Testat zur Vorlesung Lineare Algebra II

Sommersemester 2009

23. Juli 2009, 10.30 - 11.30 Uhr

Hinweise:

Die Lösungen der einzelnen Aufgaben sind auf getrennten Blättern abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist mit folgenden Informationen zu versehen (in großer und deutlich lesbarer Schrift):

- Name
- Matrikelnummer
- Nummer der Aufgabe, die auf diesem Blatt behandelt wird.

Alle Aussagen sind zu begründen und bei den Lösungen sind alle Zwischenschritte anzugeben.

Es werden nachfolgend drei Aufgaben und eine Zusatzaufgabe gestellt. Hierfür sind 25 Punkte und 10 Zusatzpunkte erreichbar.

Aufgabe 1: Wir setzen

$\mathfrak{a}_1 := (-2, 0, 2, 3)$, $\mathfrak{a}_2 := (1, 1, 0, -2)$, $\mathfrak{a}_3 := (3, -3, 1, 0)$ $(\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3 \in \mathbb{Q}^4)$ und $\mathfrak{b}_1 := (0, 1, -2)$, $\mathfrak{b}_2 := (1, 0, -1)$, $\mathfrak{b}_3 := (-1, 1, -1)$ $(\mathfrak{b}_1, \mathfrak{b}_2, \mathfrak{b}_3 \in \mathbb{Q}^3)$.

U sei der von $\{\mathfrak{a}_1, \mathfrak{a}_2, \mathfrak{a}_3\}$ erzeugte $\mathbb{Q}$-Untervektorraum von $\mathbb{Q}^4$.

(a) Berechnen Sie $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}} U$. *(2 Punkte)*

(b) Untersuchen Sie, ob es eine $\mathbb{Q}$-lineare Abbildung $f : U \to \mathbb{Q}^3$ gibt mit $f(\mathfrak{a}_i) = \mathfrak{b}_i$, $i = 1, 2, 3$. Wenn ja, so bestimmen Sie $\operatorname{rang}_{\mathbb{Q}} f$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 2: Sei $A := \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{2,2}$. Zeigen Sie

(a) A ist in $\mathbb{Q}^{2,2}$ nicht trigonalisierbar. *(3 Punkte)*

(b) A ist in $\mathbb{C}^{2,2}$ diagonalisierbar. *(3 Punkte)*

(c) A^2 ist in $\mathbb{Q}^{2,2}$ diagonalisierbar. *(2 Punkte)*

(d) Bestimmen Sie eine Matrix $P \in \mathrm{Gl}_{\mathbb{C}}(2)$ und eine Diagonalmatrix $D \in \mathbb{C}^{2,2}$, so dass $PAP^{-1} = D$. *(4 Punkte)*

Aufgabe 3: Sei K ein Körper, V ein endlich erzeugter K-Vektorraum und f ein trigonalisierbarer K-Endomorphisdmus von V. $\lambda_1, \ldots, \lambda_p \in K$ seien die paarweise verschiedenen Eigenwerte von f. Zeigen Sie:

f ist genau dann diagonalisierbar, wenn $V = V_K(\lambda_1, f) + \ldots + V_K(\lambda_p, f)$.
(7 Punkte)

Zusatzaufgabe

Aufgabe 4: Sei K ein Körper mit $2 \cdot 1_K \neq 0_K$ und sei $n \in \mathbb{N}^+$. Weiter sei $\lambda \in K$ Eigenwert einer Matrix $A \in K^{n,n}$. Zeigen Sie:

(a) $-\lambda$ ist Eigenwert von $-A$ und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{-\lambda}\chi_{-A} &= \mathrm{ord}_{\lambda}\chi_A \quad \text{sowie} \\ V_K(-\lambda, -A) &= V_K(\lambda, A). \end{aligned}$$

(3 Punkte)

(b) λ^2 ist Eigenwert von A^2 und es gilt

$$\begin{aligned} \mathrm{ord}_{\lambda^2}\chi_{A^2} &= \begin{cases} \mathrm{ord}_{\lambda}\chi_A + \mathrm{ord}_{\lambda}\chi_{-A} & \lambda \neq 0_K \\ \mathrm{ord}_{0_K}\chi_A & \lambda = 0_K. \end{cases} \quad \text{sowie} \\ \mathrm{rang}_K V_K(\lambda^2, A^2) &\geq \begin{cases} \mathrm{rang}_K V_K(\lambda, A) + \mathrm{rang}_K V_K(\lambda, -A) & \lambda \neq 0_K \\ \mathrm{rang}_K V_K(0_K, A) & \lambda = 0_K. \end{cases} \end{aligned}$$

(4 Punkte)

(c) Ist A in $K^{n,n}$ diagonalisierbar, so auch $-A$ und A^2. *(3 Punkte)*

Hinweis: Zeigen Sie, daß $(-1)^n\chi_{A^2}(X^2) = \chi_A \cdot \chi_{-A}$. Verwenden Sie außerdem, dass jedes vom Nullpolynom verschiedene Polynom aus $K[X]$ über einem geeigneten Erweiterungskörper von K in Linearfaktoren zerlegt werden kann und dass diese Zerlegung bis auf Einheiten und die Reihenfolge der Faktoren eindeutig ist.