Klausur/Testat zur Linearen Algebra II

Sommersemester 2012
26. Juli

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Prüfungsklausur ☐ Wiederholungsprüfung ☐ Testat ☐

Aufgabe	1	2	3	4	Z1	Z2	$\sum$	Note
Punkte								

Alle Beweis- bzw. Rechenschritte müssen gut zu erkennen und nachvollziehbar sein. Ergebnisse etwa aus der Vorlesung, den Übungsaufgaben oder der Literatur können bei korrektem Zitieren verwendet werden. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und versehen Sie dieses jeweils mit Namen und Matrikelnummer.

Es werden nachfolgend vier Aufgaben und zwei Zusatzaufgaben gestellt. Hierfür sind 25 Punkte und 10 Zusatzpunkte erreichbar. Die Zusatzpunkte werden insoweit berücksichtigt, als dadurch die Höchstpunktzahl von 25 Punkten nicht überschritten wird.

Die Bearbeitungszeit beträgt 60 Minuten.

Alle Ringe sind kommutativ und besitzen ein vom Nullelement verschiedenes Einselement.

Aufgaben

1. (7 Punkte)

(a) Zeigen Sie, dass genau ein $f \in \mathsf{End}_{\mathbb{R}}\,\mathbb{R}^3$ existiert, so dass $f(1,1,0) = (0,0,1)$, $f(1,-1,0) = (0,1,0)$ und $f(0,0,1) = (0,1,1)$ gilt.

(b) Berechnen Sie $\mathsf{rang}_{\mathbb{R}}\mathsf{Kern}\, f$ und $\mathsf{rang}_{\mathbb{R}} f$.

(c) Bestimmen Sie die Koordinatenmatrix $f_{\mathfrak{E}} \in \mathbb{R}^{3,3}$ von f bzgl. der kanonischen geordneten Basis $\mathfrak{E}$ von $\mathbb{R}^3$.

2. (8 Punkte)

Zeigen Sie, dass $A := \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$ diagonalisierbar ist und berechnen Sie eine Matrix $S \in \mathrm{Gl}_{\mathbb{Q}}(3)$, so dass $S^{-1}AS$ Diagonalgestalt hat.

3. (5 Punkte)

Seien R ein Ring, M ein R-Modul und $f \in \mathsf{End}_R M$.

Zeigen Sie, dass $\mathsf{Kern}\,(f^2 + f + \mathrm{id}_M) \subseteq \mathsf{Kern}\,(f^3 - \mathrm{id}_M)$.

4. (5 Punkte)

Seien K ein Körper, V ein K-Vektorraum, W ein K-Untervektorraum von V mit $\mathsf{rang}_K W = 1$ und $f \in \mathsf{End}_{\mathbb{R}} V$.

Zeigen Sie, dass W genau dann invariant unter f ist (d. h. $f(W) \subseteq W$), wenn W einen Eigenvektor von f enthält.

Zusatzaufgaben

Z1. (6 Punkte)

Sei $n \in \mathbb{N}^+$. Für $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ setzen wir $A_{sym} := \frac{1}{2}(A + A^T)$ (Symmetrisierung von A) und $A_{asym} := \frac{1}{2}(A - A^T)$ (Antisymmetrisierung von A). Zeigen Sie:

(a) (*2 Punkte*) Für alle $A \in \mathbb{R}^{n,n}$ ist A_{sym} symmetrisch und A_{asym} antisymmetrisch.

(b) (*1 Punkt*) Sei $A \in \mathbb{R}^{n,n}$. Für alle $\mathfrak{x} \in \mathbb{R}^n$ gilt $\mathfrak{x}A\mathfrak{x}^T = \mathfrak{x}A_{sym}\mathfrak{x}^T$.

Man nennt daher A positiv (semi)definit, negativ (semi)definit bzw. indefinit, wenn A_{sym} positiv (semi)definit, negativ (semi)definit bzw. indefinit ist.

(c) (*3 Punkte*) Wenn $A, A' \in \mathbb{R}^{n,n}$ kongruent sind, so hat A genau dann eine der Eigenschaften "positiv definit", "negativ definit", "positiv semidefinit", "negativ semidefinit" oder "indefinit", wenn A' diese Eigenschaft hat.

Z2. (4 Punkte)

Seien R ein Ring und $n \in \mathbb{N}^+$. Für $A \in R^{n,n}$, sagen wir $A =: \big((a_{i,j})\big)_{1 \le i,j \le n}$, setzen wir $A' := \big(((-1)^{i+j} a_{i,j})\big)_{1 \le i,j \le n}$.

Zeigen Sie, dass $\det A' = \det A$.