,|\, (a, b) \in A \times B\}, & \text{falls } A \neq \varnothing \text{ und } B \neq \varnothing. \end{cases}$$

Bemerkung M.25.7.2. Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{P}(V)$ so gewählt, dass A unendlich sowie $B \neq \varnothing$ erfüllt ist. Dann ist $A+B$ unendlich. ♣

Bemerkung M.25.7.3. Seien $\mathbb{K} \in \{\mathbb{R}, \mathbb{C}\}$ und V ein linearer Vektorraum über $\mathbb{K}$. Weiter seien $A, B \in \mathfrak{P}(V)$ endlich. Dann ist $A + B$ endlich und es gilt $\operatorname{card}(A + B) \leq \operatorname{card} A \cdot \operatorname{card} B$. ♣

Bemerkung M.25.7.4. Seien $k, l \in \mathbb{N}$ sowie $(a_r)_{r \in \mathbb{N}_{1,k}}$ und $(l_s)_{s \in \mathbb{N}_{1,l}}$ streng monoton fallende Folgen aus $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$a_1 + b_1 > \ldots > a_k + b_1 > a_k + b_2 > \ldots > a_k + b_l,$$

dass heißt, die $k+l-1$ reellen Zahlen Zahlen $a_1+b_1, \ldots, a_k+b_1, a_k+b_2, \ldots, a_k+b_l$ sind paarweise verschieden. ♣

Bemerkung M.25.7.5. Seien A, B eine nichtleere endliche Teilmenge von $\mathbb{R}$. Dann gilt

$$\operatorname{card} A + \operatorname{card} B - 1 \leq \operatorname{card}(A + B). \qquad ♣$$

Beweis. Dies folgt sogleich aus Bemerkung M.25.7.4. □

Bezeichnung. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sei

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu} := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, \{\mathbf{x}\} \in \mathfrak{B}_m \backslash \mathcal{N}_\mu\}.$$

Bemerkung M.25.7.6. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ und es bezeichne μ_d den diskreten Anteil von μ. Dann gilt

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu} = X_{\mathfrak{B}_m, \mu_d}. \qquad ♣$$

Beweis. Dies folgt unmittelbar aus der Konstruktion von μ_d in Teil *(b)* von Satz M.6.2. □

Satz M.25.7.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Es bezeichne μ_d bzw. ν_d den diskreten Anteil von μ bzw. ν. Dann gilt*

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu \star \nu} = X_{\mathfrak{B}_m, \mu_d \star \nu_d}.$$

(b) *Es gilt*

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu \star \nu} = X_{\mathfrak{B}_m, \mu} + X_{\mathfrak{B}_m, \nu}.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Es bezeichne $(\mu \star \nu)_d$ den diskreten Anteil von $\mu \star \nu$. Wegen Teil *(b)* von Satz M.25.2.12 gilt dann

$$(\mu \star \nu)_d = \mu_d \star \nu_d.$$

Hieraus folgt in Verbindung mit Bemerkung M.25.7.6 dann

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu \star \nu} = X_{\mathfrak{B}_m, \mu_d \star \nu_d}.$$

Zu *(b)*: Aus Teil *(b)* von Satz M.25.2.11 ergibt sich

$$X_{\mathfrak{B}_m,\mu_d\star\nu_d} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu_d} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu_d}. \tag{1}$$

Wegen Bemerkung M.25.7.6 gelten

$$X_{\mathfrak{B}_m,\mu_d} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu} \tag{2}$$

und

$$X_{\mathfrak{B}_m,\nu_d} = X_{\mathfrak{B}_m,\nu}. \tag{3}$$

Unter Beachtung *(a)*, (1), (2) und (3) folgt nun

$$X_{\mathfrak{B}_m,\mu\star\nu} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu_d\star\nu_d} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu_d} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu_d} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu}. \qquad \square$$

Satz M.25.7.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gelten*

$$\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$$

sowie

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\mu\star\nu} \leq (\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\mu}) \cdot (\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\nu}).$$

Beweis. Wegen Folgerung M.25.2.6 gilt

$$\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.25.7.1 gilt

$$X_{\mathfrak{B}_m,\mu\star\nu} = X_{\mathfrak{B}_m,\mu} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu}. \tag{2}$$

Aus (2)

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\mu\star\nu} = \operatorname{card}(X_{\mathfrak{B}_m,\mu} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu}). \tag{3}$$

Nach Wahl von μ und ν sind $X_{\mathfrak{B}_m,\mu}$ und $X_{\mathfrak{B}_m,\nu}$ endlich. Hieraus folgt mit Bemerkung M.25.7.3, dass $X_{\mathfrak{B}_m,\mu} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu}$ endlich ist und die Ungleichung

$$\operatorname{card}(X_{\mathfrak{B}_\mathfrak{m},\mu} + X_{\mathfrak{B}_m,\nu}) \leq (\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\mu}) \cdot (\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_m,\nu}) \tag{4}$$

besteht. Wegen (1), (3) und (4) ist dann alles gezeigt. $\square$

Satz M.25.7.3. *Es bezeichne $\mathfrak{o}_1$ das Nullmaß $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1) \setminus \{\mathfrak{o}_1\}$. Dann gelten $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ sowie*

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu} - 1 \leq \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu\star\nu}.$$

Beweis. Wegen Folgerung M.25.2.6 und Teil *(b)* von Bemerkung M.25.2.2 gilt

$$\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_1\}. \tag{1}$$

Wegen Teil *(b)* von Satz M.25.7.1 gilt

$$X_{\mathfrak{B}_1,\mu\star\nu} = X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + X_{\mathfrak{B}_1,\nu}. \tag{2}$$

Nach Wahl von μ und ν sind $X_{\mathfrak{B}_1,\mu}$ und $X_{\mathfrak{B}_1,\nu}$ nichtleere endliche Teilmengen von $\mathbb{R}$. Wegen Bemerkung M.25.7.5 und (2) gilt dann

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu} - 1 \leq (\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu}) = \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu\star\nu}. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist dann alles gezeigt. $\square$

Das nachfolgende Resultat knüpft an Satz M.25.2.13 an.

Satz M.25.7.4. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiterhin seien $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ so beschaffen, dass $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ erfüllt ist. Dann sind μ und ν selbst Maße aus $\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$.*

Beweis. Wegen $\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ erfüllt und der nach Teil *(b)* von Bemerkung M.7.3 geltenden Inklusion $\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \subseteq \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ergibt sich mittels Satz M.25.2.13 dann

$$\{\mu, \nu\} \in \mathcal{M}_+^{b,d}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}. \tag{1}$$

Wegen den Teil *(b)* von Satz M.25.7.1 gilt

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu\star\nu} = X_{\mathfrak{B}_m, \mu} + X_{\mathfrak{B}_m, \nu}. \tag{2}$$

Da $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ ist

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu\star\nu} \neq \varnothing. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgen dann

$$X_{\mathfrak{B}_m, \mu} \neq \varnothing \tag{4}$$

und

$$X_{\mathfrak{B}_m, \nu} \neq \varnothing. \tag{5}$$

Wäre eine der beiden Mengen $X_{\mathfrak{B}_m, \mu}$ oder $X_{\mathfrak{B}_m, \nu}$ unendlich, so ergäbe sich wegen (4) und (5) mittels Bemerkung M.25.7.2, dass $X_{\mathfrak{B}_m, \mu} + X_{\mathfrak{B}_m, \nu}$ unendlich wäre. Hieraus ergäbe sich wegen (2), dass die Menge $X_{\mathfrak{B}_m, \mu\star\nu}$ unendlich wäre, was im Widerspruch zu $\mu \star \nu \in \mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ steht. Somit sind beide Mengen $X_{\mathfrak{B}_m, \mu}$ und $X_{\mathfrak{B}_m, \nu}$ endlich. Hieraus folgt zusammen mit (1), dass μ und ν aus $\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \setminus \{\mathfrak{o}_m\}$ sind. □

Beispiel M.25.7.1. Sei $p \in (0,1)$ und bezeichne $\beta_{1,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern 1 und p. Dann gilt:

(a) Es ist $\beta_{1,p}$ ein *un*zerlegbares Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

(b) Es gibt *kein* Maß $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit $\mu \star \mu = \beta_{1,p}$.

Beweis.

Zu *(a)*: Wegen der Bemerkung M.15.1 gilt

$$\beta_{1,p} \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Wegen Definition M.15.1 gilt

$$\beta_{1,p} = (1-p) \cdot \varepsilon_{0,\mathfrak{B}_1} + p \cdot \varepsilon_{1,\mathfrak{B}_1}. \tag{2}$$

Wegen $p \in (0,1)$ folgt aus (2) dann

$$X_{\mathfrak{B}_1, \beta_{1,p}} = \{0, 1\}. \tag{3}$$

Wegen (3) ist dann

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1, \beta_{1,p}} = 2 < +\infty. \tag{4}$$

Seien nun

$$\mu, \nu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{5}$$

so gewählt, dass

$$\mu \star \nu = \beta_{1,p} \tag{6}$$

erfüllt ist. Wegen (1), (5) und (6) gilt nach Satz M.25.7.4 dann

$$\{\mu, \nu\} \subseteq \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{7}$$

Wegen (7) gilt nach Satz M.25.7.3 dann

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu} - 1 \leq \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu\star\nu}. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (8), (6) und (4) folgt dann

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu} \leq 1 + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\beta_{1,p}} = 1 + 2 = 3. \tag{9}$$

Wegen (7) gilt

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu}, \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu} \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt nun

$$\min\left\{\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu}, \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu}\right\} = 1. \tag{11}$$

Wegen (11) gibt es dann ein $a \in \mathbb{R}$ mit $X_{\mathfrak{B}_1,\mu} = \{a\}$ oder $X_{\mathfrak{B}_1,\nu} = \{a\}$. Hieraus folgt wegen (7) dann

$$\mu = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}$$

oder

$$\nu = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}.$$

Hieraus folgt bei Beachtung von (1) und (6), dass $\beta_{1,p}$ unzerlegbar ist.

Zu *(b)*: Angenommen es gäbe ein

$$\nu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{12}$$

mit

$$\nu \star \nu = \beta_{1,p}. \tag{13}$$

Unter Verwendung von Teil *(a)* von Bemerkung M.25.2.2, (13) und (1) ergäbe sich dann

$$\left[\nu\left(\mathbb{R}\right)\right]^2 = \left(\nu \star \nu\right)\left(\mathbb{R}\right) = \beta_{1,p}\left(\mathbb{R}\right) = 1$$

und folglich wegen $\nu\left(\mathbb{R}\right) \in [0, +\infty)$ dann $\nu\left(\mathbb{R}\right) = 1$. Es wäre also

$$\nu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{14}$$

Da nun $\beta_{1,p}$ nach *(a)* unzerlegbar ist, müsste wegen (13) und (14) dann ein $a \in \mathbb{R}$ mit

$$\nu = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}. \tag{15}$$

Wegen (15) ergäbe sich mittels Folgerung M.25.2.2 dann

$$\nu \star \nu = \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \star \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{a+a,\mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{2a,\mathfrak{B}_1}.$$

Hieraus ergäbe sich dann $X_{\mathfrak{B}_1,\nu\star\nu} = \{2a\}$, also $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\nu\star\nu} = 1$. Dies steht im Widerspruch zu $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\beta_{1,p}} = 2$. Somit war die Annahme falsch und die Behauptung ist bewiesen. □

Beispiel M.25.7.2. Sei $p \in (0,1)$. Für $s \in \mathbb{N}$ bezeichne $\beta_{s,p}$ die Binomialverteilung mit den Parametern s und p. Dann gilt:

(a) Sei $n \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Dann gilt $\beta_{n,p} = \beta_{1,p} \star \beta_{n-1,p}$.

(b) Es ist $\beta_{n,p}$ ein Maß aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, welches nicht unzerlegbar ist.

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Beispiel M.25.3.3.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung M.15.1 gilt

$$\{\beta_{n,p}, \beta_{1,p}, \beta_{n-1,p}\} \subseteq \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{1}$$

Wegen $p \in (0,1)$ folgt aus Definition M.15.1 sogleich

$$\{\beta_{1,p}, \beta_{n-1,p}\} \subseteq \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \setminus \{\varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1} \mid a \in \mathbb{R}\}. \tag{2}$$

Aus (1), (2) und *(a)* folgt dann *(b)*. □

Die abschließende Überlegung dieses Abschnitts ist nun der Bestimmung aller Maße aus der Klasse $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gewidmet, welche Faltungsteiler eines Dirac-Maßes auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sind. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.25.7.7. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $j \in \mathbb{N}_{1,m}$. Weiter sei $\pi_{m;j}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_j.$$

Dann gilt:

(a) Es bezeichne $e_j^{(m)}$ den j-ten kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^m$. Dann gilt

$$\pi_{m;j} = T_{\left[e_j^{(m)}\right]^T,0}.$$

(b) Es ist $\pi_{m;j}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung. ♣

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus der Definition der beteiligten Abbildungen.

Zu *(b)*: Dies folgt wegen *(a)* aus Teil *(b)* von Satz M.16.9. □

Lemma M.25.7.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} = (a_1, \ldots, a_m)^T \in \mathbb{R}^m$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ bezeichne $\pi_{m;j}$ die in Bemerkung M.25.7.7 eingeführte $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\mu = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$.*

(ii) *Für alle $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ gilt $\pi_{m;j}(\mu) = \varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}$.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{1}$$

Wegen (1) und der Definition von $\pi_{m;j}$ gilt dann

$$\pi_{m;j}(\mathbf{a}) = a_j. \tag{2}$$

Wegen Beispiel M.16.6 gilt

$$\pi_{m;j}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \varepsilon_{\pi_{m;j}(\mathbf{a}),\mathfrak{B}_1}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$\pi_{m;j}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}. \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) gilt dann *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wegen *(ii)* gilt insbesondere

$$\pi_{m;1}(\mu) = \varepsilon_{a_1,\mathfrak{B}_1}. \tag{5}$$

Wegen Satz M.16.10 gilt

$$\mu(\mathbb{R}^m) = [\pi_{m;1}(\mu)](\mathbb{R}). \tag{6}$$

Wegen $\varepsilon_{a_1,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ folgt aus (5) und (6) dann

$$\mu \in \mathcal{M}^1_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m). \tag{7}$$

Es ist

$$\{a\} = \bigcap_{j=1}^{m} \pi^{-1}_{m;j}(\{a_j\}). \tag{8}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{9}$$

Da der messbare Raum $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ nach Beispiel M.7.2 total atomar ist, gilt

$$\{a_j\} \in \mathfrak{B}_1. \tag{10}$$

Wegen (10) folgt aus der nach Teil *(b)* von Bemerkung M.25.7.7 vorliegenden $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-Messbarkeit von $\pi_{m;j}$ dann

$$\pi^{-1}_{m;j}(\{a_j\}) \in \mathfrak{B}_m \tag{11}$$

sowie unter Beachtung von (9) und *(ii)* weithin

$$\mu\left(\pi^{-1}_{m;j}(\{a_j\})\right) = [\pi_{m;j}(\mu)](\{a_j\}) = \varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}(\{a_j\}) = 1,$$

also wegen (7) dann

$$\mathbb{R}^m \setminus \left[\pi^{-1}_{m;j}(\{a_j\})\right] \in \mathcal{N}_\mu. \tag{12}$$

Wegen (9) und (12) folgt mittels Teil *(c)* von Satz M.5.1 dann

$$\bigcup_{j=1}^{m} \left(\mathbb{R}^m \setminus \left[\pi^{-1}_{m;j}(\{a_j\})\right]\right) \in \mathcal{N}_\mu. \tag{13}$$

Wegen (8) gilt

$$\mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{a}\} = \mathbb{R}^m \setminus \left[\bigcap_{j=1}^m \pi_{m;j}^{-1}(\{a_j\})\right] = \bigcup_{j=1}^m \mathbb{R}^m \setminus \left[\pi_{m;j}^{-1}(\{a_j\})\right]. \tag{14}$$

Aus (13) und (14) folgt dann

$$\mathbb{R}^m \setminus \{a_j\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{15}$$

Aus (15) und (7) folgt dann

$$\mu = [\mu(\mathbb{R}^m)] \cdot \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}.$$

Es gilt also *(i)*. □

Satz M.25.7.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Weiter seien $n \in \mathbb{N}\setminus\{1\}$ sowie $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit $\bigstar_{j=1}^n \mu_j = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$. Dann gibt es eine Folge $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}^m$ derart, dass für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$*

$$\mu_j = \varepsilon_{\mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m}.$$

Beweis. Wir betrachten zunächst den Fall $m = 1$. Wir führen den Beweis durch vollständige Induktion über n. Sei zunächst $n = 2$. Dann gilt also

$$\mu_1 \star \mu_2 = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_1}. \tag{1}$$

Aus (1) folgt dann

$$X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1\star\mu_2} = X_{\mathfrak{B}_1,\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_1}} = \{\mathbf{a}\}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1\star\mu_2} = \operatorname{card}\{\mathbf{a}\} = 1. \tag{3}$$

Aus (1) und (3) folgt

$$\mu_1 \star \mu_2 \in \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \tag{4}$$

Wegen (4) sowie $\{\mu_1, \mu_2\} \subseteq \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ folgt mittels Satz M.25.7.4 dann

$$\{\mu_1, \mu_2\} \subseteq \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \tag{5}$$

Wegen (5) sind $X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1}$ und $X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2}$ dann endliche nichtleere Mengen. Hieraus ergibt sich

(I) Es gilt $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} + \operatorname{card} \mathfrak{B}_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} \geq 2$, wobei Gleichheit genau für $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} = 1$ und $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} = 1$ erfüllt ist.

Wegen (5) liefert Satz M.25.7.3 andererseits

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} \leq 1 + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1\star\mu_2}. \tag{6}$$

Aus (3) und (6) folgt nun

$$\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} + \operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} \leq 2. \tag{7}$$

Aus *(I)* und (7) folgen $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} = 1$ und $\operatorname{card} X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} = 1$. Somit gibt es eindeutig bestimmte $a_1 \in \mathbb{R}$ und $a_2 \in \mathbb{R}$ mit $X_{\mathfrak{B}_1,\mu_1} = \{a_1\}$ und $X_{\mathfrak{B}_1,\mu_2} = \{a_2\}$. Hieraus folgt wegen $\{\mu_1, \mu_2\} \subseteq \mathcal{M}_+^{1,\mathrm{mol}}(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ dann $\mu_1 = \varepsilon_{a_1,\mathfrak{B}_1}$ und $\mu_2 = \varepsilon_{a_2,\mathfrak{B}_1}$. Damit ist die Behauptung für $n = 2$ bewiesen.

Sei nun $n \in \mathbb{N}\backslash\{1\}$ und sei für $s \in \mathbb{N}_{2,n}$ bewiesen, dass, falls $(\nu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist, für welche mit einem gewissen $b \in \mathbb{R}$ die Beziehung $\bigstar_{j=1}^{s} \nu_j = \varepsilon_{b,\mathfrak{B}_1}$ besteht, dann eine Folge $(b_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,s}}$ aus $\mathbb{R}$ derart existiert, dass für $j \in \mathbb{N}_{1,s}$ die Beziehung $\nu_j = \varepsilon_{b_j,\mathfrak{B}_1}$ besteht. Sei nun $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n+1}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit

$$\bigstar_{j=1}^{n+1} \mu_j = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_1}. \tag{8}$$

Wegen Satz M.25.2.5 gilt

$$\bigstar_{j=1}^{n+1} \mu_j = \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right) \star \mu_{n+1}. \tag{9}$$

Aus (8) und (9) folgt dann

$$\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j\right) \star \mu_{n+1} = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_1}. \tag{10}$$

Sei $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n+1}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist, gilt

$$\mu_{n+1} \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{11}$$

sowie wegen Teil *(d)* von Bemerkung M.25.2.2 zudem

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{12}$$

Wegen (10) bis (12) folgt aus dem Induktionsanfang dann die Existenz eines $a_{n+1} \in \mathbb{R}$ und eines $b \in \mathbb{R}$ mit

$$\mu_{n+1} = \varepsilon_{a_{n+1},\mathfrak{B}_1} \tag{13}$$

und

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu_j = \varepsilon_{b,\mathfrak{B}_1}. \tag{14}$$

Da $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ ist, ergibt sich aus (14) aufgrund der Induktionsvoraussetzung, die Existenz einer Folge $(a_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ aus $\mathbb{R}$ mit

$$(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} = \left(\varepsilon_{a_j,\mathfrak{B}_1}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}. \tag{15}$$

Wegen (12) und (15) ist die Behauptung für $m = 1$ dann induktiv bewiesen.
Sei nun $m \in \mathbb{N} \setminus \{1\}$. Weiter sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{16}$$

Die Abbildung $\pi_{m;k}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ sei definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto x_k. \tag{17}$$

Es bezeichne $\mathbf{e}_k^{(m)}$ den k-ten kanonischen Einheitsvektor des $\mathbb{R}^m$. Aus Teil *(a)* von Bemerkung M.25.7.7 folgt dann

$$\pi_{m;k} = T_{\left(\mathbf{e}_k^{(m)}\right)^T,0}. \tag{18}$$

Wegen Satz M.25.2.8 ist $T_{\left(\mathbf{e}_k^{(m)}\right)^T,0}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$T_{\left(\mathbf{e}_k^{(m)}\right)^T,0}\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \bigstar_{j=1}^{n} T_{\left(\mathbf{e}_k^{(m)}\right)^T,0}(\mu_j)\,.$$

Hieraus folgt wegen (18) dann, dass $\pi_{m;k}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung ist und dass

$$\pi_{m;k}\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \bigstar_{j=1}^{n}\pi_{m;k}(\mu_j)\,. \tag{19}$$

erfüllt ist. Sei

$$\mathbf{a} = (A_1, \ldots, A_m)^T\,. \tag{20}$$

Wegen Lemma M.25.7.1 und (20) gilt dann

$$\pi_{m;k}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \varepsilon_{A_k,\mathfrak{B}_m}. \tag{21}$$

Unter Verwendung von (19), der Voraussetzung $\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ und (21) folgt dann

$$\bigstar_{j=1}^{n}\pi_{m;k}(\mu_j) = \pi_{m;k}\left(\bigstar_{j=1}^{n}\mu_j\right) = \pi_{m;k}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \varepsilon_{A_k,\mathfrak{B}_m}. \tag{22}$$

Wegen (22) und dem schon für $m = 1$ Gezeigten folgt dann die Existenz einer Folge $\left(A_k^{(j)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ mit

$$\left(\pi_{m;k}(\mu_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} = \left(\varepsilon_{A_k^{(j)},\mathfrak{B}_m}\right). \tag{23}$$

Falls nun für $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ die Setzung $\mathbf{a}_j \coloneqq \left(A_1^{(j)}, \ldots, A_M^{(j)}\right)^T$ vorgenommen wird, so ist $(\mathbf{a}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ eine Folge aus $\mathbb{R}^m$ und wegen (16) und (23) folgt mittels Lemma M.25.7.1 dann

$$(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}} = \left(\varepsilon_{\mathbf{a}_j,\mathfrak{B}_m}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}. \qquad \square$$

Folgerung M.25.7.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ ein* un*zerlegbares Maß aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

Beweis. Dies folgt aus Definition M.25.7.1 und M.25.7.5. $\square$

Folgerung M.25.7.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt ein Maß $\nu \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ mit $\mu \star \nu = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$.*

(ii) *Es gibt ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mu = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_1}$.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Dies folgt sofort aus Satz M.25.7.5.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Sei

$$\nu \coloneqq \varepsilon_{-\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}. \tag{1}$$

Wegen (1) liefert Teil *(a)* von Beispiel M.5.2 dann

$$\nu \in \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{2}$$

Wegen *(ii)*, (1) und Folgerung M.25.2.2 gilt

$$\mu \star \nu = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \star \varepsilon_{-\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{a}+(-\mathbf{a}),\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) gilt dann *(i)*. □

Folgerung M.25.7.3. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\{\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \mid \mathbf{a} \in \mathbb{R}^m\}$ die Menge der invertierbaren Elemente der Halbgruppe $\left(\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right), \star\right)$ mit Einselement $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$.*

Beweis. Dies ergibt sich aus Folgerung M.25.7.2. □

Es folgen nun einige Ausführungen über wesentliche Resultate der Theorie der Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Bezeichnung. Für $a \in \mathbb{R}$ und $b \in (0, +\infty)$ bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Für $a \in \mathbb{R}$ sei $\mathcal{N}_{a,0} \coloneqq \varepsilon_{a,\mathfrak{B}_1}$.

Das folgende Resultat wurde von Paul Lévy[1)] vermutet und von Harald Cramér[2)] bewiesen. Es war historisch das erste bedeutende Resultat zur Theorie der Zerlegung von Wahrscheinlichkeitsmaßen.

Satz M.25.7.6 (Lévy/Cramér)**.** *Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0, +\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind μ_1 und μ_2 Maße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit $\mu_1 \star \mu_2 = \mathcal{N}_{a,\sigma^2}$.*

(ii) *Es gibt Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ und $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, +\infty)$ mit welchem die Beziehungen $a_1 + a_2 = a$ und $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$ sowie $\mu_1 = \mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2}$ und $\mu_2 = \mathcal{N}_{a_2,\sigma_2^2}$ bestehen.*

Bezeichnung. Für $\alpha \in [0, +\infty)$ bezeichne π_α die Poisson-Verteilung zum Parameter α.

Das folgende Resultat, welches auf D.A. Raikov[3)] zurückgeht, stellt einen weiteren Meilenstein der Geschichte der Theorie von Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen dar:

Satz M.25.7.7 (D.A. Raikov)**.** *Sei $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind μ_1 und μ_2 Maße aus $\mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ mit $\mu_1 \star \mu_2 = \pi_\alpha$.*

(ii) *Es gibt $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty)$ mit welchen die Beziehungen $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ sowie*

$$\pi_{\alpha_1} \star \pi_{\alpha_2} = \pi_\alpha$$

[1)] Paul Lévy (∗15.09.1886; †15.12.1971) war ein französischer Mathematiker, welcher vor allem durch seine Beiträge zur Wahrscheinlichkeitstheorie bekannt wurde.

[2)] Harald Cramér (∗25.09.1893; †05.10.1985) war ein schwedischer Mathematiker und Statistiker. Neben seinem Hauptgebiet, der mathematischen Statistik, leistete Cramér auch bedeutende Beiträge zur Untersuchung der Verteilung von Primzahlen und Primzahlzwillingen.

[3)] Dmitrii Abramovich Raikov (∗11.11.1905)

bestehen.

YU.V. LINNIK[4] fand die folgende Verallgemeinerung der Sätze M.25.7.6 und M.25.7.7:

Satz M.25.7.8 (YU.V.LINNIK). *Seien $a \in \mathbb{R}$, $\sigma \in (0, +\infty)$ und $\alpha \in [0, +\infty)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es sind μ_1 und μ_2 Maße aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ mit $\mu_1 \star \mu_2 = \mathcal{N}_{a,\sigma^2} \star \pi_\alpha$.*

(ii) *Es gibt Zahlen $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$, $\sigma_1, \sigma_2 \in [0, +\infty)$ und $\alpha_1, \alpha_2 \in [0, +\infty)$, mit welchen die Beziehungen $a_1 + a_2 = a$, $\sigma_1^2 + \sigma_2^2 = \sigma^2$, $\alpha_1 + \alpha_2 = \alpha$ sowie $\mu_1 = \mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2} \star \pi_{\alpha_1}$ und $\mu_2 = \mathcal{N}_{a_2,\sigma_2^2} \star \pi_{\alpha_2}$ bestehen.*

Die Beweise der Sätze M.25.7.6-M.25.7.8 werden auf der Grundlage der harmonischen Analyse in $\mathbb{R}$ in Kombination mit Mitteln der komplexen Funktionentheorie geführt.

Eine ausführliche Darstellung über die Theorie der Zerlegbarkeit von Wahrscheinlichkeitsmaßen wird in [LO72], [Luk70] und [RJS85] dargelegt.

M.25.8. Stabile Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$

Wir schälen im vorliegenden Abschnitt eine spezielle Teilklasse von Maßen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ hieraus, welche dadurch gekennzeichnet ist, dass die (nachfolgend eingeführte-) durch μ erzeugte Skalen- und Translationsfamilie eine besondere Invarianzeigenschaft bezüglich der Faltungsoperation besitzt.

Derartige Wahrscheinlichkeitsmaße spielen eine bedeutsame Rolle beim Studium des asymptotischen Verhaltens gewichteter Summen von stochastisch unabhängigen $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$-Zufallsvariablen.

Definition M.25.8.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann heißt $(T_{\sigma,a}(\mu))_{(\sigma,a)\in(0,+\infty)\times\mathbb{R}}$ die durch μ *erzeugte Skalen- und Translationsfamilie.*

Wir zeigen nun, dass ein beliebiges Maß aus der durch $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ erzeugten Skalen- und Translationsfamilie in gleicher Weise als Erzeuger fungiert.

Lemma M.25.8.1. *Sei $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Weiter seien $(\sigma_0, a_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ und $\nu := T_{\sigma_0,a}(\mu)$. Dann gilt*

$$\{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\} = \{T_{\sigma,a}(\nu) \,|\, (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\}.$$

BEWEIS. Sei

$$\varrho \in \{T_{\sigma,a}(\nu) \,|\, (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\}. \tag{1}$$

Wegen (1) gibt es dann ein

$$(\sigma_1, a_1) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R} \tag{2}$$

mit

$$\varrho = T_{\sigma_1,a_1}(\nu). \tag{3}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{\sigma_1,a_1} \circ T_{\sigma_0,a_0} = T_{\sigma_1\cdot\sigma_0,\sigma_1 a_0 + a_1}. \tag{4}$$

[4] JURI WLADIMIROWITSCH LINNIK (*08.01.1915; †30.06.1972) war ein russischer Mathematiker, der sich mit Wahrscheinlichkeitstheorie, mathematischer Statistik und analytischer Zahlentheorie beschäftigte.

Unter Verwendung von (3), Satz M.16.11 und (4) folgt dann

$$\varrho = T_{\sigma_1.a_1}\left[T_{\sigma_0,a_0}(\mu)\right] = \left(T_{\sigma_1.a_1} \circ T_{\sigma_0,a_0}\right)(\mu) = T_{\sigma_1\cdot\sigma_0,\sigma_1 a_0+a_1}(\mu). \tag{5}$$

Wegen $(\sigma_0, a_0) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ und (2) gilt

$$(\sigma_1\cdot\sigma_0, \sigma_1 a_0 + a_1) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) gilt dann

$$\varrho \in \{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\}. \tag{7}$$

Aus (1) und (7) folgt dann

$$\{T_{\sigma,a}(\nu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\} \subseteq \{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\}. \tag{8}$$

Wegen Lemma M.24.4.3 gilt

$$T_{\sigma_0^{-1},-\sigma_0^{-1}a_0} \circ T_{\sigma_0,a_0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}. \tag{9}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$\left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right)(\mu) = \mu. \tag{10}$$

Unter Verwendung der Definition von ν sowie von Satz M.16.11, (9) und (10) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{\sigma_0^{-1},-\sigma_0^{-1}a_0}(\nu) &= T_{\sigma_0^{-1},-\sigma_0^{-1}a_0}\left[T_{\sigma_0,a_0}(\mu)\right] = \left(T_{\sigma_0^{-1},-\sigma_0^{-1}a_0} \circ T_{\sigma_0,a_0}\right)(\mu) \\ &= \left(\mathrm{id}_{\mathbb{R}}\right)(\mu) = \mu. \end{aligned} \tag{11}$$

Wegen $(\sigma_0, a_0) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}$ gilt

$$\left(\sigma_0^{-1}, -\sigma_0^{-1}a_0\right) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}. \tag{12}$$

Aus (11), (12) und dem schon Gezeigten (vergleiche (8)) folgt dann

$$\{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\} \subseteq \{T_{\sigma,a}(\nu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\}. \tag{13}$$

Aus (8) und (13) folgt dann

$$\{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\} = \{T_{\sigma,a}(\nu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\}. \qquad \square$$

Es folgt nun die grundlegende Begriffsbildung dieses Abschnitts:

Definition M.25.8.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann heißt μ *stabil*, falls

$$\left(\{T_{\sigma,a}(\mu) \,|\, (\sigma,a) \in (0,+\infty)\times\mathbb{R}\}, \star\right)$$

eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right), \star\right)$ ist.

Bezeichnung. Es bezeichne $\mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ die Menge aller stabilen $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiterhin sei

$$\mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) := \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \cap \mathcal{M}_+^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right).$$

Bemerkung M.25.8.1. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) μ ist stabil.

(ii) Zu beliebigen $(\sigma_1, a_1), (\sigma_2, a_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ gibt es ein $(\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ mit

$$T_{\sigma_1,a_1}(\mu) \star T_{\sigma_2,a_2}(\mu) = T_{\sigma,a}(\mu). \qquad \clubsuit$$

BEWEIS. Die Behauptung folgt sofort aus der Definition M.25.8.2 und dem Unterhalbgruppenkriterium. □

Das nachfolgende Kriterium wird uns in Kürze beim Nachweis der Stabilität konkreter Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ behilflich sein.

Bemerkung M.25.8.2. Sei $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und $(\sigma_0, a_0) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) μ ist stabil.

(ii) $T_{\sigma_0,a_0}(\mu)$ ist stabil. $\clubsuit$

BEWEIS. Sei

$$\nu := T_{\sigma_0,a_0}(\mu). \tag{1}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und (1) folgt mittels Satz M.16.10 dann

$$\nu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \tag{2}$$

Wegen (1) gilt nach Lemma M.25.8.1 dann

$$\{T_{\sigma,a}(\mu) \mid (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\} = \{T_{\sigma,a}(\nu) \mid (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\}. \tag{3}$$

Wegen Definition M.25.8.2, (2) und (3) folgt dann sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Es folgen nun einige Beispiele stabiler Maße aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

Beispiel M.25.8.1. Es bezeichne $\mathfrak{o}_1$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. Dann ist $\mathfrak{o}_1$ stabil.

BEWEIS. Es ist $\mathfrak{o}_1 \in \mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$ und wegen $\{T_{\sigma,a}(\mathfrak{o}_1) \mid (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\} = \{\mathfrak{o}_1\}$ ist $(\{T_{\sigma,a}(\mathfrak{o}_1) \mid (\sigma, a) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}\}, \star)$ offenbar eine Unterhalbgruppe von $(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1), \star)$. Somit ist $\mathfrak{o}_1$ stabil. □

Beispiel M.25.8.2. Sei $x_0 \in \mathbb{R}$. Dann gilt $\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$.

BEWEIS. Wegen Teil *(b)* von Beispiel M.5.2 gilt

$$\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1). \tag{1}$$

Seien

$$(\sigma_1, a_1), (\sigma_2, a_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$(\sigma_1 + \sigma_2, a_1 + a_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \tag{3}$$

Wegen (2) liefert Bemerkung M.25.2.4 weiterhin

$$[T_{\sigma_1,a_1}(\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1})] \star [T_{\sigma_2,a_2}(\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1})] = T_{\sigma_1+\sigma_2,a_1+a_2}(\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1}). \tag{4}$$

Wegen (1) bis (4) ergibt sich mittels Bemerkung M.25.8.1 dann $\varepsilon_{x_0,\mathfrak{B}_1} \in \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^1(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1)$. □

Beispiel M.25.8.3. Seien $a \in \mathbb{R}$ und $\sigma \in (0,+\infty)$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{a,\sigma^2}$ die Normalverteilung mit den Parametern a und σ^2. Dann gilt $\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.13.2 gelten

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{1}$$

sowie

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} = T_{\sigma,a}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \tag{2}$$

Wir zeigen nun zunächst die Stabilität von $\mathcal{N}_{0,1}$. Trivialerweise gilt

$$\left\{T_{\eta,b}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \mid (\eta,b) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\right\} \neq \varnothing. \tag{3}$$

Seien

$$(\sigma_1, a_2), (\sigma_2, a_2) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}. \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann

$$\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}, a_1+a_2\right) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (4), (2), Satz M.25.4.2 und nochmals (2) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{\sigma_1,a_1}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \star T_{\sigma_2,a_2}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) &= \mathcal{N}_{a_1,\sigma_1^2} \star \mathcal{N}_{a_2,\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{a_1+a_2,\sigma_1^2+\sigma_2^2} = \mathcal{N}_{a_1+a_2,\left(\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2}\right)^2} \\ &= T_{\sqrt{\sigma_1^2+\sigma_2^2},a_1+a_2}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right). \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) gilt dann

$$T_{\sigma_1,a_1}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \star T_{\sigma_2,a_2}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \in \left\{T_{\eta,b}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \mid (\eta,b) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\right\}. \tag{7}$$

Wegen (3), (5) und (7) ist dann

$$\left(\left\{T_{\eta,b}\left(\mathcal{N}_{0,1}\right) \mid (\eta,b) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\right\}, \star\right)$$

eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right), \star\right)$. Hieraus und aus (1) folgt dann

$$\mathcal{N}_{0,1} \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{8}$$

Wegen (1), (2) und (8) folgt dann schließlich mittels Bemerkung M.25.8.2

$$\mathcal{N}_{a,\sigma^2} \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \qquad \square$$

Beispiel M.25.8.4. Seien $\alpha \in \mathbb{R}$ und $\beta \in (0,+\infty)$. Es bezeichne $\gamma_{\alpha,\beta}$ die Cauchy-Verteilung mit den Parametern α und β. Dann gilt $\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.

Beweis. Wegen Teil *(b)* von Satz M.22.14.2 gilt

$$\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right) \tag{1}$$

sowie

$$\gamma_{\alpha,\beta} = T_{\beta,\alpha}\left(\gamma_{0,1}\right). \tag{2}$$

Wir zeigen zunächst die Stabilität von $\gamma_{0,1}$. Trivialerweise gilt

$$\left\{T_{b,a}\left(\gamma_{0,1}\right) \mid (b,a) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\right\} \neq \varnothing. \tag{3}$$

Seien

$$(\beta_1, \alpha_1), (\beta_2, \alpha_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \tag{4}$$

Aus (4) folgt dann

$$(\beta_1 + \beta_2, \alpha_1 + \alpha_2) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}. \tag{5}$$

Unter Beachtung von (4), (2), Satz M.25.4.3, (5) und nochmals (2) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{\beta_1,\alpha_1}(\gamma_{0,1}) \star T_{\beta_2,\alpha_2}(\gamma_{0,1}) &= \gamma_{\alpha_1,\beta_1} \star \gamma_{\alpha_2,\beta_2} = \gamma_{\alpha_1+\alpha_2,\beta_1+\beta_2} \\ &= T_{\beta_1+\beta_2,\alpha_1+\alpha_2}(\gamma_{0,1}). \end{aligned} \tag{6}$$

Wegen (5) und (6) gilt dann

$$T_{\beta_1,\alpha_1}(\gamma_{0,1}) \star T_{\beta_2,\alpha_2}(\gamma_{0,1}) \in \{T_{b,a}(\gamma_{0,1}) \mid (b,a) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\}. \tag{7}$$

Wegen (3), (4) und (7) ist dann

$$(\{T_{b,a}(\gamma_{0,1}) \mid (b,a) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\}, \star)$$

eine Unterhalbgruppe von $\left(\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right), \star\right)$. Hieraus und aus (1) folgt dann

$$\gamma_{0,1} \in \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \tag{8}$$

Wegen (1), (2) und (8) folgt mittels Bemerkung M.25.8.2 dann

$$\gamma_{\alpha,\beta} \in \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^1\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right). \qquad \square$$

Unsere nächste Überlegung ist nun auf den Nachweis der unbeschränkten Teilbarkeit eines stabilen Maßes aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ aus gerichtet. Hierzu benötigen wir eine kleine Vorbereitung.

Bemerkung M.25.8.3. Sei $\mu \in \mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Weiter sei $n \in \mathbb{N}$. Dann gibt es ein $(b_n, a_n) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ mit

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu = T_{\sigma_n,a_n}(\mu). \qquad \clubsuit$$

Beweis. Wegen $T_{1,0} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ gilt nach Beispiel M.16.4 dann $T_{1,0}(\mu) = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}(\mu) = \mu$. Hieraus folgt dann

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu = T_{1,0}(\mu). \tag{1}$$

Aufgrund der Wahl von μ gilt:

(I) Es ist $(\{T_{\sigma,a}(\mu) \mid (\sigma,a) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\}, \star)$ eine Unterfaltungshalbgruppe von der Faltungshalbgruppe $\left(\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m), \star\right)$.

Aus (1) und *(I)* folgt dann $\bigstar_{j=1}^{n} \mu \in \{T_{\sigma,a}(\mu) \mid (\sigma,a) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}\}$. Dann gibt es ein $(\sigma_n, a_n) \in (0, +\infty) \times \mathbb{R}$ mit

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu = T_{\sigma_n,a_n}(\mu). \qquad \square$$

Bemerkung M.25.8.3 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.25.8.3. Seien $\mu \in \mathcal{M}^b_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ und $n \in \mathbb{N}$. Weiterhin sei $(\sigma_n, a_n) \in (0,+\infty) \times \mathbb{R}$ so gewählt, dass die Beziehung $\bigstar_{j=1}^{n} \mu = T_{\sigma_n, a_n}(\mu)$ erfüllt ist. Dann heißt (σ_n, a_n) ein zu μ *gehöriges n-Paar.*

Jetzt sind wir in der Lage den Nachweis der unbeschränkten Teilbarkeit eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}^b_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$ zu erbringen. Darüber hinaus werden wir zu beliebigem $n \in \mathbb{N}$ noch Informationen über n-te Faltungswurzeln aus μ erhalten.

Satz M.25.8.1. *Sei $\mu \in\in \mathcal{M}^b_{+,\mathrm{st}}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. Dann gilt:*

(a) *Sei $n \in \mathbb{N}$ und sei (σ_n, a_n) ein μ gehöriges n-Paar. Dann ist $T_{\frac{1}{\sigma_n}, -\frac{a_n}{n\sigma_n}}(\mu)$ eine n-te Faltungswurzel aus μ.*

(b) *Es ist $\mu \in \mathcal{M}^b_{+,u}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Aufgrund der Wahl von (σ_n, a_n) gilt nach Definition M.25.8.3 dann

$$\bigstar_{j=1}^{n} \mu = T_{\sigma_n, a_n}(\mu). \tag{1}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{\frac{1}{\sigma_n}, -\frac{a_n}{n\sigma_n}} = T_{1, -\frac{a_n}{n\sigma_n}} \circ T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}. \tag{2}$$

Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$\varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n}} \star \left[T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right] = T_{1, -\frac{a_n}{n\sigma_n}}\left[T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right]. \tag{3}$$

Unter Verwendung von (2), Satz M.16.11 und (3) folgt dann

$$\begin{aligned} T_{\frac{1}{\sigma_n}, -\frac{a_n}{n\sigma_n}}(\mu) &= \left[T_{1, -\frac{a_n}{n\sigma_n}} \circ T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}\right](\mu) = T_{1, -\frac{a_n}{n\sigma_n}}\left[T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right] \\ &= \varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1} \star \left[T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right]. \end{aligned} \tag{4}$$

Unter Beachtung von (4) sowie der nach Teil *(a)* von Satz M.25.2.6 vorliegenden Kommutativität und Assoziativität der Faltung ergibt sich

$$\begin{aligned} \bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n}, -\frac{a_n}{n\sigma_n}}(\mu) &= \bigstar_{j=1}^{n}\left(\varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1} \star \left[T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right]\right) \\ &= \left(\bigstar_{j=1}^{n} \varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1}\right) \star \left(\bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu)\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Wegen Beispiel M.25.2.1 gilt

$$\bigstar_{j=1}^{n} \varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{\sum_{j=1}^{n} -\frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{-n \cdot \frac{a_n}{n\sigma_n}, \mathfrak{B}_1} = \varepsilon_{-\frac{a_n}{\sigma_n}, \mathfrak{B}_1}. \tag{6}$$

Wegen Satz M.25.2.8 gilt

$$\bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}(\mu) = T_{\frac{1}{\sigma_n}, 0}\left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu\right). \tag{7}$$

Wegen Satz M.25.2.3 gilt

$$\varepsilon_{-\frac{a_n}{\sigma_n},\mathfrak{B}_1} \star \left[T_{\frac{1}{\sigma_n},0} \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right) \right] = T_{1,-\frac{a_n}{\sigma_n}} \left[T_{\frac{1}{\sigma_n},0} \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right) \right]. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (5), (6), (7), (8) und Satz M.16.11 folgt dann

$$\begin{aligned} \bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{n\sigma_n}}(\mu) &= \left(\bigstar_{j=1}^{n} \varepsilon_{-\frac{a_n}{n\sigma_n},\mathfrak{B}_1} \right) \left(\bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n},0}(\mu) \right) = \varepsilon_{-\frac{a_n}{\sigma_n},\mathfrak{B}_1} \star \left(\bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n},0}(\mu) \right) \\ &= T_{1,-\frac{a_n}{\sigma_n}} \left[T_{\frac{1}{\sigma_n},0} \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right) \right] = \left(T_{1,-\frac{a_n}{n\sigma_n}} \circ T_{\frac{1}{\sigma_n},0} \right) \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right). \end{aligned} \tag{9}$$

Wegen Lemma M.24.4.2 gilt

$$T_{1,-\frac{a_n}{\sigma_n}} \circ T_{\frac{1}{\sigma_n},0} = T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}}. \tag{10}$$

Wegen Lemma M.24.4.3 gilt

$$T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}} \circ T_{\sigma_n,a_n} = \mathrm{id}_{\mathbb{R}}. \tag{11}$$

Wegen Beispiel M.16.4 ist $\mathrm{id}_{\mathbb{R}}$ eine $\mathfrak{B}_1$-$\mathfrak{B}_1$-messbare Abbildung und es gilt

$$(\mathrm{id}_{\mathbb{R}})(\mu) = \mu. \tag{12}$$

Unter Verwendung von (9), (10), (11), (1), Satz M.16.11, (11) und (12) folgt dann

$$\begin{aligned} \bigstar_{j=1}^{n} T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{n\sigma_n}}(\mu) &= \left(T_{1,-\frac{a_n}{n\sigma_n}} \circ T_{\frac{1}{\sigma_n},0} \right) \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right) = T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}} \left(\bigstar_{j=1}^{n} \mu \right) \\ &= T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}} \left[T_{\sigma_n,a_n}(\mu) \right] = \left(T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}} \circ T_{\sigma_n,a_n} \right)(\mu) \\ &= (\mathrm{id}_{\mathbb{R}})(\mu) = \mu. \end{aligned}$$

Somit ist $T_{\frac{1}{\sigma_n},-\frac{a_n}{\sigma_n}}(\mu)$ eine n-te Faltungswurzel aus μ. Damit ist *(a)* bewiesen.

Zu *(b)*: Wegen Bemerkung M.25.8.3 gibt es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ ein zu μ zugehöriges n-Paar (σ_n, a_n). Hieraus folgt mit *(a)*, dass es zu jedem $n \in \mathbb{N}$ eine n-te Faltungswurzel aus μ gibt. Somit ist $\mu \in \mathcal{M}_{+,u}^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$. □

M.26. Sphärische und schwach sphärische Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

Wir wenden uns in diesem Abschnitt Klassen von Maßen aus $\mathcal{M}_+^b(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche durch gewisse Invarianzeigenschaften gegenüber der multiplikativen Gruppe $\mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ der orthogonalen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m\times m}$ definiert sind. Wahrscheinlichkeitsmaße dieser Klassen spielen eine prominente Rolle in der multivariaten Statistik. Hierbei sei insbesondere auf die sogenannten schwach sphärischen linearen Modelle hingewiesen.

Es folgt nun die erste zentrale Begriffsbildung dieses Abschnitts:

Definition M.26.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ *sphärisch*, falls für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ die Beziehung

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu) = \mu$$

besteht.

Bemerkung M.26.1. Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein sphärisches Maß auf $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ auch symmetrisch. ♣

Beweis. Wegen

$$(-\mathbf{I}_m)\cdot\left(-\mathbf{I}_m^T\right) = \mathbf{I}_m\mathbf{I}_m^T = \mathbf{I}_m$$

ist $-\mathbf{I}_m \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$. Hieraus folgt aufgrund der Wahl von μ dann

$$T_{-\mathbf{I}_m,\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu) = \mu,$$

also aufgrund der Definition der Spiegelung dann $\mu^\vee = \mu$. □

Bemerkung M.26.2. Seien $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in [0,+\infty)$ und μ ein sphärisches Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist auch $\alpha\mu$ ein sphärisches Maß auf $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. ♣

Beispiel M.26.1. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\mathfrak{o}_m$ das Nullmaß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\mathfrak{o}_m$ sphärisch.

Beispiel M.26.2. Sei $m \in \mathbb{N}$. Dann ist $\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}$ ein sphärisches Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mathbf{0}_{m\times 1}) = \mathbf{0}_{m\times 1}$ ergibt sich mittels Teil *(b)* von Satz M.16.5 dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}\right) = \varepsilon_{T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mathbf{0}_{m\times 1}),\mathfrak{B}_m} = \varepsilon_{\mathbf{0}_{m\times 1},\mathfrak{B}_m}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist alles bewiesen. □

Beispiel M.26.3. Sei $m \in \mathbb{N}$ und bezeichne $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist $\lambda^{(m)}$ sphärisch.

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen (1) gilt dann $|\det \mathbf{B}| = 1$. Hieraus folgt bei Beachtung von Satz M.24.4.2 dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\lambda^{(m)}\right) = \frac{1}{|\det \mathbf{B}|}\lambda^{(m)} = \lambda^{(m)}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) ist dann alles bewiesen. □

Unsere nächste Zielstellung besteht nun darin, aus einem vorgegebenen sphärischen Maß auf $(\mathbb{R}^n, \mathfrak{B}_n)$ durch Anheften einer speziellen Klasse von Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ als Dichten von sphärischen Maßen zu konstruieren. Hierzu führen wir eine spezielle Klasse von Abbildungen ein.

Definition M.26.2. Seien $m \in \mathbb{N}$, K eine nichtleere Menge sowie $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^m, K)$. Dann heißt f *sphärisch,* falls für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ gilt

$$f \circ T_{\mathbf{B}, \mathbf{0}_{m\times 1}} = f.$$

Bemerkung M.26.3. Seien $m \in \mathbb{N}$, K eine nichtleere Menge sowie f eine sphärische Abbildung aus $\mathrm{Abb}(\mathbb{R}^m, K)$. Weiter sei $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt $f(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x})$. ♣

Beweis. Wegen $-\mathbf{I}_m \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ folgt aus der Wahl von f dann

$$f(\mathbf{x}) = \left(f \circ T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}\right)(\mathbf{x}) = f\left(T_{-\mathbf{I}_m, \mathbf{0}_{m\times 1}}\right)(\mathbf{x}) = f(-\mathbf{x}). \qquad \square$$

Bemerkung M.26.4. Sei $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \in \mathbb{R}$ sowie $f \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R}^m, \mathbb{R})$ eine sphärische Abbildung. Dann ist auch αf eine sphärische Abbildung. ♣

Beispiel M.26.4. Seien K eine nichtleere Menge, $J \supseteq [0, +\infty)$ und $f \in \mathrm{Abb}(J, K)$. Weiter seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $h_m \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} \longmapsto |\mathbf{x}|.$$

Dann ist die Kompositionsabbildung $f \circ h_m$ sphärisch.

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen (1) gilt dann

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}_m. \tag{2}$$

Unter Beachtung von (2) folgt für $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ dann

$$\begin{aligned}\left(h_m \circ T_{\mathbf{B}, \mathbf{0}_{m\times 1}}\right)(\mathbf{x}) &= h_m(\mathbf{B}\mathbf{x}) = |\mathbf{B}\mathbf{x}| = \sqrt{(\mathbf{B}\mathbf{x})^T \mathbf{B}\mathbf{x}} \\ &= \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{x}} = \sqrt{\mathbf{x}^T\mathbf{x}} = |\mathbf{x}| \\ &= h_m(\mathbf{x}).\end{aligned}$$

Es ist also

$$h_m \circ T_{\mathbf{B}, \mathbf{0}_{m\times 1}} = h_m.$$

Hieraus folgt dann

$$(f \circ h_m) \circ T_{\mathbf{B}, \mathbf{0}_{m\times 1}} = f \circ \left(h_m \circ T_{\mathbf{B}, \mathbf{0}_{m\times 1}}\right) = f \circ h_m. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) ist dann $f \circ h_m$ sphärisch. $\square$

Beispiel M.26.5. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $h_m \colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto |\mathbf{x}|$. Dann ist h_m sphärisch.

Wir streben nun eine Charakterisierung sphärischer Abbildungen an. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung. Das dabei erhaltene Resultat ist von eigenständigen Interesse.

Lemma M.26.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ so gewählt, dass $|\mathbf{x}| = |\mathbf{y}| = 1$ erfüllt ist. Dann gibt es ein $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ mit*

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{y}.$$

Beweis. Seien $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ bzw. $(\mathbf{y}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ (stets existierende) Orthonormalbasen des $(\mathbb{R}^m, \langle ., . \rangle)$ mit

$$\mathbf{x}_1 = \mathbf{x} \tag{1}$$

bzw.

$$\mathbf{y}_1 = \mathbf{y}. \tag{2}$$

Setzen wir dann

$$\mathbf{X} \coloneqq (\mathbf{x}_1, \ldots, \mathbf{x}_m) \tag{3}$$

und

$$\mathbf{Y} \coloneqq (\mathbf{y}_1, \ldots, \mathbf{y}_m), \tag{4}$$

so folgt aufgrund der Wahl von $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ bzw. $(\mathbf{y}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ dann aus (3) bzw. (4) dann

$$\mathbf{X} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}) \tag{5}$$

bzw.

$$\mathbf{Y} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{6}$$

Aus (5) folgt sogleich

$$\mathbf{X}^T \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{7}$$

Sei

$$\mathbf{B} \coloneqq \mathbf{Y}\mathbf{X}^T. \tag{8}$$

Da $\mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ eine multiplikative Gruppe ist, folgt dann aus (6)-(8)

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Unter Beachtung von (1), (3) und der Wahl der Folge $(\mathbf{x}_j)_{j \in \mathbb{N}_{1,m}}$ ergibt sich

$$\mathbf{X}^T\mathbf{x} = \mathbf{X}^T\mathbf{x}_1 = (\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \ldots, \mathbf{x}_m)^T \mathbf{x}_1 = (1, 0, \ldots, 0)^T = \mathbf{e}_1^{(m)}. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (8), (10), (4) und (2) folgt dann

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \left(\mathbf{Y}\mathbf{X}^T\right)\mathbf{x} = \mathbf{Y}\left(\mathbf{X}^T\mathbf{x}\right) = \mathbf{Y}\mathbf{e}_1^{(m)} = \mathbf{y}_1 = \mathbf{y}. \tag{11}$$

Wegen (9) und (11) ist dann alles gezeigt. □

Satz M.26.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$, K eine nichtleere Menge sowie $f \in \operatorname{Abb}(\mathbb{R}^m, K)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist f sphärisch.*

(ii) *Für alle $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $|\mathbf{x}_0| = 1$ und alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ gilt $f(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}| \cdot \mathbf{x}_0)$.*

(iii) *Es gibt ein $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit $|\mathbf{x}_0| = 1$ derart, dass für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ die Beziehung $f(\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}| \cdot \mathbf{x}_0)$ besteht.*

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Sei

$$\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m \tag{1}$$

so gewählt, dass

$$|\mathbf{x}_0| = 1 \tag{2}$$

erfüllt ist. Dann gilt $|\mathbf{0}_{m\times 1}| \cdot \mathbf{x}_0 = 0 \cdot \mathbf{x}_0 = \mathbf{0}_{m\times 1}$, also

$$f(\mathbf{0}_{m\times 1}) = f(|\mathbf{0}_{m\times 1}| \cdot \mathbf{x}_0). \tag{3}$$

Sei nun

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \setminus \{\mathbf{0}_{m\times 1}\}. \tag{4}$$

Wegen (4) gilt dann $|\mathbf{x}| \neq 0$ sowie mit der Setzung

$$\mathbf{y} \coloneqq \frac{1}{|\mathbf{x}|}\mathbf{x} \tag{5}$$

weiterhin

$$|\mathbf{y}| = 1. \tag{6}$$

Wegen (2) und (6) gibt es nach Lemma M.26.1 dann ein

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}) \tag{7}$$

mit

$$\mathbf{B}\mathbf{y} = \mathbf{x}_0. \tag{8}$$

Wegen (5) und (8) ergibt sich dann

$$\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{B}(|\mathbf{x}| \cdot \mathbf{y}) = |\mathbf{x}|(\mathbf{B}\mathbf{y}) = |\mathbf{x}| \cdot \mathbf{x}_0. \tag{9}$$

Wegen *(i)* und (7) gilt

$$f \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = f. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (10) und (9) folgt dann

$$f(\mathbf{x}) = \left(f \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\right)(\mathbf{x}) = f\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mathbf{x})\right) = f(\mathbf{B}\mathbf{x}) = f(|\mathbf{x}| \cdot \mathbf{x}_0). \tag{11}$$

Wegen (1) bis (4) und (11) ist dann also *(ii)* erfüllt.

(ii) $\Rightarrow$ ***(iii)*****:** Dies gilt trivialerweise.

(iii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{12}$$

Wegen (12) gilt dann

$$\mathbf{B}^T\mathbf{B} = \mathbf{I}_m. \tag{13}$$

Sei

$$\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m. \tag{14}$$

Wegen (13) gilt dann

$$[|\mathbf{B}\mathbf{x}|]^2 = (\mathbf{B}\mathbf{x})^T(\mathbf{B}\mathbf{x}) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}^T\mathbf{B}\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{I}_m\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{x} = |\mathbf{x}|^2,$$

also

$$|\mathbf{Bx}| = |\mathbf{x}|\,. \tag{15}$$

Unter Beachtung von *(iii)*, (15) und nochmals *(iii)* folgt dann

$$\left(f \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\right) = f\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathbf{x}\right)\right) = f\left(\mathbf{Bx}\right) = f\left(|\mathbf{Bx}| \cdot \mathbf{x}_0\right) = f\left(|\mathbf{x}| \cdot \mathbf{x}_0\right) = f\left(\mathbf{x}\right). \tag{16}$$

Wegen (14) und (16) gilt dann $f \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = f$. Somit ist f sphärisch und es gilt also *(i)*. □

Definition M.26.3. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^m\right)$. Dann heißt A *sphärisch*, falls die Abbildung 1_A sphärisch ist.

Bemerkung M.26.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $A \in \mathfrak{P}\left(\mathbb{R}^m\right)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist A sphärisch.

(ii) Für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right)$ gilt $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(A\right) = A$. ♣

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right). \tag{1}$$

Aus (1) folgt

$$\det \mathbf{B} \neq 0 \tag{2}$$

und

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T \tag{3}$$

sowie

$$\mathbf{B}^T \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right). \tag{4}$$

Unter Beachtung von (2) folgt mittels Lemma M.24.4.3, dass $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}^m$ ist sowie unter zusätzlicher Beachtung von (3) weiterhin

$$T^{-1}_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}} = T_{(\mathbf{B}^T)^{-1},-(\mathbf{B}^T)^{-1}\mathbf{0}_{m\times 1}} = T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{5}$$

***(i)*⇒*(ii)*:** Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right). \tag{6}$$

Wegen (6), (1) und (4) gilt dann

$$\mathbf{B}^T \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right).$$

Hieraus folgt wegen *(i)* dann

$$1_A \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = 1_A. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (5) ergibt sich

$$1_A \circ T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}} = 1_{T^{-1}_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}(A)} = 1_{T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(A)}. \tag{8}$$

Aus (7) und (8) folgt dann $1_{T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(A)} = 1_A$. Somit ist

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(A\right) = A \tag{9}$$

und wegen (6) und (9) gilt dann also *(ii)*.

***(ii)*⇒*(i)*:** Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{10}$$

Wegen (10), (1) und (4) gilt dann

$$\mathbf{B}^T \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}).$$

Hieraus folgt wegen *(ii)* dann

$$T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}(A) = A. \tag{11}$$

Unter Verwendung von (10), (1), (5) und (11) folgt dann

$$1_A \circ T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = 1_{T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(A)} = 1_{T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}(A)} = 1_A. \tag{12}$$

Wegen (10) und (12) ist dann 1_A sphärisch - also ist A sphärisch und damit *(i)*. □

Bemerkung M.26.6. Sei $m \in \mathbb{N}$ und sei $h_m\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow [0,+\infty)$ definiert gemäß

$$\mathbf{x} \longmapsto |\mathbf{x}|.$$

Weiter sei $C \in \mathfrak{P}(\mathbb{R})$. Dann ist die Menge $h_m^{-1}(C)$ sphärisch. ♣

Beweis. Wegen $1_C \in \mathrm{Abb}(\mathbb{R},\mathbb{R})$, $[0,+\infty) \subseteq \mathbb{R}$ und $1_{h_m^{-1}(C)} = 1_C \circ h_m$ folgt aus Beispiel M.26.4, dass die Abbildung $1_{h_m^{-1}(C)}$ sphärisch ist. Hieraus folgt mit Definition M.26.3, dass $h_m^{-1}(C)$ sphärisch ist. □

Beispiel M.26.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie $R \in (0,+\infty)$. Dann sind die Mengen $K_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1};R)$, $\overline{K}_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1};R)$ und $S_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1};R) := \{\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m \,|\, |\mathbf{x}| = R\}$ jeweils sphärisch.

Beweis. Aus der Definition der beteiligten Mengen folgt sofort $K_{|\cdot|,\mathbb{R}^m}(\mathbf{0}_{m\times 1};R) = h_m^{-1}([0,R))$, $\overline{K}_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1};R) = h_m^{-1}([0,R])$ sowie $S_{|\cdot|}(\mathbf{0}_{m\times 1};R) = h_m^{-1}(\{R\})$. Hieraus folgen mittels Bemerkung M.26.6 alle Behauptungen. □

Wir fixieren nun ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ und realisieren die angestrebte Konstruktion einer Familie von μ-stetigen sphärischen Maßen auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ durch Heranziehung von sphärischen Funktionen aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ als entsprechende Dichteversionen bezüglich μ.

Satz M.26.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$, μ ein sphärisches Maß auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ sowie f eine sphärische Abbildung aus $\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ_f ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$.*

Beweis. Wegen $f \in \mathcal{E}^*(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$ liefert Teil *(a)* von Satz M.22.2.4 zunächst

$$\mu_f \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m). \tag{1}$$

Wir zeigen nun, dass μ_f sphärisch ist. Sei hierzu

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen (2) gelten

$$\det \mathbf{B} \neq 0 \tag{3}$$

sowie

$$\mathbf{B}^{-1} = \mathbf{B}^T. \tag{4}$$

Unter Beachtung von (3) folgt mittels Lemma M.24.4.3, dass $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine Bijektion von $\mathbb{R}^m$ ist sowie unter zusätzlicher Beachtung von (4) weiterhin

$$T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = T_{\mathbf{B}^{-1},-\mathbf{B}^{-1}\mathbf{0}_{m\times 1}} = T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{5}$$

Wegen *(b)* von Satz M.16.9 sowie (5) sind $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ und $T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ jeweils $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbar. Beachtet man dies, so ergeben sich mittels Satz M.24.4.1 dann

$$f \circ T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{6}$$

sowie

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_f\right) = \left[T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu\right)\right]_{f\circ T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}}. \tag{7}$$

Da μ sphärisch ist, gilt wegen (2) dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_f\right) = \mu. \tag{8}$$

Wegen (5) gilt

$$f \circ T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = f \circ T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}. \tag{9}$$

Wegen (2) gilt $\mathbf{B}^T \in \mathcal{O}\left(m;\mathbb{R}\right)$. Da f sphärisch ist gilt somit

$$f \circ T_{\mathbf{B}^T,\mathbf{0}_{m\times 1}} = f. \tag{10}$$

Aus (9) und (10) folgt dann

$$f \circ T^{-1}_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}} = f. \tag{11}$$

Aus (7), (8) und (11) folgt dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mu_f\right) = \mu_f. \tag{12}$$

Wegen (1), (2) und (12) ist μ_f dann ein sphärisches Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. □

Folgerung M.26.1. *Seien $m \in \mathbb{N}$ sowie f eine sphärische Abbildung aus $\mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Weiterhin bezeichne $\lambda^{(m)}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Dann ist $\left(\lambda^{(m)}\right)_f$ sphärisch.*

Beweis. Wegen Beispiel M.26.3 ist $\lambda^{(m)}$ ein sphärisches Maß auf $\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$. Hieraus folgt mittels Satz M.26.2 die Behauptung. □

Folgerung M.26.2. *Sei $m \in \mathbb{N}$. Weiter sei A eine sphärische Menge aus $\mathfrak{B}_m$ mit $\lambda^{(m)}\left(A\right) \in (0, +\infty)$. Es bezeichne μ_A die kontinuierliche Gleichverteilung auf A. Dann ist μ_A ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$.*

Beweis. Sei

$$f \coloneqq \frac{1}{\lambda^{(m)}\left(A\right)} \cdot 1_A. \tag{1}$$

Wegen (1) gelten nach Beispiel M.22.2.3 dann

$$f \in \mathcal{E}^*\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right) \tag{2}$$

und

$$\mu_A = \left(\lambda^{(m)}\right)_f. \tag{3}$$

Wegen Definition M.6.1 und Bemerkung M.6.1 gilt

$$\mu_A \in \mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right). \tag{4}$$

Nach Wahl von A ist die Funktion 1_A sphärisch. Hieraus folgt bei Beachtung von (1) mittels Bemerkung M.26.4, dass f sphärisch ist. Hieraus ergibt sich wegen (2) und (4) mittels Folgerung M.26.1, dass μ_A ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}^1_+\left(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m\right)$ ist. □

Beispiel M.26.7. Sei $m \in \mathbb{N}$ und $R > 0$. Weiter sei $A \in \left\{K_{|\cdot|}\left(\mathbf{0}_{m\times 1}; R\right), \overline{K}_{|\cdot|}\left(\mathbf{0}_{m\times 1}; \mathbb{R}\right)\right\}$. Dann gilt:

(a) Es ist A eine sphärische Menge mit $\lambda^{(m)}(A) < +\infty$.

(b) Es bezeichne μ_A die kontinuierliche Gleichverteilung auf A. Dann ist μ_A ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^1(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Beweis. Kombiniere Beispiel M.26.6 und Folgerung M.26.2. □

Unsere nachfolgenden Betrachtungen beschäftigen sich nun mit der Teilklasse aller sphärischen Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ von erster Ordnung. Wir werden hierbei erkennen, dass für ein Maß μ dieser Klasse der Momentenvektor $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$ gleich dem Nullvektor $\mathbf{0}_{m\times 1}$ ist. Hierzu benötigen wir noch eine kleine Vorbereitung.

Lemma M.26.2. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^m$ derart beschaffen, dass für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ die Beziehung $\mathbf{Bx} = \mathbf{x}$ besteht. Dann ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}_{m\times 1}$.*

Beweis. Wir gehen indirekt vor und nehmen an

$$\mathbf{x} \neq \mathbf{0}_{m\times 1}. \tag{1}$$

Wegen (1) wäre dann $|\mathbf{x}| \neq 0$ und die Setzung

$$\mathbf{x}_0 = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} \tag{2}$$

erbrächte einen Vektor $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^m$ mit

$$|\mathbf{x}_0| = 1. \tag{3}$$

Weiter sei $\mathbf{y}_0$ ein dann existierender Vektor aus $\mathbb{R}^m$, für den

$$\mathbf{y}_0 \neq \mathbf{x}_0 \tag{4}$$

und

$$|\mathbf{y}_0| = 1 \tag{5}$$

erfüllt ist. Zum Beispiel ist $\mathbf{y}_0 = -\mathbf{x}_0$ ein solcher Vektor. Wegen (3) und (5) gibt es nach Lemma M.26.1 dann ein

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}) \tag{6}$$

mit

$$\mathbf{Bx}_0 = \mathbf{y}_0. \tag{7}$$

Wegen (6) und der Wahl von $\mathbf{x}$ gilt

$$\mathbf{Bx} = \mathbf{x}. \tag{8}$$

Unter Beachtung von (2), (8) und nochmals (2) ergäbe sich nun

$$\mathbf{Bx}_0 = \mathbf{B}\frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \frac{1}{|\mathbf{x}|}\mathbf{Bx} = \frac{\mathbf{x}}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{x}_0. \tag{9}$$

Aus (7) und (9) ergäbe sich also $\mathbf{x}_0 = \mathbf{y}_0$, was im Widerspruch zu (4) stünde. Somit war unsere Annahme falsch und es gilt

$$\mathbf{x} = \mathbf{0}_{m\times 1}. \qquad \square$$

Satz M.26.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt*

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) = \mathbf{0}_{m\times 1}.$$

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Da μ sphärisch ist, folgt aus (1) dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu) = \mu. \tag{2}$$

Wegen $\mu \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ergeben sich mittels Teil *(b)*von Satz M.23.9.2 dann $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu) \in \mathcal{M}_+^{b,1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ sowie

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)\right) = \mathbf{B}\cdot\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] + \mu(\mathbb{R}^m)\cdot\mathbf{0}_{m\times 1} = \mathbf{B}\cdot\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right]. \tag{3}$$

Unter Beachtung von (3) und (2) folgt dann

$$\mathbf{B}\cdot\left[\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)\right] = \widetilde{\mathfrak{M}}_1\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)\right) = \widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu). \tag{4}$$

Wegen (1) und (4) liefert Lemma M.26.2 dann $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) = \mathbf{0}_{m\times 1}$. □

Bemerkung M.26.7. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $(i_1, \ldots, i_m)$ eine Permutation der Menge $\mathbb{N}_{1,m}$. Die Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}: \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ sei definiert gemäß

$$(x_1, \ldots, x_m)^T \longmapsto (x_{i_1}, \ldots, x_{i_m})^T.$$

Dann gilt:

(a) Es sei $\left(\mathbf{e}_j^{(m)}\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ die kanonische Basis von $\mathbb{R}^m$ und zudem sei $\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m} \coloneqq (\mathbf{e}_{i_1}, \ldots, \mathbf{e}_{i_m})^T$. Dann gelten $\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ sowie $\pi_{i_1,\ldots,i_m} = T_{(\mathbf{E}_{i_1,\ldots,i_m})^T,\mathbf{0}_{m\times 1}}$.

(b) Es ist $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung. ♣

Bemerkung M.26.7 führt uns auf folgende Begriffsbildung.

Definition M.26.4. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ *permutationsinvariant,* falls für jede Permutation $(i_1, \ldots, i_m)$ von $\mathbb{N}_{1,m}$ und der $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}$ die Beziehung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}(\mu) = \mu$ besteht.

Bemerkung M.26.8. Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein sphärisches Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ permutationsinvariant. ♣

Beweis. Kombiniere Definition M.26.1, Teil *(a)* von Bemerkung M.26.7 und Definition M.26.4. □

Wir wenden uns nun einer im Rahmen der Klasse $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ betrachteten Abschwächung des Begriffs des sphärischen Maßes zu. Diese Abschwächung besteht konkret darin, dass wir die Invarianzforderung gegenüber linearen Transformationen mit orthogonaler Matrix *nicht* mehr an das Maß *selbst*, sondern nur noch an dessen Kovarianzmatrix stellen.

Zur Vorbereitung der nachfolgend eingeführten Begriffsbildung, erinnern wir daran, dass wegen Teil *(a)* von Satz M.23.9.11, jedes Bildmaß eines Maßes $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ unter einer affinen Transformation von $\mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^m$ ebenfalls zu $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ gehört.

Definition M.26.5. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ *schwach sphärisch*, falls für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ die Beziehung

$$\operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)\right) = \operatorname{cov}\mu$$

besteht.

Bemerkung M.26.9. Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann ist μ auch schwach sphärisch. ♣

Beweis. Sei $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$. Nach Wahl von μ gilt dann $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu) = \mu$. Hieraus folgt natürlich

$$\operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)\right) = \operatorname{cov}\mu.$$

Somit ist μ schwach sphärisch. □

Bemerkung M.26.10. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist μ schwach sphärisch.

(ii) Für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ gilt $\mathbf{B} \cdot \operatorname{cov}\mu \cdot \mathbf{B}^T = \operatorname{cov}\mu$. ♣

Beweis. Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Nach Teil *(c)* von Satz M.23.9.11 gilt

$$\operatorname{cov}\left(T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}(\mu)\right) = \mathbf{B} \cdot \operatorname{cov}\mu \cdot \mathbf{B}^T. \tag{2}$$

Aus (1) und (2) und Definition M.26.5 erkennt man sogleich die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Wir zeigen nun, dass die Bedingung *(ii)* aus Bemerkung M.26.10 äquivalent dazu ist, dass $\operatorname{cov}\mu$ eine Skalarmatrix ist.

Lemma M.26.3. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}$ symmetrisch. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit*
$$\mathbf{A} = \alpha \cdot \mathbf{I}_m.$$

(ii) *Für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R})$ gilt*
$$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}.$$

Beweis.

***(i)⇒(ii)*:** Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m;\mathbb{R}). \tag{1}$$

Wegen (1) gilt dann

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_m. \tag{2}$$

Unter Beachtung von *(i)*, (2) und nochmals *(i)* folgt dann

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \alpha\mathbf{B}\mathbf{I}_m\mathbf{B}^T = \alpha\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \alpha\mathbf{I}_m = \mathbf{A}. \tag{3}$$

Wegen (1) und (3) gilt dann *(ii)*.

***(ii)*⇒*(i)*:** Seien $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in \mathbb{R}^m$ so gewählt, dass

$$|\mathbf{x}| = 1 \tag{4}$$

und

$$|\mathbf{y}| = 1 \tag{5}$$

erfüllt sind. Wegen (4) und (5) gibt es nach Lemma M.26.1 dann ein

$$\mathbf{C} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}) \tag{6}$$

mit

$$\mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{7}$$

Sei

$$\mathbf{B} \coloneqq \mathbf{C}^T. \tag{8}$$

Wegen (6) und (8) gilt dann

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{9}$$

Wegen (9) folgt aus *(ii)* dann

$$\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T = \mathbf{A}. \tag{10}$$

Unter Beachtung von (8) und (7) folgt

$$\mathbf{B}^T\mathbf{x} = \left(\mathbf{C}^T\right)^T \mathbf{x} = \mathbf{C}\mathbf{x} = \mathbf{y}. \tag{11}$$

Unter Verwendung von (11) und (10) ergibt sich

$$\mathbf{y}^T\mathbf{A}\mathbf{y} = \left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right)^T \mathbf{A}\left(\mathbf{B}^T\mathbf{x}\right) = \mathbf{x}^T\mathbf{B}\mathbf{A}\mathbf{B}^T\mathbf{x} = \mathbf{x}^T\mathbf{A}\mathbf{x}. \tag{12}$$

Sei nun $(\mathbf{u}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,m}}$ ein aufgrund der Symmetrie von $\mathbf{A}$ existierendes Orthonormalsystem in $(\mathbb{R}^m, \langle .,. \rangle)$ von Eigenvektoren von $\mathbf{A}$. Für $j \in \mathbb{N}_{1,m}$ bezeichne hierbei α_j den zu $\mathbf{u}_j$ gehörigen Eigenwert von $\mathbf{A}$. Für

$$j \in \mathbb{N}_{1,m} \tag{13}$$

gilt dann

$$|\mathbf{u}_j| = 1 \tag{14}$$

sowie unter Beachtung von (14)

$$\mathbf{u}_j^T\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_j^T\alpha_j\mathbf{u}_j = \alpha_j|\mathbf{u}_j| = \alpha_j. \tag{15}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}_{1,m}. \tag{16}$$

Wegen (13)-(16) folgt dann

$$|\mathbf{u}_k| = 1 \tag{17}$$

und

$$\mathbf{u}_k^T\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \alpha_k. \tag{18}$$

Wegen (13)-(18) sowie (4), (5) und (12) folgt dann

$$\alpha_j = \mathbf{u}_j^T\mathbf{A}\mathbf{u}_j = \mathbf{u}_k^T\mathbf{A}\mathbf{u}_k = \alpha_k. \tag{19}$$

Sei

$$\mathbf{U} \coloneqq (\mathbf{u}_1, \ldots, \mathbf{u}_m). \tag{20}$$

Aus (20) und der Wahl von $\mathbf{U}$ folgt dann

$$\mathbf{U}\mathbf{U}^T = \mathbf{I}_m. \tag{21}$$

Da $\mathbf{U}$ die Hauptachsentransformation von $\mathbf{A}$ realisiert, gilt

$$\mathbf{U} \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mathbf{U}^T = \mathbf{A}. \tag{22}$$

Unter Beachtung von (22), (13), (16), (19) und (21) folgt dann

$$\begin{aligned}\mathbf{A} &= \mathbf{U} \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \mathbf{U}^T = \mathbf{U} \operatorname{diag}(\alpha_1, \ldots, \alpha_1) \mathbf{U}^T \\ &= \mathbf{U} (\alpha_1 \mathbf{I}_m) \mathbf{U}^T = \alpha_1 \mathbf{U}\mathbf{U}^T \\ &= \alpha_1 \mathbf{I}_m.\end{aligned}$$

Es gilt also *(i)*. □

Lemma M.26.4. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es gibt ein* $\alpha \in [0, +\infty)$ *mit* $\mathbf{A} = \sigma \mathbf{I}_m$.

(ii) *Für alle* $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ *gilt* $\mathbf{B}^T \mathbf{A} \mathbf{B} = \mathbf{A}$.

Beweis.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*****:** Dies folgt aus Lemma M.26.3.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*****:** Wegen *(ii)* und Lemma M.26.3 gibt es ein $\alpha \in \mathbb{R}$ mit $\mathbf{A} = \alpha \mathbf{I}_m$. Hieraus folgt bei Beachtung von

$$\alpha = \alpha \left[\mathbf{e}_1^{(m)}\right]^T \mathbf{e}_1^{(m)} = \left[\mathbf{e}_1^{(m)}\right]^T (\alpha \mathbf{I}_m) \mathbf{e}_1^{(m)} = \left[\mathbf{e}_1^{(m)}\right]^T \mathbf{A} \mathbf{e}_1^{(m)}$$

wegen $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$ dann $\alpha \in [0, +\infty)$. Es gilt also *(i)*. □

Es folgt nun eine wichtige Charakterisierung schwach sphärischer Maße von $\mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

Satz M.26.4. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* $\mu \in \mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* μ *schwach sphärisch.*

(ii) *Es gibt ein* $\sigma \in [0, +\infty)$ *mit* $\operatorname{cov}(\mu) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$.

Beweis. Wegen Bemerkung M.26.10 ist *(i)* äquivalent zu

(iii) Für alle $\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R})$ gilt $\mathbf{B} \cdot [\operatorname{cov}(\mu)] \cdot \mathbf{B}^T = \operatorname{cov}(\mu)$.

Wegen Lemma M.26.4 und der nach Teil *(b)* von Satz M.23.9.4 gelten die Beziehung $\operatorname{cov}(\mu) \in \mathbb{R}^{m\times m}_{\geq}$ sind aber *(ii)* und *(iii)* äquivalent. Hieraus sowie aus der Äquivalenz von *(i)* und *(iii)* folgt dann die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)*. □

Folgerung M.26.3. *Seien* $m \in \mathbb{N}$ *und* μ *ein sphärisches Maß aus* $\mathcal{M}^{1,2}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. *Dann gibt es ein* $\sigma \in [0, +\infty)$ *mit* $\operatorname{cov}(\mu) = \sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m$.

BEWEIS. Wegen Bemerkung M.26.8 ist μ schwach sphärisch. Hieraus folgt mittels Satz M.26.4 die Behauptung. □

Definition M.26.6. Seien $m \in \mathbb{N}$ und μ ein schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann heißt μ *degeneriert* bzw. *nicht degeneriert,* falls $\det(\operatorname{cov}(\mu)) = 0$ bzw. $\det(\operatorname{cov}(\mu)) \neq 0$ erfüllt ist.

Beispiel M.26.8. Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$. Dann gilt:

(a) Es ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ ein degeneriertes schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.

(b) Es sind folgende Aussagen äquivalent:

(i) Es ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ sphärisch.

(ii) Es ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}_{m\times 1}$.

BEWEIS.

Zu *(a)*: Aufgrund der Teile *(a)* bzw. *(d)* von Beispiel M.23.9.1 gilt

$$\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m) \tag{1}$$

bzw.

$$\operatorname{cov}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{O}_{m\times m}. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$\det(\operatorname{cov}(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m})) = \det \mathbf{O}_{m\times m} = 0. \tag{3}$$

Wegen (1) und (2) folgt aus Satz M.26.4, dass $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ ein schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ ist. Wegen (3) ist $\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}$ zu dem degeneriert.

(i) $\Rightarrow$ ***(ii)*:** Wegen *(i)* und (1) folgt mittels Satz M.26.3 dann $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{0}_{m\times 1}$, während sich aus Teil *(b)* von Satz M.23.9.1 andererseits $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\varepsilon_{\mathbf{a},\mathfrak{B}_m}) = \mathbf{a}$ ergibt. Somit ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ und es gilt also *(ii)*.

(ii) $\Rightarrow$ ***(i)*:** Dies folgt aus Beispiel M.26.2. □

Satz M.26.5. *Seien $m \in \mathbb{N}$ und $\mu \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$. Dann gilt:*

(a) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist μ ein nicht degeneriertes schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(ii) *Es gibt ein $\sigma \in [0, +\infty)$ mit $\operatorname{cov}\mu = \sigma^2 \mathbf{I}_m$.*

(b) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(iii) *Es ist μ ein degeneriertes schwach sphärisches Maß aus $\mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(iv) *Es gilt $\operatorname{cov}\mu = \mathbf{O}_{m\times m}$.*

(v) *Es gibt ein $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ mit $\mu = \varepsilon_{\mathbf{a},\mathbb{R}^m}$.*

BEWEIS. Sei μ schwach sphärisch. Wegen Satz M.26.4 gibt es dann ein

$$\sigma \in [0, +\infty) \tag{1}$$

mit

$$\operatorname{cov}\mu = \sigma^2 \mathbf{I}_m. \tag{2}$$

Aus (2) folgt dann

$$\det(\operatorname{cov}\mu) = \left(\sigma^2\right)^n = \sigma^{2n}. \tag{3}$$

Zu *(a)*: Unter Beachtung von (1) bis (3) folgt die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)* sogleich aus Satz M.26.4.

***(iii)* ⇒ *(iv)*:** Wegen *(iii)* gilt $\det(\operatorname{cov}(\mu)) = 0$. Hieraus folgt unter Beachtung der wegen *(iii)* nach Satz M.26.4 gültigen Formeln (1) bis (3) dann zunächst $\sigma = 0$ und damit wegen (2) also $\operatorname{cov}(\mu) = \mathbf{O}_{m\times m}$. Es gilt also *(iv)*.

***(iv)* ⇒ *(v)*:** Dies ergibt sich aus Folgerung M.23.9.2.

***(v)* ⇒ *(iii)*:** Dies folgt aus Teil *(a)* von Beispiel M.26.8. □

Satz M.26.6. *Seien $m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}_>^{m\times m}$. Es bezeichne $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parametern $\mathbf{a}$ und $\mathbf{\Sigma}$. Dann gilt:*

(a) *Es ist $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}} \in \mathcal{M}_+^{1,2}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es ist $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ schwach sphärisch.*

(ii) *Es gibt ein $\sigma \in (0, +\infty)$ mit $\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m = \mathbf{\Sigma}$.*

(c) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(iii) *Es ist $\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$ sphärisch.*

(iv) *Es ist $\mathbf{a} = \mathbf{0}_{m\times 1}$ und es gibt ein $\sigma \in (0, +\infty)$ mit $\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m = \mathbf{\Sigma}$.*

Beweis.

Zu *(a)*: Dies folgt aus Teil *(b)* von Satz M.24.4.4.

Zu *(b)*: Wegen Teil *(b)* von Satz M.24.4.4 gelten

$$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) = \mathbf{a} \tag{1}$$

und

$$\operatorname{cov}(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) = \mathbf{\Sigma}. \tag{2}$$

Wegen *(a)* und (2) ist die Äquivalenz von *(i)* und *(ii)* dann eine unmittelbare Konsequenz aus Satz M.26.4.

***(iii)* ⇒ *(iv)*:** Wegen *(a)* und *(iii)* liefert Satz M.26.3 dann $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}) = \mathbf{0}_{m\times 1}$. Hieraus folgt wegen (1) dann $\mathbf{a} = \mathbf{0}_{m\times 1}$. Wegen *(iii)* und *(a)* gilt nach Bemerkung M.26.6 dann *(i)*. Hieraus folgt wegen *(b)* dann die Existenz eines $\sigma \in (0, +\infty)$ mit $\sigma^2 \cdot \mathbf{I}_m = \mathbf{\Sigma}$. Es gilt also *(iv)*.

***(iv)* ⇒ *(iii)*:** Sei

$$\mathbf{B} \in \mathcal{O}(m; \mathbb{R}). \tag{3}$$

Wegen (3) gilt dann

$$\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \mathbf{I}_m. \tag{4}$$

Aus (4) folgt

$$\det \mathbf{B} \neq 0. \tag{5}$$

Wegen (5) ergibt sich mittels Satz M.24.4.6 dann, dass $T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}$ eine $\mathfrak{B}_m$-$\mathfrak{B}_m$-messbare Abbildung ist sowie $\mathbf{B0}_{m\times 1} \in \mathbb{R}^m$, $\mathbf{B}\left(\sigma^2\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathbf{B}^T \in \mathbb{R}^{m\times m}_{>}$ und

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\sigma^2\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{B0}_{m\times 1},\mathbf{B}(\sigma^2\cdot\mathbf{I}_m)\cdot\mathbf{B}^T}. \tag{6}$$

Wegen (4) gilt

$$\mathbf{B}\left(\sigma^2\mathbf{I}_m\right)\cdot\mathbf{B}^T = \sigma^2\mathbf{B}\mathbf{B}^T = \sigma^2\cdot\mathbf{I}_m. \tag{7}$$

Aus (6) und (7) folgt dann

$$T_{\mathbf{B},\mathbf{0}_{m\times 1}}\left(\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\sigma^2\mathbf{I}_m}\right) = \mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\sigma^2\cdot\mathbf{I}_m}. \tag{8}$$

Wegen (3) und (8) ist dann $\mathcal{N}_{\mathbf{0}_{m\times 1},\sigma^2\cdot\mathbf{I}_m}$ sphärisch. Es gilt also *(iii)*. □

M.27. Konvergenzkonzepte für Borel-messbare reellwertige Funktionen

Wir gehen in diesem Abschnitt von einem nichttrivialen $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ aus. Unser Ziel besteht im Studium verschiedener Konvergenzkonzepte für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. All diesen Konvergenzkonzepten gemeinsam ist die Tatsache, dass sie in besonderer Weise die durch das Maß μ vorgenommene Wichtung der Mengen aus $\mathfrak{A}$ in Betracht ziehen. Hierbei wenden wir uns zunächst diesbezüglichen naheliegenden Verallgemeinerungen der punktweisen Konvergenz bzw. gleichmäßigen Konvergenz zu. Dies wird auf die Begriffe der μ-fast überall Konvergenz bzw. μ-fast überall gleichmäßigen Konvergenz führen. Hieran anschließend studieren wir das Konzept der μ-fast gleichmäßigen Konvergenz, welches uns später wertvolle Dienste beim Aufdecken wesentlicher Wechselbeziehungen zwischen einzelnen Konvergenzbegriffen leisten wird. Besondere Aufmerksamkeit schenken wir den im anschließenden Unterabschnitt dieses Abschnitts behandelten Konzepten der μ-stochastischen Konvergenz und stark μ-stochastischen Konvergenz. Die in diesem Abschnitt eingeführten Konvergenzkonzepte gehören nunmehr zum unverzichtbaren Rüstzeug von Wahrscheinlichkeitsmaßen und Funktionalanalysis. Exemplarisch sei hierbei nur auf die Thematik der Gesetze der großen Zahlen verwiesen.

M.27.1. Die μ-fast überall Konvergenz

Wir geben in diesem Unterabschnitt eine erste Einführung in ein Konvergenzkonzept, welches in Maßtheorie und Stochastik gleichermaßen von Bedeutung ist.

Definition M.27.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μ-fast überall auf Ω konvergent* gegen f, falls ein $B \in \mathcal{N}_\mu$ derart existiert, dass die Folge $\left(1_{\Omega\setminus B} \cdot f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen $1_{\Omega\setminus B} \cdot f$ konvergiert.

Bemerkung M.27.1.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch μ-fast überall auf Ω gegen f. ♣

Satz M.27.1.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Weiter sei $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen g.*

(ii) *Es ist $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.*

Satz M.27.1.2. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Es seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $\left(\widetilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $\left(f_n - \widetilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ ist. Weiter sei f eine Funktion aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Dann konvergiert auch $\left(\widetilde{f}_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f.*

Wir streben nun eine gewisse Charakterisierung der μ-fast überall Konvergenz in Termen der Konvergenzmenge einer Folge an. Hierzu ist eine kleine Vorbereitung nötig.

Lemma M.27.1.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und es bezeichne dann A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die diese Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert. Dann gilt:*

(a) *Es ist* $A \in \mathfrak{A}$.

(b) *Sei* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$f(\omega) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus A, \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega), & \text{falls } \omega \in A. \end{cases}$$

Lemma M.27.1.2. *Seien* $(\Omega, \mathfrak{A})$ *ein nichttrivialer messbarer Raum,* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *und* $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. *Es sei*

$$B \coloneqq \left\{ \omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = g(\omega) \right\}.$$

Dann gilt $B \in \mathfrak{A}$.

Beweis. Es bezeichne A die Menge aller $\omega \in \Omega$, für die diese Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert und es sei $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß

$$f(\omega) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \in \Omega \setminus A, \\ \lim\limits_{n\to\infty} f_n(\omega), & \text{falls } \omega \in A. \end{cases}$$

Wegen Teil *(a)* bzw. Teil *(b)* von Lemma M.27.1.1 gilt dann

$$A \in \mathfrak{A} \tag{1}$$

bzw.

$$f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen (2) und $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ gilt nach Folgerung M.18.1 dann

$$\{f = g\} \in \mathfrak{A}. \tag{3}$$

Aus der Definition von B folgt sogleich

$$B = A \cap \{f = g\}. \tag{4}$$

Wegen (1), (3) und (4) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann $B \in \mathfrak{A}$. □

Satz M.27.1.3. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum. Weiter sei* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *eine Folge aus* $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. *Es bezeichne* A *die Menge aller* $\omega \in \Omega$, *für welche die Folge* $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert und es sei* $f\colon \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ *definiert gemäß*

$$f(\omega) \coloneqq \begin{cases} 0, & \text{falls } \omega \in \Omega\setminus A, \\ \lim_{n\to\infty} f_n(\omega), & \text{falls } \omega \in \Omega. \end{cases}$$

Dann gilt:

(a) *Es ist* $A \in \mathfrak{A}$, $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *und die Folge* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *konvergiert punktweise auf* Ω *gegen* $1_A f$.

(b) *Es sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist* $\Omega\setminus A \in \mathcal{N}_\mu$.

(ii) *Es konvergiert* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ*-fast überall auf* Ω *gegen* f.

(iii) *Es gibt ein* $\widetilde{f} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *derart, dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ*-fast überall auf* Ω *gegen* $\widetilde{f}$ *konvergiert.*

(c) *Sei* (i) *erfüllt und* $\widetilde{f} \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *so gewählt, dass* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ*-fast überall auf* Ω *gegen* $\widetilde{f}$ *konvergiert. Dann gilt:*

(c1) *Es ist* $f - \widetilde{f} \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

(c2) *Sei* $C \coloneqq \left\{\omega \in \Omega \,\middle|\, \lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = \widetilde{f}(\omega)\right\}$. *Dann gilt*

$$\Omega\backslash C \in \mathcal{N}_\mu.$$

Beweis.

Zu *(a)*: Aus Teil *(a)* bzw. *(b)* von Lemma M.27.1.1 folgt $A \in \mathfrak{A}$ bzw. $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Aus den Konstruktionen von A und f folgt so gleich $f = 1_A f$ sowie dass die Folge $(1_A f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen f konvergiert. Folglich konvergiert $(1_A f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ punktweise auf Ω gegen $1_A f$.

***(i)*⇒*(ii)*:** Aus *(a)*, *(i)*, der Identität $A = \Omega\backslash(\Omega\backslash A)$ und Definition M.27.1.1 folgt sogleich *(ii)*.

***(ii)*⇒*(iii)*:** Dies gilt trivialerweise.

***(iii)*⇒*(i)*:** Wegen *(iii)* gibt es ein

$$B \in \mathcal{N}_\mu \tag{1}$$

derart, dass für alle

$$\omega \in \Omega \tag{2}$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} 1_{\Omega\backslash B}(\omega) f_n(\omega) = 1_{\Omega\backslash B}(\omega) f(\omega) \tag{3}$$

besteht. Aus (2), (3) und der Definition von A folgt dann $\Omega\backslash B \subseteq A$. Hieraus folgt dann

$$\Omega\backslash A \subseteq \Omega\backslash(\Omega\backslash B) = B. \tag{4}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist und da wegen *(a)* nun $A \in \mathfrak{A}$ erfüllt ist, gilt

$$\Omega\backslash A \in \mathfrak{A}. \tag{5}$$

Wegen (1), (4) und (5) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann $\Omega\backslash A \in \mathcal{N}_\mu$ und damit *(i)*.

Zu *(c1)*: Wegen *(i)* und *(b)* konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann μ-fast überall auf Ω gegen f. Hieraus und aus der Wahl von $\widetilde{f}$ folgt mittels Satz M.27.1.1 dann $f - \widetilde{f} \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.

Zu *(c2)*: Es sei

$$B \in \mathcal{N}_\mu \tag{6}$$

so gewählt, dass für alle

$$\omega \in \Omega \tag{7}$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} 1_{\Omega\backslash B}(\omega) f_n(\omega) = 1_{\Omega\backslash B}(\omega) f(\omega) \tag{8}$$

besteht. Aus (7), (8) und der Definition von C folgt dann $\Omega\backslash B \subseteq C$. Hieraus folgt

$$\Omega\backslash C \subseteq \Omega\backslash\left(\Omega\backslash B\right) = B. \tag{9}$$

Wegen Lemma M.27.1.2 gilt $C \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, dann

$$\Omega\backslash C \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Wegen (6), (9) und (10) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.5.1 dann $\Omega\backslash C \in \mathcal{N}_\mu$. □

Wir studieren nun die Arithmetik der μ-fast überall Konvergenz.

Satz M.27.1.4. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie f bzw. g Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f bzw. g konvergiert. Dann gilt:*

(a) *Seien $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Dann konvergiert $(\alpha f_n + \beta g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen $\alpha f + \beta g$.*

(b) *Es konvergiert $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen $f \cdot g$.*

(c) *Für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle $\omega \in \Omega$ gelte $g_n(\omega) \neq 0$ sowie $g(\omega) \neq 0$. Dann konvergiert $(f_n/g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f/g.*

(d) *Es konvergiert $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen $|f|$.*

Satz M.27.1.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f.*

(ii) *Es konvergieren $(f_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f^+ bzw. f^-.*

M.27.2. Die μ-fast überall gleichmäßige Konvergenz

Im Mittelpunkt dieses Unterabschnitts steht eine durch ein Maß μ in natürlicher Art und Weise induzierte Abschwächung des Begriffes der gleichmäßigen Konvergenz.

Definition M.27.2.1. Sei Ω eine nichtleere Menge, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ und $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *gleichmäßig gegen f konvergent*, falls

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{\omega\in\Omega}|f_n(\omega) - f(\omega)|\right) = 0$$

erfüllt ist.

Bemerkung M.27.2.1. Sei Ω eine nichtleere Menge. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ und $f \in \mathrm{Abb}(\Omega, \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen f konvergiert. Für jedes $\omega \in \Omega$ konvergiert dann die Folge $(f_n(\omega))_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $f(\omega)$. ♣

Es folgt nun die zentrale Begriffsbildung dieses Unterabschnitts:

Definition M.27.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μ-fast überall gleichmäßig konvergent* gegen f, falls es ein $A \in \mathcal{N}_\mu$ gibt, so dass die Folge $\left(1_{\Omega\backslash A} f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $1_{\Omega\backslash A} f$ konvergiert.

Bemerkung M.27.2.2. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ so gewählt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f. ♣

Beweis. Dies folgt aus Definition M.27.2.2, Bemerkung M.27.2.1 und Definition M.27.1.1. □

Wir erkennen nun, dass die μ-fast-überall gleichmäßige Konvergenz durch die in Lemma M.21.1 eingeführte Abbildung $\mathcal{N}_{\infty,\mu}$ charakterisiert werden kann:

Satz M.27.2.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $\lim_{n\to\infty} \mathcal{N}_{\infty,\mu}(f_n - f) = 0$.*

(ii) *Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gleichmäßig gegen f.*

Da wegen Satz M.21.1 durch die Setzung $\mathcal{N}_{\infty,\mu;\mathbb{R}} \coloneqq \mathcal{N}_{\infty,\mu} \restriction \mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ eine Seminorm auf $\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ definiert wird, besagt Satz M.27.2.1 dann, dass die Konvergenz im seminormierten Raum $(\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}), \mathcal{N}_{\infty,\mu;\mathbb{R}})$ gerade die μ-fast überall gleichmäßige Konvergenz ist.

M.27.3. Die μ-fast gleichmäßige Konvergenz

Wir legen in diesem Unterabschnitt einen nichttrivalen Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ zugrunde und studieren eine Abschwächung der μ-fast überall gleichmäßigen Konvergenz, die sogenannte μ-fast gleichmäßige Konvergenz. Das Hauptresultat dieses Abschnitts wird dann der Satz von Egorov[1)] sein, welcher impliziert, dass im Falle der Endlichkeit von $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ Äquivalenz von μ-fast überall Konvergenz und μ-fast gleichmäßiger Konvergenz vorliegt. Dieser Satz von Egorov wird uns in unseren späteren Betrachtungen verschiedentlich hilfreiche Dienste leisten.

Definition M.27.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μ-fast gleichmäßig gegen f konvergent,* wenn zu jedem $\varepsilon \in (0, +\infty)$ und $A \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(A) \in [0, \varepsilon)$ derart existiert, dass $\left(1_{\Omega\setminus A} \cdot f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $1_{\Omega\setminus A} \cdot f$ konvergiert.

Bemerkung M.27.3.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart gewählt, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch μ-fast gleichmäßig gegen f. ♣

Beweis. Dies folgt aus Definition M.27.2.2 und Definition M.27.3.1. □

Satz M.27.3.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ mit folgender Eigenschaft: Zu jedem $\varepsilon \in (0, +\infty)$ gibt es ein $C \in \mathfrak{A}$ mit $\mu(C) \in [0, \varepsilon)$ derart, dass für alle $\omega \in \Omega$ die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus C}(\omega)\right] \cdot \left[f_n(\omega)\right] = \left[1_{\Omega\setminus C}(\omega)\right] \cdot \left[f(\omega)\right]$$

besteht. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f.

[1)] Dmitri Fyodorovich Egorov (∗22.12.1869; †10.09.1931) war ein russischer Mathematiker, der sich mit Analysis und Differentialgeometrie beschäftigte. Sein Satz von Egorov macht Aussagen über die gleichmäßige Konvergenz einer punktweise konvergierenden Folge messbarer Funktionen.

Beweis. Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Nach Voraussetzung gibt es dann ein

$$C_k \in \mathfrak{A}. \tag{2}$$

mit

$$\mu\left(C_k\right) \in \left[0, \frac{1}{k}\right) \tag{3}$$

derart, dass für alle

$$\omega \in \Omega \tag{4}$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus C}\left(\omega\right)\right] \cdot \left[f_n\left(\omega\right)\right] = \left[1_{\Omega\setminus C}\left(\omega\right)\right] \cdot \left[f\left(\omega\right)\right] \tag{5}$$

besteht. Sei

$$B \coloneqq \bigcap_{l=1}^{\infty} C_l. \tag{6}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt wegen (1), (2) und (6) mittels Teil *(d)* von Satz M.4.1 dann

$$B \in \mathfrak{A}. \tag{7}$$

Sei

$$l \in \mathbb{N}. \tag{8}$$

Aus (6) und (8) folgt

$$B \subseteq C_l. \tag{9}$$

Wegen (1), (2), (7) bis (9), der Isotonie von μ und (3) folgt dann

$$0 \leq \mu\left(B\right) \leq \mu\left(C_l\right) \leq \frac{1}{l}. \tag{10}$$

Wegen (8), (10) und $\lim_{l\to\infty} \frac{1}{l} = 0$ folgt dann

$$B \in \mathcal{N}_\mu. \tag{11}$$

Aus (6) folgt nun

$$\Omega \setminus B = \Omega \setminus \left[\bigcap_{l=1}^{\infty} C_l\right] = \bigcup_{l=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus C_l\right). \tag{12}$$

Sei

$$\omega \in \Omega \setminus B. \tag{13}$$

Wegen (12) und (13) gibt es dann ein

$$k \in \mathbb{N} \tag{14}$$

mit

$$\omega \in \Omega \setminus C_k. \tag{15}$$

Aus (13) und (15) folgt dann

$$1_{\Omega\setminus B}\left(\omega\right) = 1_{\Omega\setminus C_k}\left(\omega\right). \tag{16}$$

Aus (4), (5) und (16) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus B}\left(\omega\right)\right] \left[f_n\left(\omega\right)\right] = \lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus C_k}\left(\omega\right)\right] \left[f_n\left(\omega\right)\right] = 1_{\Omega\setminus C_k}\left(\omega\right) \cdot f\left(\omega\right) = 1_{\Omega\setminus B}\left(\omega\right) \cdot f\left(\omega\right). \tag{17}$$

Sei nun

$$\omega \in B. \tag{18}$$

Aus (17) folgt dann $1_{\Omega\setminus B}(\omega) = 0$. Damit folgt aber

$$\lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus B}(\omega)\right] \left[f_n(\omega)\right] = \lim_{n\to\infty} 0 = 0 = 1_{\Omega\setminus B}(\omega) \cdot f(\omega). \tag{19}$$

Wegen (11), (13), (17), (18) und (19) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann μ-fast überall auf Ω gegen f. □

Satz M.27.3.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f.*

Beweis. Aus Definition M.27.3.1 sowie der Wahl von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und f folgt sogleich, dass die Voraussetzung von Satz M.27.3.1 erfüllt sind. Damit liefert Satz M.27.3.1 dann die Behauptung. □

Das nachfolgende Resultat, welches auf D. F. Egorov zurückgeht, impliziert, dass im Falle eines nichttrivalen endlichen Maßraumes $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$auch die Umkehrung von Satz M.27.3.2 gültig ist.

Satz M.27.3.3 (von Egorov)**.** *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer* endlicher *Maßraum. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f.*

Beweis. Nach Voraussetzung gibt es ein

$$E_0 \in \mathcal{N}_\mu \tag{1}$$

derart, dass für alle

$$\omega \in \Omega \tag{2}$$

die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \left[1_{\Omega\setminus E_0}(\omega)\right] \left[f_n(\omega)\right] = 1_{\Omega\setminus E_0}(\omega) \cdot f(\omega) \tag{3}$$

besteht. Wegen $\mathcal{N}_\mu \subseteq \mathfrak{A}$ folgt aus (1) dann $E_0 \in \mathfrak{A}$. Hieraus folgt, da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, dann

$$\Omega \setminus E_0 \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Sei

$$(j,k) \in \mathbb{N} \times \mathbb{N}. \tag{5}$$

Weiter sei

$$G_{jk} \coloneqq (\Omega \setminus E_0) \cap \left[\bigcap_{s=j}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}\right]. \tag{6}$$

Aus (6) folgt dann

$$G_{jk} \subseteq \Omega \setminus E_0. \tag{7}$$

Sei

$$s \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,j-1}. \tag{8}$$

Wegen $\{f_s, f\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ liefert Satz M.18.7 dann $f_s - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.13 dann $|f_s - f| \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Hieraus folgt mittels Satz M.18.4 dann

$$\left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{9}$$

Wegen (8) und (9) liefert Teil *(d)* von Satz M.4.1 dann

$$\bigcap_{s=j}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\} \in \mathfrak{A}. \tag{10}$$

Wegen (6), (4) und (10) liefert Teil *(b)*von Satz M.4.1 dann

$$G_{jk} \in \mathfrak{A}. \tag{11}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (11) dann

$$\Omega \setminus G_{jk} \in \mathfrak{A}. \tag{12}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{13}$$

Aus (13), (5) und (7) folgt dann

$$\bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk} \subseteq \Omega \setminus E_0. \tag{14}$$

Wir wollen nun zeigen, dass in (14) tatsächlich Gleichheit gilt. Sei hierzu

$$\omega \in \Omega \setminus E_0. \tag{15}$$

Wegen (15) gilt dann

$$1_{\Omega \setminus E_0}(\omega) = 1. \tag{16}$$

Wegen (2), (3) und (16) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\omega) = f(\omega). \tag{17}$$

Wegen (17) gibt es dann ein

$$j_0 \in \mathbb{N} \tag{18}$$

derart, dass für alle $s \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,j_0-1}$ die Beziehung $|f_s(\omega) - f(\omega)| < \frac{1}{k}$ besteht. Somit ist also

$$\omega \in \bigcap_{s=j_0}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}. \tag{19}$$

Wegen (5), (6), (13) und (18) gilt

$$G_{j_0 k} = (\Omega \setminus E_0) \cap \left[\bigcap_{s=j_0}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}\right]. \tag{20}$$

Aus (15), (18), (19) und (20) folgt dann

$$\omega \in G_{j_0 k}. \tag{21}$$

Wegen (18) gilt $G_{j_0 k} \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk}$. Hieraus folgt in Verbindung mit (21) dann

$$\omega \in \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk}. \tag{22}$$

Aus (15) und (22) folgt dann

$$\Omega \setminus E_0 \subseteq \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk}. \tag{23}$$

Aus (14) und (23) ergibt sich nun

$$\Omega \setminus E_0 = \bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk}. \tag{24}$$

Aus (24) folgt dann

$$E_0 = \Omega \setminus [\Omega \setminus E_0] = \Omega \setminus \left[\bigcup_{j=1}^{\infty} G_{jk}\right] = \bigcap_{j=1}^{\infty} [\Omega \setminus G_{jk}]. \tag{25}$$

Sei

$$j \in \mathbb{N}. \tag{26}$$

Dann gilt

$$\bigcap_{s=j}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\} \subseteq \bigcap_{s=j+1}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}$$

und somit also

$$(\Omega \setminus E_0) \cap \left[\bigcap_{s=j}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}\right] \subseteq (\Omega \setminus E_0) \cap \left[\bigcap_{s=j+1}^{\infty} \left\{|f_s - f| < \frac{1}{k}\right\}\right]. \tag{27}$$

Aus (13), (26), (27), (4) und (5) folgt dann

$$G_{j,k} \subseteq G_{j+1,k}. \tag{28}$$

Aus (28) folgt nun

$$\Omega \setminus G_{j,k} \supseteq \Omega \setminus G_{j+1,k}. \tag{29}$$

Aufgrund der Oberhalbstetigkeit des endlichen Maßes μ ergibt sich bei Beachtung von (5), (12), (26), (29), (25) und (1) dann

$$\lim_{j \to \infty} \mu(\Omega \setminus G_{jk}) = \mu\left(\bigcap_{j=1}^{\infty} (\Omega \setminus G_{jk})\right) = \mu(E_0) = 0. \tag{30}$$

Sei

$$\varepsilon \in (0, +\infty). \tag{31}$$

Wegen (30) und (31) gibt es dann ein

$$l_0(k, \varepsilon) \in \mathbb{N} \tag{32}$$

mit

$$\mu\left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right) < \frac{\varepsilon}{2^k}. \tag{33}$$

Sei

$$A_\varepsilon := \bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right). \tag{34}$$

Da $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra in Ω ist, folgt aus (13), (32), (34), (5) und (12) dann

$$A_\varepsilon \in \mathfrak{A}. \tag{35}$$

Unter Verwendung der σ-Subadditivität von μ sowie von (34), (13) und (33) folgt dann

$$\mu\left(A_\varepsilon\right) = \mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right)\right) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mu\left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right) < \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^k} = \varepsilon. \tag{36}$$

Wir zeigen nun, dass die Folge $\left(1_{\Omega\setminus A_\varepsilon} \cdot f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $1_{\Omega\setminus A_\varepsilon} \cdot f$ konvergiert. Aus (34) folgt zunächst

$$\Omega \setminus A_\varepsilon = \Omega \setminus \left[\bigcup_{k=1}^{\infty} \left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right)\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} \left[\Omega \setminus \left(\Omega \setminus G_{l_0(k,\varepsilon),k}\right)\right] = \bigcap_{k=1}^{\infty} G_{l_0(k,\varepsilon),k}. \tag{37}$$

Sei

$$\eta \in (0, +\infty). \tag{38}$$

Wegen $\lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$ gibt es dann ein

$$k_0 \in \mathbb{N} \tag{39}$$

mit

$$\frac{1}{k_0} < \frac{\eta}{2}. \tag{40}$$

Sei

$$\omega \in \Omega \setminus A_\varepsilon. \tag{41}$$

Aus (39), (41) und (37) folgt dann

$$\omega \in G_{l_0(k_0,\varepsilon),k_0}. \tag{42}$$

Sei

$$s \in \mathbb{N} \setminus \mathbb{N}_{1,l_0(k_0,\varepsilon)-1}. \tag{43}$$

Unter Beachtung von (42), (43), (5) und (6) folgt dann $\left|f_s\left(\omega\right) - f\left(\omega\right)\right| < \frac{1}{k_0}$ und somit wegen (40) dann

$$\left|f_s\left(\omega\right) - f\left(\omega\right)\right| < \frac{\eta}{2}. \tag{44}$$

Wegen (41) und (44) gilt dann

$$\sup_{\omega\in\Omega} \left|\left[1_{\Omega\setminus A_\varepsilon}\left(\omega\right)\right]\left[f_s\left(\omega\right)\right] - \left[1_{\Omega\setminus A_\varepsilon}\left(\omega\right)\right]\left[f\left(\omega\right)\right]\right| \leq \frac{\eta}{2} < \eta. \tag{45}$$

Wegen (43) und (45) konvergiert dann die Folge $\left(1_{\Omega\setminus A_\varepsilon} \cdot f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ gleichmäßig gegen $1_{\Omega\setminus A_\varepsilon} \cdot f$. Hieraus folgt bei Beachtung von (31) und (36) dann, dass die Folge $\left(f_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f konvergiert. □

M.27.4. Die μ-stochastische- und stark μ-stochastische Konvergenz

Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ein nichttrivialer Maßraum. Wir studieren nun in diesem Abschnitt zwei Modifikationen eines auf Friedrich Riesz zurückgehendes Konvergenzkonzept für Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$, welches in Analysis und Stochastik gleichermaßen von Bedeutung ist. Vorausschauend sei erwähnt, dass die für die Wahrscheinlichkeitstheorie bedeutsame Thematik des „Schwachen Gesetzes der großen Zahlen" auf eben jenen Konvergenzkonzept basiert.

Wir prägen nun die beiden zentralen Begriffsbildungen dieses Abschnitts:

Definition M.27.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$.

(a) Sei $\mathfrak{A}_{\mu,e} := \{C \in \mathfrak{A} \mid \mu(C) \in [0, +\infty)\}$. Falls für jedes $\alpha \in [0, +\infty)$ und jedes $A \in \mathfrak{A}_{\mu,e}$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\} \cap A) = 0$$

besteht, heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *μ-stochastisch konvergent* gegen f und f ein *μ-stochastischer Grenzwert* von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

(b) Falls für jedes $\alpha \in (0, +\infty)$ die Beziehung

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) = 0$$

besteht, heißt $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *stark μ-stochastisch konvergent* gegen f und f ein *stark μ-stochastischer Grenzwert* von $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Beispiel M.27.4.1. Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n := f$. Dann gilt:

(a) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert μ-stochastisch gegen f.

(b) Die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert stark μ-stochastisch gegen f.

Lemma M.27.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Weiter seien $\alpha \in (0, +\infty)$ und $C \in \mathfrak{A}$ so gewählt, dass die Beziehung*

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\} \cap C) = 0$$

besteht. Sei $A \in \mathfrak{A} \cap \mathfrak{P}(C)$. Dann gilt auch

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\} \cap A) = 0.$$

Beweisidee. Verwende die Isotonie von μ. ◊

Satz M.27.4.1. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch μ-stochastisch gegen f.*

(b) *Sei μ endlich und es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-stochastisch gegen f. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ auch stark μ-stochastisch gegen f.*

Beweisidee.

Zu *(a)*: Verwende Lemma M.27.4.1.

Zu *(b)*: Dies folgt sogleich aus Definition M.27.4.1. ◊

Wir untersuchen nun die Menge aller stark μ-stochastischen Grenzwerte einer Folge.

Lemma M.27.4.2. *Sei* $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ *ein nichttrivialer Maßraum und* $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ *derart gewählt, dass* $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ *erfüllt ist. Sei* $\alpha \in (0, +\infty)$*. Dann gilt*

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) = \mu(\{|g| \geq \alpha\}).$$

Beweis. Es gelten

$$\{|f| \geq \alpha\} = [\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}] \cup [\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}] \tag{1}$$

und

$$\{|g| \geq \alpha\} = [\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}] \cup [\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}]. \tag{2}$$

Wegen Folgerung M.18.1 bzw. Bemerkung M.18.9 gelten

$$\{f = g\}, \{f \neq g\} \in \mathfrak{A} \tag{3}$$

bzw.

$$\{|f| \geq \alpha\}, \{|g| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}. \tag{4}$$

Wegen (3) und (4) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}, \{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \in \mathfrak{A} \tag{5}$$

und

$$\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}, \{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \in \mathfrak{A}. \tag{6}$$

Wegen $\{f = g\} \cap \{f \neq g\} = \varnothing$ gilt

$$[\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}] \cap [\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}] = \varnothing \tag{7}$$

sowie

$$[\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}] \cap [\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}] = \varnothing. \tag{8}$$

Wegen (4), (1), (5), (7) und der Additivität von μ bzw. (4), (2), (6), (8) und der Additivität von μ gilt

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) = \mu(\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}) + \mu(\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}) \tag{9}$$

bzw.

$$\mu(\{|g| \geq \alpha\}) = \mu(\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}) + \mu(\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\}). \tag{10}$$

Aus der Wahl der beteiligten Mengen folgt

$$\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\} = \{|g| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}. \tag{11}$$

Wegen $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$ gilt

$$\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{12}$$

Weiterhin gelten

$$\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \subseteq \{f \neq g\} \tag{13}$$

und

$$\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \subseteq \{f \neq g\}. \tag{14}$$

Wegen (5), (13) und (12) bzw. (6), (14) und (12) folgt mittels Teil *(b)* von Satz M.4.1 dann

$$\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu \tag{15}$$

bzw.

$$\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{16}$$

Unter Verwendung von (9) und (15) bzw. (10) und (16) folgt dann

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) = \mu(\{|f| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}) \tag{17}$$

bzw.

$$\mu(\{|g| \geq \alpha\}) = \mu(\{|g| \geq \alpha\} \cap \{f = g\}). \tag{18}$$

Aus (17), (11) und (18) folgt dann

$$\mu(\{|f| \geq \alpha\}) = \mu(\{|g| \geq \alpha\}). \qquad \square$$

Lemma M.27.4.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Weiterhin seien die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie die Funktionen $f, g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart beschaffen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f und g konvergiert. Außerdem sei $\alpha \in (0, +\infty)$. Dann gilt $\{|f - g| \geq \alpha\} \in \mathcal{N}_\mu$.*

Beweis. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Weiter sei

$$\omega \in \{|f - g| \geq \alpha\}. \tag{2}$$

Wäre dann $|f_n(\omega) - f(\omega)| < \frac{\alpha}{2}$ und $|f_n(\omega) - g(\omega)| < \frac{\alpha}{2}$, so ergäbe sich

$$|f(\omega) - g(\omega)| \leq |f(\omega) - f_n(\omega)| + |f_n(\omega) - g(\omega)| < \frac{\alpha}{2} + \frac{\alpha}{2} = \alpha,$$

was im Widerspruch zu (2) stünde. Somit gilt also mindestens eine der Ungleichungen

$$|f_n(\omega) - f(\omega)| \geq \frac{\alpha}{2} \qquad \text{oder} \qquad |f_n(\omega) - g(\omega)| \geq \frac{\alpha}{2},$$

das heißt, es ist

$$\omega \in \left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{3}$$

Aus (2) und (3) folgt dann

$$\{|f - g| \geq \alpha\} \subseteq \left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}. \tag{4}$$

Aus (4) sowie der Isotonie und Subadditivität von μ folgt dann

$$\begin{aligned} 0 \leq \mu(\{|f - g| \geq \alpha\}) &\leq \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\} \cup \left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) \\ &\leq \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right). \end{aligned} \tag{5}$$

Nach den Voraussetzungen gelten

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) = 0$$

und

$$\lim_{n\to\infty} \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) = 0.$$

Hieraus folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \left[\mu\left(\left\{|f_n - f| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right) + \mu\left(\left\{|f_n - g| \geq \frac{\alpha}{2}\right\}\right)\right] = 0. \tag{6}$$

Aus (5) und (6) folgt dann $\{|f-g| \geq \alpha\} \in \mathcal{N}_\mu$. □

Satz M.27.4.2. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und es seien die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart beschaffen, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f konvergiert. Weiterhin sei $g \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) *Es ist $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$.*

(ii) *Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen g.*

Beweis.

(i) ⇒ ***(ii)*****:** Sei

$$\alpha \in (0, +\infty). \tag{1}$$

Wegen (1) gilt nach Konstruktion dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(|f_n - f| \geq \alpha) = 0. \tag{2}$$

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Dann gilt

$$(f_n - g) - (f_n - f) = f - g. \tag{4}$$

Aus (4) und *(i)* folgt dann

$$(f_n - g) - (f_n - f) \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R}). \tag{5}$$

Wegen (1) und (5) folgt mittels Lemma M.27.4.2 dann

$$\mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) = \mu(\{|f_n - g| \geq \alpha\}). \tag{6}$$

Aus (3), (3) und (6) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - g| \geq \alpha\}) = 0. \tag{7}$$

Wegen (1) und (7) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann stark μ-stochastisch gegen g. Es gilt also *(ii)*.

(ii) ⇒ ***(i)*****:** Es gilt

$$\{f \neq g\} = \{|f - g| > 0\} = \bigcup_{k=1}^{\infty} \left\{|f - g| \geq \frac{1}{k}\right\}. \tag{8}$$

Sei

$$k \in \mathbb{N}. \tag{9}$$

Wegen (9) gilt dann

$$\frac{1}{k} \in (0, +\infty). \tag{10}$$

Wegen *(ii)*, (10) und der Wahl von f gilt nach Lemma M.27.4.3 dann

$$\left\{|f - g| \geq \frac{1}{k}\right\} \in \mathcal{N}_\mu. \tag{11}$$

Wegen (8), (9) und (11) liefert Teil *(d)* von Satz M.5.1 dann $\{f \neq g\} \in \mathcal{N}_\mu$. Somit ist $f - g \in \mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{R})$. Es gilt also *(i)*. □

Wir studieren nun die Arithmetik der stark μ-stochastischen Konvergenz:

Satz M.27.4.3. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ Folgen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ sowie f bzw. g Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bzw. $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f bzw. g konvergiert. Sind dann $a, b \in \mathbb{R}$, so konvergiert $(af_n + bg_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen $af + bg$.*

Satz M.27.4.4. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum, $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$. Dann gilt:*

(a) *Es konvergiere $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f. Dann konvergiert $(|f_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen $|f|$.*

(b) *Folgende Aussagen sind äquivalent:*

(i) *Es konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f.*

(ii) *Es konvergiert $(f_n^+)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f^+ sowie $(f_n^-)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f^-.*

Wir untersuchen nun den Zusammenhang zwischen der μ-fast gleichmäßiger- und stark μ-stochastischer Konvergenz:

Satz M.27.4.5. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum. Ferner seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass die Folge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f.*

Beweis. Sei

$$\varepsilon \in (0, +\infty). \tag{1}$$

Da $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f konvergiert, gibt es wegen (1) dann ein

$$A \in \mathfrak{A} \tag{2}$$

mit

$$\mu(A) \in [0, \varepsilon) \tag{3}$$

mit

$$\lim_{n\to\infty} \left[\sup_{\omega\in\Omega} \left|1_{\Omega\setminus A}(\omega) f_n(\omega) - 1_{\Omega\setminus A}(\omega) f(\omega)\right|\right] = 0. \tag{4}$$

Sei

$$\alpha \in (0, +\infty)\,. \tag{5}$$

Wegen (4) gibt es dann ein

$$n_0 \in \mathbb{N} \tag{6}$$

derart, dass für alle

$$n \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,n_0-1} \tag{7}$$

und alle

$$\omega \in \Omega \tag{8}$$

die Beziehung

$$\left|1_{\Omega\backslash A}(\omega)\, f_n(\omega) - 1_{\Omega\backslash A}(\omega)\, f(\omega)\right| < \alpha \tag{9}$$

besteht. Sei

$$n \in \mathbb{N}\backslash\mathbb{N}_{1,n_0-1}. \tag{10}$$

Aus (7)-(10) folgt dann

$$\{|f_n - f| \geq \alpha\} \subseteq A. \tag{11}$$

Aus (11), der Isotonie von μ und (3) folgt dann

$$0 \leq \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) \leq \mu(A) < \varepsilon. \tag{12}$$

Wegen (1), (6), (10) und (12) gilt dann

$$\lim_{n\to\infty} \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) = 0. \tag{13}$$

Wegen (5) und (13) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann stark μ-stochastisch gegen f. □

Folgerung M.27.4.1. *Sei $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ein nichttrivialer* endlicher *Maßraum. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ derart, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast überall auf Ω gegen f konvergiert. Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f.*

Beweis. Da der Maßraum $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ endlich ist, liefert der Satz von Egorov (vergleiche hierzu Satz M.27.3.3), dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ μ-fast gleichmäßig gegen f konvergiert. Hieraus folgt mittels Satz M.27.4.5, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f konvergiert. □

Die Anwendung der Ungleichung von Čebyšëv/Markov aus Satz M.22.3.1 führt uns auf folgendes Resultat.

Satz M.27.4.6. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $\varphi\colon [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ eine monoton wachsende Funktion, welche für $\alpha \in (0, +\infty)$ der Bedingung $\varphi(\alpha) \in (0, +\infty)$ genügt. Weiterhin seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega (\varphi \circ |f_n - f|)\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f.

BEWEIS. Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{1}$$

Wegen (1) sowie der Wahl von f_n und f gilt dann

$$\{f_n, f\} \subseteq \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) liefert Satz M.18.7dann

$$f_n - f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R}). \tag{3}$$

Sei

$$\alpha \in (0, +\infty). \tag{4}$$

Wegen (4) und der Wahl von φ folgt dann

$$\varphi(\alpha) \in (0, +\infty). \tag{5}$$

Wegen (3) bis (5) folgen mittels Satz M.22.3.1 dann $\{|f_n - f| \geq \alpha\} \in \mathfrak{A}$, $\varphi \circ |f_n - f| \in \mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$ sowie

$$0 \leq \mu(\{|f_n - f| \geq \alpha\}) \leq \frac{1}{\varphi(\alpha)} \cdot \int\limits_{\Omega} (\varphi \circ |f_n - f|)\, \mathrm{d}\mu. \tag{6}$$

Wegen (5) folgt aus den Voraussetzungen sogleich

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\varphi(\alpha)} \cdot \int\limits_{\Omega} (\varphi \circ |f_n - f|)\, \mathrm{d}\mu = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \left[\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} (\varphi \circ |f_n - f|)\, \mathrm{d}\mu\right] = \frac{1}{\varphi(\alpha)} \cdot 0 = 0. \tag{7}$$

Unter Beachtung von (1), (6) und (7) folgt dann

$$\lim_{n\to\infty} (\{|f_n - f| \geq \alpha\}) = 0. \tag{8}$$

Wegen (4) und (8) konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dann stark μ-stochastisch gegen f. □

Es folgt nun eine erste Anwendung von Satz M.27.4.6.

Satz M.27.4.7. *Seien $(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$ ein nichttrivialer Maßraum und $r \in (0, +\infty)$. Weiter seien $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ und $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$ mit*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{\Omega} |f_n - f|^r\, \mathrm{d}\mu = 0.$$

Dann konvergiert $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f.

BEWEIS. Sei $\varphi_r \colon [0, +\infty) \longrightarrow [0, +\infty)$ definiert gemäß

$$x \longmapsto x^r. \tag{1}$$

Wegen (1) folgt aus Bemerkung M.18.6dann:

(I) Es ist φ_r monoton wachsend.

Wegen (1) gilt weiterhin:

(II) Für $\alpha \in (0, +\infty)$ gilt $\varphi_r(\alpha) \in (0, +\infty)$.

Sei

$$n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Wegen (1) und (2) gilt dann

$$\varphi_r \circ |f_n - f| = |f_n - f|^r. \tag{3}$$

Wegen (2) und (3) folgt aus den Voraussetzungen dann

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega \varphi_r \circ |f_n - f| \, \mathrm{d}\mu = 0. \tag{4}$$

Wegen *(I)*, *(II)* und (4) folgt mittels Satz M.27.4.6 dann, dass $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ stark μ-stochastisch gegen f konvergiert. □

Symbolverzeichnis

$T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}$	die affine Abbildung $T_{\mathbf{A},\mathbf{a}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}^l$ definiert gemäß $\mathbf{x} \longmapsto \mathbf{A}\mathbf{x}+\mathbf{a}$ mit $l, m \in \mathbb{N}$, $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{l\times m}$ und $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^l$
$\pi_{i_1,\ldots,i_m}$	ist eine Folge von nichttrivialen messbaren Räumen $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gegeben, so ist die Abbildung $\pi_{i_1,\ldots,i_m}\colon \times_{j=1}^n \Omega_j \longrightarrow \times_{k=1}^m \Omega_k$ definiert gemäß $(\omega_1,\ldots,\omega_n) \longmapsto (\omega_{i_1},\ldots,\omega_{i_m})$
$\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}$	die Abbildung $\widetilde{P}_{j,k;\mathbb{R}^m}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto (x_j)^k$
$P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}$	die Abbildung $P_{(k_1,\ldots,k_m);\mathbb{R}}\colon \mathbb{R}^m \longrightarrow \mathbb{R}$ definiert gemäß $(x_1,\ldots,x_m)^T \longmapsto \prod_{j=1}^m x_j^{k_j}$
$\pi_{m;k}, p_k$	die k-te Projektionsabbildung
$f \restriction A$	die Einschränkung der Funktion f auf den Definitionsbereich A
$\mathscr{C}((\Omega,\varrho),(\Omega',\varrho'))$	die Menge aller ϱ-ϱ'-stetigen Abbildungen zwischen den metrischen Räumen (Ω,ϱ) und (Ω',ϱ')
$\mathrm{Abb}(\Omega,\Omega')$	die Menge aller Abbildungen von Ω in Ω'
$\nu \ll \mu$	ν absolutstetig bezüglich μ
$\nu \sim \mu$	ν und μ sind äquivalent
$T(\mu), \mu_T$	das Bildmaß von μ bei der Abbildung T
$\mathfrak{B}_m$	die Borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes $(\mathbb{R}^m, \lvert\cdot\rvert)$
$\mathfrak{B}$	die Borelsche σ-Algebra des metrischen Raumes (Ω,ϱ)
μ_f	das Maß $\mu_f\colon \mathfrak{A} \longrightarrow [0,+\infty]$ definiert gemäß $\mu_f(A) := \int_\Omega 1_A f \mathrm{d}\mu$
$\varepsilon_{\omega,\mathfrak{A}}$	das Diracmaß auf $(\Omega,\mathfrak{A})$ mit Einheitsmasse in ω
$\delta_\Omega(\mathcal{E})$	das von $\mathcal{E}$ erzeugte Dynkin-System in Ω
$\mathfrak{A}_{\mu,e}$	das System aller Mengen A aus $\mathfrak{A}$ mit $0 \le \mu(A) < +\infty$
$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^n \mathbf{X}_j$	das empirische Mittel der $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariablen $\mathbf{X}_1,\ldots,\mathbf{X}_n$
$M_1(\mu)$	der Erwartungswert von μ
$\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$	der Erwartungswert der $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ bezüglich P
$\mathrm{E}_P(X)$	der Erwartungswert der Zufallsgröße X bezüglich P

$\sigma_\Omega(\mathcal{E})$	die von $\mathcal{E}$ erzeugte σ-Algebra in Ω
$\rho_\Omega(\mathcal{E})$	der von der Menge $\mathcal{E}$ erzeugte Ring in Ω
$\mathcal{E}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller $(\Omega, \mathfrak{A})$-Elementarfunktionen
$\mathcal{E}^*(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller nichtnegativen $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbaren Funktionen auf Ω
$\lvert\cdot\rvert$	die euklidische Metrik auf $\mathbb{R}^m$
μ_n	die n-te Faltungswurzel des Maßes μ
$\overset{n}{\underset{j=1}{\bigstar}} \mu_j$	das Faltungsprodukt der Maße $\mu_1, \ldots, \mu_n$
R_n	die n-te Rademachersche Funktione 2. Art
$\mu_{(f)}$	das zur Abbildung f gehörige Maß aus $\mathcal{M}_+^b\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$
1_A	Indikatorfunktion der Menge A
$I_{m,a}, I_{m,o}, I_{m,l}, I_{m,r}$	Systeme aller m-dimensionalen Intervalle des $\mathbb{R}^m$
$U^\perp$	das orthogonale Komplement von U
$V \ominus U$	das orthogonale Komplement von U in V
$\operatorname{cor}(\mu)$	die Korrelationskoeffizient des Maßes μ
$\operatorname{cov}(\mu)$	die Kovarianzmatrix des Maßes μ
$\operatorname{Cov}_P(\mathbf{X}, \mathbf{Y})$	die Kovarianzmatrix von $\mathbf{X}$ und $\mathbf{Y}$ bezüglich P
$\operatorname{Cov}_P(X, Y)$	die Kovarianz der Zufallsgrößen X und Y
$\overline{K}_\varrho(\omega_0, r)$	die abgeschlossene Kugel in (Ω, ϱ) mit Mittelpunkt ω_0 und Radius r
$K_\varrho(\omega_0, r)$	die offene Kugel in (Ω, ϱ) mit Mittelpunkt ω_0 und Radius r
$\mathscr{L}^p(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$	die Menge aller p-fach μ-integrierbaren Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$
$\mathscr{L}^\infty(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$	die Menge aller μ-wesentlich beschränkter Funktionen aus $\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$
$\mathscr{L}_0^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$	die Menge aller zentrieren Elemente aus $\mathscr{L}^1(\Omega, \mathfrak{A}, P; \mathbb{K})$
$\lambda^{(m)}$	das Lebesgue-Borel-Maß auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{K}\left(\left(\mu_j\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}\right)$	die Menge aller Maße $\mu \in \mathcal{M}_+\left(\times_{j=1}^n \Omega_j, \bigotimes_{j=1}^n \mathfrak{A}_j\right)$, welche für alle $j \in \mathbb{N}_{1,n}$ der Bedingung $\pi_j(\mu) = \mu_j$ genügen, wobei eine Folge von nichttrivialen Maßräumen $\left((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j)\right)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gegeben sei
μ_c	der stetige Anteil des Maßes μ
μ_d	der diskrete Anteil des Maßes μ
$\mu^{(k)}$	die k-te Faltungspotenz des Maßes μ
$\widetilde{\mathcal{M}}_+(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller Borelmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$

$\widetilde{\mathcal{M}}_+(\Omega,\mathfrak{B})$	die Menge aller Borel-Maße auf $(\Omega,\mathfrak{B})$
$\mathcal{M}_+^d(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller diskreten Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller endlichen Borel-Maße auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$, bei denen die Momente aller Ordnung existieren
$\mathcal{M}_+^{b,k}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller endlichen Borel-Maße auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$, bei denen das k-te absolute Moment existiert
$\mathcal{M}_+^{b,d}(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller endlichen diskreten Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_+^{b,\mathrm{mol}}(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller endlichen molekularen Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1,(c_k)_{k\in\mathbb{N}}\right)$	die Menge aller Maße $\mu\in\mathcal{M}_+^{b,\infty}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$, für welche die Bedingung $(M_k(\mu))_{k\in\mathbb{N}_0}=(c_k)_{k\in\mathbb{N}_0}$ erfüllt ist
$\mathcal{M}_+^{b,k}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen Maße von k-ter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_+^{b}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1;\mathbb{N}_0\right)$	die Menge aller endlichen Maße auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, für die $\mathbb{R}\setminus\mathbb{N}_0$ eine Nullmenge ist
$\mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^{b}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller endlichen stabilen Maße auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$
$\mathcal{M}_+^{b,c}(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller endlichen stetigen Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+,u}^{G}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen unbeschränkt teilbaren Maße auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, mit der Eigenschaft $\mu(\mathbb{R}^m)\in G$
$\mathcal{M}_{+,u}^{1}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	die Menge aller unbeschränkt teilbaren Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_{+,u}^{b}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen unbeschränkt teilbaren Maße auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_+^{b}(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller endlichen Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_+^{G}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	$\mathcal{M}_+^{G}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m):=\left\{\mu\in\mathcal{M}_+^{b}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)\,\middle\vert\,\mu(\mathbb{R}^m)\in G\right\}$, wobei $m\in\mathbb{N}$, $(G,\cdot)$ eine Unterhalbgruppe von $([0,+\infty),\cdot)$ ist
$\mathcal{M}_{+,\mathrm{DFR}}^{1}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller DFR-Verteilungen (DFR heißt hierbei Decreasing Failure Rate) auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$
$\mathcal{M}_{+,\mathrm{IFR}}^{1}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller IFR-Verteilungen (IFR heißt hierbei Increasing Failure Rate) auf $\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$
$\mathcal{M}_{+,[0,+\infty),g}^{1}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller Lebensdauerverteilungen deren rechte Verteilungsfunktion in $(0,+\infty)$ differenzierbar ist und für welche die Überlebenswahrscheinlichkeit nicht verschwindet
$\mathcal{M}_{+,[0,+\infty)}^{1}\left(\mathbb{R}^1,\mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller Lebensdauerverteilungen
$\mathcal{M}_+^{\mathrm{mol}}(\Omega,\mathfrak{A})$	die Menge aller molekularen Maße auf $(\Omega,\mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_+^{b,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen Maße auf $(\mathbb{R}^m,\mathfrak{B}_m)$, welche $\lambda^{(m)}$-stetig sind

$\mathcal{M}_{+}^{c}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller stetigen Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+,s}^{b}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen symmetrischen Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_{+,s}^{1}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller endlichen symmetrischen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_{+,s}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller symmetrischen Maße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_{+}^{1,d}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller diskreten Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+}^{1,\lambda^{(m)}}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, welche $\lambda^{(m)}$-stetig sind
$\mathcal{M}_{+}^{1,\mathrm{mol}}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller molekularen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+}^{1,\infty}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, bei denen Momente beliebiger Ordnung existieren
$\mathcal{M}_{+}^{1,k}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$, bei denen das k-te absolute Moment existiert
$\mathcal{M}_{+}^{1,k}(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße von k-ter Ordnung auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$
$\mathcal{M}_{+}^{1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1; \mathbb{N}_0\right)$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$, für die $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}_0$ eine Nullmenge ist
$\mathcal{M}_{+,\mathrm{st}}^{1}\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$	die Menge aller stabilen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $\left(\mathbb{R}^1, \mathfrak{B}_1\right)$
$\mathcal{M}_{+}^{1,c}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller stetigen Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+}^{1}(\Omega, \mathfrak{A})$	die Menge aller Wahrscheinlichkeitsmaße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathcal{M}_{+}(\Omega, \mathfrak{A})$	Menge aller Maße auf $(\Omega, \mathfrak{A})$
$(\Omega, \mathfrak{A}, \mu)$	ein Maßraum mit Maß μ auf dem messbaren Raum $(\Omega, \mathfrak{A})$
$\mathbb{R}_{>}^{q \times q}$	die Menge aller positiv definiten Matrizen aus $\mathbb{R}^{q \times q}$
$\mathbf{A} \leqq \mathbf{B}$	die Schreibweise für $\mathbf{B} - \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{\geq}^{q \times q}$
$\mathbf{A} < \mathbf{B}$	die Schreibweise für $\mathbf{B} - \mathbf{A} \in \mathbb{R}_{>}^{q \times q}$
$\leqq$	die Löwner-Halbordnung
$\mathbf{A}^{+}$	die Moore-Penrose-Inverse der Matrix $\mathbf{A}$
$\mathbf{O}_{p \times q}$	die Nullmatrix im $\mathbb{R}^{p \times q}$
$\mathcal{O}(m; \mathbb{R})$	die Menge aller orthogonaler Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times m}$
$\mathbf{P}_U$	die Orthoprojektionsmatrix auf den Unterraum U
$\mathbb{R}_{U}^{m \times m}$	die Menge aller bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$ erwartungstreuen Matrizen aus $\mathbb{R}^{m \times m}$
$\mathbb{R}_{\geq}^{q \times q}$	die Menge aller positiv semidefiniten Matrizen aus $\mathbb{R}^{q \times q}$

$\mathbb{R}_{\mathrm{dst}}^{n\times n}$	die Menge aller doppelstochastischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbb{R}_{\mathrm{st}}^{n\times n}$	die Menge aller stochastischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{n\times n}$
$\mathbb{R}_{S}^{q\times q}$	die Menge aller symmetrischen Matrizen aus $\mathbb{R}^{q\times q}$
$\mathbb{Z}_{k,l}$	eine andere Bezeichnung für die Menge $\{k, k+1, \ldots, l-1, l\}$, wobei $k, l \in \mathbb{Z}$ mit $k < l$
$\mathbb{N}_{1,n}$	eine andere Bezeichnung für die Menge $\{1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\mathbb{Z}_{0,n}$	eine andere Bezeichnung für die Menge $\{0, 1, \ldots, n\}$, wobei $n \in \mathbb{N}$
$\{f = g\}$	$\{f = g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) = g(\omega)\}$
$\{f < g\}$	$\{f < g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) < g(\omega)\}$
$\{f \leq g\}$	$\{f \leq g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \leq g(\omega)\}$
$\{f \neq g\}$	$\{f \neq g\} \coloneqq \{\omega \in \Omega \mid f(\omega) \neq g(\omega)\}$
$\{f \geq a\}$	$\{f \geq a\} \coloneqq f^{-1}([a, +\infty])$
$\{f > a\}$	$\{f > a\} \coloneqq f^{-1}((a, +\infty])$
$\{f \leq a\}$	$\{f \leq a\} \coloneqq f^{-1}([-\infty, a])$
$\{f < a\}$	$\{f < a\} \coloneqq f^{-1}([-\infty, a))$
$\mathfrak{D}_{A,P}$	die Menge aller $D \in \mathfrak{A}$, welche stochastisch unabhängig von A bezüglich P sind, wobei $\mathfrak{A}$ eine σ-Algebra und P ein Wahrscheinlichkeitsmaß ist
$\mathcal{A}(\Omega, \varrho)$	das System der bezüglich ϱ abgeschlossenen Mengen in Ω
$\mathcal{K}(\Omega, \varrho)$	das System der bezüglich ϱ kompakten Teilmengen in Ω
$\mathcal{O}(\Omega, \varrho)$	das System der bezüglich ϱ offenen Mengen in Ω
$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \overline{\mathbb{R}})$	die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\overline{\mathfrak{B}}_1$-messbaren numerischen Funktionen auf Ω
$\mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{R})$	die Menge aller $\mathfrak{A}$-$\mathfrak{B}_1$-messbaren reellen Funktionen auf Ω
$\mathcal{M}_0(\Omega, \mathfrak{A}, \mu; \mathbb{K})$	die Menge aller $f \in \mathcal{M}(\Omega, \mathfrak{A}; \mathbb{K})$ mit $\{f \neq 0\} \in \mathcal{N}_\mu$
$(\Omega, \mathfrak{A})$	ein messbarer Raum mit σ-Algebra $\mathfrak{A}$ in Ω
$\mathcal{W}_{U,s}$	das zu U gehörige nichtdegenerierte schwach sphärische lineare Modell
$\widetilde{\mathcal{W}}_{U,s}$	das zu U gehörige schwach sphärische lineare Modell
$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})$	das $(k_1, \ldots, k_m)$-te absolute Moment der $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ bezüglich P
$M_{(k_1,\ldots,k_m);P}(\mathbf{X})$	das $(k_1, \ldots, k_m)$-te Moment der $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$-Zufallsvariable $\mathbf{X}$ bezüglich P
$\mathcal{M}_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu)$	das $(k_1, \ldots, k_m)$-te absolute Moment von μ

$\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu)$	der Erwartungswert eines Maßes auf $(\mathbb{R}^m, \mathfrak{B}_m)$ definiert als $\widetilde{\mathfrak{M}}_1(\mu) \coloneqq \left(\widetilde{M}_1(\mu), \ldots, \widetilde{M}_m(\mu)\right)^T$
$\widetilde{M}_j(\mu)$	$\widetilde{M}_j(\mu) \coloneqq \int_{\mathbb{R}^m} \widetilde{P}_{j,1;\mathbb{R}^m}$
$M_{(k_1,\ldots,k_m)}(\mu)$	das $(k_1, \ldots, k_m)$-te Moment von μ
$\mathfrak{A}_{\mu^*}$	die Menge aller μ^*-messbaren Teilmengen von Ω
$\mathbb{N}_0$	die Menge der natürlichen Zahlen inklusive 0
$\mathcal{N}_{p,\mu}(f)$	$\mathcal{N}_{p,\mu}(f) \coloneqq \left(\int\limits_\Omega \lvert f\rvert^p \,\mathrm{d}\mu\right)^{\frac{1}{p}}$
$\mathfrak{o}$	das Nullmaß
$\mathcal{N}_\mu$	das System der Nullmengen von μ
$\mathfrak{S}_n$	die Menge aller Permutationen von $\mathbb{N}_{1,n}$
$\mathscr{P}_{\mathbb{R},k}$	die Menge aller Polynomfunktionen $P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, deren Grad k nicht übersteigt
$\mathscr{P}_{\mathbb{R}}$	die Menge aller Polynomfunktionen $P\colon \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$
$\bigotimes_{j=1}^{n} \mu_j$	das Carathéodorysche Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ von nichttrivialen Maßräumen $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$
$\Pi_{1\bullet}$	das erste Cavaliersche Produktmaß von μ_1 und μ_2 der nichttrivialen Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$
$\Pi_{\bullet 2}$	das zweite Cavaliersche Produktmaß von μ_1 und μ_2 der nichttrivialen Maßräume $(\Omega_1, \mathfrak{A}_1, \mu_1)$ und $(\Omega_2, \mathfrak{A}_2, \mu_2)$
Π	das Produktmaß der Folge $(\mu_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ einer Folge von nichttrivialen Maßräumen $((\Omega_j, \mathfrak{A}_j, \mu_j))_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$
$\bigotimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$	die Produkt-σ-Algebra der Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$
$\bigotimes_{j=1}^{n} X_j$	die Produktabbildung der Abbildungen $X_1, \ldots, X_n$
$\sqrt{\mathbf{A}}$	Quadratwurzel der Matrix $\mathbf{A}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$\bigboxtimes_{j=1}^{n} \mathfrak{A}_j$	das zur Folge $(\mathfrak{A}_j)_{j\in\mathbb{N}_{1,n}}$ gehörige System von Rechteckmengen

$\mathbf{P}_U\mathbf{X}$	die Kleinste-Quadrate- oder Gauß-Markov-Schätzung von $\mathrm{E}_P(\mathbf{X})$ bezüglich $\mathcal{W}_{U,s}$
$f_{\omega_1\bullet}$, $f_{\bullet\omega_2}$	der $\omega_1\bullet$-Schnitt bzw. $\bullet\omega_2$-Schnitt von f
$Q_{\omega_1\bullet}$, $Q_{\bullet\omega_2}$	der $\omega_1\bullet$-Schnitt bzw. $\bullet\omega_2$-Schnitt von Q
$\mathfrak{A}_{P,0}$	das System aller $C \in \mathfrak{A}$ mit $C \in \mathcal{N}_P$ oder $\Omega \setminus C \in \mathcal{N}_P$
$\mathcal{T}_\infty$	die terminale σ-Algebra einer Folge von σ-Algebren
$\nu \perp \mu$	ν singulär bezüglich μ
$\mu^\vee$	die Spiegelung des Maßes μ
$\mathfrak{A}_\Omega$, $\mathfrak{A} \cap \Omega$	Spur-σ-Algebra von $\mathfrak{A}$ in Ω
μ_S	die Symmetrisierung des Maßes μ
α^-	der Negativteil von α
α^+	der Positivteil von α
$\mathrm{var}(\mu)$	der Varianz von μ
$\mathrm{Var}_P(X)$	die Varianz der Zufallsgröße X bezüglich P
$\beta_{1,p}$	die Bernoulli-Verteilung zum Parameter p
$\beta_{n,p}$	die Binomialverteilung mit den Parametern n und p
$\gamma_{\alpha,\beta}$	die Cauchy-Verteilung mit den Parametern α und β
χ^2_n	die zentrale Chiquadrat-Verteilung mit n Freiheitsgraden
$\widetilde{G}_p$	die Ersterfolgsverteilung zum Parameter p
E_η	die Exponentialverteilung zum Parameter η
$\Gamma_{\alpha,\beta}$	die Gammaverteilung zu den Paramtern α und β
G_p	die geometrische Verteilung zum Parameter p
μ_A	die μ-Gleichverteilung auf A
P_n	die diskrete Gleichverteilung auf einer n-elementigen Menge
$H_{N,M,n}$	die hypergeometrische Verteilung mit den Parametern M, N und n
$L_{\alpha,\eta}$	die Laplace-Verteilung mit den Parametern α und η
$G_{p,r}$	die negative Binomialverteilung mit den Parametern p und r
$\mathcal{N}_{\mathbf{a},\mathbf{\Sigma}}$	die m-dimensionale Normalverteilung mit den Parameter $\mathbf{a}$ und $\mathbf{\Sigma}$ mit $\mathbf{a} \in \mathbb{R}^m$ und $\mathbf{\Sigma} \in \mathbb{R}^{m\times m}_>$
$\mathcal{N}_{\alpha,\sigma^2}$	die Normalverteilung mit den Parametern α und σ^2
$v_{0,1}$	die standardisierte logarithmische Normalverteilung

$\nu_{\mu,t}$	die durch das Maß μ erzeugte verallgemeinerte Poisson-Verteilung zum Parameter t
π_α	die Poisson-Verteilung zum Parameter α
$\mathcal{S}_{\alpha,\beta}$	die Simpson-Verteilung oder auch Dreiecksverteilung mit den Parametern α und β
$\mathcal{W}_{\alpha,\beta}$	die Weibull-Verteilung mit den Parametern α und β
ν_n	das Zählmaß auf einer n-elementigen Menge
$F_{\mu,l}$	die linke Verteilungsfuntion von μ
$F_{\mu,r}$	die rechte Verteilungsfuntion von μ
U_μ	die zu μ gehörige Überlebenswahrscheinlichkeit
$P(A \mid B)$	die bedingte Wahrscheinlichkeit von A unter der Bedingung B
$X_{\mathfrak{A},\mu}$	die Menge aller $\omega \in \Omega$ mit $\mu(\{\omega\}) > 0$

Literaturverzeichnis

[Bau92] Bauer, Heinz: *Maß- und Integrationstheorie.* 2. Auflage. de Gruyter : Berlin - New York, 1992

[Els11] Elstrodt, Jürgen: *Maß- und Integrationstheorie.* 7. Auflage. Springer Berlin Heidelberg, 2011

[GK96] Gnedenko, Boris V. ; Korolev, Viktor Y.: *Random Summation - Limit Theorems and Applications.* CRC Press : Boca Raton - New York - London - Tokio, 1996

[LO72] Linnik, Jurij V. ; Ostrowski, Alexander M.: *Decompositions of Random Variables and Random Vectors.* Nanka : Moskau, 1972. – Englische Übersetzung: American Mathematical Society, Providence, R.I. 1977

[Luk70] Lukacs, Eugene: *Characteristic Functions.* 2. Auflage. London : Griffin, 1970

[RJS85] Rossberg, Hans-Joachim ; Jesiak, Bernd ; Siegel, Gerhard: *Analytic Methods of Probability Theory.* Akademie-Verlag : Berlin, 1985