**Klausur**
**Lineare Algebra und Analytische Geometrie 2**
**SS 2006**

Prof. Dr. Huber-Klawitter

1. Definieren Sie die Begriffe Eigenvektor und Eigenwert — 2 P.

2. Formulieren Sie den Satz von der Existenz der Hauptachsentransformation für selbstadjungierte Endomorphismen von euklidischen Vektorräumen. — 3 P.

3. Definieren Sie den Begriff der projektiven Geraden im $\mathbb{P}^n_K$. — 2 P.

4. Definieren Sie den Begriff des Hauptraums. — 2 P.

5. Bestimmen Sie charakteristisches Polynom, Eigenwerte und Jordansche Normalform über dem Körper $K$:

   a) $\begin{pmatrix} -1 & \frac{2}{3} & 0 \\ -6 & 3 & 0 \\ -4 & \frac{4}{3} & 1 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{C}$,

   b) $\begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$ für $\alpha \in \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$,$K = \mathbb{C}$

   c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ für $K = \mathbb{F}_3$ — 9 P.

6. Sei $s : K^2 \times K^2 \to K$ gegeben durch $(x, y) \mapsto \overline{x}^t A y$ mit $A \in M_{2\times 2}(K)$. Handelt es sich um Skalarprodukte?

   a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$

   b) $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ i & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{C}$

   c) $A = \begin{pmatrix} 2 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & 1 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{R}$

   d) $A = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -4 \end{pmatrix}$, $K = \mathbb{C}$ — 6 P.

   **Weiter siehe Rückseite!**

7. Sei $K$ ein Körper ungleich $\mathbb{F}_2$. Seien

$$\begin{aligned} L_1 &= \left\{(0,0,z) \in K^3 | z \in K\right\} \\ L_2 &= \left\{(1,y,0) \in K^3 | y \in K\right\} \\ L_3 &= \left\{(x,1,1) \in K^3 | x \in K\right\} \end{aligned}$$

drei affine Geraden.

a) Zeigen Sie: Die Geraden sind paarweise windschief, d.h. nicht-parallel mit leerem Schnitt. 3 P.

b) Gibt es eine affine Quadrik im $K^3$, die $L_1$,$L_2$ und $L_3$ enthält? Begründen Sie Ihre Antwort. 3 P.

8. Sei $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ linear. Zeigen Sie, dass es eine $f$-invariante Gerade im $\mathbb{R}^3$ gibt. 4 P.

$\sum$ $\overline{\text{34P.}}$