Modulprüfung - 10-GRMATH-1011 -**19.07.2011**

Name/Vorname: ....
Matrikel-Nr.: ....
Lehramt: .... Ja / Nein....................................
Punkte: .... / .... Note: ....

Klausur zur Vorlesung
"Lineare Algebra 2" bei Prof. Dr. B. Fritzsche

1. In einer Mensa werden die Essen A, B und C (damit sich hier mit einfachen Zahlen rechnen läßt) an Studenten zum Preis von $1,2$ und 3 Euro und an Mitarbeiter zum Preis von $2,4$ bzw. 5 Euro abgegeben. An einem Tag werden 3000 Essenportionen verkauft und ein Umsatz von 7100 Euro erzielt. Dabei werden an Studenten insgesamt fünfmal so viele Portionen ausgegeben wie an Mitarbeiter. Der Wareneinsatz beträgt bei dem Essen A 1 Euro sowie bei den Essen B und C $1,50$ Euro pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4150 Euro. Der Personalaufwand beträgt bei den Essen A und B $1,50$ Euro sowie beim Essen C 2 Euro pro Portion und insgesamt an diesem Tag 4950 Euro.
   (a) Stellen Sie ein Gleichungssystem zur Bestimmung der Zahl der an Studenten bzw. Mitarbeiter abgegebenen Portionen der einzelnen Essen auf!
   (b) Lösen Sie das Gleichungssystem mit dem Gaußschen Algorithmus!
   (c) Wie viele verschiedene Lösungen für den beschriebenen Sachverhalt gibt es? (6 Punkte)

2. Seien U eine unitäre komplexe $p \times p$ -Matrix und V eine unitäre komplexe $q \times q$-Matrix sowie $A \in \mathbb{C}^{p\times q}$. Beweisen Sie, dass $(UAV)^+ = V^*A^+U^*$ gilt. (4 Punkte)

3. Bestimmen Sie alle linearen Abbildungen $\Phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit
$$\Phi\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \Phi\left(\begin{pmatrix}4\\-1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}-1\\3\end{pmatrix}.$$
(3 Punkte)

4. Bestimmen Sie sämtliche Nullstellen der durch
$$f(z) := \det\begin{pmatrix}1 & z & z^2 & z^3\\ -1 & 1 & -1 & 1\\ 1 & 2 & 4 & 8\\ 2 & -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$$
gegebenen Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$. (4 Punkte)

5. Weisen Sie nach, dass die Matrix
$$A = \begin{pmatrix}6 & 2 & 2\\ 2 & 3 & 1\\ 2 & 1 & 3\end{pmatrix}$$
den Eigenwert 2 besitzt. Berechnen Sie die weiteren Eigenwerte von A und geben Sie die zugehörigen algebraischen Vielfachheiten, geometrischen Vielfachheiten und Eigenräume an. (7 Punkte)