Testat zur Linearen Algebra I
Wintersemester 2008/09

Hinweise:
Die einzelnen Aufgaben sind auf getrennten Blättern abzugeben. Jedes abgegebene Blatt ist mit folgenden Informationen zu versehen (in großer und deutlich lesbarer Schrift):

- Name
- Matrikelnummer
- Nummer der Aufgabe, die auf diesem Blatt behandelt wird.

Alle Aussagen sind zu begründen und bei den Lösungen sind alle Zwischenschritte anzugeben.

Aufgabe 1

(a) Man bestimme die Lösungsmenge $L \subseteq \mathbb{Q}^4$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcrcr} 3X_1 & - & X_2 & + & & - & 2X_4 & = & -1 \\ -2X_1 & + & X_2 & - & X_3 & + & & = & 0 \\ X_1 & & & - & X_3 & + & X_4 & = & -1 \end{array}$$

6 Punkte

(b) Sei $\lambda \in \mathbb{R}$. Man bestimme in Abhängigkeit von λ die Lösungsmenge $L_\lambda \subseteq \mathbb{R}^3$ des folgenden linearen Gleichungssystems:

$$\begin{array}{rcrcrcr} 7X_1 & - & 2X_2 & - & 5X_3 & = & 0 \\ 2X_1 & - & X_2 & - & X_3 & = & \lambda \\ -X_1 & - & X_2 & + & 2X_3 & = & \lambda^2 \end{array}$$

7 Punkte

Aufgabe 2

Für $\lambda \in \mathbb{Q}$ sei $A_\lambda := \begin{pmatrix} 1 & 2 & \lambda \\ 2 & 3 & \lambda^2 \\ 3 & 4 & \lambda^3 \end{pmatrix} \in \mathbb{Q}^{3,3}$.

(a) Bestimmen Sie alle $\lambda \in \mathbb{Q}$, für die A_λ invertierbar ist. 5 Punkte

(b) Berechnen Sie die Inverse von A_2 (falls diese existiert). 4 Punkte

Aufgabe 3

Bestimmen Sie $\operatorname{rang}_{\mathbb{R}} A$ in den folgenden Fllen:

(a) $A = \begin{pmatrix} \sin x & \cos x & 1 \\ -\cos x & \sin x & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $(x \in \mathbb{R},\ 0 \leq x < 2\pi)$. 6 Punkte

(b) $A = B \cdot C$ mit $B := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 2 & 0 \\ -4 & -2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ und $C := \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

4 Punkte

Aufgabe 4

Sei H eine Halbgruppe. Ein Element $h \in H$ heisst idempotent, wenn $h^2 = h$. Mit $I(H)$ bezeichnen wir die Menge der idempotenten Elemente von H. Man zeige:

(a) Sind $g, h \in H$ idempotent und gilt $gh = hg$, so ist auch gh idempotent. 2 Punkte

(b) Ist H kommutativ und gilt $I(H) \neq \emptyset$, so ist $I(H)$ Unterhalbgruppe von H. 2 Punkte

(c) Ist H kommutatives Monoid, so ist $I(H)$ Untermonoid von H. 2 Punkte

(d) Ist H Monoid mit Kürzungsregel, so gilt $I(H) = \{e_H\}$, wenn e_H das neutrale Element von H ist. 2 Punkte

Aufgabe 5 (*Zusatzaufgabe*)

Sei R ein Ring mit Einselement und sei I Linksideal von R. Zeigen Sie:

Wenn für alle $a, b \in R$ gilt $ab - ba \in I$, so ist I zweiseitiges Ideal von R und R/I ist kommutativer Ring. *6 Punkte*

Gesamtpunkzahl: 40 Punkte + *6 Zusatzpunkte*