

Klausur zur Vorlesung
"Lineare Algebra 1" - bei Prof. Dr. B. Fritzsche

1. Geben Sie (ohne Begründung) je ein Beispiel für eine Abbildung $\varphi : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ an, die nachfolgende Eigenschaften besitzt:
 - (a) φ ist bijektiv.
 - (b) φ ist injektiv und es gilt $\varphi(\mathbb{N}) \cap \mathbb{N} = \emptyset$.
 - (c) φ ist surjektiv und nicht injektiv. (3 Punkte)

2. Zeigen Sie, dass die Menge aller Permutationen von $\{1; 2; 3; 4\}$ bezüglich der Hintereinanderausführung eine nichtkommutative Gruppe der Ordnung 24 bildet. (6 Punkte)

3. Definieren Sie den Begriff eines Vektorraumes über einen Körper K , wobei Sie den Begriff einer Gruppe voraussetzen können. (5 Punkte)

4. Untersuchen Sie, für welche nichtnegativen reellen Zahlen α die Menge

$$\mathcal{M}_\alpha := \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : x_1 + x_2 = \alpha \right\}$$

ein Unterraum des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $\mathbb{R}^2$ ist (mit Begründung). (2 Punkte)

5. (a) Untersuchen Sie, welche der folgenden Vektorsysteme eine Basis des $\mathbb{C}$ -Vektorraumes $\mathbb{C}^3$ bilden (mit Begründung):

$$(i) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ i \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$(ii) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} i \\ 1 \\ i \end{pmatrix}.$$

$$(iii) \quad \begin{pmatrix} 1 \\ i \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}. \quad (3 \text{ Punkte})$$

- (b) Bestimmen Sie die Menge $\mathcal{T}$ aller $t \in \mathbb{R}$, für die das Vektorsystem

$$v_1 := \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ t \end{pmatrix}, v_2 := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, v_3 := \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}$ -Vektorraumes $\mathbb{R}^3$ bilden (mit Begründung). (2 Punkte)

6. Definieren Sie den Begriff, dass eine Familie von Vektoren aus einem Vektorraum V über einem Körper K linear unabhängig ist. (3 Punkte)

7. Seien V ein Vektorraum über einem Körper K sowie v_1 und v_2 Vektoren aus V . Geben Sie (ohne Begründung) eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass die affinen Vektorunterräume $\mathfrak{X}_1 := v_1 + U_1$ und $\mathfrak{X}_2 := v_2 + U_2$ übereinstimmen. (2 Punkte)

8. Seien U_1 und U_2 Unterräume eines Vektorraumes V über einem Körper K . Beweisen Sie, dass folgende Aussagen äquivalent sind.

$$(i) \quad U_1 \cap U_2 = \{0_V\}.$$

$$(ii) \quad \text{Für jeden } x \in U_1 + U_2 \text{ gibt es genau ein } u_1 \in U_1 \text{ und genau ein } u_2 \in U_2 \text{ mit } x = u_1 + u_2. \quad (3 \text{ Punkte})$$

9. Seien $p \in \mathbb{N}$ und A eine quadratische komplexe $p \times p$ -Matrix derart, dass eine Linksinverse $L \in \mathbb{C}^{p \times p}$ existiert. Weisen Sie nach, dass dann auch eine Rechtsinverse R aus $\mathbb{C}^{p \times p}$ existiert. (4 Punkte)

10. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ und $K \in \mathbb{C}^{p \times q}$. Begründen Sie die Äquivalenz folgender Aussagen:

- (i) $I_p - KK^*$ ist invertierbar.
- (ii) $I_q - K^*K$ ist invertierbar.
- (iii) $\begin{pmatrix} I_p & K \\ K^* & I_q \end{pmatrix}$ ist invertierbar.

(Hinweis: Berechnen Sie

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \\ K^* & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & I_q - K^*K \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & K \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix}$$

und

$$\begin{pmatrix} I_p & K \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p - KK^* & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix} \begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \\ K^* & I_q \end{pmatrix}.)$$

(5 Punkte)