Mathematisches Institut
Universität Leipzig
Wintersemester 2007/08

Prof. Dr. Wolfgang König
26. Januar 2008
8:15 – 10:15 Uhr

Übungsscheinklausur
zur Vorlesung Maß- und Integrationstheorie

Name:
Vorname:
Matrikelnummer:
Übungsleiter(in):

- Tragen Sie bitte zu allererst die obigen Angaben ein aber sonst nichts auf dieser Seite.
- Das einzige zugelassene Hilfsmittel ist ein einseitig von Ihrer Hand beschriebenes DIN A4-Blatt mit beliebigem Text. Bei Nicht-Deutschsprachigen ist auch ein Wörterbuch zugelassen.
- Für das Übungsscheinkriterium gilt: Mit einer Gesamtpunktzahl von mindestens 40 (von 100) gilt diese Klausur als bestanden.

Viel Erfolg!

Aufgaben-Nr.	1	2	3	4	5	6	7	8	9
Punkte									

Gesamtpunktzahl:

10 P. **Aufgabe 1** —— Sei $(\mu_n)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge von Maßen auf einem messbaren Raum $(\Omega, \mathcal{F})$, so dass $(\mu_n(A))_{n\in\mathbb{N}}$ für jedes $A \in \mathcal{F}$ monoton steigt. Zeigen Sie, dass $\mu := \sup_{n\in\mathbb{N}} \mu_n$ ein Maß ist.

10 P. **Aufgabe 2** —— Es sei D das Dreieck in der (x, y)-Ebene mit den Eckpunkten $(0, 0)$, $(1, 0)$ und $(0, 2)$. Berechnen Sie das Volumen des Körpers $K = \{(x, y, z) \in D \times [0, \infty) : z \le x^2\}$.

10 P. **Aufgabe 3** —— Beweisen Sie, dass für jedes nichtleere Teilmengensystem $\mathcal{C}$ einer nichtleeren Menge Ω gilt: $\sigma(\mathcal{C}) = \sigma(\sigma(\mathcal{C}))$.

10 P. **Aufgabe 4** —— Es sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum mit $\mu(\Omega) \le 1$. Zeigen Sie, dass für jede messbare Funktion $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ gilt: $\sup_{p\in[1,\infty)} \|f\|_p = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p \le \|f\|_\infty$.

10 P. **Aufgabe 5** —— Es sei $\lambda_{[0,1]}$ das Lebesgue-Borel-Maß auf dem Intervall $[0, 1]$, und wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $f(x) = 2x^2$. Berechnen Sie den Wert des Integrals von f bezüglich des Bildmaßes der Abbildung $\mathbb{1}_{\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}}$ unter $\lambda_{[0,1]}$.

10 P. **Aufgabe 6** —— Prüfen Sie die Funktion $x \mapsto x/\sqrt{1 + x^4}$ auf Lebesgue-Integrierbarkeit sowie auf uneigentliche Riemann-Integrierbarkeit über $\mathbb{R}$.

10 P. **Aufgabe 7** —— Es sei A eine symmetrische positiv definite $(d \times d)$-Matrix. Berechnen Sie den Wert des Integrals $\int_{\mathbb{R}^d} \mathrm{e}^{-\|Ax\|} \|Ax\|^{1-d} \, \lambda_d(\mathrm{d}x)$.

10 P. **Aufgabe 8** —— Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum. Für $p \in [1, \infty]$ sagen wir, eine Funktionenfolge $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ in $\mathcal{L}^p(\mu)$ *konvergiert im p-ten Mittel* gegen eine Funktion $f \in \mathcal{L}^p(\mu)$, falls $\lim_{n\to\infty} \|f - f_n\|_p = 0$.
Zeigen Sie Folgendes. Es seien $p, q \in [1, \infty]$ mit $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Falls $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im p-ten Mittel gegen f konvergiert und $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im q-ten Mittel gegen g, dann konvergiert $(f_n g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ im ersten Mittel gegen fg.

20 P. **Aufgabe 9** —— Entscheiden Sie ohne Begründung für jede der folgenden Aussagen, ob sie wahr oder falsch ist. Schreiben Sie hierfür ein w für “wahr” bzw. ein f für “falsch” in den Kasten vor der Aussage.

☐ Falls $\mathcal{F}_1 \subset \mathcal{F}_2$ zwei σ-Algebren auf Ω sind und $f : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ eine $\mathcal{F}_1$-messbare Abbildung, so ist f auch $\mathcal{F}_2$-messbar.

☐ Sei $(\Omega, \mathcal{F}, \mu)$ ein Maßraum und $f : \Omega \to \mathbb{R}$ messbar, so dass das Bildmaß $\mu \circ f^{-1}$ die Dichte $x \mapsto \mathrm{e}^{-x^2}$ besitzt. Dann besitzt das Bildmaß von f^2 unter μ die Dichte $y \mapsto \mathrm{e}^{-y} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(y)$.

☐ Die Funktion $x \mapsto 1/x^{1/\pi}$ (mit $x \in (0, 1)$) liegt genau dann im $\mathcal{L}^p((0, 1))$, wenn $p > \pi$.

☐ Jede Verteilungsfunktion eines endlichen Maßes auf $(\mathbb{R}, \mathcal{B})$ besitzt nur höchstens abzählbar viele Unstetigkeitsstellen.

Bewertung: Jede richtige Antwort erhält fünf Punkte, für jede falsche werden zwei Punkte abgezogen, bei Offenlassen werden weder Punkte gegeben noch abgezogen, und negative Gesamtpunktzahlen werden zu Null gesetzt.