

Klausur "Lineare Algebra 1"
am 31.03.2011 bei Prof. Dr. B. Fritzsche

Bezeichne $\mathbb{N}$ die Menge aller positiven ganzen Zahlen, $\mathbb{R}$ die Menge aller reellen Zahlen und $\mathbb{C}$ die Menge aller komplexen Zahlen. Für jede nichtleere Menge X und alle positiven ganzen Zahlen p und q bezeichne $X^{p \times q}$ die Menge aller $p \times q$ -Matrizen mit Einträgen aus X . Des Weiteren sei $X^p := X^{p \times 1}$ für jede nichtleere Menge X . Für jedes $p \in \mathbb{N}$ und jedes $q \in \mathbb{N}$ bezeichne $0_{p \times q}$ die zu $\mathbb{C}^{p \times q}$ gehörige Nullmatrix und für jedes $p \in \mathbb{N}$ sei I_p die zu $\mathbb{C}^{p \times p}$ gehörige Einheitsmatrix.

1. Seien X, Y und Z nichtleere Mengen sowie $\varphi : X \rightarrow Y$ und $\psi : Y \rightarrow Z$.

(a) Begründen Sie, dass gilt: Falls φ und ψ surjektiv sind, ist auch $\psi \circ \varphi$ surjektiv. (2 Punkte)

(b) Geben Sie ein Beispiel für X, Y, Z sowie φ und ψ dafür an, dass $\psi \circ \varphi$ surjektiv ist, aber φ nicht surjektiv ist (ohne Begründung). (2 Punkte)

2. Sei

$$\mathcal{D} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 & x \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{2 \times 2} : x \in \mathbb{R} \right\}.$$

Beweisen Sie, dass $\mathcal{D}$ bezüglich der Matrizenmultiplikation eine kommutative Gruppe bildet. (5 Punkte)

3. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und V ein $\mathcal{K}$ -Vektorraum.

(a) Definieren Sie den Begriff eines Unterraumes von V . (1 Punkt)

(b) Geben Sie eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass eine Teilmenge U von V ein Unterraum von V ist. (3 Punkte)

4. Untersuchen Sie, ob folgende Vektorsysteme v_1, v_2, v_3 ein Erzeugendensystem oder sogar eine Basis des $\mathcal{K}$ -Vektorraumes V bilden:

(a) $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^2$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

(b) $\mathcal{K} = \mathbb{C}$, $V = \mathbb{C}^3$; $v_1 = \begin{pmatrix} i \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}$.

(c) $\mathcal{K} = \mathbb{R}$, $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$; $v_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$, $v_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, $v_3 = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$.

Begründen Sie Ihre Antwort. (5 Punkte)

5. Seien $\mathcal{K}$ ein Körper und $m \in \mathbb{N}$ sowie V ein $\mathcal{K}$ -Vektorraum mit $\dim_{\mathcal{K}} V = m$. Geben Sie die Menge $\mathcal{M}$ aller der positive ganzen Zahlen n an, für die es ein linear unabhängiges System $v_1, v_2, \dots, v_n$ von n Vektoren aus V gibt. Begründen Sie Ihre Antwort. (3 Punkte)

6. Sei V der $\mathbb{R}$ -Vektorraum $\mathbb{R}^3$. Bezeichne $U := \text{span}_{\mathbb{R}} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 5 \\ 7 \\ 5 \end{pmatrix} \right\}$.

(a) Bestimmen Sie $\dim_{\mathbb{R}} U$. Begründen Sie Ihre Antwort. (2 Punkte)

(b) Weisen Sie nach, dass der Vektor $v := \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu U gehört. (1 Punkt)

(c) Geben Sie (ohne Begründung) eine Basis von U an, die den Vektor v enthält. (1 Punkt)

(d) Geben Sie einen Unterraum U_1 von V mit $V = U + U_1$ an und begründen Sie diesen Sachverhalt. Geben Sie (ohne Begründung) einen von U_1 verschiedenen Unterraum U_2 von V an, mit dem $V = U + U_2$ gilt. (3 Punkte)

7. Seien $A := \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B := \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

(a) Berechnen Sie ABB^* sowie $CC^T - 2A$. (2 Punkte)

(b) Untersuchen Sie, ob es eine Matrix $D \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$ mit $AD \neq DA$ gibt. Begründen Sie Ihre Antwort. (1 Punkt)

8. Seien $p, q \in \mathbb{N}$ sowie $A \in \mathbb{C}^{p \times q}$ und $b \in \mathbb{C}^p$.

(a) Geben Sie ohne Begründung eine notwendige und hinreichende Bedingung dafür an, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} A & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0_{q \times 1} \end{pmatrix}$$

lösbar ist. (1 Punkt)

(b) Begründen Sie, dass das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I_p & 0_{p \times q} \\ -A^* & I_q \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0_{q \times 1} \end{pmatrix}$$

eindeutig lösbar ist. (2 Punkte)

(c) Begründen Sie, dass im Fall, dass $I_p - AA^*$ invertierbar ist, das lineare Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} I_p & A \\ A^* & I_q \end{pmatrix} x = \begin{pmatrix} b \\ 0_{q \times 1} \end{pmatrix}$$

genau eine Lösung besitzt. (Hinweis: Berechnen Sie das Produkt BCB^* , wobei

$$B := \begin{pmatrix} I_p & A \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix} \text{ und } C := \begin{pmatrix} I_p - AA^* & 0_{p \times q} \\ 0_{q \times p} & I_q \end{pmatrix}$$