

# Klausur/Testat zur Linearen Algebra

6. Februar  
Wintersemester 2011/2012

Name, Vorname:

Matrikelnummer:

Prüfungsklausur ☒ Wiederholungsprüfung ☐ Testat ☐

| Aufgabe | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | Z | $\Sigma$ | Note |
|---------|---|---|---|---|---|---|----------|------|
| Punkte  |   |   |   |   |   |   |          |      |

Alle Beweis- bzw. Rechenschritte müssen gut zu erkennen und nachvollziehbar sein. Ergebnisse etwa aus der Vorlesung, den Übungsaufgaben oder der Literatur können bei korrektem Zitieren verwendet werden. Bitte bearbeiten Sie jede Aufgabe auf einem gesonderten Blatt und versehen Sie dieses jeweils mit Namen und Matrikelnummer.

## Aufgaben

### 1. (6 Punkte)

Bestimmen Sie die Lösungsmenge  $L \subseteq \mathbb{Q}^5$  des linearen Gleichungssystems

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & 2 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}$$

( $X_1, X_2, X_3, X_4, X_5$  Unbestimmte).

### 2. (6 Punkte)

Überprüfen Sie, in welchen der nachfolgend genannten Fälle die Matrix  $A$  invertierbar ist und berechnen Sie in diesen Fällen  $A^{-1}$ .

(i)  $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 2 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$

(ii)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2,2}$

(iii)  $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{4,4}$

3. (6 Punkte)

Vorgelegt sei ein aus  $m$  Gleichungen bestehendes lineares Gleichungssystem in  $n$  Unbestimmten ( $m, n \in \mathbb{N}^+$ ) mit Koeffizienten aus einem Körper  $K$  und Lösungsmenge  $L \subseteq K^n$ . Zeigen Sie, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

- (i) Das System ist homogen
- (ii)  $L \neq \emptyset$  und für alle  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in L$  gilt  $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in L$
- (iii) Es gibt  $\mathfrak{x}, \mathfrak{y} \in L$  mit  $\mathfrak{x} - \mathfrak{y} \in L$
- (iv)  $(0, \dots, 0) \in L$ .

*Hinweis:* Nehmen Sie an, das System sei in der Form  $A\mathfrak{x}^T = \mathfrak{b}^T$  mit  $A \in K^{m,n}$ ,  $\mathfrak{b} \in K^m$  und  $\mathfrak{x} := (X_1, \dots, X_n)$  vorgelegt. Es würde reichen, die folgenden (z. T. trivialen) Implikationen zu zeigen: (i)  $\Rightarrow$  (ii)  $\Rightarrow$  (iv)  $\Rightarrow$  (iii)  $\Rightarrow$  (i).

4. (9 Punkte)

Welche der folgenden Mengen sind Untervektorräume der angegebenen Vektorräume?

- (i)  $V_1 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 = x_2 = 2x_3\} \subset \mathbb{R}^3$ .
- (ii)  $V_2 = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1^2 = x_2^4 = 0\} \subset \mathbb{R}^2$ .
- (iii)  $V_3 = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 : x_1 \geq x_2\} \subset \mathbb{R}^3$ .

5. (9 Punkte)

- (i) Überprüfen Sie, ob die Vektoren  $(1, 2, 3), (3, 2, 1), (2, 2, 2) \in \mathbb{R}^3$  linear unabhängig oder abhängig sind.
- (ii) Überprüfen Sie, ob die Vektoren  $(1, \pi), (2, 3 \sin 1), (-\pi, 3) \in \mathbb{R}^2$  linear unabhängig oder abhängig sind.
- (iii) Für welche  $t \in \mathbb{R}$  sind  $(1, 3, 4), (3, t, 11), (-1, -4, 0)$  linear abhängig?
- (iv) Seien  $V$  ein  $\mathbb{R}$ -Vektorraum und  $v_1, v_2 \in V$  linear unabhängig. Zeige, dass dann auch  $v_1 - v_2$  und  $v_1 + v_2$  linear unabhängig sind.

Z1. (Zusatzaufgabe, 5 Punkte)

Seien  $m, n \in \mathbb{Z}$  mit  $\text{ggT}\{m, n\} = 1$ . Seien außerdem  $a, b \in \mathbb{Z}$  mit  $a \equiv b \pmod{n}$  und  $a \equiv b \pmod{m}$ . Zeige, dass dann auch gilt

$$a \equiv b \pmod{mn}.$$