Klausur Numerik I

Aufgabe 1: **6 Punkte**

Man berechne unter Zuhilfenahme des Algorithmus der Cholesky-Zerlegung alle reellen Werte von a, für die die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & -a \\ 0 & -a & 2 \end{bmatrix}$$

positiv definit ist. Unter Verwendung dieser Zerlegung bestimme man die Lösung x von $Ax = [0,\ 3(1-a),\ 2(3-a)]^T$.

Aufgabe 2: **4 Punkte**

Man bestimme das zu den Werten

i	0	1	2	3	4
x_i	–4	–1	1	2	5
f_i	–240	–30	0	0	12

gehörige Newtonsche Interpolationspolynom und werte es an der Stelle $x = -2$ mit Hilfe des Horner-Schemas aus.

Aufgabe 3: **7 Punkte**

(a) Für $\alpha > 0$ werde mit Hilfe der Matrix

$$D = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & \alpha & \\ & & \alpha \end{bmatrix}$$

die Matrix-Norm $||\cdot||_\alpha$ für $M \in \mathbb{R}^{3\times 3}$ definiert durch

$$||M||_\alpha = ||DMD^{-1}||_\infty.$$

Geben Sie die zugeordnete Vektor-Norm an.

(b) Gegeben sei die Matrix

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren konvergiert, ohne die Iterationsmatrix zu berechnen.

(c) Berechnen Sie nun die Iterationsmatrizen G und E des Gesamtschritt- bzw. Einzelschrittverfahrens für die Matrix A, und zeigen Sie, dass das Einzelschrittverfahren konvergiert.

(d) Zeigen Sie, dass ein α existiert, so dass $||G||_\alpha < 1$. Berechnen Sie, für welches α der Ausdruck $||G||_\alpha$ minimal wird.

Aufgabe 4: **6 Punkte**

Es sei $A \in \mathbb{R}^{n\times n}$ eine reguläre Matrix, $\alpha > 0$ und $x_0^{(\alpha)} = 0$. Es sei x die Lösung des linearen Gleichungssystems $Ax = b$. Wir betrachten die Iterationsvorschrift

$$(\alpha\mathbb{I} + A^T A)x_{n+1}^{(\alpha)} = \alpha x_n^{(\alpha)} + A^T b.$$

Zeigen Sie:

(a) $x - x_n^{(\alpha)} = \alpha^n(\alpha\mathbb{I} + A^T A)^{-n}x$;

(b) $\lim_{n\to\infty} x_n^{(\alpha)} = x$;

(c) Es sei $k \in \mathbb{N}$ fest. Dann gilt: $\lim_{\alpha\to 0} x_k^{(\alpha)} = x$.