Dr. A. Kripfganz 18.07.2006

Klausur Optimierung I

TEIL A

Zeit: 7:30 Uhr - 8:00 Uhr

Bemerkungen: Der Lösungsweg muss klar erkennbar sein. Antworten sind kurz zu begründen! Skizzen sind keine Begründungen. Im Teil A und B sind jeweils 6 Punkte erforderlich. (Gesamt sind 13 Punkte zum Bestehen nötig.)

1. Gegeben sei die Menge $M = \{x \in \mathbb{R}^2 | x_1 + x_2 = 1,\ x_1 \cdot x_2 = 0\}$.

a) Geben Sie die Mengen conv M und cone M an! (3Pkt.)

b) Ist conv M ein Polytop und cone M ein polyedrischer Kegel? (1Pkt.)

2. Gegeben sei das Polyeder $P = \{x \in \mathbb{R}^n | Ax = b,\ x \geq 0\}$ mit $A \in \mathbb{R}^{m \times n},\ b \in \mathbb{R}^m$.

a) Wie lautet der Darstellungssatz für Polyeder? (1Pkt.)

b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung für $P = \emptyset$ an! (1Pkt.)

c) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass $\hat{x}$ eine Ecke von P ist! (1Pkt.)

d) Geben Sie eine hinreichende Bedingung dafür an, dass P nur ganzzahlige Ecken ($\hat{x} \in \mathbb{Z}^n$) besitzt! (1Pkt.)

3. Wann besitzt das Problem

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\to \text{Max!} \\ ax_1 + bx_2 &\leq 1 \\ x_1, x_2 &\geq 0 \end{aligned}$$

a) mindestens eine Optimallösung; (1Pkt.)

b) genau eine Optimallösung; (1Pkt.)

c) eine zulässige Lösung; (1Pkt.)

d) keine endliche Lösung? (1Pkt.)

Begründen Sie Ihre Aussagen anhand der Daten!

4. Was versteht man unter Schattenpreisen? (1Pkt.)

5. Wie lautet die Karmarkar-Normalform einer linearen Optimierungsaufgabe? (2Pkt.)

Dr. A. Kripfganz 18.07.2006

Klausur Optimierung I

TEIL B

Zeit: 8:00 Uhr - 9:00 Uhr

6. Gegeben sei das Problem

$$-x_1 + 3x_2 \qquad\qquad \to \text{Min!}$$

$$B \begin{cases} -2x_1 - x_2 + x_3 - x_4 = 2 \\ -\,x_1 + x_2 + x_3 + x_4 \geq 5 \\ \qquad\qquad x_i \geq 0,\ i = 1, \dots, 4. \end{cases}$$

a) Bestimmen Sie mit Phase I des Simplexalgorithmus eine Ecke von B! (3Pkt.)

b) Suchen Sie mit Phase II des Simplexalgorithmus eine Lösung der Aufgabe! (2Pkt.)

c) Ist der zulässige Bereich B beschränkt? (1Pkt.)

7. Gegeben sei das Problem

$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 + x_3 &\to \text{Min!} \\ -x_1 + x_2 + x_3 &\leq 3 \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geq 10 \\ x_i \geq 0,\ i &= 1,2,3. \end{aligned}$$

a) Lösen Sie diese Aufgabe mit dem dualen Simplexalgorithmus! Wählen Sie bei Mehrdeutigkeit die am weitesten links stehende Pivotspalte. (3Pkt.)

b) Formulieren Sie das Dualproblem! (2Pkt.)

c) Bestimmen Sie mit Hilfe des Satzes vom komplementären Schlupf eine Lösung der dualen Aufgabe! (2Pkt.)

8. Gegeben sei das Transportproblem mit folgenden Kosten- und Lieferdaten:

i\ j	1	2	3	Vorrat a_i
1	6	3	2	7
2	2	1	5	5
3	5	4	3	5
4	5	7	4	6
Bedarf b_j	4	9	10	

a) Bestimmen Sie mit der Minimalkostenregel eine Anfangsbasislösung! (1Pkt.)

b) Starten Sie mit dieser Anfangsbasislösung den Transportalgorithmus und bestimmen Sie einen optimalen Transportplan und die Minimalkosten! (3Pkt.)

c) Gibt es noch andere optimale Transportpläne? (1Pkt.)