1. Aufgabe

Es seien $q \in \mathbb{N}$, $q \geq 1$ und $\Phi : \mathbb{R}^q \to \mathbb{R}$ durch $\Phi\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_q \end{pmatrix}\right) := x_1 + \ldots x_q$ gegeben.

(a) Zeigen Sie: Φ ist $\mathbb{R}$-linear.

(b) Zeigen Sie: Φ ist surjektiv.

(c) Berechnen Sie $\dim_{\mathbb{R}}(\mathrm{Ker}(\Phi))$.

(d) Geben Sie eine Basis von $\mathrm{Ker}(\Phi)$ an (mit Beweis).

2. Aufgabe

Sei $\mathbb{A} \in \mathbb{Z}^{q \times q}$ (d.h. $\mathbb{A}$ ist eine $q \times q$-Matrix mit ganzen Zahlen als Einträgen).

(a) Zeigen Sie: $\det(\mathbb{A}) \in \mathbb{Z}$.

(b) Zeigen Sie: $\mathbb{A}^\# \in \mathbb{Z}^{q \times q}$ (hier bezeichnet $\mathbb{A}^\#$ die zu $\mathbb{A}$ gehörige Komplementärmatrix).

(c) Seien $\mathbb{A}, \mathbb{B} \in \mathbb{Z}^{q \times q}$ mit $\mathbb{A}\mathbb{B} = \mathbb{I}_q$. Welche Werte kann $\det(\mathbb{A})$ annehmen?

3. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen (über $\mathbb{R}$) diagonalisierbar sind:

(a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Aufgabe

Entscheiden Sie, ob die folgenden Matrizen positiv definit sind:

(a) $\mathbb{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 10 \end{pmatrix}$,

(b) $\mathbb{B} = \begin{pmatrix} 2 & 41 & 111 \\ 41 & 5 & 1111 \\ 111 & 1111 & -2 \end{pmatrix}$

5. Aufgabe

(a) Gegeben sei die Gerade $G := \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} + \left\{ t \cdot \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} : t \in \mathbb{R} \right\}$. Weiterhin sei

$$H := \left\{ \mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : -x_1 + x_2 + x_3 = 2 \wedge -x_1 + 2x_2 - x_3 = -8 \right\}.$$

Zeigen Sie: H ist eine Gerade im $\mathbb{R}^3$.
Berechnen Sie den affinen Verbindungsraum $\mathcal{H}(G, H)$.
Ist $\mathcal{H}(G, H)$ ein Punkt, eine Gerade, eine Ebene oder ganz $\mathbb{R}^3$?
Wie liegen G und H zueinander (mögliche Antworten: disjunkt, gleich, parallel, windschief)?

(b) Seien nun allgemein G und H irgendwelche Geraden im $\mathbb{R}^3$.
Welche Werte kann $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}(G, H))$ annehmen?
Wann gilt $\dim_{\mathbb{R}}(\mathcal{H}(G, H)) = 2$?

Alle Antworten sind vollständig zu begrünbden!